Úlohy ke cvičení STP139 – 3. konjugovanost a podmíněná konjugovanost

1. Mějme pozorování z Poissonova rozdělení s parametrem λ. Ukažte, že rodina Γ-rozdělení je konjugovaná pro tento model.

2. Najděte systém konjugovaných rozdělení pro výběr z Γ-rozdělení.

3. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z $N(\mu, \sigma^2)$. Označme $\tau = \sigma^{-2}$. Určete aposteriorní rozdělení (μ, τ), pokud
(a) μ a τ jsou apriorně nezávislé, $\mu \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$ a $\tau \sim \Gamma(\alpha_0, \lambda_0)$,
(b) apriorní rozdělení je normální-gama $NG(\mu_0, \sigma_0^2, \alpha_0, \lambda_0)$, tj. $\mu \mid \tau \sim N(\mu_0, \sigma_0^2/\tau)$ a $\tau \sim \Gamma(\alpha_0, \lambda_0)$,
kde μ_0, σ_0^2, α_0 a λ_0 jsou známé hyperparametry. Rozhodněte, kdy se jedná o konjugovaný systém.

Určete podmíněné aposteriorní hustoty $\pi(\mu \mid \tau, x)$ a $\pi(\tau \mid \mu, x)$. Rozhodněte, ve kterém případě nastává podmíněná konjugovanost.

4. Mějme model normální lineární regrese

$$Y \mid \beta, \tau \sim N_n(X\beta, \tau^{-1} I_n), \quad \beta \in \mathbb{R}^d, \tau > 0,$$

kde X je matice vysvětlujících proměnných řádu $n \times d$ a je dáno apriorní rozdělení pro parametry (β, τ):
(a) β a τ jsou apriorně nezávislé, $\beta \sim N_d(b_0, B_0)$ a $\tau \sim \Gamma(n_0/2, n_0\sigma_0^2/2)$,
(b) mnohorozměrné normální-gama rozdělení $NG_d(b_0, B_0, n_0/2, n_0\sigma_0^2/2)$:

$$\beta \mid \tau \sim N_d(b_0, \tau^{-1} B_0), \quad \tau \sim \Gamma\left(\frac{n_0}{2}, \frac{n_0\sigma_0^2}{2}\right).$$

Ukažte, že β i τ jsou podmíněně konjugované.

V případě (b) ukažte, že se dokonce jedná o konjugovaný systém rozdělení. Konkrétně

$$\beta \mid y, \tau \sim N_d(b_1, \tau^{-1} B_1), \quad \tau \mid y \sim \Gamma\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_1\sigma_1^2}{2}\right),$$

kde $n_1 = n + n_0$, $n_1\sigma_1^2 = n_0\sigma_0^2 + (y - Xb_1)^T y + (b_0 - b_1)^T B_0^{-1} b_0$, $b_1 = B_1(B_0^{-1} b_0 + X^T y)$ a $B_1^{-1} = B_0^{-1} + X^T X$.
Návod: Využijte toho, že

$$(y - X\beta)^T (y - X\beta) = (\beta - \hat{\beta})^T X^T X (\beta - \hat{\beta}) + S_e,$$

kde $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y$ je maximálně věrohodný odhad parametru β a $S_e = (y - X\hat{\beta})^T (y - X\hat{\beta})$.

5. (Carlin, Louis, 2000) Pro data udávající roční počty důlních neštěstí ve Velké Británii uvažujeme následující hierarchický model:

$$\begin{aligned} X_i &\sim Po(\theta), \quad i = 1, \ldots, k, \\ X_i &\sim Po(\lambda), \quad i = k+1, \ldots, n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta &\sim \Gamma(a_1, b_1), \\ \lambda &\sim \Gamma(a_2, b_2), \\ k &\sim R(\{1, \ldots, n\}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 &\sim \Gamma(c_1, d_1), \\ b_2 &\sim \Gamma(c_2, d_2), \end{aligned}$$

kde $n, a_1, a_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ jsou známé konstanty, θ, λ a k jsou nezávislé a b_1 a b_2 jsou nezávislé. Popište aposteriorní rozdělení pomocí plných podmíněných rozdělení, tj. určete rozdělení $\theta \mid X, \lambda, b_1, b_2, k$; $\lambda \mid X, \theta, b_1, b_2, k$; $b_1 \mid X, \theta, \lambda, b_2, k$; $b_2 \mid X, \theta, \lambda, b_1, k$; $k \mid X, \theta, \lambda, b_1, b_2$, kde $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Které parametry jsou podmíněně konjugované?

Úlohy ke cvičení STP139 – 4. MCMC algoritmy

1. Nechť $X = (X_1, \dots, X_k)$ je k-rozměrný náhodný vektor se sdruženou hustotou f a předpokládejme, že umíme generovat z rozdělení
$$X_i \mid x_{-i} \sim f(x_i \mid x_{-i}), \quad i = 1, \dots, k.$$
Ukažte, že Gibbsův výběrový plán je ekvivalentní složení k Metropolisových-Hastingsových algoritmů s pravděpodobnostmi přijetí rovnými jedné.

