
Jiří Havránek

Fisherův přesný test a Barnardův test

23. listopadu 2021

- Studie o účinnosti vakcíny proti chřipce.

Infekce	Léčba		Celkem
	Vakcína	Placebo	
Ano	7 (47%)	12 (80%)	19
Ne	8 (53%)	3 (20%)	11
Celkem	15	15	30

Tabulka: Výsledky studie účinnosti vakcíny proti chřipce. Patnácti subjektům byla aplikována vakcína a zbylým patnácti bylo podáno placebo.

- Můžeme na základě těchto výsledků usoudit něco o účinnosti vakcíny?

Multinomický model

- Tabulkou můžeme chápat jako výsledek dvouvýběrového třídění subjektů.
 - Mějme náhodný výběr $\binom{X_1}{Z_1}, \dots, \binom{X_N}{Z_N}$ z $F_{\binom{X}{Z}}$.
 - Označme $n_{11} = \sum_{i=1}^N \mathbb{1}[X_i = \text{Ano}, Z_i = \text{Vakcína}]$ a $p_{11} = P(X = \text{Ano}, Z = \text{Vakcína})$
- $(n_{11}, \dots, n_{22}) \sim \text{Mult}_4(N, (p_{11}, \dots, p_{22}))$.
- Vakcína účinná ⇒ závislost X a Z
→ $H_0 : X$ a Z nezávislé.
 - Test pomocí $\chi^2 = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \frac{(n_{jk} - \frac{n_{j+}n_{+k}}{N})^2}{\frac{n_{j+}n_{+k}}{N}}$ H_0 , as. χ^2_1

Binomický model

- Ve studii dány velikosti jednotlivých skupin → správné uvažovat multinomický model?
 - lepší uvážit dva nezávislé binomické výběry

		Léčba		
Infekce	Vakcína	Placebo	Celkem	
Ano	X_e	X_c	$X_e + X_c$	
Ne	$15 - X_e$	$15 - X_c$	$30 - X_e - X_c$	
Celkem	15	15	30	

- $X_e \sim Bi(15, p_e)$, $X_c \sim Bi(15, p_c)$.
- Vakcína účinná $\Rightarrow p_e < p_c$
 - $H_0 : p_e = p_c$.
- Test pomocí $T_d = \frac{\hat{d}}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})(\frac{1}{15} + \frac{1}{15})}} \stackrel{H_0, as.}{\sim} N(0, 1)$,
kde $\hat{d} = \frac{X_e}{15} - \frac{X_c}{15}$, $\bar{p} = \frac{X_e + X_c}{30}$
- Platí, že $T_d^2 = \chi^2$, ale oba testy **POUZE ASYMPTOTICKÉ**.

Přesné testy - úvod

- Uvažujme předchozí binomický model.
 - Začneme s hypotézou $H_0 : p_e = p_c = p$, kde p předem zvoleno.
 - Označme X_0 námi pozorovanou tabulkou a označme X obecně realizovatelnou tabulkou:

