

Prostorové modelování, prostorová statistika 2 (NSTP154)

verze 28. 4. 2010

Obsah

Obsah	1
1. Úvod	2
2. Kótované bodové procesy	2
2.1 Základní definice	2
2.2 Modely kótování	5
2.3 Vícerozměrné bodové procesy	7
2.4 Procesy s kvantitativními kótami	9
2.5 Odhady charakteristik	11
2.6 Testy nezávislosti	12
3. Nehomogenní bodové procesy	14
3.1 Nekonečné bodové procesy	14
3.2 Konečné bodové procesy	15
3.3 Odhad parametrů modelu	18
3.4 Diagnostika modelu	22
Literatura	23

1. Úvod

Tato přednáška navazuje na přednášku *Prostorové modelování, prostorová statistika 1 (NSTP005)*, která se skládala ze tří částí: bodové procesy, geostatistika a prostorové modely na mříži. Každá z těchto tří částí bude rozšířena o další partie. U bodových procesů se budeme více zabývat jednak kótovanými a jednak nehomogenními bodovými procesy. Dále budou vysvětleny pokročilejší statistické postupy pro bodové procesy dané hustotou vzhledem k Poissonovu procesu (maximální věrohodnost, parametrické fitování modelu, diagnostika a testování hypotéz). V geostatistice bude rozšíření látky směřovat k hierarchickým modelům prostorových dat a užití bayesovského přístupu.

Budeme používat některé pojmy, značení a tvrzení, které se objevují v učebním textu [4] k předchozí přednášce.

2. Kótované bodové procesy

2.1 Základní definice

Kótovaný bodový proces dostaneme z bodového procesu, pokud každému bodu přiřadíme určitou veličinu (tzv. kótu).

Definice 1. Uvažujme úplný separabilní metrický prostor \mathcal{M} , kterému budeme říkat *prostor kót* (*mark space*), jeho příslušnou borelovskou σ -algebru označíme jako \mathfrak{M} . Definujme prostor lokálně konečných podmnožin $\mathbb{R}^d \times \mathcal{M}$ jako $\mathcal{N}_{\mathcal{M}} = \{\psi \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathcal{M} : \psi(B \times \mathcal{M}) < \infty \forall B \in \mathcal{B}_0^d\}$, kde $\psi(B \times L)$ označuje počet bodů množiny $\psi \cap (B \times L)$, $B \in \mathcal{B}_0^d$, $L \in \mathfrak{M}$. Na $\mathcal{N}_{\mathcal{M}}$ lze zavést σ -algebru následovně: $\mathfrak{N}_{\mathfrak{M}} = \sigma\{\{\psi \in \mathcal{N}_{\mathcal{M}} : \psi(B \times L) = m\}, m \in \mathbb{N}_0, B \in \mathcal{B}_0^d, L \in \mathfrak{M}\}$. *Kótovaný bodový proces* (*marked point process*) Ψ je měřitelné zobrazení $\Psi : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathcal{N}_{\mathcal{M}}, \mathfrak{N}_{\mathfrak{M}})$, kde $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ je pravděpodobnostní prostor. Pro každý kótovaný bodový proces můžeme uvažovat příslušný *nekótovaný bodový proces* (*unmarked point process*) nebo také *základový proces* (*ground process*) Φ vztahem $\Phi(B) = \Psi(B \times \mathcal{M})$, $B \in \mathcal{B}^d$.

Poznámka: V češtině se někdy používá místo slova *kóta* označení *značka* a mluví se o *značkováných bodových procesech*.

Kótovaný bodový proces je náhodná lokálně konečná množina bodů v \mathbb{R}^d , které jsou opatřeny náhodnými kótami z prostoru \mathcal{M} . Jedná se vlastně o bodový proces na prostoru $\mathbb{R}^d \times \mathcal{M}$ takový, že $\Phi(B) = \Psi(B \times \mathcal{M}) < \infty$ pro každé $B \in \mathcal{B}_0^d$. Je třeba si uvědomit, že ne každý bodový proces na $\mathbb{R}^d \times \mathcal{M}$ je kótovaný bodový proces. Například když za prostor kót vezmeme $\mathcal{M} = \mathbb{R}$ a budeme uvažovat stacionární Poissonův bodový proces na \mathbb{R}^{d+1} (poslední složka odpovídá kótě) s kladnou intenzitou, tak pro ten je počet bodů v množině $B \times \mathcal{M}$ ($B \in \mathcal{B}_0^d$, $|B| > 0$) skoro jistě nekonečný.

Nekótovaný bodový proces Φ dostaneme z procesu Ψ , pokud zapomeneme na kóty a bereme do úvahy pouze polohy bodů. Mohlo by se stát, že námi definovaný kótovaný bodový proces bude obsahovat (X, M_1) a (X, M_2) , kde $X \in \mathbb{R}^d$ a $M_1 \neq M_2$ jsou dvě různé kóty z prostoru \mathcal{M} . Pak by proces Φ nebyl jednoduchý (bod X by byl počítán dvakrát). Proto budeme vždy předpokládat, že $\Phi(\{x\}) \leq 1$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$.

Alternativně by šlo kótovaný bodový proces definovat jako lokálně konečnou náhodnou míru Ψ na $\mathbb{R}^d \times \mathcal{M}$ splňující $\Psi(B \times \mathcal{M}) < \infty$ pro každé $B \in \mathcal{B}_0^d$. Dá se ukázat, že každá lokálně konečná míra je konečným nebo spočetným součtem Diracových měr a jednotlivé atomy mohou být očíslovány měřitelným způsobem ([7], Lemma 3.1.3), tj.

$$\Psi = \sum_{i=1}^{\Psi(\mathbb{R}^d \times \mathcal{M})} \delta_{(X_i, M_i)}. \quad (1)$$

Někdy bude pro nás výhodné této skutečnosti využít a budeme na kótovaný bodový proces nahlížet jako na konečnou nebo spočetnou posloupnost $\Psi = \{(X_i, M_i)\}$.

Prostor kót může být celkem komplikovaný, často se však vyskytují diskrétní nebo kategorické kóty. Pokud je \mathcal{M} konečná množina, můžeme její prvky bez újmy na obecnosti očíslovat $1, \dots, k$.

Definice 2. Kótovaný bodový proces Ψ s prostorem kót $\mathcal{M} = \{1, \dots, k\}$ označujeme jako *vícerozměrný bodový proces* (*multitype point process*, *multivariate point process*). Lze na něj pohlížet jako na k -tici bodových procesů na \mathbb{R}^d : $\Psi = (\Phi_1, \dots, \Phi_k)$, kde $\Phi_i = \{X : (X, \{i\}) \in \Psi\}$, $i = 1, \dots, k$.

Poznámka: Pokud chceme zdůraznit počet složek, mluvíme o *k-rozměrném bodovém procesu* (speciálně dvourozměrném, trojrozměrném atd.).

Stacionární kótované bodové procesy jsou takové, jejichž rozdělení je invariantní vůči transformacím, které posunou body procesu, ale zanechají kóty nezměněny. Podobně rozdělení izotropních kótovaných bodových procesů se nezmění po rotaci bodů kolem počátku v \mathbb{R}^d a zachování kót.

Definice 3. Řekneme, že kótovaný bodový proces Ψ je *stacionární (stationary)*, jestliže rozdělení $\Psi + y = \{(X + y, M) : (X, M) \in \Psi\}$ je stejné jako rozdělení Ψ pro libovolné $y \in \mathbb{R}^d$. Kótovaný bodový proces Ψ je *izotropní (isotropic)*, jestliže rozdělení $\mathcal{O}\Psi = \{(\mathcal{O}X, M) : (X, M) \in \Psi\}$ a Ψ mají stejné rozdělení pro libovolnou rotaci \mathcal{O} kolem počátku.

Poznámka: Pokud je Ψ stacionární (izotropní) kótovaný bodový proces, potom i příslušný nekótovaný bodový proces Φ je stacionární (izotropní). Intenzitou stacionárního kótovaného bodového procesu pak rozumíme intenzitu bodového procesu Φ .

Podobně jako pro nekótované bodové procesy lze pro kótované bodové procesy zavést míru intenzity, momentové míry vyšších řádů nebo Palmovo rozdělení. Analogicky platí Campbellova a Campbellova-Meckeho věta.

Definice 4. *Míra intenzity (intensity measure)* kótovaného bodového procesu Ψ je definována předpisem

$$\Lambda_\Psi(B \times L) = \mathbb{E}\Psi(B \times L), \quad B \in \mathcal{B}^d, L \in \mathfrak{M},$$

neboli $\Lambda_\Psi(B \times L)$ je střední počet bodů procesu v množině B , které mají kótu v množině L .

Lemma 1. *Je-li Ψ stacionární kótovaný bodový proces s konečnou a kladnou intenzitou λ , pak existuje (jednoznačně určená) pravděpodobnostní míra Λ_o na \mathcal{M} tak, že míra intenzity procesu Ψ má tvar*

$$\Lambda_\Psi(B \times L) = \lambda|B|\Lambda_o(L), \quad B \in \mathcal{B}^d, L \in \mathfrak{M}. \quad (2)$$

Důkaz: Pro každou $L \in \mathfrak{M}$ uvažujme míru $\mu_L(B) = \Lambda_\Psi(B \times L)$. Z předpokladu stacionarity plyne, že je to translačně invariantní míra na \mathbb{R}^d , a proto je násobkem Lebesgueovy míry: $\mu_L(B) = \lambda_L|B|$. Položíme-li $\Lambda_o(L) = \frac{\lambda_L}{\lambda}$, tak snadno nahlédneme, že Λ_o je pravděpodobnostní míra, která splňuje (2). \square

Definice 5. Pravděpodobnostní míra Λ_o z lemmatu 1 se nazývá *stacionární rozdělení kót (stationary mark distribution)*. Náhodný element M_o v prostoru \mathcal{M} (měřitelné zobrazení z $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ do $(\mathcal{M}, \mathfrak{M})$) s rozdělením Λ_o budeme nazývat *typická kóta (typical mark)*.

Věta 2. (Campbellova věta prvního řádu pro stacionární kótované procesy) *Nechť Ψ je stacionární kótovaný bodový proces a h je nezáporná měřitelná funkce na $\mathbb{R}^d \times \mathcal{M}$. Pak platí*

$$\mathbb{E} \sum_{(X, M) \in \Psi} h(X, M) = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathcal{M}} h(x, m) \Lambda_o(dm) dx.$$

Důkaz: Pro indikátory plyne dokazovaná rovnost z (2). Zbytek důkazu probíhá standardním postupem teorie míry.

Definice 6. Pro kótovaný bodový proces Ψ je *momentová míra n -tého řádu (n -th order marked moment measure)* dána vztahem

$$M_\Psi^{(n)}(A \times C) = \mathbb{E} \sum_{(X_1, M_1), \dots, (X_n, M_n) \in \Psi} \mathbf{1}_{[(X_1, \dots, X_n) \in A, (M_1, \dots, M_n) \in C]}, \quad A \in (\mathcal{B}^d)^n, C \in \mathfrak{M}^n$$

a *faktoriální momentová míra n -tého řádu (n -th order factorial moment measure)* vztahem

$$\alpha_\Psi^{(n)}(A \times C) = \mathbb{E} \sum_{(X_1, M_1), \dots, (X_n, M_n) \in \Psi}^{\neq} \mathbf{1}_{[(X_1, \dots, X_n) \in A, (M_1, \dots, M_n) \in C]}, \quad A \in (\mathcal{B}^d)^n, C \in \mathfrak{M}^n,$$

kde symbol \sum^{\neq} znamená, že se počítá pouze přes n -tice navzájem různých dvojic. Existuje-li hustota $\lambda_\Psi^{(n)}$ faktoriální momentové míry $\alpha_\Psi^{(n)}$ vzhledem k Lebesgueově míře, pak se nazývá *součinnová hustota n -tého řádu (n -th order product density)*.

Definice 7. Pro kótovaný bodový proces Ψ definujeme *dvoubodové rozdělení kót* (*two-point mark distribution*) $P_{x_1x_2}$ v bodech $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$, $x_1 \neq x_2$, pomocí vztahu

$$\alpha_{\Psi}^{(2)}(B_1 \times B_2 \times L_1 \times L_2) = \int_{B_1 \times B_2} P_{x_1x_2}(L_1 \times L_2) \alpha^{(2)}(d(x_1, x_2)),$$

$B_1, B_2 \in \mathcal{B}^d$, $L_1, L_2 \in \mathfrak{M}$, kde $\alpha^{(2)}(B_1 \times B_2) = \alpha_{\Psi}^{(2)}(B_1 \times B_2 \times \mathcal{M} \times \mathcal{M})$ je faktoriální míra druhého řádu nekótovaného bodového procesu Φ .

Poznámka: Pro pevné $L_1, L_2 \in \mathfrak{M}$ je zřejmě míra $\alpha_{\Psi}^{(2)}(\cdot \times \cdot \times L_1 \times L_2)$ absolutně spojitá vzhledem k míře $\alpha^{(2)}(\cdot \times \cdot)$. Pokud předpokládáme, že $\alpha^{(2)}$ je σ -konečná míra, pak (pro pevné $L_1, L_2 \in \mathfrak{M}$) existuje Radonova-Nikodymova hustota $P_{x_1x_2}(L_1 \times L_2)$. Podobně jako u zavedení Palmova rozdělení můžeme uvažovat regulární verzi, tj. takovou, že pro pevné $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$ je $P_{x_1x_2}(\cdot \times \cdot)$ pravděpodobnostní míra.

