

## Zápočtová písemka STP039 – 28. 3. 2007

1. Mějme náhodný proces  $X_t = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , kde  $\omega$  je reálná konstanta a  $A$  a  $B$  jsou nekorelované náhodné veličiny s nulovými středními hodnotami a jednotkovými rozptyly.

a) Zjistěte, zda jde o slabě stacionární proces. (3 body)

b) Rozhodněte o spojitosti a diferencovatelnosti podle středu. Existuje Riemannův integrál procesu? (3 body)

c) Určete spektrální distribuční funkci procesu a spektrální hustotu (pokud existuje). (3 body)

2. Necht' slabě stacionární náhodný proces  $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$  má spektrální hustotu

$$f(\lambda) = c \exp\{-a\lambda^2\}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

kde  $a$  a  $c$  jsou kladné konstanty. Spočtete autokovarianční funkci procesu. (4 body)

*Nápověda:* Využijte toho, že charakteristická funkce normovaného normálního rozdělení je  $\exp\{-t^2/2\}$ .

3. Necht'  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$  a  $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$  jsou vzájemně nezávislé náhodné posloupnosti takové, že  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$  má autokovarianční funkci  $R_X(t) = (\frac{1}{2})^{|t|}$  pro každé  $t \in \mathbb{Z}$  a  $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$  je posloupnost nezávislých náhodných veličin s nulovou střední hodnotou a konečným kladným rozptylem  $\sigma^2$ . Ověřte, zda existuje spektrální hustota posloupnosti  $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ , kde  $Z_t = X_t + Y_t$  pro každé  $t \in \mathbb{Z}$ . Pokud ano, spočtete ji. (5 bodů)