

**Zápočtový domáci úkol**  
**Pravdepodobnosť a statistika (NMAI059)**  
**Zimný semestr 2009-10**

## Lyžovanie na Chopku

Fungovanie známeho a obľúbeného lyžiarskeho strediska na Chopku, v Nízkých Tatrách, by sa dalo zjednodušiť popísať nasledujúcim spôsobom: štvorsedačková lanovka zo stanice Záhradky vyváža lyžiarov do stanice Luková, kde sa vo výške takmer 1700 metrov nad morom môže každý lyžiar rozhodnúť a kopec buď zlyžovať dole, alebo využiť druhú lanovku, tentokrát dvojsedačku z Lukovej a dostať sa tak takmer až na vrchol Chopku. Štvorsedačková lanovka premáva od 9:00 nepretržite do 12:00<sup>1</sup>, pričom každých 20 sekúnd vyrazí z dolnej stanice práve jedna štvorsedačková kabínka. Dvojsedačková lanovka (medzi stanicami Luková a Chopok), premáva od 9:05 do 12:05 (päť minút totiž trvá štvorsedačka, kým dorazí zo stanice Záhradky do stanice Luková) a každých 20 sekúnd vyrazí zo stanice práve jedna dvojsedačka. Prví lyžiarovia začnú k dolnej lanovke prichádzať presne o 9:00 a budú k lanovke chodiť až do 12:00, k hornej lanovke dôjdu prví lyžiarovia o 9:05 a budú chodiť až do 12:05. Príchody lyžiarov na stanice lanovky považujeme za nezávislé náhodné veličiny.

Počet lyžiarov, ktorí dôjdu na dolnú stanicu Záhradky za jednotku času 5 sekúnd sa dá popísať Poissonovým rozdelením so strednou hodnotou 1.2, v čase od 9:00 do 10:00, strednou hodnotou 1 v čase od 10:00 do 11:00 a strednou hodnotou 0.8, v čase od 11:00 do 12:00. Počet lyžiarov, ktorí dôjdu na stanicu hornej lanovky na Lukovej je nasledujúci: Lyžiar, ktorý sa vyvezie z dolnej stanice sa s pravdepodobnosťou  $1/2$  rozhodne pokračovať a postaví sa teda do fronty na hornú lanovku a s pravdepodobnosťou  $1/2$  sa rozhodne zlyžovať dole. Okrem toho, k hornej lanovke prichádzajú dodatoční lyžiarovia (ktorí sa nevyviezli dolnou lanovkou), pričom doba medzi príchodmi týchto dodatočných lyžiarov k stanici hornej lanovky sa dá popísať exponenciálnym rozdelením, pričom v priemere dôjde jeden lyžiar raz za 20 sekúnd.

## Úlohy:

1. Nasimulujte príchody lyžiarov na dolnú aj hornú stanicu lanovky v čase ich premávky.
  - a) Zistite, koľko lyžiarov sa vyviezlo lanovkou zo Záhradok na Lukovu a koľko lyžiarov sa viezlo lanovkou z Lukovej až na Chopok. Pomocou dát odhadnite pravdepodobnosť, že lyžiar, ktorý sa vezie hornou lanovkou z Lukovej na Chopok, sa predtým vyviezol dolnou lanovkou zo Záhradok na Lukovú.
  - b) Pomocou dát odhadnite pravdepodobnosť, že dolná štvorsedačková kabínka smerom na Lukovú bude plne obsadená. Určte bodový odhad a 95% intervalový odhad.
  - c) Otestujte nulovú hypotézu, že počet lyžiarov vyvezených oboma lanovkami za 5 minút prevádzky lze považovať za náhodnú veličinu s normálnym rozdelením. Nakreslite histogram a do histogramu vykreslite príslušnú hustotu.
  - d) Otestujte nulovú hypotézu, že počet lyžiarov, ktorí dôjdu na dolnú stanicu v Záhradkách za 5 minút, lze považovať za náhodnú veličinu s normálnym rozdelením. Nakreslite histogram a do histogramu vykreslite príslušnú hustotu.

---

<sup>1</sup>Prevádzka od 9:00 do 12:00 znamená, že o 9:00 vyrazí zo stanice prvá lanovka a o 12:00 zatvoria vstup do lanovky, pričom lanovka vyvezie ešte všetkých lyžiarov čakajúcich už vo fronte, až potom sa formálne zastaví. Prvá sedačka, ktorá ale vyrazí zo stanice (presne o 9:00 resp. o 9:05) je testovacia, je teda prázdna. Až nasledujúce sedačky sú postupne obsadzované podľa počtu lyžiarov čakajúcich vo fronte.