Poznámka: Dvoubodové rozdělení kót můžeme interpretovat jako rozdělení kót v bodech x_1 a x_2 za podmínky, že x_1 a x_2 jsou body procesu. Pokud je Ψ stacionární a izotropní, závisí rozdělení $P_{x_1x_2}$ jen na vzdálenosti $r = \|x_1 - x_2\|$ bodů x_1 a x_2 . V tom případě budeme místo $P_{x_1x_2}$ psát P_{or} . Střední hodnotu vzhledem k P_{or} budeme značit \mathbb{E}_{or} .

Definice 8. Nechť Ψ je kótovaný bodový proces s mírou intenzity Λ_{Ψ} . Definujeme *kótovanou Campbellovu míru* (*marked Campbell measure*) předpisem

$$\begin{aligned} C_{\Psi}(B \times L \times U) &= \mathbb{E} \sum_{(X, M) \in \Psi} \mathbf{1}_{[(X, M, \Psi) \in B \times L \times U]} \\ &= \mathbb{E} \mathbf{1}_{[\Psi \in U]} \Psi(B \times L), \quad B \in \mathcal{B}^d, L \in \mathfrak{M}, U \in \mathfrak{N}_{\mathfrak{M}} \end{aligned}$$

a *redukovanou kótovanou Campbellovu míru* (*reduced marked Campbell measure*) vztahem

$$C_{\Psi}^l(B \times L \times U) = \mathbb{E} \sum_{(X, M) \in \Psi} \mathbf{1}_{[(X, M, \Psi \setminus \{(X, M)\}) \in B \times L \times U]}, \quad B \in \mathcal{B}^d, L \in \mathfrak{M}, U \in \mathfrak{N}_{\mathfrak{M}}.$$

Tvrzení 3. Nechť Ψ je kótovaný bodový proces takový, že nekótovaný bodový proces má σ -konečnou míru intenzity $\Lambda(\cdot) = \Lambda_{\Psi}(\cdot \times \mathcal{M})$. Potom existuje markovské jádro $(x, m) \mapsto P_x^m$ z $(\mathbb{R}^d \times \mathcal{M}, \mathcal{B}^d \times \mathfrak{M})$ do $(\mathcal{N}_{\mathcal{M}}, \mathfrak{N}_{\mathfrak{M}})$ takové, že

$$C_{\Psi}(B \times L \times U) = \int_{B \times L} P_x^m(U) \Lambda_{\Psi}(d(x, m)), \quad B \in \mathcal{B}^d, L \in \mathfrak{M}, U \in \mathfrak{N}_{\mathfrak{M}}.$$

Analogicky existuje markovské jádro $x \mapsto P_x^{lm}$ takové, že

$$C_{\Psi}^l(B \times L \times U) = \int_{B \times L} P_x^{lm}(U) \Lambda_{\Psi}(d(x, m)), \quad B \in \mathcal{B}^d, L \in \mathfrak{M}, U \in \mathfrak{N}_{\mathfrak{M}}.$$

Důkaz: Lze nalézt v [1], kap. 12 nebo [5], kap. 7. □

Definice 9. Rozdělení P_x^m z tvrzení 3 se nazývá *Palmovo rozdělení* (*Palm distribution*) kótovaného bodového procesu Ψ v bodě x s kótou m . Rozdělení P_x^{lm} je *redukované Palmovo rozdělení* (*reduced Palm distribution*) procesu Ψ v bodě x s kótou m .

Poznámka: Palmovo rozdělení P_x^m pro kótovaný bodový proces lze interpretovat jako podmíněné rozdělení kótovaného bodového procesu za podmínky, že x je bodem procesu a jeho kóta je m . Pro redukované Palmovo rozdělení bod x s kótou m nezapočítáváme.

Věta 4. (*Campbellova-Meckeova věta pro kótované bodové procesy*) Pro kótovaný bodový proces Ψ a libovolnou nezápornou měřitelnou funkci h platí:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sum_{(X, M) \in \Psi} h(X, M, \Psi) &= \int_{\mathcal{N}_{\mathcal{M}}} \int_{\mathcal{M}} \int_{\mathbb{R}^d} h(x, m, \psi) C_{\Psi}(dx, dm, d\psi) \\ &= \int_{\mathcal{M}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathcal{N}_{\mathcal{M}}} h(x, m, \psi) P_x^m(d\psi) \Lambda_{\Psi}(dx, dm) \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sum_{(X,M) \in \Psi} h(X, M, \Psi \setminus \{(X, M)\}) &= \int_{\mathcal{N}_{\mathcal{M}}} \int_{\mathcal{M}} \int_{\mathbb{R}^d} h(x, m, \psi) C_{\Psi}^l(dx, dm, d\psi) \\ &= \int_{\mathcal{M}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathcal{N}_{\mathcal{M}}} h(x, m, \psi) P_x^{!m}(d\psi) \Lambda_{\Psi}(dx, dm). \end{aligned}$$

Důkaz: Pomocí standardních argumentů teorie míry. □

Pro stacionární kótované bodové procesy stačí obdobně jako u stacionárních nekótovaných bodových procesů uvažovat Palmovo rozdělení v počátku a využít invarianci vůči posunutí bodů (při zachování kót), tj. $P_x^m(U) = P_o^m(U - x)$, $P_x^{!m}(U) = P_o^{!m}(U - x)$, kde $U - x = \{(y - x, m) : (y, m) \in U\}$, $U \in \mathfrak{N}_{\mathfrak{M}}$, $x \in \mathbb{R}^d$. Symbolem \mathbb{E}_o^m (resp. $\mathbb{E}_o^{!m}$) budeme značit střední hodnotu vzhledem k P_o^m (resp. $P_o^{!m}$).

Někdy může být výhodnější podmiňovat tím, že v daném místě je bod procesu ne se specifikovanou kótou ale s kótou, která leží v určité množině.

Definice 10. Nechť Ψ je stacionární kótovaný bodový proces s intenzitou $0 < \lambda < \infty$ a stacionárním rozdělením kót Λ_o . Mějme $L \in \mathfrak{M}$ s $\Lambda_o(L) > 0$. Definujeme *Palmovo rozdělení vzhledem k množině kót L* vztahem

$$P_o^L(U) = \int_L P_o^m(U) \frac{\Lambda_o(dm)}{\Lambda_o(L)}, \quad U \in \mathfrak{N}_{\mathfrak{M}}.$$

Obdobně zavedeme *reduované Palmovo rozdělení vzhledem k množině kót L* jako

$$P_o^{!L}(U) = \int_L P_o^{!m}(U) \frac{\Lambda_o(dm)}{\Lambda_o(L)}, \quad U \in \mathfrak{N}_{\mathfrak{M}}.$$

Poznámka: Rozdělení P_o^L můžeme interpretovat jako podmíněné rozdělení kótovaného bodového procesu za podmínky, že v počátku leží bod procesu, který má kótu z množiny L . U rozdělení $P_o^{!L}$ tento bod v počátku nezapočítáváme. Střední hodnotu vzhledem k P_o^L (resp. $P_o^{!L}$) budeme značit \mathbb{E}_o^L (resp. $\mathbb{E}_o^{!L}$).

2.2 Modely kótování

Definici Poissonova bodového procesu lze přirozeně použít pro obecnější prostory než \mathbb{R}^d . V kontextu kótovaných bodových procesů budeme uvažovat Poissonův proces na $\mathbb{R}^d \times \mathcal{M}$, přičemž musíme zajistit, že počet nekótovaných bodů v omezené množině je konečný.

Definice 11. Nechť Λ_{Ψ} je difúzní míra na $\mathbb{R}^d \times \mathcal{M}$ taková, že $\Lambda_{\Psi}(B \times \mathcal{M}) < \infty$ pro každé $B \in \mathcal{B}_0^d$. Kótovaný bodový proces Ψ splňující podmínky

- (i) $\Psi(A)$ má Poissonovo rozdělení s parametrem $\Lambda_{\Psi}(A)$ pro každé $A \in \mathcal{B}_0^d \times \mathfrak{M}$,
 - (ii) $\Psi(A_1), \dots, \Psi(A_n)$ jsou nezávislé pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}_0^d \times \mathfrak{M}$ po dvou disjunktní,
- nazýváme *Poissonův kótovaný bodový proces* s mírou intenzity Λ_{Ψ} .

Poznámka: Nekótovaný bodový proces Φ je Poissonův bodový proces na \mathbb{R}^d s mírou intenzity $\Lambda(\cdot) = \Lambda_{\Psi}(\cdot \times \mathcal{M})$.

Poznámka: Je-li \mathcal{M} konečná množina, řekněme $\{1, \dots, k\}$, mluvíme o Poissonově vícerozměrném bodovém procesu $\Psi = (\Phi_1, \dots, \Phi_k)$. V tom případě tvoří všechny podprocesy Φ_i , $i = 1, \dots, k$, nezávislé Poissonovy bodové procesy na \mathbb{R}^d .

Jiný způsob, kterak lze obdržet Poissonův kótovaný bodový proces, vychází z tzv. nezávislého kótování. V tuto chvíli se bude hodit reprezentovat kótovaný bodový proces pomocí (1).

Definice 12. Kótovaný bodový proces $\Psi = \{(X_i, M_i)\}$ se nazývá *nezávisle kótovaný (independently marked)*, pokud náhodné kóty $\{M_i\}$ jsou nezávislé stejně rozdělené a nezávislé s nekótovaným bodovým procesem $\Phi = \{X_i\}$. Rozdělení Λ_o kót $\{M_i\}$ se nazývá *rozdělení kót (mark distribution)* kótovaného bodového procesu Ψ .

Věta 5. Nechť Ψ je nezávisle kótovaný bodový proces s rozdělením kót Λ_o . Potom jeho míra intenzity je

$$\Lambda_{\Psi}(B \times U) = \Lambda(B)\Lambda_o(U), \quad B \in \mathcal{B}^d, U \in \mathfrak{M},$$

kde Λ je míra intenzity nekótovaného bodového procesu Φ . Pokud je Ψ stacionární, tak rozdělení kót splývá se stacionárním rozdělením kót z definice 5.

Důkaz: Označme $\tau = \Psi(\mathbb{R}^d \times \mathcal{M}) = \Phi(\mathbb{R}^d)$. Pro $B \in \mathcal{B}^d$ a $U \in \mathfrak{M}$ je

$$\begin{aligned} \Lambda_\Psi(B \times U) &= \mathbb{E} \sum_{i=1}^{\tau} \delta_{(X_i, M_i)}(B \times U) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}} \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{[\tau=k]} \sum_{i=1}^k \delta_{(X_i, M_i)}(B \times U) \right] \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}} \sum_{i=1}^k \mathbb{E} \mathbf{1}_{[\tau=k]} \mathbf{1}_{[X_i \in B, M_i \in U]} = \sum_{k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}} \sum_{i=1}^k \mathbb{E} \mathbf{1}_{[\tau=k]} \mathbf{1}_{[X_i \in B]} \mathbb{E} \mathbf{1}_{[M_i \in U]} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}} \Lambda_o(U) \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{[\tau=k]} \sum_{i=1}^k \delta_{X_i}(B) \right] = \Lambda_o(U) \mathbb{E} \Phi(B) = \Lambda(B) \Lambda_o(U). \end{aligned}$$

Pro stacionární kótovaný bodový proces je $\Lambda(B) = \lambda|B|$. Z (2) tak plyne, že stacionární rozdělení kót splývá s rozdělením kót. □

Věta 6. Uvažujme nezávisle kótovaný bodový proces Ψ takový, že příslušný nekótovaný bodový proces Φ je Poissonův bodový proces na \mathbb{R}^d . Potom Ψ je Poissonův kótovaný bodový proces.

