

NEPARAMETRICKÉ JEDNOVÝBĚROVÉ TESTY A PÁROVÉ TESTY

10. CVIČENÍ

ÚVODNÍ NASTAVENÍ.

- Otevřete si program R Studio, změňte si pracovní adresář a vyčistěte pracoviště.
- Načtěte si data Hosi.txt a ujistěte se, že se Vám data dobře načetla.
- Do proměnné alpha is uložte testovací hladinu 0,05.
- Opět se budeme zabývat porodní hmotností a opět budeme nejprve pracovat pouze s (náhodným) podvýběrem o rozsahu $n = 100$ pozorování.

```
set.seed(2022)
hmot100 = sample(Hosi$por.hmot,100)
n=length(hmot100)
hmot=Hosi$por.hmot
```

JEDNOVÝBĚROVÝ ZNAMÉNKOVÝ TEST

1. Minule jsme se zabývali otázkou, zda je střední porodní hmotnost chlapců rovna 3,3 kg. Nyní se budeme snažit zodpovědět tutéž otázku pomocí **znaménkového testu**.

- Připomeňte si předpoklady tohoto testu (tj. uvažovaný model pro naše data).
- Formulujte nulovou a alternativní hypotézu. Co je nyní testovaný parametr?
- Testová statistika má tvar

$$Y_n = \sum_{i=1}^n I[X_i > m_0],$$

kde m_0 je námi testovaná hodnota 3 300 g. Jaké má přesné a jaké asymptotické rozdělení?

- Asymptotický test provedeme nejprve manuálně podle návodu z přednášky. Nejprve ale vyřadíme pozorování, která jsou přesně rovna 3 300, a spočítáme si hodnotu Y_n

```
sum(hmot100 == 3300)
```

```
(nLess <- sum(hmot100 < 3300))
```

```
(nMore <- sum(hmot100 > 3300))
```

```
(N <- nLess + nMore)
```

Náš analýza tedy bude založena na N pozorováních, v proměnné $nMore$ je hodnota testové statistiky Y_n . Pro provedení asymptotického testu si ji příslušně znormujeme. Následně ji porovnáme s kvantilem normálního rozdělení, nebo spočítáme přímo p-hodnotu:

```
(Z = (nMore - N/2) / sqrt(N*1/4))
```

```
qnorm(1-alpha/2)
```

```
# p-hodnota (dve moznosti, jak spocitat):
```

```
2*(1-pnorm(abs(Z)))
```

```
2*pnorm(-abs(Z))
```

K jakému závěru jsme došli?

2. Celý výpočet můžeme provést rychleji pomocí funkce `prop.test`, která slouží k testování pravděpodobnosti (proporce) v alternativním rozdělení. (S touto funkcí se proto ještě setkáme na jednom z dalších cvičení.)

```
prop.test(x=nMore, n=N, p=1/2, correct=FALSE)
# nebo kdybychom nMore a N nemeli ulozene:
prop.test(x=sum(hmot100>3300), n=sum(hmot100!=3300), p=1/2, correct=F)
```

- Označíme-li $p_X = P(X_i > m_0)$, pak výše uvedený test provádí test hypotézy $H_0 : p_X = 1/2$ proti $H_1 : p_X \neq 1/2$.
- Všimněte si, že jsme dostali opravdu stejnou p-hodnotu. Testová statistika je ale jiná. Najdete souvislost s naším výsledkem uloženým v `Z`? Jaké asymptotické rozdělení má tedy testová statistika funkce `prop.test`?
- Nastavení `correct=FALSE` zakazuje tzv. korekci pro spojitost, která je jinak defaultně zapnutá. Více v Doplňující informace (i).
- Znaménkový test lze provést také jako přesný test založený na binomickém rozdělení, viz Doplňující informace (iv) (funkce `binom.test`).

