INTERVALOVÉ ODHADY

5. CVIČENÍ

1. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z Poissonova rozdělení s neznámým parametrem $\lambda > 0$.
   (a) Odhadněte neznámý parametr λ momentovou metodou. Jaké je asymptotické rozdělení tohoto odhadu?
   (b) Na základě odhadu z části (a) najděte klasický asymptotický intervalový odhad λ.
   (c) Podobně odvoďte, jak vypadá spolehlivostní množina B_n.
   (d) Zkonstruujte také interval spolehlivosti založený na transformaci stabilizující asymptotický rozptyl.
   (e) Napište oba jednostranné (klasické asymptotické) intervalové odhady pro λ.

2. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení na $[0, \theta]$, kde $\theta > 0$ je neznámý parametr.
   (a) Nalezněte momentový odhad θ a pomocí něj zkonstruujte (asymptotický) intervalový odhad θ, a to analogickým způsobem jako v (b)–(d) v předchozím příkladě.
   (b) Uvažujte $U_n = \max_{1 \le i \le n} X_i$ odhad parametru θ. Sestrojte přesný (nikoliv asymptotický) intervalový odhad θ založený na U_n/θ.

3. Uvažujte $X_1, \ldots, X_n$ náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení na intervalu $[-a, a]$, kde $a > 0$ je neznámý parametr.
   (a) Odhadněte parametr a metodou momentů.
   (b) Sestrojte intervalový odhad a.

4. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr s hustotou

$$f(x; b) = \frac{x}{b^2} \exp(-x^2/2b^2) \mathbb{I}\{x \ge 0\}$$

   kde $b > 0$ je neznámý parametr. Nalezněte odhad $\hat{b}_n$ parametru b momentovou metodou. Na základě něj zkonstruujte klasický asymptotický intervalový odhad b.

Opakování z přednášky

Konstrukce intervalových odhadů Chceme zkonstruovat intervalový odhad pro parametr θ_X, přičemž máme odhad $\widehat{\theta}_n$ tohoto parametru, pro který platí

$$\sqrt{n}\big(\widehat{\theta}_n - \theta_X\big) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}\big(0, \sigma^2(\theta_X)\big),$$

kde $\sigma^2(\cdot)$ je funkce spojitá ve skutečné hodnotě parametru θ_X.

– **Klasický asymptotický interval spolehlivosti** vychází z asymptotického rozdělení $\widehat{\theta}_n$ a z Cramérovy-Sluckého věty. Jelikož $\frac{\sqrt{n}\,(\widehat{\theta}_n - \theta_X)}{\sigma(\widehat{\theta}_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}\big(0,1\big)$, platí

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\Big(- u_{1-\alpha/2} < \frac{\sqrt{n}\,(\widehat{\theta}_n - \theta_X)}{\sigma(\widehat{\theta}_n)} < u_{1-\alpha/2}\Big) = 1-\alpha,$$

a tedy

$$\Big(\widehat{\theta}_n - \frac{u_{1-\alpha/2}\,\sigma(\widehat{\theta}_n)}{\sqrt{n}}, \widehat{\theta}_n + \frac{u_{1-\alpha/2}\,\sigma(\widehat{\theta}_n)}{\sqrt{n}}\Big) \tag{1}$$

je intervalový odhad parametru θ_X o asymptotické spolehlivosti $1-\alpha$.

– Jiný možný postup využívá přímo, že pro množinu

$$B_n = \Big\{\theta : \Big|\frac{\sqrt{n}\,(\widehat{\theta}_n - \theta)}{\sigma(\theta)}\Big| < u_{1-\alpha/2}\Big\} \tag{2}$$

platí, že $\mathsf{P}\big(B_n \ni \theta_X\big) \to 1-\alpha$. Zpravidla je B_n interval, ale obecně může být zadán jen implicitně.

– **Interval spolehlivosti založený na transformaci stabilizující asymptotický rozptyl**. Nechť g je taková, že $[g'(\theta)]^2\,\sigma^2(\theta) = 1$, pak z Δ-metody dostáváme, že $\sqrt{n}\,\big(g(\widehat{\theta}_n) - g(\theta_X)\big) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}\big(0,1\big)$ a tedy

$$\Big(g(\widehat{\theta}_n) - \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}, g(\widehat{\theta}_n) + \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\Big)$$

je intervalový odhad pro $g(\theta_X)$. Z něj pak invertováním obou mezí získáme intervalový odhad parametru θ_X o asymptotické spolehlivosti $1-\alpha$.