Důkaz: Prázdné pravděpodobnosti Poissonova kótovaného bodového procesu jsou $\exp\{-\Lambda_\Psi(A)\}$, $A \in \mathcal{B}_0^d \times \mathfrak{M}$. Opět označíme $\tau = \Psi(\mathbb{R}^d \times \mathcal{M}) = \Phi(\mathbb{R}^d)$ a spočteme prázdné pravděpodobnosti procesu Ψ :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Psi(A) = 0) &= \sum_{k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}} \mathbb{P}(\tau = k, \cap_{i=1}^k [(X_i, M_i) \notin A]) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}} \mathbb{E} \mathbf{1}_{[\tau=k]} \prod_{i=1}^k \mathbf{1}_{[(X_i, M_i) \notin A]} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}} \mathbb{E} \mathbf{1}_{[\tau=k]} \prod_{i=1}^k \int_{\mathcal{M}} \mathbf{1}_{[(X_i, m) \notin A]} \Lambda_o(dm) \\ &= \mathbb{E} \prod_{i=1}^{\tau} \int_{\mathcal{M}} \mathbf{1}_{[(X_i, m) \notin A]} \Lambda_o(dm) \\ &= \mathbb{E} \prod_{i=1}^{\tau} \left(1 - \int_{\mathcal{M}} \mathbf{1}_{[(X_i, m) \in A]} \Lambda_o(dm) \right). \end{aligned}$$

Nyní stačí využít toho, že pro Poissonův bodový proces na \mathbb{R}^d platí (viz cvičení)

$$\mathbb{E} \prod_{X \in \Phi} f(X) = \exp \left\{ - \int_{\mathbb{R}^d} (1 - f(x)) \Lambda(dx) \right\}$$

pro libovolnou měřitelnou funkci $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$. Dostaneme

$$\mathbb{P}(\Psi(A) = 0) = \exp \left\{ - \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathcal{M}} \mathbf{1}_{[(x, m) \in A]} \Lambda_o(dm) \Lambda(dx) \right\},$$

což je podle věty 5 přesně $\exp\{-\Lambda_\Psi(A)\}$. □

Předchozí věta říká, že aplikováním nezávislého kótování na Poissonův bodový proces obdržíme Poissonův kótovaný bodový proces. Ne každý Poissonův kótovaný bodový proces lze však získat tímto postupem. Podle věty 5 má výsledný proces míru intenzity součinnového tvaru. Poissonovy kótované bodové procesy s obecnou mírou intenzity nedostaneme nezávislým kótováním. Příslušný nekótovaný bodový proces je sice stále Poissonův, ale kóty mohou obecně záviset na polohách. Ovšem ve stacionárním případě tomu tak není.

Tvrzení 7. *Stacionární Poissonův kótovaný bodový proces je nezávisle kótovaný.*

Důkaz: [7], Theorem 3.5.8. □

Nezávislé kótování dává nejjednodušší model pro kótované bodové procesy: kóty jsou nezávislé na polohách a nezávislé navzájem mezi sebou. U vícerozměrných bodových procesů můžeme uvažovat jiný model, který významně využívá nezávislost.

Definice 13. Vícerozměrný bodový proces $\Psi = (\Phi_1, \dots, \Phi_k)$ splňuje *model náhodné superpozice (random superposition model)*, jestliže podprocesy Φ_1, \dots, Φ_k jsou nezávislé.

Nezávislé kótování a náhodná superpozice jsou obecně odlišné, ale splývají pro Poissonův vícerozměrný bodový proces.

Jeden z možných přístupů, který připouští závislé kóty, je geostatistické kótování.

Definice 14. Nechť Φ je bodový proces na \mathbb{R}^d a $\{M(x) : x \in \mathbb{R}^d\}$ je náhodné pole s hodnotami v prostoru kót \mathcal{M} , které je nezávislé s Φ . Potom $\Psi = \{(X, M(X)) : X \in \Phi\}$ je kótovaný bodový proces s *geostatistickým kótováním (geostatistical marking)* nebo také s *externím kótováním (external marking)*. Někdy se také používá označení *model náhodného pole (random field model)*.

Prostorové korelace v náhodném poli $\{M(x) : x \in \mathbb{R}^d\}$ způsobují korelovanost kót procesu Ψ . I když je model náhodného pole vhodný v řadě aplikací, tak předpoklad nezávislosti kót na polohách je celkem omezující pro reálné použití. V literatuře je popsáno několik speciálních modelů, které připouštějí závislosti mezi kótami a polohami. Stále se však jedná o rozvíjející se oblast prostorového modelování, která nabízí možnosti ke zkoumání a novým myšlenkám.

Jako příklad situace, kdy jsou kóty závislé na polohách, uveďme tzv. *zkonstruované kóty (constructed marks)*. Ty jsou vytvořeny určitým mechanismem z daných nekótovaných bodů. Konstrukce obvykle odráží geometrické rozmístění bodů. Nejjednodušším příkladem může být vzdálenost bodu procesu k nejbližšímu sousedu: $M(X) = d(X, \Phi \setminus \{X\})$, nebo počet dalších bodů procesu ve vzdálenosti menší než dané $r > 0$: $M(X) = \Phi(b(X, r)) - 1$. Složitější zkonstruované kóty mohou třeba být geometrické vlastnosti buněk Dirichletovy nebo Voronoiovy mozaiky.

Jiná třída modelů s kótami závislými na polohách se může získat *kótováním závislým na intenzitě (intensity-dependent marking)*, příklad bude na cvičení.

2.3 Vícerozměrné bodové procesy

V této podkapitole se budeme věnovat procesům s kvalitativními kótami. Pro určitost budeme předpokládat, že prostor kót je $\mathcal{M} = \{1, \dots, k\}$. Vícerozměrný bodový proces byl zaveden v definici 2. Omezíme se na stacionární případ a definujeme základní číselné a funkcionální popisné charakteristiky, které zachycují prostorové aspekty kót.

Uvažujme tedy stacionární vícerozměrný proces $\Psi = (\Phi_1, \dots, \Phi_k)$. Bodové procesy Φ_i jsou rovněž stacionární a označme jejich intenzity λ_i , $i = 1, \dots, k$. Nekótovaný bodový proces $\Phi = \cup_{i=1}^k \Phi_i$ má intenzitu $\lambda = \sum_{i=1}^k \lambda_i$. Stacionární rozdělení kót Λ_o je atomická míra na \mathcal{M} , označme $p_i = \Lambda_o(\{i\})$ pravděpodobnost kóty i . Podle (2) je $\mathbb{E}\Phi_i(B) = \Lambda_\Psi(B \times \{i\}) = \lambda p_i |B|$, a tudíž intenzita podprocesu Φ_i splňuje $\lambda_i = \lambda p_i$. Pravděpodobnost kóty i je dána podílem intenzity λ_i a celkové intenzity λ .

Nejprve zavedeme tři číselné charakteristiky. První dvě jsou určeny obecně pro k -rozměrné bodové procesy, poslední je definována pro dvourozměrné bodové procesy.

Definice 15. Nechť D_j je vzdálenost od počátku k nejbližšímu bodu procesu Φ_j . *Dvourozměrný index agregace (bivariate aggregation index)* nebo také *dvourozměrný Clarkův-Evansův index (bivariate Clark-Evans index)* je definován jako

$$CE_{ij} = \frac{d(\lambda_j \omega_d)^{1/d}}{\Gamma(1/d)} \mathbb{E}_o^i D_j, \quad i, j \in \{1, \dots, k\}.$$

Poznámka: Index udává podíl střední vzdálenosti typického bodu s kótou i k nejbližšímu bodu procesu s kótou j u zadaného procesu ku stejné veličině pro Poissonův vícerozměrný bodový proces se stejnými intenzitami. To znamená, že pro Poissonův vícerozměrný bodový proces je $CE_{ij} = 1$. Hodnoty $CE_{ij} > 1$ indikují odpuzování mezi body s kótami i a j , zatímco hodnoty $CE_{ij} < 1$ ukazují na jejich přitahování. V případě $i = j$ dostáváme index agregace bodového procesu Φ_i .

Definice 16. Uvažujme body nekótovaného procesu Φ a označme Z_i je i -tý nejbližší bod procesu od počátku. *Index míšení (mingling index)* bere do úvahy p nejbližších sousedů typického bodu a udává střední podíl těch, které jsou odlišného typu. Je definován jako

$$\bar{M}_p = \frac{1}{p} \mathbb{E}_o^{\text{!M}} \sum_{i=1}^p \mathbf{1}_{[M(o) \neq M(Z_i)]},$$

kde $M(o)$ označuje kótu počátku (neboli $(o, M(o)) \in \Psi$) a $M(Z_i)$ označuje kótu bodu Z_i (neboli $(Z_i, M(Z_i)) \in \Psi$).

Poznámka: Jestliže kolem typického bodu jsou spíše body s odlišnou kótou, pak index míšení nabývá velkých hodnot. Naopak v případě, že body s různými kótami mají tendenci se od sebe distancovat, nabývá index malých hodnot.

Definice 17. Uvažujme dvourozměrný bodový proces (tj. $k = 2$). Symbolem p_{ij} označme pravděpodobnost, že typický bod procesu má kótu i a jeho nejbližší soused má kótu j :

$$p_{ij} = P_o^{\text{!M}}(M(o) = i, M(Z_1) = j), \quad i, j = 1, 2.$$

Dále označme symbolem p_j pravděpodobnost, že nejbližší soused typického bodu má kótu j :

$$p_j = P_o^{\text{!M}}(M(Z_1) = j), \quad j = 1, 2.$$

Zřejmě platí $p_{.j} = p_{1j} + p_{2j}$ a $p_i = p_{i1} + p_{i2}$. *Dvourozměrný koeficient segregace (coefficient of segregation)* je definován jako

$$S = 1 - \frac{p_{12} + p_{21}}{p_1 p_2 + p_2 p_1}.$$

Poznámka: Koeficient segregace může nabývat hodnot z intervalu $[-1, 1]$. Jestliže jsou kóty nezávislé, pak $S = 0$. Pokud má nejbližší soused typického bodu vždy stejnou kótu jako typický bod procesu, potom $p_{12} = p_{21} = 0$ a $S = 1$. Naopak jestliže má nejbližší soused vždy jinou kótu než typický bod, pak $p_{11} = p_{22} = 0$ a $S < 0$. Přitom minimální $S = -1$ je dosaženo pro $p_1 = p_2 = 1/2$.

Nyní definujeme základní funkcionální charakteristiky pro stacionární vícerozměrné bodové procesy. Nechť $D_i(x) = d(x, \Phi_i)$ značí vzdálenost bodu x k nejbližšímu bodu procesu s kótou i . Nechť $D(x) = d(x, \Phi)$ značí vzdálenost bodu x k nejbližšímu bodu procesu s libovolnou kótou.

Definice 18. *Křížová distribuční funkce vzdálenosti nejbližšího souseda (cross nearest neighbour distance distribution function)* nebo také *křížová G-funkce* je dána vztahem

$$G_{ij}(r) = P_o^{\text{!i}}(D_j(o) \leq r), \quad r \geq 0.$$

Kondenzovanou G-funkci definujeme předpisem

$$G_i(r) = P_o^{\text{!i}}(D(o) \leq r), \quad r \geq 0.$$

Poznámka: Křížová G-funkce je distribuční funkce vzdálenosti bodu s kótou i k nejbližšímu sousedu s kótou j . Kondenzovaná G-funkce představuje distribuční funkci vzdálenosti bodu s kótou i k nejbližšímu bodu procesu s jakoukoli kótou.

Definice 19. Definujeme *křížovou J-funkci (cross J-function)* předpisem

$$J_{ij}(r) = \frac{1 - G_{ij}(r)}{1 - F_j(r)}, \quad r \geq 0 : F_j(r) < 1,$$

kde $F_j(r)$ je kontaktní distribuční funkce bodového procesu Φ_j . Dále zavedeme *kondenzovanou J-funkci* vztahem

$$J_i(r) = \frac{1 - G_i(r)}{1 - F(r)}, \quad r \geq 0 : F(r) < 1,$$

kde $F(r)$ je kontaktní distribuční funkce nekótovaného bodového procesu Φ .

Definice 20. *Křížovou K -funkci (cross K -function) $K_{ij}(r)$ definujeme pomocí vztahu*

$$\lambda_j K_{ij}(r) = \mathbb{E}_o^i \Phi_j(b(o, r) \setminus \{o\}), \quad r \geq 0,$$

kde λ_j je intenzita podprocesu Φ_j . *Kondenzovanou K -funkci $K_i(r)$ pak zadefinujeme předpisem*

$$\lambda K_i(r) = \mathbb{E}_o^i \Phi(b(o, r) \setminus \{o\}), \quad r \geq 0.$$

Poznámka: Znamená to, že $\lambda_j K_{ij}(r)$ představuje střední počet bodů s kótou j umístěných v kouli o poloměru r a středu v typickém bodě s kótou i . Pro $i = j$ dostaneme K -funkci podprocesu Φ_i . Podobně $\lambda K_i(r)$ označuje střední počet bodů (s libovolnou kótou) v kouli o poloměru r a středu v typickém bodě s kótou i , přitom střed nezapočítáváme.

Věta 8. *Pro křížovou K -funkci platí*

$$K_{ij}(r) = K_{ji}(r), \quad r \geq 0.$$

Důkaz: Bude doplněn. □

Definice 21. *Nechť existuje součinnová hustota druhého řádu $\lambda_\Psi^{(2)}$ stacionárního vícerozměrného bodového procesu Ψ . Budeme zkráceně psát $\lambda_{ij}^{(2)}(x, y) = \lambda_\Psi^{(2)}((x, i), (y, j))$. Ze stacionarity máme, že $\lambda_{ij}^{(2)}(x, y) = \lambda_{ij}^{(2)}(x - y)$ je funkcí rozdílu $x - y$. Definujeme *křížovou párovou korelační funkci (cross pair correlation function)* předpisem*

$$g_{ij}(x - y) = \frac{\lambda_{ij}^{(2)}(x - y)}{\lambda_i \lambda_j}.$$

Pokud je Ψ navíc izotropní, tak $g_{ij}(x - y) = g_{ij}(\|x - y\|)$ je funkcí $\|x - y\|$.

