Domácí úlohy ke cvičení STP139

1. (hard-core model) Mějme graf $G = (V, E)$, kde V značí množinu vrcholů a E množinu hran grafu. Přiřadíme každému vrcholu hodnotu 0 nebo 1. Všechna taková přiřazení (prvky množiny $\{0,1\}^V$) se nazývají konfigurace. Takové konfigurace, že sousední vrcholy (vrcholy spojené hranou) nejsou současně 1, nazveme přípustné konfigurace.

Buď π_G pravděpodobnostní míra na $\{0,1\}^V$ definována vztahem

$$\pi_G(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{Z_G} & \text{pro } \xi \text{ přípustnou,} \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde Z_G je celkový počet přípustných konfigurací. Chceme zjistit střední počet jedniček $n(\xi)$ v náhodné konfiguraci ξ (s rozdělením π_G), tedy

$$\mathbb{E}n(\xi) = \frac{1}{Z_G} \sum_{\eta \in \{0,1\}^V} n(\eta) \mathbf{1}_{\{\eta \text{ přípustná}\}}.$$

Problém je, že zjistit Z_G je výpočetně nemožné. V aplikacích je počet možných konfigurací astronomicky velký a přímý výpočet $\mathbb{E}n(\xi)$ přesahuje možnosti počítačů. Postupujeme tedy přes simulace, přímá simulace z π_G není možná (neznáme Z_G), a tak zvolíme MCMC metodu.

Zkonstruujeme nerozložitelný neperiodický Markovův řetězec $\{X_t\}$ se stacionárním rozdělením π_G na konečném stavovém prostoru přípustných konfigurací. Potom $\mathbb{E}n(\xi)$ odhadneme ze zákona velkých čísel pro markovské řetězce. V čase $t+1$:

1. rovnoměrně náhodně vybereme vrchol v,
2. s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ položme $X_{t+1}(v) = 1$, pokud mají všichni sousedé v hodnotu 0 v X_t, jinak položíme $X_{t+1}(v) = 0$,
3. ostatní vrcholy $w \neq v$ mají hodnotu nezměněnu: $X_{t+1}(w) = X_t(w)$.

Úkoly:

a) Ukažte, že takto definovaný řetězec je nerozložitelný a neperiodický. Ověřte, že řetězec je reverzibilní vzhledem k π_G, a proto je π_G stacionární rozdělení. Uvědomte si, že se vlastně jedná o algoritmus náhodného procházení v Gibbsově výběrovém plánu.

b) Implementujte algoritmus pro čtvercovou mříž $m \times m$. Pro $m = 10, 20, 30$ simulujte několik řetězců z různých počátečních stavů. Dle chování posloupnosti a empirických autokorelací v řetězci určete burn-in (jako sledovanou veličinu použijte $n(\xi)$). Pomocí nasimulovaných hodnot (možno použít podposloupnost, např. každý stý krok algoritmu) odhadněte $\mathbb{E}n(\xi)$ i rozdělení $n(\xi)$.

c) Odhadněte $\mathbb{E}n(\xi)$ pro graf se 100 vrcholy a 200 náhodně umístěnými hranami.

Součástí řešení by měl být i příklad realizace hard-core modelu.

2. (náhodná q-obarvení grafu) Nechť $G = (V, E)$ je graf, kde V je množina vrcholů a E je množina hran grafu. Pro přirozené číslo $q \geq 2$ definujeme q-obarvení grafu G jako přiřazení hodnot z $S = \{1, \ldots, q\}$ (barev) vrcholům grafu s vlastností, že žádné dva sousední vrcholy nemají stejnou barvu. Náhodné q-obarvení je vybrané rovnoměrně náhodně z množiny Q všech q-obarvení pro G. Příslušnou pravděpodobnostní míru na S^V označme $\pi_{G,q}$. Předpokládejme, že $Q \neq \emptyset$ (podle věty čtyř barev k tomu pro rovinný graf stačí $q = 4$).

K tomu, abychom sestavili Gibbsův výběrový plán pro simulaci z $\pi_{G,q}$, je důležité si uvědomit, že pro vrchol $v \in V$ a přiřazení barev vrcholům jiným než v je podmíněné rozdělení rovnoměrné na množině všech barev, které nejsou obsazeny nějakým sousedem v.