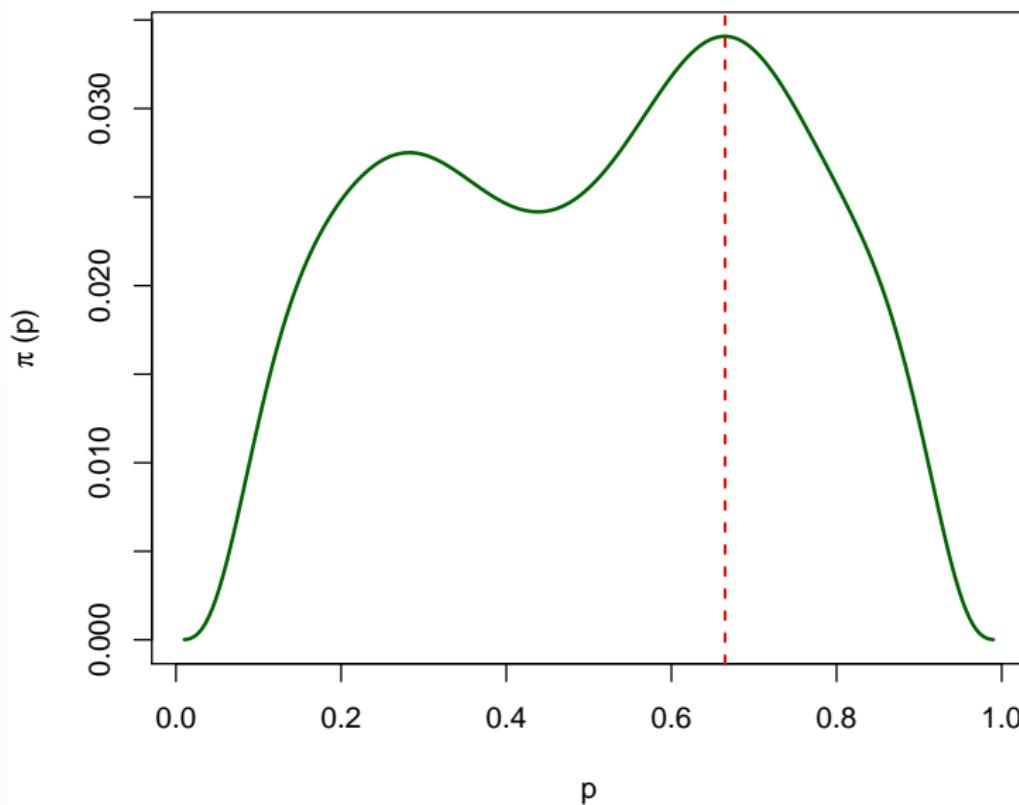
		Léčba		
Infekce	Vakcína	Placebo	Celkem	
Ano	x_e	x_c	$x_e + x_c$	
Ne	$15 - x_e$	$15 - x_c$	$30 - x_e - x_c$	
Celkem	15	15	30	

- za H_0 platí, že $P(X | p) = \binom{15}{x_e} \binom{15}{x_c} p^{x_e+x_c} (1-p)^{30-x_e-x_c}$.
- Pokud budeme mít k dispozici statistiku T , která odráží rozpor s $H_0 \Rightarrow$ p-hodnotu můžeme počítat jako $\sum_{T(X) \geq T(X_0)} P(X | p)$.
 - Za T můžeme vzít například T_d .
- Jak se s rušivým parametrem p vypořádat?

- *Lady testing tea experiment* (1935).
 - Omezme se pouze na tabulky, pro které je $x_e + x_c = 19$.
 - $P(X | X_e + X_c = 19) = \frac{\binom{15}{x_e} \binom{15}{x_c}}{\binom{30}{x_e+x_c}}$.
- Jednostranná p-hodnota: $\pi_F = \sum_{T(X) \geq T(X_0)} P(X | X_e + X_c = 19)$.
- Získáváme přesný test pro $H_0 : p_e = p_c$.
 - **ALE** omezujeme se i na pevné součty řádků.
 - Problém s přesností?
 - NE
 - Problém se sílou?
 - ANO
 - Výpočetně náročné.

- Nechceme dále podmiňovat na součtu řádků.
- Připomeňme, že problémem s výpočtem p-hodnoty jako $\pi(p) = \sum_{T(X) \geq T(X_0)} P(X | p)$, je rušivý parametr p .
 - uvažme následující p-hodnotu: $\pi_B = \sup\{\pi(p) : p \in (0, 1)\}$.
- Opět dostáváme přesný test pro $H_0 : p_e = p_c$.
- Oproti Fisherově testu sice nepodmiňujeme, nicméně maximalizujeme přes p .
 - Který test je lepší?

Přesná p-hodnota v závislosti na rušivém parametru



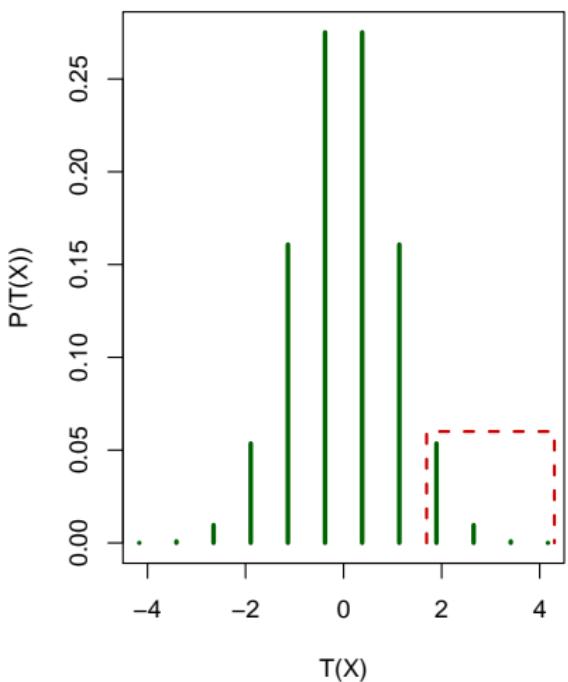
Výsledky příkladu

Infekce	Léčba		Celkem
	Vakcína	Placebo	
Ano	7 (47%)	12 (80%)	19
Ne	8 (53%)	3 (20%)	11
Celkem	15	15	30