3. Vyzkoušejte, co by se stalo, kdybychom celý výpočet prováděli s `nLess` namísto `nMore`.
4. Rozmyslete si jednostrannou variantu testu pro případ, že bychom chtěli testovat, zda je medián m_X porodní hmotnosti menší než 3,3 kg.
- (a) Jak ekvivalentně vyjádříme hypotézu $m_X \geq m_0$ pomocí p_X ? Jakou alternativu tedy musíme nastavit do funkce `prop.test`?
- (b) Je i nyní jedno, jestli zadáme `nLess` nebo `nMore`?
5. Jelikož znaménkový test převádí naše naměřená data na binární, podíváme se na to, jak vizualizovat kategoriální veličinu:

```
Y <- hmot100[hmot100 != 3300]; # vybereme hmotnosti ruzne od 3300
Y <- factor(Y > 3300) # udelame z nich 0-1 veliciny a chapeme je jako "faktor"
levels(Y) <- c("< 3300", "> 3300") # pojmenujeme kategorie
summary(Y) # kontrola s nLess a nMore

plot(Y, col=2:3);
# totez jako:
barplot(table(Y), col=2:3)
# nebo
barplot(c(nLess, nMore), col=2:3, legend=c("< 3300", "> 3300"))

# proporcionalne:
pie(table(Y), col=2:3)
# nebo
barplot(prop.table(as.matrix(c(nLess, nMore))), col=2:3, legend=c("< 3300", "> 3300"))
```

JEDNOVÝBĚROVÝ WILCOXONŮV TEST

6. Stále se budeme zabývat stejnou otázkou jako v bodě 1., ale nyní k testu použijeme **Wilcoxonův test**.

- (a) Jaký model předpokládáme pro naše data nyní? Jak budeme teď formulovat testované hypotézy a co je testovaný parametr?
- Porovnejte předpoklady Wilcoxonova testu s předpoklady přesného t -testu a s předpoklady asymptotického t -testu.
 - Porovnejte, kdy jsou testované hypotézy ekvivalentní a kdy naopak nejsou.
 - Uveďte příklad situace, pro kterou můžeme použít Wilcoxonův test a t -test by nebyl vhodný, a situace opačné.
- (b) Připomeňte si testovou statistiku tohoto testu: Je-li $Z_i = X_i - \delta_0$, kde δ_0 je pro nás 3300, pak

$$W_n = \sum_{i \in I} R_i,$$

kde R_i jsou pořadí $|Z_i|$ a I je množina indexů i takových, že $Z_i > 0$. Test můžeme provést jak přesný (pro rozumně malé n ; viz Doplňující informace (ii)) nebo asymptotický založený na tom, že statistika

$$\frac{W_n - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}} \quad (1)$$

má asymptoticky $N(0, 1)$ rozdělení.

- Pro provedení testu musíme opět nejprve odstranit pozorování rovné přímo δ_0 .
 - V případě výskytu shod je potřeba jmenovatel zmenšit o tzv. korekci rozptylu (viz [skripta](#) str. 105). V R se toto děje defaultně.
 - Navíc se v R defaultně uvažuje ještě korekce pro spojitost, kdy se čítec snižuje o $1/2$ podobně jako u znaménkového testu. Toto lze vypnout pomocí `correct=FALSE`.
- (c) Provedeme test
- ```
wilcox.test(hmot100, mu = 3300, correct = FALSE)
```
- Jaký je náš závěr?

7. Ověříme, že uvedená testová statistika je skutečně  $W_n$  uvedené výše

```
x <- hmot100 - 3300
x <- x[x != 0] ### nebudeme pouzivat porodni hmotnosti 3300
(R <- rank(abs(x)))
(Wn <- sum(R[x > 0]))
```

Výpočet  $p$ -hodnoty v případě shod vychází z asymptotické normality statistiky (1), kterou musíme upravit pomocí korekci rozptylu (tj. jmenovatele). Pro zájemce viz Doplňující informace (iii).