Simulace náhodného q-obarvení nám umožní najít přibližnou odpověď na následující otázku: Kolik existuje různých q-obarvení pro dané přirozené číslo q a daný graf G?

Nechť $G = (V, E)$ má k vrcholů a $\tilde{k}$ hran. Očíslujme hrany $e_1, \ldots, e_{\tilde{k}}$ a definujme podgrafy $G_0, \ldots, G_{\tilde{k}}$ následovně: $G_0 = (V, \emptyset)$ a $G_j = (V, \{e_1, \ldots, e_j\})$ pro $j = 1, \ldots, \tilde{k}$. To znamená, že graf G_j vznikl z G vynecháním hran s indexem větším než j. Označme Z_j počet q-obarvení grafu G_j, $j = 0, \ldots, \tilde{k}$. Zřejmě $G_{\tilde{k}} = G$ a hledaný počet, který chceme najít (nebo aproximovat) je

$$Z_{\tilde{k}} = \frac{Z_{\tilde{k}}}{Z_{\tilde{k}-1}} \cdot \frac{Z_{\tilde{k}-1}}{Z_{\tilde{k}-2}} \cdots \frac{Z_2}{Z_1} \cdot \frac{Z_1}{Z_0} \cdot Z_0.$$

Protože G_0 nemá žádné hrany, každé přiřazení barev vrcholům dává q-obarvení, a tudíž $Z_0 = q^k$. Nyní stačí odhadnout zlomky $\frac{Z_j}{Z_{j-1}}$. Nechť $e_j = \{x_j, y_j\}$, potom q-obarvení G_j jsou přesně ty konfigurace, které jsou q-obarvení G_{j-1} a navíc přiřazují různé barvy vrcholům x_j a y_j. To znamená, že

$$\frac{Z_j}{Z_{j-1}} = \pi_{G_{j-1},q}(X(x_j) \neq X(y_j)),$$

neboli $\frac{Z_j}{Z_{j-1}}$ je rovno pravděpodobnosti, že náhodné q-obarvení X grafu G_{j-1} splňuje $X(x_j) \neq X(y_j)$. Tuto pravděpodobnost můžeme odhadnout z realizace řetězce generovaného pomocí Gibbsova algoritmu jako relativní četnost konfigurací, pro které jsou barvy x_j a y_j různé.

Úkoly:

a) Implementujte algoritmus Gibbsova výběrového plánu pro čtvercovou mříž 10×10 a $q = 8$. Simulujte řetězce z různých počátečních stavů.

b) Proveďte příslušný výpočet počtu různých q-obarvení pro vámi zvolený graf a q (tak, aby to bylo výpočetně zvládnutelné). Pro odhad pravděpodobností určete úsek zapálení (burn-in) a užijte podposloupnost nasimulovaného řetězce (např. každý stý krok).

Pozn.: Uvědomte si, že přímý naivní algoritmus, který spočívá v prohledání všech možných konfigurací a rozhodnutí, které tvoří q-obarvení, sice dává teoreticky přesný výsledek, ale je nepoužitelný, např. pro $k = 100$ a $q = 8$ je všech konfigurací $8^{100} \doteq 10^{90}$, proto jsme se uchýlili k MCMC metodám.

3. (simulované žíhání) Mějme graf $G = (V, E)$, kde V je množina vrcholů a E je množina hran grafu. Vrcholům grafu přiřadíme hodnoty 0 nebo 1 tak, aby žádní dva sousedé neměly hodnotu 1. Prvky $\{0, 1\}^V$ se nazývají konfigurace. Takové konfigurace, kde je splněna podmínka na sousedy, jsou přípustné konfigurace. Ptáme se, jaký maximální počet jedniček můžeme dosáhnout.

K řešení použijeme simulované žíhání. K nalezení vhodného markovského řetězce uvažujme modifikované Boltzmannovo rozdělení definované na prostoru S všech přípustných konfigurací ξ předpisem

$$\pi_{h,T}(\xi) = \frac{1}{Z_{h,T}} \exp\{h(\xi)/T\},$$

kde $Z_{h,T} = \sum_{\xi \in S} \exp\{h(\xi)/T\}$ a T je parametr teploty. Funkce h přiřazuje konfiguraci ξ počet jedniček.