Poznámka: Pro $i = j$ dostáváme párovou korelační funkci podprocesu Φ_i . Křížovou párovou korelační funkci je přirozeně možné definovat i pro nestacionární vícerozměrné bodové procesy.

Věta 9. *Pro stacionární a izotropní vícerozměrný bodový proces je křížová párová korelační funkce symetrická: $g_{ij}(r) = g_{ji}(r)$. Dále platí následující vztah mezi křížovou párovou korelační funkcí a křížovou K -funkcí:*

$$g_{ij}(r) = \frac{K'_{ij}(r)}{\sigma_d r^{d-1}}, \quad r > 0.$$

Důkaz: Je analogický jako důkaz vztahu mezi párovou korelační funkcí a K -funkcí pro bodové procesy (věta 14 v [4], podrobněji viz cvičení). □

2.4 Procesy s kvantitativními kótami

Nyní přejdeme od kvalitativních kót ke kvantitativním. Budeme předpokládat, že prostor kót je $\mathcal{M} = \mathbb{R}$. V celé podkapitole bude Ψ stacionární kótovaný bodový proces s intenzitou λ a se stacionárním rozdělením kót Λ_o . Příslušný nekótovaný bodový proces jako obvykle značíme Φ . Opět definujeme základní číselné a funkcionální popisné charakteristiky. Samozřejmě můžeme použít běžně používané charakteristiky k tomu, abychom popsali stacionární rozdělení kót. Pokud je M_o typická kóta procesu Ψ , pak např. $F(t) = \Lambda_o((-\infty, t])$ je její distribuční funkce, $\mathbb{E}M_o = \int_{\mathbb{R}} m \Lambda_o(dm)$ je střední typická kóta a $\text{var } M_o$ je rozptyl typické kóty.

Definice 22. *Míra součtu kót (mark-sum measure) je definována jako*

$$S(B) = \sum_{(X, \mathcal{M}) \in \Psi} M \mathbf{1}_{[X \in B]}, \quad B \in \mathcal{B}^d.$$

Poznámka: Pokud jsou kóty nezáporné, jedná se o stacionární náhodnou míru na \mathbb{R}^d . Její intenzita je

$$\lambda_S = \mathbb{E}S([0, 1]^d) = \lambda \mathbb{E}M_o,$$

jak plyne z věty 2 s $h(x, m) = m\mathbf{1}_{[x \in [0,1]^d]}$.

Definice 23. Definujeme *index disperze součtu kót* (*index of mark-sum dispersion*) jako

$$\text{IMD} = \frac{\text{var } S(B)}{\lambda \mathbb{E}M_o |B|},$$

kde B je nějaká testovací množina, např. koule o poloměru r . Tento index udává podíl rozptylu součtu kót v množině B a odpovídající střední hodnoty.

Definice 24. Necht Z_1 je bod procesu Φ , který je nejbližší počátku. *Index součinu kót nejbližších sousedů* (*nearest-neighbour mark product index*) je dán jako

$$\text{NMP} = \frac{\mathbb{E}_o^{\text{!M}} M(o)M(Z_1)}{(\mathbb{E}M_o)^2},$$

kde $M(o)$ je kóta počátku a $M(Z_1)$ je kóta bodu Z_1 , tj. $(o, M(o)) \in \Psi$ a $(Z_1, M(Z_1)) \in \Psi$.

Poznámka: Hodnoty $\text{NMP} > 1$ indikují, že střední hodnota součinu kót typického bodu a jeho nejbližšího souseda je větší než součin středních kót, což znamená, že mezi body působí vzájemná stimulace. Jestliže jsou kóty typického bodu a nejbližšího souseda nezávislé, pak $\text{NMP} = 1$. Hodnoty $\text{NMP} < 1$ ukazují na vzájemnou inhibici mezi nejbližšími sousedy.

V následujícím budeme navíc uvažovat, že Ψ je izotropní kótovaný bodový proces.

Definice 25. Pro měřitelnou funkci $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zavedme *faktoriální momentovou míru druhého řádu příslušnou funkci f*

$$\alpha_f^{(2)}(B_1 \times B_2) = \mathbb{E} \sum_{(X_1, M_1), (X_2, M_2) \in \Psi}^{\neq} f(M_1, M_2) \mathbf{1}_{[X_1 \in B_1, X_2 \in B_2]}.$$

Předpokládejme, že existuje hustota $\lambda_f^{(2)}(x, y)$ této míry vzhledem k Lebesgueově míře. Ze stacionarity a izotropie plyne, že $\lambda_f^{(2)}(x, y) = \lambda_f^{(2)}(\|x - y\|)$ je funkcí $\|x - y\|$. Za předpokladu, že existuje i součinná hustota druhého řádu $\lambda^{(2)}$ procesu Φ definujme *nenormalizovanou f -korelační funkci kót* (*non-normalised f -mark correlation function*)

$$\kappa_f(r) = \frac{\lambda_f^{(2)}(r)}{\lambda^{(2)}(r)}, \quad r > 0 : \lambda^{(2)}(r) > 0.$$

Položíme-li

$$c_f = \int \int f(m_1, m_2) \Lambda_o(dm_1) \Lambda_o(dm_2)$$

a pokud $c_f \neq 0$, dostaneme *f -korelační funkci kót* (*f -mark correlation function*)

$$k_f(r) = \frac{\kappa_f(r)}{c_f}, \quad r > 0.$$

Poznámka: Nenormalizovaná f -korelační funkce kót může nabývat libovolných nezáporných hodnot, označení „korelační funkce“ je proto poněkud zavádějící.

Interpretace nenormalizované f -korelační funkce kót bude jasnější z následujícího lemmatu.

Lemma 10. *Necht Ψ je stacionární a izotropní kótovaný bodový proces. Označme $M(o)$ kótu počátku a $M(r)$ kótu libovolného bodu ve vzdálenosti r od počátku. Nenormalizovaná f -korelační funkci kót splňuje*

$$\kappa_f(r) = \mathbb{E}_{or} f(M(o), M(r)), \quad r > 0.$$

Důkaz: Bude na cvičení. □

Funkce $\kappa_f(r)$ tak vlastně představuje střední hodnotu funkce f kót dvojice bodů procesu, které jsou ve vzájemné vzdálenosti r . Rovněž je vidět, že normalizace c_f je volena tak, aby $k_f(r)$ byla rovna 1, kdykoli jsou kóty ve vzdálenosti r nezávislé. Speciální volbou funkce f se získají různé charakteristiky druhého řádu kótovaného bodového procesu. Uvedeme přehled nejčastěji používaných.

Definice 26. Pokud je střední typická kóta nenulová, tak definujeme *korelační funkci kót* (*mark correlation function*) předpisem

$$k_{mm}(r) = \frac{\mathbb{E}_{or} M(o)M(r)}{(\mathbb{E}M_o)^2}, \quad r > 0,$$

tj. jde o $k_f(r)$ s $f(m_1, m_2) = m_1 m_2$. V případě nenulové střední typické kóty zavedeme *r-funkci kót* (*r-mark function*) jako

$$k_m(r) = \frac{\mathbb{E}_{or} M(o)}{\mathbb{E}M_o}, \quad r > 0,$$

neboli $k_m(r) = k_f(r)$ s $f(m_1, m_2) = m_1$.

Variogram kót (*mark variogram*) definujeme předpisem

$$\gamma_m(r) = \frac{1}{2} \mathbb{E}_{or} (M(o) - M(r))^2, \quad r > 0,$$

neboli $\gamma_m(r) = \kappa_f(r)$ s $f(m_1, m_2) = \frac{1}{2}(m_1 - m_2)^2$. Volbou $f(m_1, m_2) = m_1$ dostáváme *E-funkci* (*E-function*)

$$E(r) = \mathbb{E}_{or} M(o), \quad r > 0.$$

Dále definujeme *V-funkci* (*V-function*) jako

$$V(r) = \mathbb{E}_{or} (M(o) - E(r))^2, \quad r > 0.$$

Poznámka: Funkce $E(r)$ udává střední kótu bodu, pro který existuje jiný bod procesu ve vzdálenosti r . Pokud jsou polohy a kóty závislé, tak existence jiného bodu ve vzdálenosti r může ovlivnit velikost kóty daného bodu. Znormováním střední typickou kótou dostaneme funkci $k_m(r)$.

2.5 Odhady charakteristik

Budeme předpokládat, že pozorujeme kótovaný bodový proces Ψ v omezeném okně $W \in \mathcal{B}_0^d$. Odhady charakteristik kótovaných bodových procesů jsou většinou buď přímočaré z definice, nebo stačí vhodně modifikovat odhady, které se používají u bodových procesů.

Například pro křížovou *G-funkci* a kondenzovanou *G-funkci* tak můžeme použít Kaplanův-Meierův odhad:

$$\begin{aligned} \widehat{G}_{ij}(r) &= 1 - \prod_{s \leq r} \left(1 - \frac{\#\{X \in \Phi_i : e_j(X) = s, e_j(X) \leq c(X)\}}{\#\{X \in \Phi_i : e_j(X) \geq s, c(X) \geq s\}} \right), \\ \widehat{G}_i(r) &= 1 - \prod_{s \leq r} \left(1 - \frac{\#\{X \in \Phi_i : e(X) = s, e(X) \leq c(X)\}}{\#\{X \in \Phi_i : e(X) \geq s, c(X) \geq s\}} \right), \end{aligned}$$

kde $c(x) = d(x, \partial W)$ je vzdálenost bodu x od hranice okna, $e_j(x) = d(x, \Phi_j \setminus \{x\})$ je vzdálenost bodu x k nejbližšímu bodu procesu Φ_j a $e(x) = d(x, \Phi \setminus \{x\})$ je vzdálenost bodu x k nejbližšímu bodu procesu (bez ohledu na kótu).

Odhad křížové a kondenzované *K-funkce* uvedeme ve tvaru s translační korekcí (jiné korekce na okrajové efekty by šly rovněž použít):

$$\begin{aligned} \widehat{K}_{ij}(r) &= \frac{1}{\widehat{\lambda}_i \widehat{\lambda}_j} \sum_{X \in \Phi_i \cap W, Y \in \Phi_j \cap W}^{\neq} \frac{\mathbf{1}_{[\|X-Y\| \leq r]}}{|W \cap (W + X - Y)|}, \\ \widehat{K}_i(r) &= \frac{1}{\widehat{\lambda}_i \widehat{\lambda}} \sum_{X \in \Phi_i \cap W, Y \in \Phi \cap W}^{\neq} \frac{\mathbf{1}_{[\|X-Y\| \leq r]}}{|W \cap (W + X - Y)|}. \end{aligned}$$

Přítom přirozený nestranný odhad intenzity podprocesu Φ_i je $\widehat{\lambda}_i = \Phi_i(W)/|W|$. Všimněte si, že takto definovaný odhad křížové *K-funkce* splňuje $\widehat{K}_{ij}(r) = \widehat{K}_{ji}(r)$.

Na závěr se ještě věnujme odhadu (nenormalizované) f -korelační funkce kót. Jádrový odhad hustoty faktoriální momentové míry druhého řádu příslušné funkci f má tvar

$$\widehat{\lambda}_f^{(2)}(r) = \sum_{X, Y \in \Phi \cap W}^{\neq} \frac{f(M(X), M(Y)) k_b(\|X - Y\| - r)}{\sigma_d r^{d-1} |W \cap (W + X - Y)|},$$

zatímco jádrový odhad součinnové hustoty druhého řádu je

$$\widehat{\lambda}^{(2)}(r) = \sum_{X, Y \in \Phi \cap W}^{\neq} \frac{k_b(\|X - Y\| - r)}{\sigma_d r^{d-1} |W \cap (W + X - Y)|},$$

kde k_b je zvolená jádrová funkce se šířkou pásma b . Nenormalizovanou f -korelační funkci kót tak můžeme odhadnout jako

$$\widehat{\kappa}_f(r) = \frac{\widehat{\lambda}_f^{(2)}(r)}{\widehat{\lambda}^{(2)}(r)}, \quad r > 0,$$

a f -korelační funkci kót jako

$$\widehat{k}_f(r) = \frac{\widehat{\kappa}_f(r)}{\widehat{c}_f}, \quad r > 0,$$

kde

$$\widehat{c}_f = \frac{1}{\Phi(W)^2} \sum_{X, Y \in \Phi \cap W} f(M(X), M(Y)).$$

2.6 Testy nezávislosti

Statistická analýza kótovaného bodového procesu většinou začíná testováním hypotézy, zda lze kóty považovat za nezávislé. Pokud ano, tak můžeme použít metody vyvinuté pro nezávislá data. Nejprve se tedy budeme věnovat testování nezávislosti kót. Poté zmíníme možnosti testování nezávislosti kót na polohách. Ze všeho nejdřív ale vysvětlíme obecně myšlenku simulačních (Monte Carlo) testů.