2. Buď $X_i \sim Po(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, n$, nezávislé. Předpokládejme, že λ_i jsou apriorně nezávislé a navíc
$$\lambda_i \mid \theta_i \sim \Gamma(\alpha, \theta_i), \quad \theta_i \sim \Gamma(a, b), \quad i = 1, \dots, n.$$
Definujte Gibbsův výběrový plán pro simulaci z $\pi(\lambda_1, \theta_1, \dots, \lambda_n, \theta_n \mid x_1, \dots, x_n)$. Jak byste simulovali přímo z aposteriorního rozdělení?

3. Uvažujme lineární model
$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim N(0, \tau^{-1}), \quad i = 1, \dots, n,$$
kde $\beta = (\beta_0, \beta_1)^T \sim N_2(\mu, \Sigma)$ a $\tau \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ jsou nezávislé. Předpokládejme, že podmíněně při β a τ jsou Y_i nezávislé. Chceme generovat vzorek z aposteriorní hustoty $\pi(\beta, \tau \mid y_1, \dots, y_n)$,
(a) definujte Gibbsův výběrový plán,
(b) definujte Metropolisův-Hastingsův algoritmus.

4. Buď $s = (s_1, s_2)^T$ a uvažujme model
$$Y_s = \beta_0 + \beta_1 s_1 + \beta_2 s_2 + \varepsilon_s, \quad \varepsilon_s \sim N(0, \sigma^2),$$
kde
$$\mathrm{cov}(\varepsilon_s, \varepsilon_{s^*}) = \sigma^2 \exp\{-\kappa \left((s_1 - s_1^*)^2 + (s_2 - s_2^*)\right)^2\}, \quad \kappa > 0$$
a apriorní rozdělení je $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)^T \sim N_3(\mu, \Sigma)$, $\sigma^2 \sim \Gamma(a_\sigma, b_\sigma)$ a $\kappa \sim \Gamma(a_\kappa, b_\kappa)$, kde β, σ^2 a κ jsou nezávislé. Předpokládejme, že máme k dispozici pozorování $y = (y_{s^{(1)}}, \dots, y_{s^{(n)}})^T$. Chceme generovat z aposteriorního rozdělení s hustotou $\pi(\beta, \sigma^2, \kappa \mid y)$. Definujte vhodný MCMC algoritmus. Jak byste generovali z $Y_{s^{(n+1)}} \mid Y = y$?

5. Chcete generovat vzorek z $N(0, 1)$,
(a) definujte Metropolisův algoritmus s náhodnou procházkou a ověřte, že když zvětšujeme rozptyl návrhového rozdělení, pravděpodobnost přijetí návrhu klesá,
(b) definujte Metropolisův-Hastingsův algoritmus s nezávislými kroky (nezávislým výběrem).

6. Uvažujme AR(1) model:
$$X_t = \varphi X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{N},$$
kde $-1 < \varphi < 1$ a ε_t je reálný bílý šum s rozptylem σ^2, tj. $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ nezávislé. Předpokládejme, že apriorní rozdělení je $\varphi \sim R(-1, 1)$ a $\tau = \sigma^{-2} \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ a máme k dispozici pozorování $x = (x_1, \dots, x_n)^T$. Vytvořte MCMC algoritmus pro generování z aposteriorní hustoty $\pi(\varphi, \tau \mid x)$. Jak byste generovali z $X_{n+1} \mid X = x$?

7. (Casella, George, 1992) Nebezpečí bezstarostného používání Gibbsova výběrového plánu spočívá v tom, že plně podmíněná rozdělení nemusí určovat sdružené rozdělení. Nechť $X \mid Y = y \sim Exp(y)$ a $Y \mid X = x \sim Exp(x)$. Ukažte, že tyto podmíněná rozdělení neodpovídají žádnému pravděpodobnostnímu rozdělení, tedy neexistuje vlastní sdružená hustota (X, Y).

P1. (Carlin, Gelfand, Smith, 1992) Uvažujme zjednodušení modelu z úlohy 3.5. Nechť $X_i \sim Po(\theta)$, pro $i = 1, \dots, k$ a $X_i \sim Po(\lambda)$ pro $i = k+1, \dots, n$. Apriorní rozdělení pro θ, λ a k jsou nezávislá: $\theta \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, $\lambda \sim \Gamma(\gamma, \delta)$ a $k \sim R(\{1, \dots, n\})$, kde α, β, γ, δ, n jsou známé konstanty. V tomto případě lze analyticky vyjádřit marginální aposteriorní rozdělení.

Pro data s důlními katastrofami ($n = 112$) implementujte Gibbsův výběrový plán. Hyperparametry zvolte $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0.001$. Proveďte 5 100 iterací a příslušnou aproximaci aposteriorního rozdělení parametrů λ, θ a k (založenou na posledních 5 000 iteracích) graficky porovnejte se skutečným aposteriorním rozdělením (pro každý parametr zvlášť).