Zvolíme posloupnost teplot a žíhací schéma. Dále použijeme algoritmus Gibbsova výběrového plánu. Při dané teplotě T probíhá krok následovně: nechť současná konfigurace je ξ, rovnoměrně náhodně vybereme vrchol v. Pokud všichni sousedé v mají v ξ hodnotu 0, položíme s pravděpodobností $\mathrm{e}^{1/T}/(1 + \mathrm{e}^{1/T})$ v nové konfiguraci $\tilde{\xi}$ hodnotu vrcholu v rovnu 1, jinak rovnu 0, ostatní hodnoty vrcholů zůstávají nezměněny.

Úkoly:

a) Ukažte, že pro každý vrchol $v \in V$ je podmíněná pravděpodobnost, že hodnota vrcholu je 1 podmíněně při všech ostatních vrcholech, rovna

$$\frac{\exp\{1/T\}}{1 + \exp\{1/T\}},$$

pokud mají všichni sousedi v hodnotu 0 a rovna 0 jinak. To zdůvodňuje tvar kroku Gibbsova algoritmu, který je uveden výše.

b) Pomocí simulovaného žíhání řešte maximalizační úlohu pro regulární čtvercovou síť 10×10.

c) Řešte úlohu pro graf se 100 vrcholy a 200 náhodně umístěnými hranami.

Součástí řešení by měla být diskuse voleného schématu žíhání a graf chování funkce h v průběhu simulací.

4. (Isingův model) Mějme graf $G = (V, E)$, kde V je množina vrcholů a E je množina hran grafu. Vrcholům grafu přiřadíme hodnoty -1 nebo 1. Prvky množiny $\{-1, 1\}^V$ se nazývají konfigurace. Nechť $\beta \geq 0$ je tzv. inverzní teplota a energie konfigurace ξ je definována jako

$$H(\xi) = -\sum_{\{x,y\} \in E} \xi(x)\xi(y).$$

Isingův model na G při inverzní teplotě β je náhodná konfigurace s pravděpodobnostním rozdělením

$$\pi_{G,\beta} = \frac{1}{Z_{G,\beta}} \exp\{-\beta H(\xi)\},$$

kde $Z_{G,\beta}$ je normující konstanta.

Úkolem je simulovat Isingův model pomocí Proppova-Wilsonova algoritmu perfektní simulace. Jako základ použijeme Gibbsův výběrový plán s náhodným procházením: při dané konfiguraci X_n vybereme náhodně vrchol $x \in V$, položíme $X_{n+1}(y) = X_n(y)$ pro $y \neq x$ a hodnotu $X_{n+1}(x)$ generujeme z podmíněného rozdělení $\pi_{G,\beta}$ za podmínky, že hodnoty vrcholů různých od x jsou stejné jako v X_n. Toto podmíněné rozdělení je pro $x \in V$ a $\xi \in \{-1,1\}^{V\setminus\{x\}}$ dáno předpisem

$$\pi_{G,\beta}(X(x) = 1 \mid X(V \setminus \{x\} = \xi) = \frac{\exp\{2\beta(k_+(x,\xi) - k_-(x,\xi))\}}{\exp\{2\beta(k_+(x,\xi) - k_-(x,\xi))\} + 1}, \qquad (\star)$$

kde $k_+(x,\xi)$ značí počet sousedů vrcholu x, kteří mají v ξ spin 1 a $k_-(x,\xi)$ značí počet sousedů se spinem -1 v ξ. Neboli

$$X_{n+1}(x) = 1 \quad \text{s pravděpodobností } \frac{\exp\{2\beta(k_+(x,X_n) - k_-(x,X_n))\}}{\exp\{2\beta(k_+(x,X_n) - k_-(x,X_n))\} + 1}$$

a přechody v generovaném řetězci lze brát jako

$$X_{n+1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{když } U_{n+1} < \frac{\exp\{2\beta(k_+(x,X_n)-k_-(x,X_n)\}}{\exp\{2\beta(k_+(x,X_n)-k_-(x,X_n))\}+1}, \\ -1 & \text{jinak,} \end{cases} \qquad (\clubsuit)$$

kde $\{U_n\}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin s rovnoměrným rozdělením na $[0,1]$.