Dejme tomu, že chceme testovat hypotézu H_0 , že data odpovídají danému modelu. Uvažujme nějakou vhodnou statistiku T , jejíž odhad na základě dat označíme \hat{T} . Provedeme M simulací z modelu platného za H_0 a z každé simulací odhadneme statistiku T . Odhady $\hat{T}_1, \dots, \hat{T}_M$ uspořádáme podle velikosti od nejmenšího k největšímu, čímž dostaneme pořádkové statistiky $\hat{T}_{(1)} \leq \dots \leq \hat{T}_{(M)}$. Za nulové hypotézy jsou \hat{T} a $\hat{T}_1, \dots, \hat{T}_M$ nezávislé a stejně rozdělené, proto ze symetrie je pravděpodobnost, že \hat{T} bude menší než $\hat{T}_{(q)}$ rovna $q/(M+1)$. Chceme-li testovat hypotézu H_0 na hladině významnosti α , určíme takové q , pro které platí

$$\alpha = \frac{2q}{M+1}.$$

Hypotézu pak zamítáme, jestliže $\hat{T} \notin [\hat{T}_{(q)}, \hat{T}_{(M-q+1)}]$.

V bodových procesech se spíše pracuje s funkcionálními charakteristikami než s číselnými. Mějme nějakou funkcionální charakteristiku $S(r)$. Pro pevné r , které je nezávisle na datech předem zvolené, můžeme provést výše popsany Monte Carlo test s volbou $T = S(r)$. Tím ale využíváme jen zlomek informace, kterou nám dává odhad $S(r)$. Uvažujme odhad $S(r)$ na intervalu $[0, s]$, kde $s > 0$ je předem zvolená konstanta. Odhad $S(r)$ získaný z dat označíme $\hat{S}(r)$ a odhady spočtené z M simulací označíme $\hat{S}_1(r), \dots, \hat{S}_M(r)$. Předpokládejme, že za nulové hypotézy známe teoretický funkční předpis pro $S(r) = S_0(r)$. Určíme maximální odchylky, o které se odhady liší od teoretické funkce:

$$D = \sup_{0 \leq r \leq s} |\hat{S}(r) - S_0(r)|, \quad D_i = \sup_{0 \leq r \leq s} |\hat{S}_i(r) - S_0(r)|, \quad i = 1, \dots, M.$$

Hodnoty D_1, \dots, D_M seřadíme podle velikosti, čímž dostaneme pořádkové statistiky $D_{(1)} \leq D_{(2)} \leq \dots \leq D_{(M)}$. Nulovou hypotézu zamítáme, jestliže $D > D_{(M-q+1)}$, kde hodnota q je volena podle požadované hladiny testu: $\alpha = \frac{q}{M+1}$. Tomuto postupu se říká *simultánní Monte Carlo test* (*simultaneous Monte Carlo test*). Testování si můžeme představit také tak, že zkonstruujeme pás o šířce $2D_{(M-q+1)}$ kolem funkce $S_0(r)$ a pokud $\hat{S}(r)$ leží mimo tento pás pro nějaké $r \in [0, s]$, tak hypotézu zamítneme. Jiná

možnost je místo supremální vzdálenosti uvažovat integrální. Pro data a pro každou simulaci určíme integrální čtvercové odchylky od teoretické funkce:

$$D = \int_0^s (\hat{S}(r) - S_0(r))^2 dr, \quad D_i = \int_0^s (\hat{S}_i(r) - S_0(r))^2 dr, \quad i = 1, \dots, M.$$

Nulovou hypotézu zamítáme, jestliže $D > D_{(M-q+1)}$, kde hodnota q je volena podle požadované hladiny testu: $\alpha = \frac{q}{M+1}$.

Nyní se můžeme dostat k testování nezávislosti kót. Uvažujme nejprve dvourozměrný bodový proces $\Psi = (\Phi_1, \Phi_2)$. Nulová hypotéza nezávislosti kót se dá chápat dvěma způsoby:

1. nezávislé kótování – bodům bodového procesu Φ jsou nezávisle náhodně přiřazeny kóty 1 nebo 2,
2. náhodná superpozice (složení) – dva nezávislé bodové procesy Φ_1 a Φ_2 tvoří dvourozměrný bodový proces.

První situace je příklad *aposteriori kótování (marking a posteriori)* – popisujeme, jak vznikly kóty podmíněně při daných polohách bodů. Příkladem mohou být stromy v lese, které jsou nakaženy nějakou nemocí nebo zničeny větrem (kóta 1) nebo nejsou (kóta 2). V druhém případě jde o *apriorní kótování (marking a priori)* – kótovaný bodový proces je vytvořen určitým mechanismem.

Pro testování hypotézy, že Ψ je nezávisle kótovaný bodový proces se používá *metoda náhodného přerozdělení (random reallocation)*. Zafixujeme polohy pozorovaných bodů a vytvoříme nové kóty náhodným zpermutováním pozorovaných. Těchto permutací vygenerujeme celkem M a provedeme simultánní Monte Carlo test. Za hypotézy nezávislého kótování platí:

$$\begin{aligned} K(r) &= K_{11}(r) = K_{22}(r) = K_{12}(r) = K_1(r), \\ g(r) &= g_{11}(r) = g_{22}(r) = g_{12}(r), \\ G(r) &= G_1(r), \\ J(r) &= J_1(r), \end{aligned}$$

kde $K(r)$, $g(r)$, $G(r)$ a $J(r)$ jsou funkcionální charakteristiky nekótovaného bodového procesu Φ . Proto se jako vhodná popisná charakteristika jeví např. $S(r) = K_1(r) - K(r)$, pak totiž $S_0(r) = 0$.

Chceme-li testovat hypotézu náhodné superpozice procesů Φ_1 a Φ_2 , můžeme použít *metodu náhodného posunutí (random shift)*. Polohy bodů s kótou 1 zafixujeme a vygenerujeme M realizací podprocesu Φ_2 tak, že všechny jeho body současně náhodně posuneme o vektor s předem zvolenou délkou $R > 0$. Z každé takto vzniklé realizace dvourozměrného bodového procesu spočítáme odhad charakteristiky $S(r)$ a aplikujeme simultánní Monte Carlo test. Jako funkci $S(r)$ můžeme použít některou z křížových funkcionálních charakteristik. Za hypotézy náhodného složení platí:

$$\begin{aligned} K_{12}(r) &= \omega_d r^d, \\ g_{12}(r) &= 1, \\ G_{12}(r) &= F_2(r), \\ J_{12}(r) &= 1. \end{aligned}$$

V případě procesu s kvantitativními kótami můžeme hypotézu nezávislého kótování opět testovat pomocí metody náhodného přerozdělení. Jako testová statistika se hodí některá z f -korelačních funkcí kót. Pro stacionární a izotropní nezávisle kótované bodové procesy je $k_f(r) = 1$.

Na závěr této podkapitoly uvedeme dva testy nezávislosti kót a poloh v kótovaných bodových procesech s kvantitativními kótami. V případě nezávislosti lze vyšetřovat kóty a polohy zvlášť, což zjednodušuje statistickou analýzu.

První test pochází z článku [6] a je založen na faktu, že pro stacionární a izotropní kótovaný bodový proces s geostatistickým kótováním jsou funkce $E(r)$ a $V(r)$ konstantní. Pokud se odhady těchto funkcí z dat výrazně odlišují od konstantní funkce, svědčí to proti hypotéze nezávislosti kót a poloh. Pokud dodefinujeme $E(0) = \mathbb{E}M_o$ a $V(0) = \text{var } M_o$, pak můžeme provést simultánní Monte Carlo test s $S(r) = E(r) - E(0)$ nebo $S(r) = V(r) - V(0)$, přitom $S_0(r) = 0$.

I druhý test je založen na Monte Carlo testování. Byl navržen v článku [2]. Mějme realizaci $\psi = \{(x_1, m_1), \dots, (x_n, m_n)\}$ kótovaného bodového procesu Ψ pozorovaného v okně W . Předpokládejme, že data jsou uspořádána v jistém pevném pořadí. Nechť $\delta(x_i) = d(x_i, \{x_{i+1}, \dots, x_n\})$, $i = 1, \dots, n$, značí vzdálenost bodu x_i k nejbližšímu bodu procesu s vyšším indexem. Pro dané $r > 0$ vybereme ty body,

pro které $\delta(x_i) \leq r$. Počet takto vybraných bodů označme n_r . Je doporučeno volit r malé v porovnání se vzdálenostmi nejbližších sousedů. Protože výběr bodů nezávisí na kótách, za nulové hypotézy by průměr kót n_r vybraných bodů měl být blízko průměru jakýchkoli jiných n_r kót vybraných z celkového počtu n . Oproti tomu, pokud je hodnota kóty závislá na přítomnosti bodů v blízkém okolí, tak průměry kót bodů vybraných podle zavedeného kritéria a vybraných náhodně se budou významně lišit. Vygenerujeme M různých náhodných výběrů kót o rozsahu n_r a pro každý určíme průměr. Samotný test pak probíhá stejně jako u klasického Monte Carlo testu (za T bereme průměr n_r kót).

3. Nehomogenní bodové procesy

3.1 Nekonečné bodové procesy

Pro bodové procesy na \mathbb{R}^d jsme v [4] definovali několik základních popisných charakteristik. Převážná většina z nich byla určena pro stacionární bodové procesy. Pro nestacionární bodové procesy jsme zavedli funkci intenzity jako základní charakteristiku určenou pro popis vlastností prvního řádu. Z charakteristik druhého řádu pro nestacionární bodové procesy jsme definovali součinnou hustotu a párovou korelační funkci. Pro speciální třídu procesů, která připouští nekonstantní funkci intenzity, ale vyžaduje, aby charakteristiky druhého řádu byly invariantní vůči posunutím, můžeme definovat K -funkci zobecněním vztahu

$$\lambda K(r) = \mathbb{E} \sum_{X, Y \in \Phi}^{\neq} \frac{\mathbf{1}_{[X \in A, \|X - Y\| \leq r]}}{\lambda |A|}.$$

Definice 27. Nechť Φ je bodový proces s funkcí intenzity λ . Předpokládejme, že

$$\mathcal{K}_{inhom}(A) = \frac{1}{|B|} \mathbb{E} \sum_{X, Y \in \Phi}^{\neq} \frac{\mathbf{1}_{[X \in B, Y - X \in A]}}{\lambda(X)\lambda(Y)}, \quad A \in \mathcal{B}^d,$$

nezávisí na volbě $B \in \mathcal{B}^d$ s kladnou a konečnou Lebesgueovou mírou ($0 < |B| < \infty$). Potom se Φ nazývá *po převážení funkcí intenzity slabě stacionární (second order intensity reweighted stationary)* bodový proces. Pro takovýto proces můžeme zavést K -funkci

$$K_{inhom}(r) = \mathcal{K}_{inhom}(b(o, r)).$$

Věta 11. Každý stacionární proces Φ je po převážení funkcí intenzity slabě stacionární a $\mathcal{K}_{inhom}(A) = \mathcal{K}(A)$, kde \mathcal{K} je redukovaná momentová míra druhého řádu procesu Φ .

Důkaz: Pro pevné $A \in \mathcal{B}^d$ uvažujme míru

$$\nu(B) = \mathbb{E} \sum_{X, Y \in \Phi}^{\neq} \mathbf{1}_{[X \in B, Y - X \in A]},$$

Ze stacionarity Φ plyne, že ν je translačně invariantní, a proto je to násobek Lebesgueovy míry: $\nu(B) = \beta_A |B|$. Navíc je funkce intenzity procesu Φ konstantní, což znamená, že

$$\mathcal{K}_{inhom}(A) = \frac{\nu(B)}{|B|\lambda^2} = \frac{\beta_A}{\lambda^2}$$

nezávisí na volbě B . □

Věta 12. Nechť Φ je bodový proces na \mathbb{R}^d takový, že existuje párová korelační funkce a je invariantní vůči posunutím, tj. $g(x, y) = g(y - x)$. Potom Φ je po převážení funkcí intenzity slabě stacionární a

$$\mathcal{K}_{inhom}(B) = \int_B g(u) du, \quad B \in \mathcal{B}^d.$$

Důkaz: Postupně z Campbellovy věty, definice součinné hustoty a definice párové korelační funkce dostaneme

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{inhom}(A) &= \frac{1}{|B|} \int \int \frac{\mathbf{1}_{[x \in B, y-x \in A]}}{\lambda(x)\lambda(y)} \alpha^{(2)}(dx, dy) = \frac{1}{|B|} \int \int \frac{\mathbf{1}_{[x \in B, y-x \in A]}}{\lambda(x)\lambda(y)} \lambda^{(2)}(x, y) dx dy \\ &= \frac{1}{|B|} \int \int \mathbf{1}_{[x \in B, y-x \in A]} g(x, y) dx dy, \quad A \in \mathcal{B}^d.\end{aligned}$$

Protože $g(x, y) = g(y - x)$, máme po provedení substituce $u = y - x$ požadovaný vztah:

$$\mathcal{K}_{inhom}(A) = \frac{1}{|B|} \int \int \mathbf{1}_{[x \in B, u \in A]} g(u) dx du = \int_A g(u) du.$$