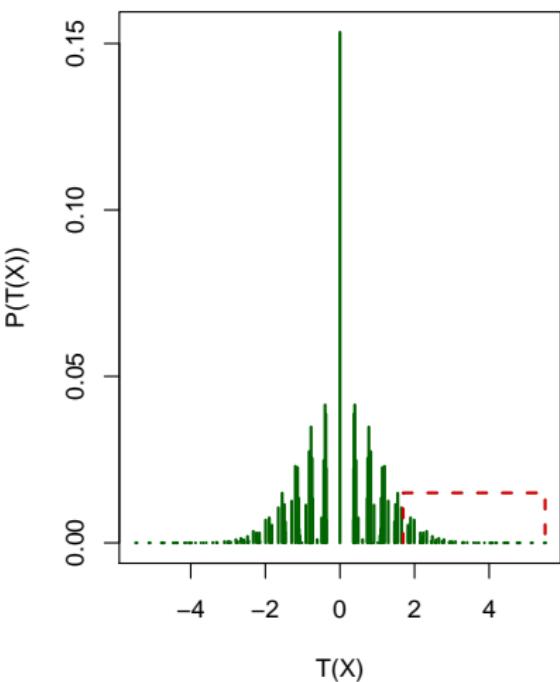
- Testovali jsme $H_0 : p_e = p_c$ proti alternativě $H_1 : p_e < p_c$.
 - $T_d = 1,8943$
 - $\pi_W = 0,0291$
 - $\pi_F = 0,0641$
 - $\pi_B = 0,0341$
- Velký rozdíl mezi π_F a π_B .

