Sekvenční testy, základní pojmy a vlastnosti

Aibat Kossumov

Univerzita Karlova
Matematicko-Fyzikální fakulta

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

1 března 2023

Klasické testování hypotéz

Nechť $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr (kde $n \in \mathbb{N}$).
X_i má hustotu f vzhledem k nějaké $\sigma-$konečné míře μ.

$$H_0: \; f = f_0 \text{ proti } H_1: \; f = f_1$$

kde f_0 a f_1 jsou dané hustoty.

- $\mathbb{P}$(zam. $H_0 | H_0$ platí) $= \alpha$. (prst chyby 1 druhu)
- $\mathbb{P}$(nezam. $H_0 | H_1$ platí) $= \beta$. (prst chyby 2 druhu)

Neyman-Pearsonova věta

Věta (Neyman-Pearsonova)

Nechť P_0 a P_1 jsou pravděpodobnostní rozdělení odpovídající hodnotám parametrů θ_0 a θ_1. Předpokládejme, že P_0 a P_1 mají hustoty f_0 a f_1 vzhledem k nějaké $\sigma-$konečné míře μ.

1. *Pro testování*

$$H_0: \ \theta_X = \theta_0 \text{ proti } H_1: \ \theta_X = \theta_1 \tag{1}$$

na hladině $\alpha \in (0,1)$ existuje $k \geq 0$ a funkce ϕ takové, že

$$\mathbb{E}_{\theta_0}\phi(\mathbb{X}) = \alpha, \ \text{kde} \tag{2}$$

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 \text{ pro } f_1(\mathbf{x}) > kf_0(\mathbf{x}), \\ 0 \text{ pro } f_1(\mathbf{x}) < kf_0(\mathbf{x}). \end{cases} \tag{3}$$

2. *Jestli test splňuje (2), (3), potom je to nejsilnější test (1) na hladině α.*
3. *Jestli ϕ je nejsilnější test (1) na hladině α, potom pro nějaké $k \geq 0$ je splněná (3) μ-sj.*

Waldův sekvenční postup

- Zvolme prst chyby 1 druhu (α) a prst chyby 2 druhu (β) tak aby $\alpha + \beta < 1$.
- Děláme postupně náhodný výběr $X_1, X_2, X_3, ...$
- Na základě náhodného výběru $X_1, ..., X_n$ uděláme následující rozhodnuti:
  1. Jestli $\prod_{i=1}^{n} \frac{f_1(X_i)}{f_0(X_i)} \leq B$, potom nezamítáme H_0.
  2. Jestli $\prod_{i=1}^{n} \frac{f_1(X_i)}{f_0(X_i)} \geq A$, potom zamítáme H_0.
  3. Jestli $B < \prod_{i=1}^{n} \frac{f_1(X_i)}{f_0(X_i)} < A$, potom pokračujeme v náhodném výběru (tj. budeme pracovat s náhodným výběrem $X_1, ..., X_{n+1}$).
- Čísla $B < A$ volíme tak, aby pravděpodobnosti chyb byly rovny předepsaným číslům.
- Rozsah výběru lze definovat následovně:

$$N = \min \left\{ n : \prod_{i=1}^{n} \frac{f_1(X_i)}{f_0(X_i)} \notin (B, A) \right\}.$$

Aproximace

Čísla B, A jsou zadany implicitně (v praxi téměř nikdy nenajděte), ale lze je aproximovat následovně:

$$B^* = \frac{\beta}{1-\alpha} \qquad A^* = \frac{1-\beta}{\alpha}$$

Příklad (nesekvenční přístup)

Nechť $\mu_0, \mu_1 \in \mathbb{R}$: $\mu_0 < \mu_1$. Uvažujme následující hypotézu a alternativu:

$$H_0: \ X \text{ má } N(\mu_0, 1) \text{ rozdělení},$$

$$H_1: \ X \text{ má } N(\mu_1, 1) \text{ rozdělení}.$$

Požadujeme, aby pravděpodobnosti chyb byly α a β.
V nesekvenčním přístupu H_0 zamítneme, pokud

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_0) \geq u_{1-\alpha}.$$

Příklad (sekvenční přístup)

Testová statistika:

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{f_1(X_i)}{f_0(X_i)} = \prod_{i=1}^{n} exp \left[\frac{(X_i - \mu_0)^2}{2} - \frac{(X_i - \mu_1)^2}{2} \right] = \dots$$

$$\dots = exp \left[\sum_{i=1}^{n} X_i(\mu_1 - \mu_0) + \frac{n}{2}(\mu_0^2 - \mu_1^2) \right]$$

Příklad (sekvenční přístup)

V sekvenčním přístupu na základě výběru $X_1, ..., X_n$

1. Nezamítáme hypotézu H_0, jestliže

$$exp\left[\sum_{i=1}^{n} X_i(\mu_1 - \mu_0) + \frac{n}{2}(\mu_0^2 - \mu_1^2)\right] \leq \frac{\beta}{1-\alpha}.$$

