

Zápočtová písemka STP038 – 29. 11. 2005

1. Mějme urnu a 5 koulí. V každém kroku budeme koule z urny odebírat nebo do urny přidávat podle následujícího schématu. Pokud je urna prázdná, naplníme ji všemi pěti koulemi. V opačném případě z urny odebereme s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ čtyři koule, s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ dvě koule a s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ žádnou kouli. Pokud bychom měli odebrat více koulí než se právě v urně nachází, tak odebereme všechny koule, které v urně jsou. Nechť X_n značí počet koulí v urně po n krocích.
- Ukažte, že $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tvoří homogenní Markovův řetězec.
 - Určete matici pravděpodobností přechodu \mathbb{P} .
 - Klasifikujte stavy řetězce.
 - Předpokládejte, že počáteční rozdělení je rovnoměrné (každý stav má stejnou pravděpodobnost) a spočtete absolutní pravděpodobnosti po prvním kroku.
 - Spočtete stacionární rozdělení (pokud existuje).
 - Určete matici U pravděpodobností absorpce do trvalých stavů.
2. Klasifikujte stavy markovského řetězce s maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Nalezněte stacionární rozdělení tohoto řetězce, pokud existuje.