Vidíme, že $\mathcal{K}_{inhom}(A)$ nezávisí na volbě B . □

Důsledek 13. *Nechť Φ je bodový proces na \mathbb{R}^d takový, že existuje párová korelační funkce a je invariantní vůči posunutím a rotacím, tj. $g(x, y) = g(\|y - x\|)$. Potom*

$$g(r) = \frac{K'_{inhom}(r)}{\sigma_d r^{d-1}}.$$

Důkaz: Z věty 12 plyne

$$K_{inhom}(r) = \int_{b(o, r)} g(u) du.$$

S využitím izotropie a sférických souřadnic tak máme

$$K_{inhom}(r) = \int_{b(o, r)} g(\|u\|) du = \int_0^r \sigma_d s^{d-1} g(s) ds.$$

□

Odhad funkce $K_{inhom}(r)$ z dat lze provést stejnými postupy jako při odhadu K -funkce pro stacionární procesy, např. translačně korigovaný odhad má tvar

$$\widehat{K}_{inhom}(r) = \sum_{X, Y \in \Phi \cap W}^{\neq} \frac{\mathbf{1}_{[\|X-Y\| \leq r]}}{\widehat{\lambda}(X)\widehat{\lambda}(Y)|W \cap (W + X - Y)|},$$

kde $\widehat{\lambda}(x)$ je odhad funkce intenzity v bodě x . Oproti tomu translačně korigovaný odhad párové korelační funkce by (v případě izotropie) vypadal

$$\widehat{g}(r) = \frac{1}{\sigma_d r^{d-1}} \sum_{X, Y \in \Phi \cap W}^{\neq} \frac{k_b(\|X - Y\| - r)}{\widehat{\lambda}(X)\widehat{\lambda}(Y)|W \cap (W + X - Y)|}.$$

Po převážení funkcí intenzity slabě stacionární bodové procesy tvoří jednu třídu nestacionárních bodových procesů. Jiná konstrukce, která vede na nestacionární bodové procesy, je založena na nezávislém ztenčení. V zimním semestru jsme měli větu, která říká, že nezávislým ztenčením Poissonova bodového procesu s funkcí intenzity λ dostaneme opět Poissonův bodový proces, jehož funkce intenzity je $p\lambda$, kde funkce p určuje pravděpodobnost odebrání bodu.

3.2 Konečné bodové procesy

U konečných bodových procesů nemůžeme mluvit o stacionaritě. Pro konečné bodové procesy definované na omezené množině $B \in \mathcal{B}_0^d$ má ale smysl se ptát, jestli je funkce intenzity konstantní na B (tj. jestli je proces homogenní).

Uvažujme markovské bodové procesy s hustotou vzhledem k jednotkovému Poissonovu bodovému procesu na $B \in \mathcal{B}_0^d$. Z Hammersleyho-Cliffordovy-Ripleyho-Kellyho věty ([4], věta 20) víme, že hustota má tvar

$$p(\varphi) = \prod_{\psi \subseteq \varphi} g(\psi),$$

kde g je interakční funkce. Hodnota $g(\emptyset)$ slouží jako normující konstanta. Volbou $g(\psi) = \beta(x)$ pro $\psi = \{x\}$ a $g(\psi) = 1$ pro $|\psi| \geq 2$, dostáváme Poissonův bodový proces na B s funkcí intenzity $\beta(x)$. Jedná se tak o případ, kdy nehomogenita je způsobená nekonstantními interakcemi prvního řádu. Tento druh nehomogenity můžeme samozřejmě vnést i do procesů s interakcemi vyšších řádů, např. nehomogenní Straussův proces má hustotu

$$p(\varphi) = \alpha \prod_{x \in \varphi} \beta(x) \gamma^{s_R(\varphi)},$$

kde $s_R(\varphi) = \sum_{\{x,y\} \subseteq \varphi} \mathbf{1}_{[0 < \|x-y\| \leq R]}$. Další příklady nehomogenních bodových procesů lze opět obdržet nehomogenním ztenčením. My si uvedeme jiné dva způsoby, jak se dá z homogenního procesu vyrobit nehomogenní bodový proces: lokální škálování a transformace.

Lokální škálování

Označme $H = (H^0, \dots, H^d)$ vektor k -rozměrných Hausdorffových měr v \mathbb{R}^d . Pro $c > 0$ uvažujme přeskálovanou k -rozměrnou Hausdorffovu míru ($k = 0, \dots, d$)

$$H_c^k(A) = H^k(c^{-1}A), \quad A \in \mathcal{B}^d.$$

Položme $H_c = (H_c^0, \dots, H_c^d)$.

Definice 28. Nechť Φ je konečný bodový proces s hustotou p vzhledem k jednotkovému Poissonovu bodovému procesu na $B \in \mathcal{B}_0^d$. Předpokládejme, že $p(\varphi) \propto g(\varphi, H)$, kde funkce g je invariantní vůči měřítku, tj. $g(c\varphi, H_c) = g(\varphi, H)$ pro každé $\varphi \in \mathcal{N}_f$ a $c > 0$. Dále uvažujme funkci $c : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$ a zobecníme přeskálovanou k -rozměrnou Hausdorffovu míru ($k = 0, \dots, d$), přičemž značení ponecháme stejné jako v případě konstantního c ,

$$H_c^k(A) = \int_A c(u)^{-k} H^k(du), \quad A \in \mathcal{B}^d,$$

opět položíme $H_c = (H_c^0, \dots, H_c^d)$. Předpokládejme, že existují kladné konstanty c_1 a c_2 tak, že $0 < c_1 < c(u) < c_2$ pro každé $u \in \mathbb{R}^d$. Pokud je funkce $g(\varphi, H_c)$ integrovatelná vzhledem k rozdělení Π_c Poissonova bodového procesu s mírou intenzity H_c^d na B , tak definujeme lokálně škálovaný (locally scaled) bodový proces Φ_c na B se škálovací funkcí c a s vzorovým procesem Φ jako konečný bodový proces s hustotou

$$p^{(c)}(\varphi) \propto g(\varphi, H_c)$$

vzhledem k Π_c .

Poznámka: Hustota procesu Φ_c vzhledem k rozdělení jednotkového Poissonova bodového procesu na B je

$$p_c(\varphi) = \exp \left\{ - \int_B [c(u)^{-d} - 1] H^d(du) \right\} \prod_{x \in \varphi} c(x)^{-d} p^{(c)}(\varphi).$$

Klasické příklady homogenních bodových procesů mají hustotu invariantní vůči měřítku, a tak je můžeme volit jako vzorový proces Φ . Například pro Straussův proces je

$$g(\varphi, H) = \beta^{H^0(\varphi)} \gamma \sum_{\{x,y\} \subseteq \varphi} \mathbf{1}_{[0 < H^1([x,y]) \leq R]},$$

kde $[x, y]$ je úsečka s koncovými body x a y . Lokálně škálovaný Straussův proces Φ_c pak má hustotu

$$p^{(c)}(\varphi) \propto \beta^{\varphi(B)} \gamma^{s_R^{(c)}(\varphi)},$$

kde $s_R^{(c)}(\varphi) = \sum_{\{x,y\} \subseteq \varphi} \mathbf{1}_{[0 < H_c^1([x,y]) \leq R]}$.

Transformace

Věta 14. Necht' Φ je konečný bodový proces s hustotou p vzhledem k jednotkovému Poissonovu bodovému procesu na otevřené množině $B \in \mathcal{B}_0^d$. Necht' $A \in \mathcal{B}_0^d$ je otevřená a $h : B \rightarrow A$ je regulární a prosté zobrazení. Označme h^{-1} inverzní zobrazení k h a $J_{h^{-1}}$ jeho jakobián. Potom $h(\Phi) = \{h(X) : X \in \Phi\}$ je konečný bodový proces, jehož hustota vzhledem k jednotkovému Poissonovu bodovému procesu na A má tvar

$$p_h(\varphi) = p(h^{-1}(\varphi))e^{|A|-|\varphi|} \prod_{y \in \varphi} J_{h^{-1}}(y),$$

kde $h^{-1}(\varphi) = \{h^{-1}(y) : y \in \varphi\}$.

Důkaz: Použitím věty o transformaci dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(h(\Phi) \in U) &= e^{-|B|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_B \cdots \int_B \mathbf{1}_{\{h(x_1), \dots, h(x_n)\} \in U} p(\{x_1, \dots, x_n\}) dx_1 \cdots dx_n \\ &= e^{-|B|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_A \cdots \int_A \mathbf{1}_{\{y_1, \dots, y_n\} \in U} p(\{h^{-1}(y_1), \dots, h^{-1}(y_n)\}) \prod_{i=1}^n J_{h^{-1}}(y_i) dy_i \\ &= e^{-|A|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_A \cdots \int_A \mathbf{1}_{\{y_1, \dots, y_n\} \in U} p_h(\{y_1, \dots, y_n\}) dy_1 \cdots dy_n, \end{aligned}$$

kde členy pro $n = 0$ jsou $\mathbf{1}_{\{\emptyset \in U\}} p(\emptyset)$ a $\mathbf{1}_{\{\emptyset \in U\}} p_h(\emptyset)$. □

Důsledek 15. Necht' Φ je markovský bodový proces vzhledem k relaci \sim . Jeho hustotu vzhledem k jednotkovému Poissonovu bodovému procesu na $B \in \mathcal{B}_0^d$ můžeme vyjádřit pomocí interakční funkce g :

$$p(\varphi) = \prod_{\psi \subseteq \varphi} g(\psi).$$

Neht' $h : B \rightarrow A$ je regulární a prosté zobrazení. Potom $h(\Phi) = \{h(X) : X \in \Phi\}$ je markovský bodový proces vzhledem k indukované relaci \sim_h , která je definována tak, že

$$y_1 \sim_h y_2 \iff h^{-1}(y_1) \sim h^{-1}(y_2), \quad y_1, y_2 \in A.$$

Navíc hustota bodového procesu $h(\Phi)$ vzhledem k jednotkovému Poissonovu bodovému procesu na $A \in \mathcal{B}_0^d$ má tvar

$$p_h(\varphi) = \prod_{\psi \subseteq \varphi} g_h(\psi),$$

kde g_h je interakční funkce dána předpisem

$$g_h(\psi) = \begin{cases} g(\emptyset)e^{|A|-|\psi|}, & \psi = \emptyset, \\ g(h^{-1}(y))J_{h^{-1}}(y), & \psi = \{y\}, \\ g(h^{-1}(\psi)), & |\psi| \geq 2. \end{cases}$$

Důkaz: Tvar hustoty plyne z věty 14, zbývá ověřit, že g_h je interakční funkce vzhledem k relaci \sim_h . Aby ψ nebyla klika, musí být $|\psi| \geq 2$. V tom případě ale $g_h(\psi) = g(h^{-1}(\psi)) = 1$, protože $h^{-1}(\psi)$ není klika vzhledem k \sim . □

Všimněme si, že transformací vzniká nehomogenita v interakcích prvního řádu. Interakční struktura vyšší řádu zůstala zachována z původního procesu Φ .

Příklad: Uvažujme $A = B = (0, 1)^d$ a předpokládejme, že chceme nehomogenitu prvního řádu mít popsánu funkcí $\eta(y)$, $y \in B$. Pokud jsme schopni najít regulární a prostou funkci h takovou, že $\eta(y) = J_{h^{-1}}(y)$, potom podle důsledku 15 je $h(\Phi)$ markovský bodový proces s hustotou

$$p_h(\varphi) = \prod_{y \in \varphi} \eta(y) \prod_{\psi \subseteq h^{-1}(\varphi)} g(\psi).$$

Z věty o transformaci plyne, že

$$\int_A J_{h^{-1}}(y) dy = |B|,$$

proto v našem případě funkce $\eta(y)$ musí splňovat $\int_B \eta(y) dy = 1$. Speciálně se podívejme na případ, kdy nehomogenita je přidána nezávisle v každé složce ($\eta(y) = \eta_1(y_1) \cdots \eta_d(y_d)$) a je exponenciálního tvaru:

$$\eta_i(u) = \begin{cases} \frac{\theta_i e^{\theta_i u}}{e^{\theta_i} - 1} & \text{pro } \theta_i \neq 0, \\ 1 & \text{pro } \theta_i = 0, \end{cases} \quad u \in (0, 1), \quad i = 1, \dots, d.$$

Potom $h(x) = (h_1(x_1), \dots, h_d(x_d))$, kde

$$h_i(u) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_i} \log(1 + (e^{\theta_i} - 1)u) & \text{pro } \theta_i \neq 0, \\ 1 & \text{pro } \theta_i = 0, \end{cases} \quad u \in (0, 1), \quad i = 1, \dots, d.$$

$\theta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, d$. Pokud Φ je Straussův proces s hustotou

$$p(\varphi) = \alpha \beta^{\varphi(B)} \prod_{\{x, y\} \subseteq \varphi} \gamma^{\mathbf{1}_{[0 < \|x - y\| \leq R]}}$$

pak transformovaný proces $h(\Phi)$ má hustotu

$$p_h(\varphi) = \alpha \beta^{\varphi(B)} \prod_{y \in \varphi} \eta(y) \prod_{\{x, y\} \subseteq \varphi} \gamma^{\mathbf{1}_{[\|h^{-1}(x) - h^{-1}(y)\| \leq R]}}.$$

Obecněji lze transformaci h uvažovat mezi k -rozměrnými diferencovatelnými varietami v \mathbb{R}^d (viz [8]).