8. Porovnáme sílu  $t$ -testu, znaménkového testu a Wilcoxonova testu pro normální rozdělení pomocí simulací. Budeme tedy generovat náhodný výběr o rozsahu  $n=100$  z  $N(0.2, 1)$  a budeme testovat  $H_0 : \mu = 0$  proti  $H_1 : \mu \neq 0$ . Test provedeme pomocí všech tří testů a uložíme si příslušné  $p$ -hodnoty. Celý postup zopakujeme `nopak=1000` krát a odhad síly spočteme jako relativní četnost případů, kdy se nám podařilo  $H_0$  zamítnout.

```

opak=1000
n=100

p.t=rep(NA,opak)
p.z=rep(NA,opak)
p.w=rep(NA,opak)
for(i in 1:opak){
 x=rnorm(n,mean=0.2,sd=1)
 p.t[i]=t.test(x,mu=0)$p.val
 p.w[i]=wilcox.test(x,mu=0)$p.val
 p.z[i]=prop.test(sum(x>0),n,p=1/2)$p.val
}

mean(p.t<=0.05)
mean(p.w<=0.05)
mean(p.z<=0.05)

```

Zkuste změnit velikost rozsahu  $n$  nebo alternativu, za které simulujeme, a sledujte, jak se mění síla. Lze udělat nějaký obecný závěr o síle zkoumaných tří testů?

9. Společně se podíváme na porovnání síly uvedených tří testů v závislosti na velikosti parametru polohy pro různá rozdělení, viz zdrojový kód `cviceni10_obrazky.R`. Budeme testovat nulovost parametru polohy a sledovat sílu jednotlivých testů pro  $n = 100$  a náhodný výběr  $X_1, \dots, X_n$  z rozdělení:

- (a)  $N(m_j, 1)$ ,  
 (b) Cauchyho rozdělení s hustotou

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + (x - m_j)^2)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

- (c)  $X_i = Y_i - 1$ , kde  $Y_1, \dots, Y_n$  je náhodný výběr z  $\text{Exp}\left(\frac{1}{1+m_j}\right)$ ,

kde  $0 \leq m_j \leq 0.5$  pro  $j = 1, \dots, 20$ . Rozmyslete si, jak pro daná rozdělení vypadají  $EX$ ,  $m_X$  a střed symetrie  $\delta_X$  a zda jsou splněny předpoklady všech použitých testů.

#### PÁROVÝ PROBLÉM

10. Některé zdroje uvádějí, že chlapci v průběhu prvního roku života přiberou v průměru více než 6,5 kg. Máme za úkol ověřit, zda jsou naše data v souladu s tímto tvrzením. Použijeme k tomu data z celého našeho datového souboru.

- (a) Jsou porodní hmotnost a hmotnost v jednom roce nezávislé veličiny? Uveďte další možné příklady párového problému.  
 (b) Spočítáme si váhový přírůstek během prvního roku:  

```

hmot <- Hosi$por.hmot
hmot1 <- Hosi$hmotnost
rozdil = hmot1-hmot

```

 (c) Nejprve použijeme  $t$ -test.

- Jaký model předpokládáme (uvažte pomoci vhodných grafů) a jak zní nulová a alternativní hypotéza?
- Proved'te test a interpretujte výsledek.
 

```
postup, který již známe:
t.test(rozdil, alternative="greater", mu=6500)
nebo pomoci volby paired:
t.test(hmot1, hmot, alternative="greater", mu=6500, paired=T)
pozor na poradi!
```
- (d) Nyní na stejný problém použijeme znaménkový test.
  - Co nyní předpokládáme? A co testujeme?
  - Provedeme test
 

```
n.more=sum(rozdil>6500)
n=sum(rozdil!=6500)
prop.test(n.more, n, alternative = "greater")
```

 Jaký je náš závěr?
- (e) Nakonec si na tomto problému vyzkoušíme ještě i Wilcoxonův test.
  - Jaký je zde předpokládaný model a příslušné hypotézy?
  - Proved'te test.