2. Zamítáme hypotézu H_0, jestliže

$$exp\left[\sum_{i=1}^{n} X_i(\mu_1 - \mu_0) + \frac{n}{2}(\mu_0^2 - \mu_1^2)\right] \geq \frac{1-\beta}{\alpha}.$$

3. Jinak pokračujeme ve výběru (tj. děláme další pozorování).

Příklad (sekvenční přístup)

V sekvenčním přístupu na základě výběru $X_1, ..., X_n$

1. Nezamítáme hypotézu H_0, jestliže

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \leq \frac{1}{\mu_1 - \mu_0} \left(log \left(\frac{\beta}{1-\alpha} \right) + \frac{n}{2}(\mu_1^2 - \mu_0^2) \right)$$

2. Zamítáme hypotézu H_0, jestliže

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \geq \frac{1}{\mu_1 - \mu_0} \left(log \left(\frac{1-\beta}{\alpha} \right) + \frac{n}{2}(\mu_1^2 - \mu_0^2) \right)$$

3. Jinak pokračujeme ve výběru (tj. děláme další pozorování).

Příklad (geom. interpretace sekvenčního přístupu)

Náhodnému výběru přiřadíme bod $\left(n, \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$.

- Pokud bod $\left(n, \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ leží pod přímkou

$$p_0 : y = \frac{1}{\mu_1 - \mu_0}\left(log\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right) + \frac{n}{2}(\mu_1^2 - \mu_0^2)\right).$$

- Pokud bod $\left(n, \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ leží nad přímkou

$$p_0 : y = \frac{1}{\mu_1 - \mu_0}\left(log\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right) + \frac{n}{2}(\mu_1^2 - \mu_0^2)\right).$$

- Jinak pokračujeme ve výběru (tj. děláme další pozorování).

Obecný sekvenční přístup

Nechť $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ je iid posloupnost náhodných veličin, jejiž rozdělení závisí na neznámém parametru $\theta = (\theta_1, ..., \theta_k)^T \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$. Uvažujme úlohu testu nulové hypotézy

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \text{ proti } H_1 : \theta \in \Theta_1,$$

kde

- $\Theta_0 \subset \Theta$,
- $\Theta_1 \subset \Theta$,
- $\Theta_1 \cup \Theta_0 = \Theta$,
- $\Theta_1 \cap \Theta_0 = \emptyset$.

Obecný sekvenčni přístup

Nechť $(X_1, ..., X_n)$ je náhodný výběr z rozdělení P_θ, potom

1. nezamítáme H_0, jestliže $(X_1, ..., X_n) \in B_n^0$ a nepokračujeme v náhodném výběru.
2. zamítáme H_0, jestliže $(X_1, ..., X_n) \in B_n^1$ a nepokračujeme v náhodném výběru.
3. pokračujeme v náhodném výběru (tj. od náhodného výběru $(X_1, ..., X_n)$ přecházíme k náhodnému výběru $(X_1, ..., X_{n+1})$).

Všimněme si, že pro $\forall \theta \in \Theta$ a $\forall n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\mathbb{P}_\theta((X_1, ..., X_n) \in B_n) + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_\theta((X_1, ..., X_i) \in B_i^0) + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_\theta((X_1, ..., X_i) \in B_i^1) = 1$$

Charakterizace testu, který skončí s pravděpodobnosti 1

Věta

Následující tři tvrzení jsou ekvivalentní

1. *test skončí s pravděpobností 1 pro všechna* $\theta \in \Theta$.
2. $\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}_\theta(N > n) = 0 \ \forall \theta \in \Theta$
3. $P_S(\theta) + L_S(\theta) = 1 \ \forall \theta \in \Theta$

Kriterium optimality

Věta

Nechť $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ *je posloupnost nezávislých náhodných veličin s hustotou* $f_\theta(x)$, *kde* $\theta \in \Theta$ *(obsahující alespoň dva body). Pak mezi všemi testy* S *(sekvenčními i nesekvenčními)*

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ proti } H_1 : \theta = \theta_1, \text{ kde } \theta_0 \neq \theta_1 \in \Theta$$

které náleží do $\mathcal{C}(\alpha, \beta)$ *a pro které platí* $\mathbb{E}^S_{\theta_i}(N) < \infty$ *pro* $i \in \{0, 1\}$. *Potom je Waldův test* $S(b, a)$ *stejnoměrně eficientní v bodech* θ_0, θ_1, *tj.*

$$\mathbb{E}^{S(b,a)}_{\theta_i}(N) = \min_{S \in \mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathbb{E}^S_{\theta_i}(N) \text{ pro } i \in \{1, 2\}.$$

Konstanty a, b *jsou určeny tak, aby pravděpodobnosti chyb byli* α *resp.* β.