Abychom nemuseli spouštět paralelně 2^k řetězců (k značí počet vrcholů grafu), využijeme sendvičové vlastnosti. Na stavovém prostoru $\{-1,1\}^V$ definujeme uspořádání: $\xi \preceq \eta$ právě, když $\xi(x) \leq \eta(x)$ pro všechna $x \in V$. V tomto uspořádání máme maximální konfiguraci ξ^{max} takovou, že $\xi \preceq \xi^{max}$ pro každé $\xi \in \{-1,1\}^V$. Podobně minimální konfigurace ξ^{min} splňuje $\xi^{min} \preceq \xi$ pro všechny konfigurace ξ. Pochopitelně $\xi^{max}(x) = 1$ a $\xi^{min}(x) = -1$ pro všechny $x \in V$.

Nyní uvažujme 2^k různých markovských řetězců generovaných podle algoritmu perfektní simulace. Zbývá ověřit, že pro každé dva řetězce $\{X_{-n}\}$ a $\{X'_{-n}\}$ startující ze stavů ξ a ξ' takových, že $\xi \preceq \xi'$, platí $X_{-n} \preceq X'_{-n}$ pro každé n. Když $\xi \preceq \eta$, pak

$$\pi_{G,\beta}(X(x) = 1 \mid X(V \setminus \{x\}) = \xi) \leq \pi_{G,\beta}(X(x) = 1 \mid X(V \setminus \{x\}) = \eta). \qquad (\ddagger)$$

Potom z ($\clubsuit$) plyne, že $X_{-n+1}(x) \leq X'_{-n+1}(x)$ kdykoli $X_{-n}(x) \leq X'_{-n}(x)$ a protože se zbylé hodnoty vrcholů nemění, dostáváme požadovanou sendvičovou vlastnost. Stačí tedy spouštět řetězce ze stavů ξ^{max} a ξ^{min} a ověřovat, zda došlo ke koalescenci u těchto dvou řetězců (potom nutně dochází ke koalescenci u všech 2^k řetězců).

Úkoly:

a) Ukažte, že platí vztahy ($\star$) a ($\ddagger$).

b) Implementujte algoritmus perfektní simulace pro simulaci z Isingova modelu na čtvercové mříži $m \times m$. Použijte pro různé hodnoty m (např. 10, 20, 30) a různé hodnoty β (např. 0, 0.15, 0.3, 0.5).

c) Pro každou hodnotu parametrů proveďte větší počet nezávislých realizací algoritmu (100 či více, pokud to bude výpočetně zvládnutelné) a z nich odhadněte jednak pravděpodobnostní rozdělení energie pro Isingův model se zadanými parametry, jednak rozdělení časů, kterých je pro použité hodnoty třeba pro koalescenci.

Součástí řešení úlohy by měly být i příklady realizací Isingova modelu pro různé hodnoty parametrů m a β.

Pozn.: Onsagerova kritická hodnota je přibližně 0.441, pro větší hodnoty čas koalescence roste s m exponenciálně.

5. (**GARCH model**) Uvažujme časovou řadu

$$Y_t = a_0 + a_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, T,$$

kde $\varepsilon_t \mid Y_1, \ldots, Y_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$ a

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2.$$

Parametry α_0, α_1 a β_1 jsou nezáporné (aby rozptyl σ_t^2 nebyl záporný) a $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ (podmínka stacionarity). Jedná se o tzv. GARCH(1,1) model.

Označme $\theta = (a_0, a_1, \alpha_0, \alpha_1, \beta_1)$ vektor neznámých parametrů. Pro data $y = (y_1, \ldots, y_T)$ má věrohodnost tvar

$$f(y \mid \theta) = \prod_{t=1}^{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left\{-\frac{\varepsilon_t^2}{2\sigma_t^2}\right\}. \qquad (\star)$$

Model se často používá ve finanční matematice k modelování logaritmických výnosů. Předpokládejme, že ze zkušenosti s podobnými finančními daty můžeme uvažovat toto apriorní rozdělení: $a_0 \sim N(0, 3)$, $a_1 \sim N(0, 3)$, $\alpha_0 \sim LN(-2.3, 5)$, $\alpha_1 \sim LN(-2, 5)$ a $\beta_1 \sim LN(-0.2, 5)$, kde LN značí lognormální rozdělení (tj. $\log \alpha_0 \sim N(-2.3, 5)$) a všechny parametry jsou apriorně nezávislé.