### SAMOSTATNÁ PRÁCE

11. Zajímá nás věkový rozdíl mezi rodiči chlapců. Konkrétně bychom rádi věděli, zda jsou otcové v průměru o více než 2 roky starší než matky.
  - (a) Nejprve si prohlédněte vhodné popisné statistiky a grafy, které ilustrují rozdělení věkového rozdílu.
  - (b) Zvolte test, který Vám přijde pro tato data nejvhodnější a proved'te jej. Uvědomte si, jaký uvažujete model, jaké testujete hypotézy a jak budeme interpretovat závěr.
12. V rámci tohoto cvičení jsme pro test hypotézy, zda je průměrná porodní hmotnost chlapců rovna 3,3 kg, použili několik rozličných testů, které v praxi mohou vést k různým p-hodnotám a různým závěrům. Kterému výsledku tedy máme „věřit“?
13. Pomocí znaménkového testu proved'te test hypotézy, zda je průměrná porodní hmotnost nižší než 3,5 kg. Zformulujte řádně nulovou a alternativní hypotézu a proved'te test. Totéž proved'te i pro jednostranný Wilcoxonův test.

### DOPLŇUJÍCÍ INFORMACE

- (i) Vyzkoušejte si znaménkový test se zapnutou korekcí pro spojitost. Ověřte, že v tomto případě se počítá testová statistika

$$Z^C = \frac{Y_n - \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(Y_n - \frac{n}{2})}{\sqrt{\frac{n}{4}}}$$

(resp. její druhá mocnina). Použijte postup analogický tomu v bodě 2.

Korekce pro spojitost zde vychází z toho, že  $Y_n$  má diskrétní rozdělení a  $P(Y_n \leq y) = P(Y_n < y + 1)$ . Tudíž při přechodu k asymptotické aproximaci spojitým normovaným normálním rozdělením s distribuční funkcí  $\Phi$  lze  $P(Y_n \leq y)$  aproximovat pomocí  $\Phi(y + \varepsilon)$  pro všechna  $\varepsilon \in [0, 1]$ . Jako určitý kompromis tedy vezmeme  $\Phi(y + 1/2)$ .

- (ii) Pro Wilcoxonův test můžeme použít i přesný test, založený na přesném rozdělení statistiky  $W_n$  za nulové hypotézy. Je však nutné, aby v datech nebyly shody a žádné pozorování nebylo rovno přesně testované hodnotě. Pro vyšší  $n$  může být ale výpočet časově náročný. Vyzkoušejte si to na simulovaných datech z rovnoměrného rozdělení:

```
x=runif(100,0,1)
wilcox.test(x,mu=1/2,exact=TRUE)
```

Postupně zvyšujte počet použitých dat ze 100 na 200, 500, 1000, 2000. Pro jaký rozsah dat je ještě možné použít přesný test?

- (iii) Manuální výpočet p-hodnoty Wilcoxonova testu: Vzorec pro korekci rozptylu z důvodu výskytu shod viz [skripta](#) str. 105 (pasáž před začátkem části 5.5).

```
EWn <- N*(N+1)/4
totez jako 1/2*sum(1:N)
varWn_NoTies <- N * (N + 1) * (2 * N + 1) / 24

vypocet korekce:
(tx <- table(R)) # Pocet jednotlivych hodnot
varCorrectWithTies <- sum(tx^3 - tx) / 48 # Korekce v pripade shod
varWn <- varWn_NoTies - varCorrectWithTies

(U <- (Wn - EWn) / sqrt(varWn))
(U.corr <- (Wn - EWn - 0.5) / sqrt(varWn))

P-hodnoty
(P <- 2*pnorm(-abs(U)))
(P.corr <- 2*pnorm(-abs(U.corr)))
```

První p-hodnota odpovídá testu bez korekce pro spojitost, druhá odpovídá korekci pro spojitost. Můžeme je srovnat s p-hodnotami:

```
wilcox.test(hmot100, mu = 3300, correct = FALSE)$p.val
wilcox.test(hmot100, mu = 3300)$p.val
```

Výsledné p-hodnoty zkuste sami porovnat s p-hodnotou, kterou bychom dostali bez korekce jmenovatele.

- (iv) Znaménkový test má kromě asymptotické verze (kterou jsme dělali výše) i přesnou variantu založenou na binomickém rozdělení. V R můžeme použít funkce `binom.test`, parametry této funkce jsou pak stejné jako u `prop.test`. Proveďte pro porovnání test hypotézy, zda je průměrná porodní hmotnost nižší než 3,5 kg, i pomocí přesného testu. Vyzkoušejte použití našich 100 vybraných hodnot i všech dostupných dat.