3.3 Odhad parametrů modelu

Ze statistické analýzy bodových procesů jsme se doposud věnovali pouze odhadům popisných charakteristik. V kapitole o kótovaných bodových procesech jsme pak narazili na testování hypotéz. Princip simulačních testů lze stejně dobře použít pro testování hypotézy, že pozorovaný vzorek odpovídá jistému modelu bodového procesu (například, že data tvoří Poissonův proces).

Další statistickou úlohou je vybrat vhodný model, který popisuje naše data. Dejme tomu, že rozdělení procesu Φ je parametrizováno vektorem θ neznámých parametrů. Naším cílem je najít odhad vektoru θ na základě realizace procesu Φ v omezeném okně $W \in \mathcal{B}_0^d$.

Metoda minimálního kontrastu

V několika málo případech je teoretický tvar nějaké popisné charakteristiky $S(r)$ známý a lze ho vyjádřit jako funkci parametrů modelu: $S(r) = S_\theta(r)$. Příkladem jsou popisné charakteristiky Poissonova procesu nebo například párová korelační funkce stacionárního Neymanova-Scottové procesu, o které víme, že splňuje

$$g(x) = 1 + \frac{1}{\lambda_p} \int p(y)p(y-x) dy, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

kde λ_p je intenzita rodičovského procesu a p je hustota bodů shluku. Pokud má funkce p parametrický tvar (jako např. u Thomasova nebo Matérnova shlukového procesu), tak máme $g(x)$ vyjádřeno jako funkci parametrů modelu. Odhad parametrů θ pak můžeme hledat analogicky jako u metody momentů tak, že položíme odhad $\hat{S}(r)$ získaný z dat roven teoretické funkci. Řešením soustavy rovnic $S_\theta(r) = \hat{S}(r)$, kde r nabývá několika různých hodnot, dostaneme odhad θ . Pokud je θ k -rozměrný vektor, potřebujeme vzít alespoň k různých hodnot r , aby soustava $S_\theta(r) = \hat{S}(r)$ mohla mít jednoznačné řešení. Vhodnější se ale zdá hledat θ , které budeme minimalizovat odchylku $\hat{S}(r)$ od $S_\theta(r)$ přes nějaký interval $[a, b]$. Definujme

$$D(\theta) = \int_a^b \left| \hat{S}(r)^q - S_\theta(r)^q \right|^p dr,$$

kde $0 < a < b$ a $p, q > 0$ jsou zvolené konstanty. Odhad θ pak dostaneme minimalizací funkce $D(\theta)$. Tato metoda se nazývá *metoda minimálního kontrastu* (*method of minimum contrast*). Pokud neznáme analytické vyjádření $S_\theta(r)$, můžeme pro pevné θ neznámou hodnotu aproximovat pomocí mnoha simulací z modelu.

Metoda maximální věrohodnosti

Jiný přístup je založen na maximální věrohodnosti. Předpokládejme, že Φ je konečný bodový proces s hustotou p vzhledem k rozdělení Π jednotkového Poissonova procesu na omezené množině $B \in \mathcal{B}_0^d$, přitom $p(\varphi) = p_\theta(\varphi)$ je parametrizována vektorem θ neznámých parametrů. Pro jednoduchost uvažujme, že okno pozorování W splývá s B . Maximálně věrohodný odhad θ se obdrží maximalizací logaritmu věrohodnostní funkce $l(\theta) = \log p_\theta(\varphi)$, kde φ je pozorovaná realizace procesu Φ . Tvar věrohodnostní funkce je známý pro Poissonův proces s funkcí intenzity λ_θ :

$$l(\theta) = |W| - \int_W \lambda_\theta(x) dx + \sum_{x \in \varphi} \log \lambda_\theta(x).$$

V homogenním případě ($\lambda_\theta(x) = \lambda$) je tato funkce maximalizována pro $\lambda = \varphi(W)/|W|$. Pro nehomogenní Poissonův proces není vyjádření maximálně věrohodný odhad analyticky zvládnutelné a musíme přistoupit k numerickým algoritmům (např. Newtonova-Raphsonova metoda) pro maximalizaci věrohodnostní funkce.

Pro jiné procesy než Poissonův je normující konstanta většinou dána komplikovaným integrálem, který není možné spočítat explicitně. V tom případě se dají použít Monte Carlo metody. Nechť hustota bodového procesu má tvar $p_\theta(\varphi) = h_\theta(\varphi)/c_\theta$, kde h_θ je známá funkce a $c_\theta = \mathbb{E}h_\theta(\Phi_P)$ je neznámá normující konstanta (Φ_P je Poissonův proces na B s jednotkovou intenzitou). Potom $l(\theta) = \log h_\theta(\varphi) - \log c_\theta$. Výhodnější bude maximalizovat poměr věrohodností vzhledem k nějakému pevnému parametru θ_0 :

$$l(\theta) - l(\theta_0) = \log \frac{p_\theta(\varphi)}{p_{\theta_0}(\varphi)} = \log \frac{h_\theta(\varphi)}{h_{\theta_0}(\varphi)} - \log \frac{c_\theta}{c_{\theta_0}}.$$

Pro první člen známe analytické vyjádření, zatímco druhý můžeme aproximovat metodami MCMC. Poměr normujících konstant lze totiž rozepsat

$$\begin{aligned} \frac{c_\theta}{c_{\theta_0}} &= \frac{1}{c_{\theta_0}} \int h_\theta(\varphi) \Pi(d\varphi) = \int \frac{h_\theta(\varphi)}{h_{\theta_0}(\varphi)} \frac{h_{\theta_0}(\varphi)}{c_{\theta_0}} \Pi(d\varphi) \\ &= \int \frac{h_\theta(\varphi)}{h_{\theta_0}(\varphi)} p_{\theta_0}(\varphi) \Pi(d\varphi) = \int \frac{h_\theta(\varphi)}{h_{\theta_0}(\varphi)} \Pi_{\theta_0}(d\varphi) = \mathbb{E}_{\theta_0} \frac{h_\theta(\Phi)}{h_{\theta_0}(\Phi)}, \end{aligned}$$

kde Π_{θ_0} je rozdělení bodového procesu Φ s hustotou p_{θ_0} (neboli skutečný parametr je θ_0). Přitom předpokládáme, že když $h_{\theta_0}(\varphi) = 0$, tak i $h_\theta(\varphi) = 0$, a využíváme úmluvu $0/0 = 1$. Existují různé MCMC algoritmy pro generování procesu s rozdělením Π_{θ_0} . Ty jsou založeny na konstrukci markovského řetězce $\{\Phi^{(n)}\}$, jehož limitní rozdělení je dáno hustotou p_{θ_0} vzhledem k rozdělení Π bodového procesu Φ_P . Pokud střední hodnotu $\mathbb{E} \frac{h_\theta(\Phi)}{h_{\theta_0}(\Phi)}$ nahradíme pomocí výběrového průměru, dostaneme aproximaci poměru logaritmických věrohodností

$$l_{\theta_0, n}(\theta) = \log \frac{h_\theta(\varphi)}{h_{\theta_0}(\varphi)} - \log \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h_\theta(\Phi^{(i)})}{h_{\theta_0}(\Phi^{(i)})},$$

o které se hovoří jako o *importance sampling aproximaci (importance sampling approximation)*. Maximalizace $l_{\theta_0, n}(\theta)$, pro kterou se používají obvyklé numerické postupy, dává MCMC aproximaci $\hat{\theta}_n$ maximálně věrohodného odhadu $\hat{\theta}$ parametru θ . Tato aproximace je použitelná, pokud θ_0 je blízko $\hat{\theta}$. Jako θ_0 se většinou volí hrubý odhad získaný nějakou jednodušší ale méně efektivní metodou. Celou proceduru lze iterativně opakovat. Existují alternativní aproximace jako např. *bridge sampling* nebo *path sampling*, podrobněji viz [3], kap. 8.2.4. a 8.2.5.

Takacsova-Fixelova metoda

Při metodě maximální věrohodnosti řešíme soustavu rovnic $l'(\theta) = 0$. U metody momentů zase máme soustavu $S_\theta(r) - \hat{S}(r) = 0$. Oba tyto přístupy se dají zahrnout pod pojem odhadovacích rovnic.

Definice 29. Nechť $\psi(\theta, \Phi)$ je funkce taková, že pro každé θ je $\mathbb{E}_\theta \psi(\theta, \Phi) = 0$, kde \mathbb{E}_θ značí střední hodnotu vzhledem k rozdělení procesu Φ parametrizovaného θ . Pro danou realizaci φ uvažujme rovnici $\psi(\theta, \varphi) = 0$, kterou nazveme *nestrannou odhadovací rovnicí (unbiased estimating equation)*. Jako odhad

parametru θ na základě realizace φ vezmeme řešení $\hat{\theta}$ soustavy nestranných odhadovacích rovnic, kterou obdržíme různou volbou funkcí ψ .

Kromě metody momentů a maximální věrohodnosti je dalším příkladem odhadovacích rovnic pro modely bodových procesů Takacsova-Fikselova metoda. Ta je založena na identitě obsahující podmíněnou intenzitu. Proto se nejprve věnujme definici a základním vlastnostem podmíněné intenzity.

Definice 30. Nechť Φ je bodový proces na \mathbb{R}^d s rozdělením Π . Předpokládejme, že redukovaná Campbellova míra $C^!$ je absolutně spojitá vzhledem k součinu d -rozměrné Lebesgueovy míry a míry Π . Potom příslušná Radonova-Nikodymova derivace λ^* se nazývá *podmíněná intenzita (conditional intensity)* procesu Φ :

$$C^!(B \times U) = \int_B \mathbb{E} \lambda^*(x, \Phi) \mathbf{1}_{[\Phi \in U]} dx, \quad B \in \mathcal{B}^d, U \in \mathfrak{N}. \quad (3)$$

Pokud Φ je Poissonův bodový proces s funkcí intenzity $\lambda(x)$, tak ze vztahu

$$C^!(B \times U) = \int_B P_x^!(U) \Lambda(dx)$$

a ze Slivnyakovy věty $P_x^! = \Pi$ ([4], tvrzení 11) máme

$$C^!(B \times U) = \Pi(U) \Lambda(B) = \Pi(U) \int_B \lambda(x) dx.$$

Zjišťujeme tak, že podmíněná intenzita Poissonova procesu je rovna funkci intenzity.

Pokud Φ má podmíněnou intenzitu, tak standardním postupem teorie míry dostaneme z (3)

$$\mathbb{E} \sum_{X \in \Phi} h(X, \Phi \setminus \{X\}) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} h(x, \Phi) \lambda^*(x, \Phi) dx \quad (4)$$

pro libovolnou nezápornou měřitelnou funkci h na $\mathbb{R}^d \times \mathcal{N}$. Tento vztah se někdy označuje jako *Georgiiho-Nguyenova-Zessinova identita (Georgii-Nguyen-Zessin identity)*.

Existuje-li funkce intenzity $\lambda(x)$ bodového procesu Φ , levou stranu rovnosti (4) můžeme přepsat z Campbellovy-Meckeovy věty jako

$$\mathbb{E} \sum_{X \in \Phi} h(X, \Phi \setminus \{X\}) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathcal{N}} h(x, \varphi) \lambda(x) P_x^!(d\varphi) dx.$$

Volbou $h(x, \varphi) = \frac{g(x, \varphi)}{\lambda(x)}$ dostaneme

$$\mathbb{E}_x^! g(x, \Phi) = \mathbb{E} \frac{\lambda^*(x, \Phi)}{\lambda(x)} g(x, \Phi),$$

neboli $\lambda^*(x, \Phi)/\lambda(x)$ je Radonova-Nikodymova derivace míry $P_x^!$ vzhledem k Π . Heuristicky tak lze podmíněnou intenzitu chápat jako podmíněnou pravděpodobnost, že proces Φ má bod v infinitezimálním okolí bodu x za podmínky, že známe polohy bodů procesu mimo toto okolí.

V případě, kdy Φ je konečný bodový proces s hustotou p , definujeme Papangelouovu podmíněnou intenzitu vztahem (definice 26 v [4])

$$\lambda^*(x, \varphi) = \frac{p(\varphi \cup \{x\})}{p(\varphi)}, \quad \varphi \in \mathcal{N}_f : p(\varphi) > 0, x \in \mathbb{R}^d.$$

Pokud $p(\varphi) = 0$, dodefinujeme Papangelouovu podmíněnou intenzitu nulou.

Věta 16. Nechť Φ je konečný bodový proces s hustotou p vzhledem k rozdělení jednotkového Poissonova bodového procesu Φ_P na množině $B \in \mathcal{B}_0^d$. Potom podmíněná intenzita procesu Φ existuje a je rovna Papangelouově podmíněné intenzitě s.v.