Ukazuje se, že tato volba apriorního rozdělení vede na komplikovaná plně podmíněná rozdělení, proto nemůžeme použít Gibbsův výběrový plán. Zvolíme tedy Metropolisův algoritmus symetrické náhodné procházky.

Jako data y použijeme data s německými akciovými indexy DAX, která jsou součástí R. Načtení a potřebná transformace dat se provede následovně:

```
data(EuStockMarkets)
dax <- diff(log(EuStockMarkets[,1]))
```

Úkoly:

a) Ověřte, že platí vztah $(\star)$.

b) Implementujte Metropolisův algoritmus pro simulaci z aposteriorního rozdělení. Jako návrhové rozdělení berte mnohorozměrné normální. Protože parametry v definici rozptylu (α_0, α_1, β_1) jsou obvykle silně korelované, lze v rámci zvětšení efektivity algoritmu uvažovat korelace v návrhové hustotě. Proveďte několik průzkumných běhů řetězce (z různých počátečních stavů a s diagonální varianční maticí návrhové hustoty) a na jejich základě najděte empirické korelační koeficienty mezi příslušnými parametry. Pro samotný výsledný algoritmus pak použijte návrhy generované v nezávislých blocích: a_0, a_1 z jednorozměrného normálního a $(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1)$ z trojrozměrného lognormálního s odhadnutými korelačními koeficienty. Volte vhodně rozptyly návrhového rozdělení tak, aby celková průměrná pravděpodobnost přijetí byla kolem 25%.

c) Pomocí několika průběhu řetězce z různých počátečních hodnot volte vhodný burn-in. Na základě autokorelačních koeficientů pro marginální řetězce vyberte vhodný krok pro podposloupnost řetězce a tu použijte k vykreslení jádrových odhadů aposteriorních hustot parametrů α_0, α_1 a β_1. Výsledky porovnejte s maximálně věrohodnými odhady, které v R získáte pomocí funkce `garch` v knihovně `tseries`.

Pozn.: Místo s parametry $(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1)$ bude jednodušší pracovat s jejich logaritmy.

6. (**GARCH-t model)** Uvažujme časovou řadu

$$Y_t = a_0 + a_1 Y_{t-1} + \sigma_t \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, T,$$

kde $\varepsilon_t \mid Y_1, \ldots, Y_{t-1} \sim t_k$ a

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2.$$

Parametry α_0, α_1 a β_1 jsou nezáporné (aby rozptyl σ_t^2 nebyl záporný) a $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ (podmínka stacionarity). Jedná se o tzv. GARCH(1,1) model s t-rozdělenými inovacemi. Označme $\theta = (a_0, a_1, \alpha_0, \alpha_1, \beta_1, k)$ vektor neznámých parametrů. Pro data $y = (y_1, \ldots, y_T)$ a počet stupňů volnosti $k > 2$ má věrohodnost tvar

$$f(y \mid \theta) = \prod_{t=1}^{T} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{\pi k \sigma_t^2}} \left(1 + \frac{\varepsilon_t^2}{k}\right)^{-(k+1)/2}. \qquad (\star)$$

Model se často používá ve finanční matematice k modelování logaritmických výnosů. Předpokládejme, že ze zkušenosti s podobnými finančními daty můžeme uvažovat toto apriorní rozdělení: $a_0 \sim N(0, 3)$, $a_1 \sim N(0, 3)$, $\alpha_0 \sim LN(-2.3, 5)$, $\alpha_1 \sim LN(-2, 5)$, $\beta_1 \sim LN(-0.2, 5)$ a $k \sim Exp(0.1)$, kde LN značí lognormální rozdělení (tj. $\log \alpha_0 \sim N(-2.3, 5)$) a všechny parametry jsou apriorně nezávislé.

Ukazuje se, že tato volba apriorního rozdělení vede na komplikovaná plně podmíněná rozdělení, proto nemůžeme použít Gibbsův výběrový plán. Zvolíme tedy Metropolisův algoritmus symetrické náhodné procházky.