- e) Odhadnite strednú dobu čakania vo fronte<sup>2</sup> na lanovku v Záhradkách a tiež strednú dobu čakania vo fronte na lanovku na Lukovej. Je možné považovať doby lyžiarov strávené vo fronte za nezávislé náhodné veličiny?
- f) Nakreslite histogram časov medzi príchodmi lyžiarov na lanovku v Záhradkách a histogram počtu lyžiarov, ktorý dôjde na stanicu v Lukovej za jednu minúta. O aké rozdelenie ide? Svoje rozhodnutie zdôvodnite (napr. obrázkom) a odhadnite potrebné parametre tohto rozdelenia.
- g) Nakreslite grafy závislosti počtu lyžiarov čakajúcich vo fronte<sup>2</sup> na oboch staniaciach v závislosti na čase.

2. Pomocou znalosti z teórie pravdepodobnosti odpovedzte na otázky:

- a) Navrhните optimálnu 10-minútovú kapacitu lanovky Záhradky → Luková tak, aby pravdepodobnosť, že počet lyžiarov ktorí dorazia za 10-minút na stanicu bol maximálne 110% z danej 10-minútovej maximálnej kapacity. Maximálna možná frekvencia jász tejto lanovky je 15 sekúnd. Postačí navýšiť frekvenciu jász, alebo je nutné uvažovať o rozšírení štvorsedačky pre viacej osôb?
- b) Spočítajte stredný počet lyžiarov, ktorých za jeden deň vyvezie lanovka zo Záhradok na Lukovú. Ako vyzerá odhad založený na dátách?

## Pokyny k vypracování

- Vaše řešení musí obsahovat zejména **komentář** vašich statistických úvah s relevantními výstupy simulací a jejich interpretací. Velikost použitého fontu (v hlavních částech dokumentu) se musí pohybovat od 10 do 12 pt.
- Komentář řešení vyžadujeme v **souvislých** větách. Celý dokument musí být (včetně popisek tabulek a grafů) napsán konzistentně v jednom jazyce – čtete česky, slovensky, anglicky. Dokument tvořte v čem chcete (doporučujeme L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, ale s MS Wordem či OO Writerem to také asi půjde), ale nám pošlete jenom pdf! Obrázky zakomponujte do dokumentu, matematiku sázejte v kvalitě běžné v 21. století.
- Dále nám zašlete **váš komentovaný kód** použitý k analýzám a malování obrázků. Abychom si mohli vaše výsledky ověřit, nastavte *set.seed(ddmmyyyy)* podle vašeho data narození před prvním generováním náhodných čísel. Tento použitý *seed* nezapomeňte uvést ve svém řešení.
- Soubor s R kódem nazvěte **prijmeni\_jmeno.R**, soubor s hlavním komentářem nazvěte **prijmeni\_jmeno.pdf**. V názvech souborů **nepoužívejte** diakritiku! Oba soubory zabalte do souboru nazvaného **prijmeni\_jmeno.pripona** (přípona dle použitého kompresního programu) a pošlete **e-mailem** svému cvičícímu. Mějte na paměti, že v dnešní době odeslání e-mailu ještě neznamená jeho přijetí adresátem. Cvičící v přiměřené době obvykle potvrdí přijetí (maily však nečtete kontinuálně 24 hodin denně a často ani o víkendech). K balení prosím použijte výhradně jeden z programů: **zip, bzip2, gzip, tar -zcvf**.
- **Deadline** pro odeslání práce je **neděle 28. února 2010** (23:59 CET). Práce došlé po tomto datu nebudou akceptovány!!!
- Jedná se o **samostatnou** práci za kterou je možno získat maximálně 40 bodů.

V Praze 17. prosince 2009

---

<sup>2</sup>Pod pojmom **čakať vo fronte** sa rozumie, že lyžiar, ktorý došiel na stanicu sa nevošiel do sedačky, ktorá mala byť jeho - teda neodviezol sa sedačkou, ktorá prišla ako prvá potom, ako došiel na stanicu on. V okamžiku odchodu "jeho" sedačky sa zaradi lyžiar do fronty a čas jeho čakania je v ten ten moment rovný hodnote nula.