Důkaz: Potřebujeme ukázat, že pro libovolnou měřitelnou nezápornou funkci h platí

$$\mathbb{E} \sum_{X \in \Phi} h(X, \Phi \setminus \{X\}) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} h(x, \Phi) \frac{p(\Phi \cup \{x\})}{p(\Phi)} dx.$$

Využijeme-li toho, že Φ má hustotu p vzhledem k rozdělení procesu Φ_P , tak můžeme tento vztah přepsat do tvaru

$$\mathbb{E} p(\Phi_P) \sum_{X \in \Phi_P} h(X, \Phi_P \setminus \{X\}) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} h(x, \Phi_P) p(\Phi_P \cup \{x\}) dx,$$

který zjednodušíme zavedením funkce $g(x, \varphi) = p(\varphi \cup \{x\})h(x, \varphi)$ na

$$\mathbb{E} \sum_{X \in \Phi_P} g(X, \Phi_P \setminus \{X\}) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} g(x, \Phi_P) dx. \quad (5)$$

Vzhledem k tomu, že podmíněná intenzita Poissonova procesu Φ_P je identicky rovna 1 na B a $g(x, \varphi) = 0$ pro $x \notin B$, tak (5) není nic jiného než Georgiiho-Nguyenova-Zessinova identita pro Poissonův bodový proces Φ_P . □

Nyní se můžeme vrátit k popisu Takacsovy-Fikselovy metody. Předpokládejme, že známe parametrický tvar podmíněné intenzity $\lambda_\theta^*(x, \varphi)$ procesu Φ . Definujeme-li

$$\psi_h(\theta, \varphi) = \sum_{x \in \varphi \cap W} h(x, \varphi \setminus \{x\}) - \int_W h(x, \varphi) \lambda_\theta^*(x, \varphi) dx$$

pro libovolně zvolenou funkci h , pak podle Georgiiho-Nguyenovy-Zessinovy identity je $\mathbb{E}_\theta \psi_h(\theta, \Phi) = 0$. Odhad parametru θ dostaneme řešením nestranných odhadovacích rovnic $\psi_h(\theta, \varphi) = 0$. Podobně jako u metody minimálního kontrastu, můžeme zvolit více funkcí h , než je počet neznámých parametrů. Pokud například zvolíme k funkcí h_1, \dots, h_k , můžeme hledat takové θ , které minimalizuje

$$\sum_{i=1}^k \psi_{h_i}(\theta, \varphi)^2.$$

U některých přirozených voleb funkcí h nemusíme být schopni vyjádřit $\psi_h(\theta, \varphi)$ z pozorování φ v omezeném okně W . Problémy totiž mohou způsobovat okrajové efekty. Potom se často nabízí místo $\psi_h(\theta, \varphi)$ vzít odhad $\hat{\psi}_h(\theta, \varphi)$, který uvažuje korekce na okrajové efekty. Například v případě stacionárního bodového procesu je u volby $h(x, \varphi) = \varphi(b(x, r)) \mathbf{1}_{[x \in W]}$ střední hodnota prvního členu v $\psi_h(\theta, \Phi)$, neboli levá strana identity (4), rovna $\lambda^2 |W| K(r)$. První člen v $\psi_h(\theta, \varphi)$ nejsme schopni spočítat pouze z informace v okně W , a tak ho nahradíme třeba pomocí translačně korigovaného odhadu K -funkce.

Příklad: Straussův proces má Papangelouovu podmíněnou intenzitu $\lambda^*(x, \varphi) = \beta \gamma^{t(x, \varphi)}$, kde $t(x, \varphi) = \sum_{y \in \varphi} \mathbf{1}_{[0 < \|x-y\| \leq R]}$. Předpokládejme, že parametr R je známý. Naším cílem je najít odhad parametrů $\theta = (\beta, \gamma)$. Volba $h_1(x, \varphi) = 1$ dává

$$\psi_{h_1}(\theta, \varphi) = \varphi(W) - \beta \int_W \gamma^{t(x, \varphi)} dx.$$

Volbou $h_2(x, \varphi) = t(x, \varphi)$ dostaneme

$$\psi_{h_2}(\theta, \varphi) = 2s_R(\varphi) - \beta \int_W t(x, \varphi) \gamma^{t(x, \varphi)} dx,$$

kde $s_R(\varphi) = \sum_{\{x, y\} \subseteq \varphi} \mathbf{1}_{[0 < \|x-y\| \leq R]}$. Dostaneme tak soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, jejíž řešení se musí hledat numericky. Uvědomíme-li si ještě, že $t(x, \varphi)$ nabývá pouze nezáporných celočíselných hodnot, a položíme-li

$$m_k = \int_W \mathbf{1}_{[t(x, \varphi) = k]} dx, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

pak má naše soustava tvar

$$\begin{aligned} \varphi(W) &= \beta \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k m_k, \\ 2s_R(\varphi) &= \beta \sum_{k=0}^{\infty} k \gamma^k m_k. \end{aligned}$$

Metoda maximální pseudověrohodnosti

Protože věrohodnostní funkce je často komplikována, je jiná strategie odhadování parametrů modelu založena na nahrazení věrohodnostní funkce nějakou její aproximací.

Definice 31. Nechť Φ je konečný bodový proces na $B \in \mathcal{B}_0^d$ s Papangelouovou podmíněnou intenzitou $\lambda_\theta^*(x, \varphi)$, kde θ je vektor neznámých parametrů. Mějme dánu realizaci φ procesu v okně pozorování W , o kterém předpokládáme, že splývá s B . Definujeme *pseudověrohodnost (pseudolikelihood)* vztahem

$$\text{PL}(\theta) = \exp \left\{ |W| - \int_W \lambda_\theta^*(x, \varphi) dx \right\} \prod_{x \in \varphi} \lambda_\theta^*(x, \varphi \setminus \{x\}).$$

Hodnota, která maximalizuje $\text{PL}(\theta)$, je *odhad metodou maximální pseudověrohodnosti (maximum pseudolikelihood estimator = MPLLE)* vektoru θ neznámých parametrů.

Poznámka: Pro Poissonův bodový proces je $\lambda^*(x, \varphi) = \lambda(x)$ a pseudověrohodnost je identická s věrohodností.

Příklad: Logaritmus pseudověrohodnosti Straussova procesu je

$$\begin{aligned} \log \text{PL}(\beta, \gamma, R) &= |W| - \int_W \beta \gamma^{t(x, \varphi)} dx + \sum_{x \in \varphi} (\log \beta + t(x, \varphi \setminus \{x\}) \log \gamma) \\ &= |W| - \int_W \beta \gamma^{t(x, \varphi)} dx + \varphi(W) \log \beta + 2s_R(\varphi) \log \gamma. \end{aligned}$$

Položíme-li derivace podle β a podle γ rovny nule, dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} \varphi(W) &= \beta \int_W \gamma^{t(x, \varphi)} dx, \\ 2s_R(\varphi) &= \beta \int_W t(x, \varphi) \gamma^{t(x, \varphi)} dx, \end{aligned}$$

které jsou shodné s rovnicemi získanými Takacsovou-Fixselovou metodou.

3.4 Diagnostika modelu

K ověření zvoleného modelu můžeme použít Monte Carlo testy. Pokud jsme schopni simulovat z námi zvoleného modelu, pro každou nasimulovanou realizaci spočteme nějakou popisnou charakteristiku a porovnáme ji se stejnou charakteristikou odhadnutou z dat. Pokud je model určen správně, neměla by charakteristika odhadnutá z dat vykazovat velké odlišnosti. Problémy tohoto přístupu se začnou projevovat u obecnějších nehomogenních bodových procesů, kde bychom potřebovali vhodnou popisnou charakteristiku.

Podívejme se nyní, jak se dá v situaci bodových procesů využít zobecnění reziduí z klasických regresních lineárních modelů. Obecně jsou rezidua rozdílem pozorovaných hodnot a hodnot získaných podle zvoleného modelu. Jestliže je model správný, měla by být rezidua kolem nuly.

Definice 32. Nechť Φ je bodový proces s podmíněnou intenzitou λ^* . Pro nezápornou měřitelnou funkci h definujeme *h-váženou inovaci (h-weighted innovation)* jako znaménkovou náhodnou míru

$$I_h(B) = \sum_{X \in \Phi \cap B} h(X, \Phi \setminus \{X\}) - \int_B h(x, \Phi) \lambda^*(x, \Phi) dx.$$

Předpokládejme, že podmíněná intenzita $\lambda_\theta^*(x, \varphi)$ závisí na parametru θ . Dále předpokládejme, že jsme našli odhad $\hat{\theta}$ (např. některou metodou z minulé podkapitoly) na základě pozorování procesu v okně $W \in \mathcal{B}_0^d$. Potom odhad podmíněné intenzity je $\lambda_{\hat{\theta}}^*(x, \varphi)$. U definice inovací připouštíme, že funkce h závisí na θ .

Definice 33. Znaménkovou náhodnou míru

$$R_h(B) = \sum_{X \in \Phi \cap B} h_{\hat{\theta}}(X, \Phi \setminus \{X\}) - \int_B h_{\hat{\theta}}(x, \Phi) \lambda_{\hat{\theta}}^*(x, \Phi) dx$$

nazveme h -váženou reziduální mírou (h -weighted residual measure).

Podle Georgiiho-Nguyenovy-Zessinovy identity je $\mathbb{E}I_h(B) = 0$ pro každé B . Proto pokud je model správný, měly by se hodnoty $R_h(B)$ pohybovat kolem nuly (obecně však $\mathbb{E}R_h(B)$ nemusí být rovno nule). Oblasti s extrémními hodnotami $R_h(B)$ indikují oblasti odchýlení od zvoleného modelu. Mezi speciální volby h patří $h = 1$ (*neupravená (raw) inovace*), $h = 1/\lambda^*$ (*inverzní (inverse) inovace*) nebo také *kóty exponenciální energie (exponential energy marks)* a $h = 1/\sqrt{\lambda^*}$ (*Pearsonova inovace*). Rezidua pro tyto tři volby umožňuje spočítat funkce `residuals.ppm` v knihovně `spatstat`. Pro $h = 1$ je $R_1(B) = \Phi(B) - \int_B \lambda_\theta^*(x, \Phi) dx$, tedy míra R_1 je dána rozdílem míry s atomy v bodech procesu a míry s hustotou $\lambda_\theta^*(x, \Phi)$ vzhledem k Lebesgueově míře.

Příklad: Uvažujme stacionární Poissonův bodový proces s intenzitou λ , kterou na základě pozorování v okně W odhadneme jako $\Phi(W)/|W|$. Potom (pokud $\Phi(W) > 0$)

$$\begin{aligned} R_1(B) &= \Phi(B) - \Phi(W) \frac{|B|}{|W|}, \\ R_{1/\lambda^*}(B) &= |W| \frac{\Phi(B)}{\Phi(W)} - |B|, \\ R_{1/\sqrt{\lambda^*}}(B) &= \Phi(B) \sqrt{\frac{|W|}{\Phi(W)}} - |B| \sqrt{\frac{\Phi(W)}{|W|}}. \end{aligned}$$

Dá se ukázat (viz cvičení), že střední hodnoty těchto tří h -vážených reziduálních měř jsou nula. Také si můžeme všimnout, že $R_1(W) = R_{1/\lambda^*}(W) = R_{1/\sqrt{\lambda^*}}(W) = 0$. To odpovídá situaci v klasické lineární regresi, kdy součet všech reziduí je roven nule.

Pro grafické znázornění reziduí je vhodné provést vyhlazení pomocí jádrové funkce.

Definice 34. Nechť k je pravděpodobnostní hustota na \mathbb{R}^d . Realizaci bodového procesu Φ pozorujeme v okně $W \in \mathcal{B}_0^d$ a máme sestrojený odhad $\hat{\theta}$ parametru θ . Definujeme *vyhlazené reziduální pole (smoothed residual field)* vztahem

$$S(x) = e(x) \int_W k(x-y) R_h(dy),$$

kde

$$e(x) = \left(\int_W k(x-y) dy \right)^{-1}$$

je korekce na okrajové efekty.

Poznámka: Pro $h = 1$ je

$$S(x) = e(x) \sum_{Y \in \Phi \cap W} k(x-Y) - e(x) \int_W k(x-y) \lambda_\theta^*(y, \Phi) dy.$$

Literatura

- [1] D. J. DALEY AND D. VERE-JONES (1988): *An Introduction to the Theory of Point Processes*, Springer-Verlag, New York.
- [2] Y. GUAN (2006): Tests for independence between marks and points of a marked point process, *Biometrics* **62**, 126–134.
- [3] J. MØLLER AND R. P. WAAGEPETERSEN (2003): *Statistical Inference and Simulation for Spatial Point Processes*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.
- [4] Z. PAWLAS (2010): *Prostorové modelování, prostorová statistika 1*, pracovní text k přednášce, MFF UK, Praha. URL: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~pawlas/2010/STP005/prostor.pdf>.
- [5] J. RATAJ (2006): *Bodové procesy*, Karolinum, Praha.
- [6] M. SCHLATHER, P. J. RIBEIRO JR. AND P. J. DIGGLE (2004): Detecting dependence between marks and locations of marked point processes, *J. R. Statist. Soc. B* **66**, 79–93.
- [7] R. SCHNEIDER, W. WEIL (2008): *Stochastic and Integral Geometry*, Springer-Verlag, Berlin.
- [8] E. B. VEDEL JENSEN AND L. S. NIELSEN (2000): Inhomogeneous Markov point processes by transformation, *Bernoulli* **6**, 761–782.