Jako data y použijeme data s londýnskými akciovými indexy FTSE, která jsou součástí R. Načtení a potřebná transformace dat se provede následovně:

```
data(EuStockMarkets)
dax <- diff(log(EuStockMarkets[,4]))
```

Úkoly:

a) Ověřte, že platí vztah $(\star)$.

b) Implementujte Metropolisův algoritmus pro simulaci z aposteriorního rozdělení. Jako návrhové rozdělení berte mnohorozměrné normální. Protože parametry v definici rozptylu (α_0, α_1, β_1) jsou obvykle silně korelované, lze v rámci zvětšení efektivity algoritmu uvažovat korelace v návrhové hustotě. Proveďte několik průzkumných běhů řetězce (z různých počátečních stavů a s diagonální varianční maticí návrhové hustoty) a na jejich základě najděte empirické korelační koeficienty mezi příslušnými parametry. Pro samotný výsledný algoritmus pak použijte návrhy generované v nezávislých blocích: a_0, a_1, k z jednorozměrného normálního a $(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1)$ z trojrozměrného lognormálního s odhadnutými korelačními koeficienty. Volte vhodně rozptyly návrhového rozdělení tak, aby celková průměrná pravděpodobnost přijetí byla kolem 25%.

c) Pomocí několika průběhu řetězce z různých počátečních hodnot volte vhodný burn-in. Na základě autokorelačních koeficientů pro marginální řetězce vyberte vhodný krok pro podposloupnost řetězce a tu použijte k vykreslení jádrových odhadů aposteriorních hustot parametrů α_0, α_1 a β_1 a aposteriorního rozdělení parametru k.

Pozn.: Místo s parametry $(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1)$ bude jednodušší pracovat s jejich logaritmy.

7. (směšovací modely) Nechť $f_1, \ldots, f_k$ jsou pravděpodobnostní hustoty a $p_1, \ldots, p_k$ jsou nezáporná čísla, $p_1 + \cdots + p_k = 1$. Uvažujme náhodnou veličinu X s hustotou $f(x) = p_1 f_1(x) + \cdots + p_k f_k(x)$, neboli X má hustotu f_j s pravděpodobností p_j. Pro náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ tak dostáváme sdruženou hustotu $f(x_1) \cdots f(x_n)$, která po roznásobení obsahuje k^n členů, což znemožňuje přímý výpočet pro větší rozsah výběru.

Mějme hustotu f_j parametrizovánu vektorem θ_j, $j = 1, \ldots, k$. Na celou situaci můžeme pohlížet jako na problém chybějících dat. Chybějící pozorování v tomto případě odpovídají indexu použité hustoty, neboli $X \mid Z = j \sim f_j(x \mid \theta_j)$ a $P(Z = j) = p_j$. V bayesovském přístupu je přirozenou volbou apriorního rozdělení pro vektor $p = (p_1, \ldots, p_k)$ tzv. Dirichletovo rozdělení:

$$\pi(p) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)}{\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_k)} p_1^{\alpha_1 - 1} \cdots p_k^{\alpha_k - 1},$$

kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jsou dané hyperparametry. Volba apriorního rozdělení pro vektor $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$ většinou závisí na daném problému. V naší situaci nemáme k dispozici $f(x \mid \theta, p)$, ale můžeme vyjádřit $f(x \mid z, \theta, p)$. Vektor z tedy považujeme za množinu parametrů a využijeme vztahu

$$\pi(\theta, p, z \mid x) \propto f(x, z \mid \theta, p)\pi(p)\pi(\theta).$$

Z hustoty $\pi(\theta, p, z \mid x)$ pak dostaneme hledané aposteriorní rozdělení parametrů θ a p jako marginální.

Úkoly:

a) Uvažujte jako f_j hustoty normálního rozdělení s parametry μ_j, σ_j^2, $j = 1, \ldots, k$. Sestavte Gibbsův výběrový plán pro simulaci z aposteriorního rozdělení. Apriorní rozdělení pro $\theta_j = (\mu_j, \sigma_j^2)$ volte vhodně (např. jako konjugovaný systém).

b) Pro $k = 2$ a zvolené hodnoty parametrů (p, θ) nasimulujte výběr o rozsahu 100. Na základě těchto nasimulovaných dat generujte řetězec Gibbsovým výběrovým plánem. Z průběhu řetězce určete vhodný burn-in. Poté z grafu empirických autokorelací vyberte vhodný krok pro podposloupnost řetězce (např. každý stý krok). Tuto podposloupnost použijte k odhadu aposteriorního rozdělení. Výsledky porovnejte se skutečnými hodnotami parametrů.

c) Pro stejná data použijte Metropolisův-Hastingsův algoritmus náhodné procházky pro odhad aposteriorního rozdělení. Parametr návrhového rozdělení volte tak, aby jste dostali rozumnou průměrnou pravděpodobnost přijetí (kolem 25%).

