Úlohy ke cvičení STP139 – 6. ergodicita MCMC algoritmů

1. Pro cílovou hustotu $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ uvažujme Metropolisův algoritmus se symetrickou náhonou procházkou a návrhovou hustotou $q(x,y) = \frac{1}{2}$ pro $|x-y| < 1$. Ukažte, že algoritmus je geometricky ergodický (můžete použít driftovou funkci $V(x) = \mathrm{e}^{sx}$ pro vhodné s). Ukažte, že algoritmus není stejnoměrně ergodický.

2. Uvažujme jako cílové rozdělení centrované dvourozměrné normální rozdělení s jednotkovými rozptyly a korelací ρ ($\rho \neq 0$, $|\rho| < 1$). Označme $X^{(t)} = (X_1^{(t)}, X_2^{(t)})$ markovský řetězec generovaný odpovídajícím Gibbsovým výběrovým plánem. Potom platí $X_1^{(t)} \mid X_1^{(t-1)} \sim N(\rho^2 X_1^{(t-1)}, \sigma^2)$ pro nějakou konstantu σ^2. Určete tuto konstantu a ukažte, že Markovův řetězec $\{X_1^{(t)}\}$ tvořený jen první souřadnicí generovaných vektorů není stejnoměrně ergodický, ale je geometricky ergodický (můžete použít driftovou funkci $V(x) = x^2$).

Úlohy ke cvičení STP139 – 7. perfektní simulace

3. Pro algoritmus perfektní simulace definujeme celočíselnou náhodnou veličinu N^* předpisem

$$N^* = \min\{n : \text{řetězec startující v čase } -n \text{ splyne v čase } 0\}.$$

Pokud budeme volit startovací časy jako $N_k = k$, $k \in \mathbb{N}$, pak bude celkový čas potřebný ke generování použitého Markovova řetězce roven $1+2+\cdots+N^* = N^*(N^*+1)/2$, neboli roste se čtvercem N^*. Ukažte, že pokud použijeme $N_k = 2^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, bude celkový použitý čas omezený shora $4N^*$, čili poroste pouze lineárně a bude tedy tento postup mnohem efektivnější.

4. Připomeňme si, že pro daný markovský řetězec může existovat několik různých přechodových funkcí. Pro obyčejnou MCMC simulaci je výběr přechodové funkce nepodstatný, ale pro perfektní simulaci je často velmi závažný.

Uvažujme například markovský řetězec se stavovým prostorem $S = \{s_1, s_2\}$ a maticí přechodu

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Dvě možné volby přechodové funkce jsou

$$\Phi_1(s_i, x) = \begin{cases} s_1 & \text{pro } x \in [0, 1/2), \\ s_2 & \text{pro } x \in [1/2, 1], \end{cases} \quad \text{pro } i = 1, 2,$$

$$\Phi_2(s_1, x) = \begin{cases} s_1 & \text{pro } x \in [0, 1/2), \\ s_2 & \text{pro } x \in [1/2, 1], \end{cases} \quad \text{a} \quad \Phi_2(s_2, x) = \begin{cases} s_2 & \text{pro } x \in [0, 1/2), \\ s_1 & \text{pro } x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Pro algoritmus perfektní simulace volme $N_k = 2^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$. Ukažte, že při použití přechodové funkce Φ_1 algoritmus skončí (s pravděpodobností 1) hned v prvním kroku při běhu řetězce z času $-N_1 = -1$ do času 0, zatímco při použití přechodové funkce Φ_2 algoritmus nikdy neskončí.