Rozdělení $T(X)$ při Fisherově a Barnardově testu

Fisherův test

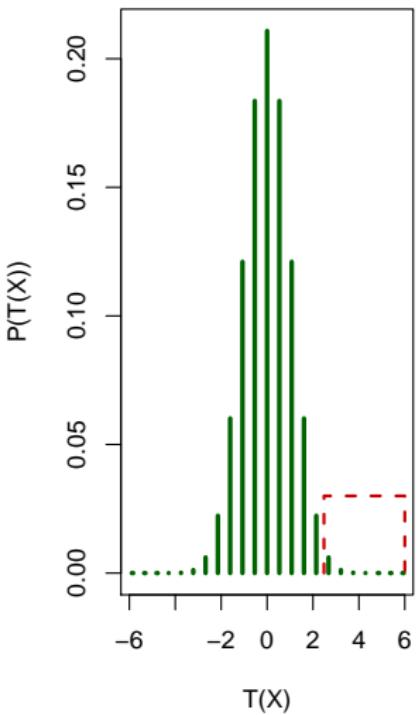


Barnardův test

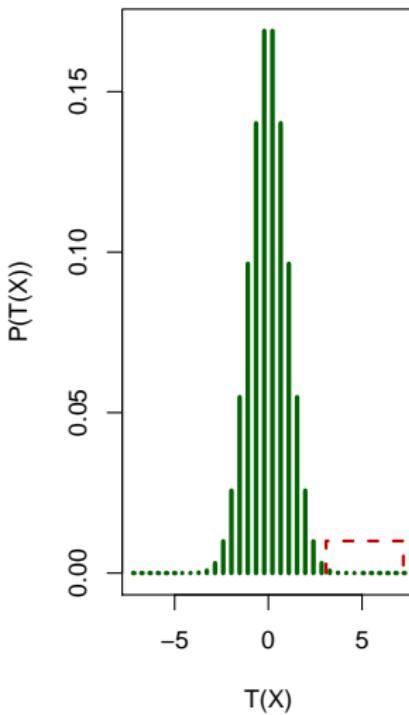


Rozdělení $T(X)$ při Fisherově testu - větší N

$N = 60$



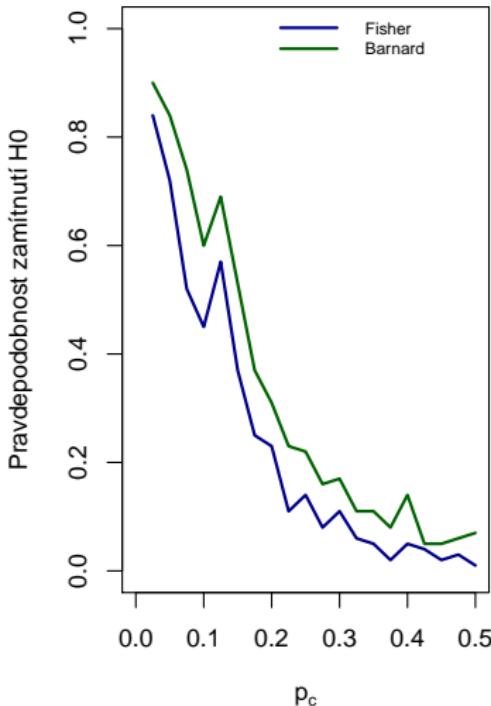
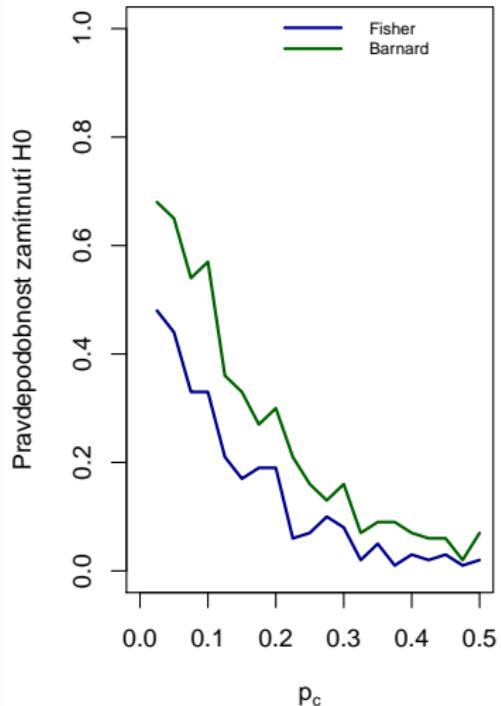
$N = 90$



Simulace síly testů 1

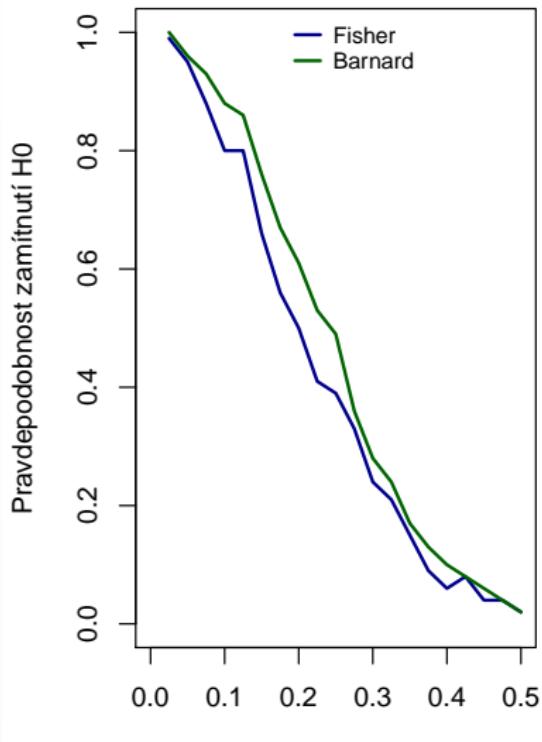
$$N = 20, p_e = \frac{1}{2}$$

$$N = 30, p_e = \frac{1}{2}$$



Simulace síly testů 2

$$N = 50, p_e = \frac{1}{2}$$



- Fisherův i Barnardův test je přesný.
- Síla Fisherova testu je pro malé n menší.
 - Ale s rostoucím n se rozdíl v síle zmenšuje.
- Oba dva testy jsou početně náročné, Barnardův znatelně více.
- Nicméně pro velké výběry máme k dispozici χ^2 -test.

Děkuji za pozornost!