Úlohy ke cvičení STP139 – 1. simulace

1. Popište, jak byste generovali z následujících rozdělení:
(a) hypergeometrické,
(b) negativně binomické,
(c) multinomické.

2. Obecné Weibullovo rozdělení má hustotu

$$f(x) = \lambda\alpha(x-\mu)^{\alpha-1}\exp\{-\lambda(x-\mu)^{\alpha}\}, \quad x \geq \mu,$$

kde $\alpha > 0$ je parametr tvaru, $\mu \in \mathbb{R}$ je parametr polohy a $\lambda > 0$ je parametr měřítka. Navrhněte metodu simulace z tohoto rozdělení.

3. (metoda podílu rovnoměrných) Nechť (X, Y) má rovnoměrné rozdělení na množině $\{(x, y) : 0 \leq x \leq \sqrt{f^*(y/x)}\}$, kde f^* je nezáporná integrovatelná funkce. Ukažte, že $Z = Y/X$ má rozdělení s hustotou

$$f(z) = \frac{f^*(z)}{\int f^*(u)\,\mathrm{d}u}.$$

Tento výsledek se dá použít k simulaci z hustoty, která je známá až na normující konstantu. Jak bude probíhat generování z Cauchyho rozdělení touto metodou?

4. (Γ zamítací metodou) Pro simulaci z rozdělení $\Gamma(\alpha, \lambda)$ daného hustotou

$$f(x) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}, \quad x \geq 0,$$

chceme použít zamítací metodu s pomocnou hustotou $\Gamma(n, \gamma)$, kde $n \in \mathbb{N}$. Jaké hodnoty n a γ je třeba zvolit? Jak bude vypadat konstanta M pro zvolená n a γ?

P1. Napište funkci, jejímž vstupem bude kladné číslo (intenzita) a výstupem hodnota vygenerovaná z Poissonova rozdělení s danou intenzitou.

P2. Napište skript, který bude generovat náhodný výběr z normovaného normálního rozdělení zamítací metodou pomocí hustoty Cauchyho rozdělení. Vygenerujte výběr o rozsahu 1000 a vykreslete odpovídající histogram spolu s hustotou $N(0, 1)$. Jaká je pravděpodobnost přijetí návrhu?

Úlohy ke cvičení STP139 – 2. Bayesova věta

Připomeňme, že Bayesova věta pro podmíněné hustoty má tvar

$$\pi(\theta \mid x) = \frac{f(x \mid \theta)\pi(\theta)}{\int f(x \mid \theta)\pi(\theta)\,\nu(\mathrm{d}\theta)},$$

kde $\pi(\theta)$ se nazývá apriorní hustota, $f(x \mid \theta)$ je věrohodnost a $\pi(\theta \mid x)$ je aposteriorní hustota.

1. Ukažte, že aposteriorní rozdělení $\pi(\theta \mid x, y)$ parametru θ nezávisí na pořadí, ve kterém byly x a y zpracovány, tj. když použijeme aposteriorní hustotu $\pi(\theta \mid x)$ jako apriorní pro pozorování y nebo když použijeme aposteriorní hustotu $\pi(\theta \mid y)$ jako apriorní pro pozorování x, dostaneme vždy stejné aposteriorní rozdělení $\pi(\theta \mid x, y)$.

2. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z $N(\mu, \sigma_0^2)$, kde rozptyl $\sigma_0^2 > 0$ je známá konstanta. Jako apriorní rozdělení pro parametr μ zvolme $N(a, b^2)$, kde hyperparametry a a b^2 jsou známé. Určete aposteriorní rozdělení μ. Jak by vypadalo aposteriorní rozdělení pro neurčité apriorní ($b^2 \to \infty$)?

3. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z $N(\mu, \sigma_0^2)$, kde rozptyl $\sigma_0^2 > 0$ je známá konstanta. Jako apriorní rozdělení pro parametr μ zvolme exponenciální se střední hodnotou 1. Určete aposteriorní rozdělení μ.

4. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z binomického rozdělení s parametry (m, θ), kde m je dané a apriorní rozdělení θ je beta rozdělení s pevnými parametry (a, b). Určete aposteriorní rozdělení θ.

5. Nechť X je náhodná veličina s Poissonovým rozdělením s intenzitou λ. Najděte Jeffreysovu hustotu a použijte ji k výpočtu aposteriorního rozdělení $\lambda \mid X$.