McNemarův test, Stuartův test, test symetrie

Michaela Cichrová

5. prosince 2021

McNemarův test

Motivační příklad

	Bolest zad po léčbě		
Bolest zad před léčbou	ANO	NE	Celkem
ANO	24	28	52
NE	12	36	48
Celkem	36	64	100

Tabulka: Kontingenční tabulka obsahující napozorované četnosti.

- Chceme testovat, zda má léčba účinek
- Myšlenka: někteří lidé se přesunou mezi ANO a NE z různých důvodů. Léčba nemá účinek, pokud počet změn ANO-NE, NE-ANO je "stejný"

McNemarův test

- Na souboru n náhodně vybraných objektů se sleduje přítomnost či nepřítomnost nějakého znaku před zákrokem a po zákroku
- Nechť $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ je náhodný vektor, kde $X \in \{1, 0\}$, $Y \in \{1, 0\}$
- Nechť $\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix}$ je náh. výběr z rozdělení daného vektorem $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

	Po zákroku		
Před zákrokem	1	0	Celkem
1	n_{11}	n_{12}	n_{1+}
0	n_{21}	n_{22}	n_{2+}
Celkem	n_{+1}	n_{+2}	n

Tabulka: Kontingenční tabulka.

McNemarův test

	Po zákroku		
Před zákrokem	1	0	Celkem
1	p_{11}	p_{12}	p_{1+}
0	p_{21}	p_{22}	p_{2+}
Celkem	p_{+1}	p_{+2}	1

Tabulka: Tabulka pravděpodobností.

- Změnil zákrok pravděpodobnost výskytu znaku?
- Testujeme: $H_0 : p_{1+} = p_{+1}$ proti $H_1 : p_{1+} \neq p_{+1}$
- Alternativně $H_0' : p_{12} = p_{21}$

McNemarův test

- Testová statistika: $\chi^2 = \frac{(n_{12}-n_{21})^2}{n_{12}+n_{21}}$
- Za platnosti H_0 platí $\chi^2 \overset{as.}{\sim} \chi^2_1$
- H_0 zamítáme pro $\chi^2 \geq \chi^2_1(1-\alpha)$
- Lze použít pro $n_{12} + n_{21} \geq 8$
- Při menších četnosetch test parametru binomického rozdělení
  - Za H_0 je podmíněné rozdělení n_{12} při daném $n_{12} + n_{21}$ $Bi(n_{12} + n_{21}, \frac{1}{2})$
- Motivační příklad
  - $\chi^2 = 6{,}4$
  - $p = 0{,}01$

Test symetrie

Test symetrie

- Nechť $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ je náhodný vektor, kde $X \in \{1, \ldots, K\}$, $Y \in \{1, \ldots, K\}$, $\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix}$ je náh. v. z rozdělení daného $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$
- Testujeme: $H_0 : p_{ij} = p_{ji}$ pro všechny dvojice (i, j) proti $H_1 : \exists i, j : p_{ij} \neq p_{ji}$
- Testovou statistikou je

$$\chi^2 = \sum_{i<j}\sum \frac{(n_{ij} - n_{ji})^2}{n_{ij} + n_{ji}}$$

- Za platnosti H_0 platí $\chi^2 \overset{as.}{\sim} \chi^2_{K(K-1)/2}$
- H_0 zamítáme, pokud $\chi^2 \geq \chi^2_{K(K-1)/2}(1 - \alpha)$

Příklad

	Barva očí otce				
Barva očí syna	1	2	3	4	Celkem
1	194	70	41	30	335
2	83	124	41	36	284
3	25	34	55	23	137
4	56	36	43	109	244
Celkem	358	264	180	198	1000

Tabulka: Kontingenční tabulka obsahující napozorované četnosti.

- $\chi^2 = 19{,}56$
- $p = 0{,}003$

Stuartův test

Stuartův test

- Test homogenity marginálních pravděpodobností
- Nechť $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ je náhodný vektor, kde $X \in \{1, \ldots, K\}$, $Y \in \{1, \ldots, K\}$
- Nechť $\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix}$ je náh. výběr z rozdělení daného vektorem $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$
- Označme pro $i = 1, \ldots, K$:

$$p_{i+} = \sum_{j=1}^{K} p_{ij}, \; p_{+i} = \sum_{j=1}^{K} p_{ji}, \; n_{i+} = \sum_{j=1}^{K} n_{ij}, \; n_{+i} = \sum_{j=1}^{K} n_{ji}$$

- Testujeme: $H_0 : \; p_{1+} = p_{+1}, \ldots, p_{K+} = p_{+K}$ proti $H_1 : \; \exists i : p_{i+} \neq p_{+i}$

Stuartův test

- Definujme $d_i = n_{i+} - n_{+i}$, $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_{K-1})$
- Dále definujeme matici $\mathbf{V} = (V_{ij})_{(K-1)(K-1)}$:
  $V_{ii} = n_{i+} + n_{+i} - 2n_{ii}$, $V_{ij} = -(n_{ij} + n_{ji})$

Stuartova věta (Stuart, 1955)

Za platnosti H_0 má veličina $Q = \mathbf{d}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{d}$ asymptoticky rozdělení χ^2_{K-1}.

- H_0 zamítáme pro $\chi^2 \geq \chi^2_{K-1}(1-\alpha)$

Příklad

	Barva očí otce				
Barva očí syna	1	2	3	4	Celkem
1	194	70	41	30	335
2	83	124	41	36	284
3	25	34	55	23	137
4	56	36	43	109	244
Celkem	358	264	180	198	1000

Tabulka: Kontingenční tabulka obsahující napozorované četnosti.

- $\chi^2 = 15{,}77$
- $p = 0{,}001$

Děkuji za pozornost!