8. (**Straussův proces**) Straussův proces na množině E je konečný bodový proces s hustotou $p(x) \propto \beta^{x(E)}\gamma^{S(x)}$ vzhledem ke standardnímu Poissonovu procesu. Symbol $S(x)$ značí počet dvojic bodů realizace x, jejichž vzdálenost je menší než R.

Pro simulaci použijeme Metropolisův-Hastingsův algoritmus zrození, zániku a migrace. Nechť $0 \leq q < 1$ a nechť současný stav algoritmu je $x = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$. S pravděpodobností q navrhneme migraci jednoho bodu: generujme i z $R(\{1, \ldots, n\})$, poté ξ z hustoty $q_i(x, \cdot)$ a návrh nového stavu y vznikne z x záměnou bodu ξ_i za bod ξ. Pravděpodobnost přijetí je $\min(1, h(x, \xi))$, kde

$$h(x, \xi) = \frac{p((x \setminus \{\xi_i\}) \cup \xi)}{p(x)} \cdot \frac{q_i(y, \xi_i)}{q_i(x, \xi)}.$$

S pravděpodobností $1-q$ naopak provedeme krok z Metropolisova-Hastingsova algoritmu zrození a zániku (viz přednáška).

Úkoly:

a) Implementujte Metropolisův-Hastingsův algoritmus zrození, zániku a migrace pro simulaci Straussova procesu na $E = [0, 1]^2$. Volte $q = 1/3$, $q_i(x, \cdot) = \frac{1}{\Lambda(E)}$, a parametry zrození a zániku stejně jako na přednášce.

b) Proveďte simulace pro několik voleb parametrů $R > 0$, $0 \leq \gamma < 1$ a $\beta > 0$. Dle chování řetězce určete burn-in (jako sledovanou veličinu použijte $x(E)$). Pomocí iterací řetězce (použijte např. každý tisící krok algoritmu) odhadněte $\mathbb{E}x(E)$.

Součástí řešení by měly být i příklady realizace bodového procesu pro některé volby parametrů.
Pozn.: Jedná se odpudivými interakcemi mezi body.

9. (**saturační proces**) Bodový proces se nazývá saturační proces, jestliže má vzhledem k standardnímu Poissonovu procesu hustotu

$$p(x) \propto \beta^{x(E)}\gamma^{u(x)},$$

kde

$$u(x) = \sum_{\xi \in x} \min(c, m_\xi(x))$$

a

$$m_\xi(x) = \sum_{\eta \in x, \eta \neq \xi} \mathbf{1}_{[\|\xi - \eta\| \leq R]}.$$

Dá se ukázat, že saturační proces je lokálně stabilní pro všechna $\beta > 0$, $\gamma \geq 0$ a $R > 0$.

Úkoly:

a) Navrhněte Metropolisův-Hastingsův algoritmus zrození a zániku pro simulaci saturačního procesu na $E = [0, 1]^2$.

b) Proveďte simulace pro několik voleb parametrů $R > 0$, $\gamma \geq 0$ a $\beta > 0$. Dle chování řetězce určete burn-in (jako sledovanou veličinu použijte $x(E)$). Pomocí iterací řetězce (použijte např. každý tisící krok algoritmu) odhadněte $\mathbb{E}x(E)$.

Pozn.: Pro $\gamma > 1$ se jedná o model shlukování bodů, pro $\gamma < 1$ se body odpuzují. Případ $\gamma = 1$ odpovídá Poissonovu procesu (úplná nezávislost).

10. (**filtrování OUCP**) Pro vybraný Lévyho proces (např. inverzní gaussovský) se simuluje na časovém intervalu realizace příslušného procesu Ornstein-Uhlenbeckova (OU) typu a bodového Coxova procesu řízeného OU procesem. Odsud se metodou MCMC provede filtrování OU intenzity Coxova procesu.

11. (**statistika OUCP**) Pro vybraný Lévyho proces (např. Gamma) se simuluje na časovém intervalu realizace příslušného procesu Ornstein-Uhlenbeckova (OU) typu a bodového Coxova procesu řízeného OU procesem. Odsud se užitím MCMC provede odhad parametrů modelu metodou maximální věrohodnosti.