Sekvenčné bodové a intervalové odhady

Filip Bočinec

Univerzita Karlova
Matematicko-Fyzikální fakulta

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

22. marca 2023

Predpoklady

- Nech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *iid* postupnosť náhodných veličín s hustotou $f(x;\theta)$ vzhľadom k σ-konečnej miere μ,
- uvažujeme odhad parametru $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$,
- chceme bodový/intervalový odhad, ktorý spĺňa nejakú (nami zvolenú) vlastnosť

Sekvenčný bodový odhad

- pre bodový odhad majme:

$$\left\{\widehat{\theta}_n, \varphi_n\right\}_{n=1}^{\infty},$$

kde

$$\widehat{\theta}_n = \widehat{\theta}_n\left(X_1, \ldots, X_n\right),$$

$$\varphi_n = \varphi_n(X_1, \ldots, X_n) = \mathbb{1}_{[\text{už sme ukončili výber}]},$$

Sekvenčný bodový odhad

- pre bodový odhad majme:

$$\left\{\widehat{\theta}_n, \varphi_n\right\}_{n=1}^{\infty},$$

kde

$$\widehat{\theta}_n = \widehat{\theta}_n\left(X_1, \ldots, X_n\right),$$

$$\varphi_n = \varphi_n(X_1, \ldots, X_n) = \mathbb{1}_{[\text{už sme ukončili výber}]},$$

- rozsah výberu $N = \min\left\{n \in \mathbb{N} \mid \varphi_n = 1\right\}$,

Sekvenčný bodový odhad

- pre bodový odhad majme:

$$\left\{\widehat{\theta}_n, \varphi_n\right\}_{n=1}^{\infty},$$

kde

$$\widehat{\theta}_n = \widehat{\theta}_n\left(X_1, \ldots, X_n\right),$$

$$\varphi_n = \varphi_n(X_1, \ldots, X_n) = \mathbb{1}_{[\text{už sme ukončili výber}]},$$

- rozsah výberu $N = \min\left\{n \in \mathbb{N} \mid \varphi_n = 1\right\}$,
- sekvenčný bodový odhad pre θ

$$\widehat{\theta}_N = \widehat{\theta}_N\left(X_1, \ldots, X_N\right).$$

- Platí sekvenčná Rao-Cramérova veta,

- Platí sekvenčná Rao-Cramérova veta,
- Zvoľme $c > 0$, chceme $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že

$$\mathrm{var}(\widehat{\theta}_n; \theta) \leq c^2 \qquad \forall \theta \in \Theta.$$

Príklad

Nech $f(x; \mu) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, kde $\sigma^2 > 0$ je (ne)známe, $\mu \in \mathbb{R}$.

- Také n_0 často nejde určiť, pretože závisí na neznámych parametroch.

- Prejdeme k požiadavku

$$\widehat{\mathrm{var}(\widehat{\theta}_n)} := s_n^2/n \leq c^2,$$

kde s_n^2 je štatistika taká, že

$$s_n^2 - n\,\mathrm{var}(\widehat{\theta}_n;\theta) \xrightarrow[n\to\infty]{s.j.} 0 \qquad \forall\theta\in\Theta,$$

- potom definujme

$$N(c) := \min\left\{n\in\mathbb{N} \mid s_n^2/n \leq c^2\right\}, c > 0.$$

Tvrdenie o sekvenčných bodových odhadoch.

Simulácie

c	$\lceil \sigma^2/c^2 \rceil$	priemer $N(c)$	smerodatná odchýlka $N(c)$
0.5	4	4.3	1.59
0.1	100	98.5	14.5
0.05	400	399.4	27.98
0.01	10000	10012.8	138.11

Tabuľka: Teoretický vs simulovaný rozsah výberu pre $\sigma^2 = 1$, 1000 iterácií.

Sekvenčný intervalový odhad

- Nech $d > 0$. Pre intervalový odhad θ uvažujme:

$$\{L_n, U_n, \varphi_n\}_{n=1}^{\infty},$$

kde

$$L_n = L_n(X_1, \ldots, X_n), U_n = U_n(X_1, \ldots, X_n),$$

$$\varphi_n = \mathbb{1}_{[U_n - L_n \leq 2d]},$$

Sekvenčný intervalový odhad

- Nech $d > 0$. Pre intervalový odhad θ uvažujme:

$$\{L_n, U_n, \varphi_n\}_{n=1}^{\infty},$$

kde

$$L_n = L_n(X_1, \ldots, X_n), U_n = U_n(X_1, \ldots, X_n),$$

$$\varphi_n = \mathbb{1}_{[U_n - L_n \leq 2d]},$$

- rozsah výberu

$$N = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \varphi_n = 1\} = \min\{n \in \mathbb{N} \mid U_n - L_n \leq 2d\},$$

Sekvenčný intervalový odhad

- Nech $d > 0$. Pre intervalový odhad θ uvažujme:

$$\{L_n, U_n, \varphi_n\}_{n=1}^{\infty},$$

kde

$$L_n = L_n(X_1, \ldots, X_n), U_n = U_n(X_1, \ldots, X_n),$$

$$\varphi_n = \mathbb{1}_{[U_n - L_n \leq 2d]},$$

- rozsah výberu

$$N = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \varphi_n = 1\} = \min\{n \in \mathbb{N} \mid U_n - L_n \leq 2d\},$$

- sekvenčný intervalový odhad pre θ s koeficientom spoľahlivosti $1 - \alpha$:

$$(L_N, U_N) = (L_N(X_1, \ldots, X_N), U_N(X_1, \ldots, X_N))$$

$$\mathrm{P}(\theta \in (L_N, U_N); \theta) = 1 - \alpha \qquad \forall \theta \in \Theta.$$

Tvrdenie o sekvenčných intervalových odhadoch.