Řešení zápočtové písemky z 26. 3. 2003

1. Všech možných trojic vylosovaných čísel je $\binom{100}{3}$. Z těchto trojic lze sestavit celkem $100-2d$ aritmetických posloupností s diferencí d. Přitom d může být nanejvýš 49. Hledaná pravděpodobnost je rovna

$$p = \frac{\sum_{d=1}^{49}(100-2d)}{\binom{100}{3}} = \frac{49\cdot 100 - 49\cdot 50}{\frac{100\cdot 99\cdot 98}{6}} = \frac{49\cdot 50\cdot 6}{100\cdot 99\cdot 98} = \frac{1}{66}.$$

2. Označme T_+ jev, že náhodně vybraný člověk má pozitivní test. Obdobně T_- znamená, že má negativní test. Dále N bude značit jev, že vybraný člověk je nakažený, a Z, že je zdravý. Ze zadání víme, že $P(N) = 0{,}001$, $P(T_+ \mid N) = 0{,}9$ a $P(T_- \mid Z) = 0{,}9$. Odtud dopočteme pravděpodobnosti doplňkových jevů $P(Z) = 0{,}999$, $P(T_- \mid N) = 0{,}1$ a $P(T_+ \mid Z) = 0{,}1$.

a) Ze vzorce pro úplnou pravděpodobnost máme

$$P(T_+) = P(T_+ \mid N)P(N) + P(T_+ \mid Z)P(Z) = 0{,}9\cdot 0{,}001 + 0{,}1\cdot 0{,}999 = 0{,}1008.$$

b) Podle Bayesovy věty

$$P(N \mid T_+) = \frac{P(T_+ \mid N)P(N)}{P(T_+)} = \frac{0{,}9\cdot 0{,}001}{0{,}1008} = \frac{9}{1008} = \frac{1}{112}.$$

3. Tento příklad dělal největší problémy. Nejprve si uvědomíme, že $Y = [X]$ nabývá pouze nezáporných celočíselných hodnot. Proto Y bude mít diskrétní rozdělení. Přitom aby $Y = k$, musí být X mezi k a $k+1$. Nyní můžeme využít distribuční funkci nebo hustotu náhodné veličiny X.

Náhodná veličina s exponenciálním rozdělením s parametrem λ má distribuční funkci $F(x) = 1-\mathrm{e}^{-\lambda x}$ pro $x \geq 0$. Odtud

$$\begin{aligned} P(Y=k) &= P(k \leq X < k+1) = P(X < k+1) - P(X < k) = F(k+1) - F(k) \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda(k+1)} - 1 + \mathrm{e}^{-\lambda k} = \mathrm{e}^{-\lambda k}(1-\mathrm{e}^{-\lambda}), \quad k = 0,1,2,\dots. \end{aligned}$$

Pokud vyjdeme z toho, že X má hustotu $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$ pro $x \geq 0$, dostaneme

$$\begin{aligned} P(Y=k) = P(k \leq X < k+1) &= \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_k^{k+1} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-\lambda x}\right]_k^{k+1} = \mathrm{e}^{-\lambda k}(1-\mathrm{e}^{-\lambda}), \quad k = 0,1,2,\dots. \end{aligned}$$

Náhodná veličina Y má tedy geometrické rozdělení s parametrem $1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$.

4. Nejprve určíme hodnotu c. Z toho, že platí

$$1 = \int_0^\infty cx\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{c}{2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = \frac{c}{2}\left[-\mathrm{e}^{-y}\right]_0^\infty = \frac{c}{2},$$

dostaneme $c = 2$. Použili jsme substituci $y = x^2$. Nyní můžeme spočítat $\mathrm{E}X^2$:

$$\mathrm{E}X^2 = \int_0^\infty 2x^3\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty y\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = \left[-y\mathrm{e}^{-y}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = 1.$$

Pro zajímavost uvádím ještě výpočet střední hodnoty X, který nelze provést tak přímočaře. Využijeme náhodnou veličinu Z s normovaným normálním rozdělením. Hustota Z je daná funkcí $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}$ a platí $\mathrm{E}Z^2 = 1$. Neboli

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty z^2\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}z = 1.$$

Po substituci $z = \sqrt{2}y$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^\infty y^2\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = 1$$

a díky sudosti funkce

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty y^2\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = 1.$$

V našem případě je

$$\mathrm{E}X = \int_0^\infty 2x^2\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$