Úlohy ke cvičení NSTP154 – kótované bodové procesy

1. Uvažujme kótovaný bodový proces Ψ v $\mathbb{R}^2$, ve kterém body reprezentují polohy určitých rostlin a kóty představují intenzitu šíření semene z dané rostliny do okolí. Předpokládejme, že rostliny produkují semena nezávisle na sobě a že semeno je rozptýleno náhodně kolem mateřské rostliny X podle hustoty $m(X)d(r)$, kde $m(X)$ je kóta příslušná bodu X a r je vzdálenost cílového stanoviště semene od bodu X. Dejme tomu, že nás zajímá celková hustota semena v dané lokalitě $y \in \mathbb{R}^2$, ta je pak dána jako

$$S_y = \sum_{(X,M)\in\Psi} Md(\|y - X\|).$$

Předpokládejte, že Ψ je stacionární a určete střední hustotu semene v bodě y.

2. Mějme stacionární kótovaný bodový proces v $\mathbb{R}^2$, kde body představují polohy ptáků v lese a kóty jsou hlasitosti jejich zpěvu. Pták zpívající na místě $x \in \mathbb{R}^2$ o hlasitosti $m(x)$ je slyšitelný ve vzdálenosti r od x s pravděpodobností $p(r) = 1 - ar/m(x)$ pro $r \le m(x)/a$. Určete střední počet ptáků, které pozorovatel slyší ze svého místa (z počátku).

3. Přepište Campbellovu-Meckeho větu pro případ stacionárního kótovaného bodového procesu a využijte ji k ověření vztahu (alternativní definice Palmova rozdělení vzhledem k množině kót $L \in \mathfrak{M}$)

$$P_o^L(U) = \frac{1}{\lambda|B|\Lambda_o(L)}\mathbb{E}\sum_{(X,M)\in\Psi} \mathbf{1}_{[(X,M)\in B\times L]}\mathbf{1}_{[\Psi - X\in U]}, \quad U \in \mathfrak{N}_{\mathfrak{M}},$$

kde B je libovolná omezená borelovská množina s kladnou Lebesgueovou mírou.

4. Ukažte, že Laplaceův funkcionál Poissonova bodového procesu Φ má tvar

$$L_\Phi(f) = \mathbb{E}\exp\left\{-\sum_{X\in\Phi} f(X)\right\} = \exp\left\{-\int_{\mathbb{R}^d} (1 - \mathrm{e}^{-f(x)})\,\Lambda(\mathrm{d}x)\right\}.$$

Návod: Vztah stačí ověřit pro jednoduché funkce.

5. Nechť $Y = \{Y(x) : x \in \mathbb{R}^d\}$ je stacionární gaussovské náhodné pole se s.j. spojitými trajektoriemi $x \to Y(x)$. Definujme náhodnou míru $\Lambda(B) = \int_B \mathrm{e}^{Y(x)}\,\mathrm{d}x$, $B \in \mathcal{B}^d$. Stacionární Coxův proces Φ s řídící mírou Λ se nazývá logaritmicko-gaussovský Coxův proces (LGCP). Řídící funkce intenzity procesu Φ je $Z(x) = \mathrm{e}^{Y(x)}$. Podmíněně při $\{Z(X) : X \in \Phi\}$ nezávisle na sobě okótujeme body procesu Φ tak, že kóta v bodě X je funkcí $Z(X)$. Příkladem je následující kótování:

$$M(X) = a + bZ(X) + \varepsilon(X), \quad X \in \Phi,$$

kde $M(X)$ je kóta v bodě X, a a b jsou reálné parametry a $\{\varepsilon(x) : x \in \mathbb{R}^d\}$ jsou nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením s nulovou střední hodnotou a rozptylem τ^2, přitom $\{\varepsilon(x) : x \in \mathbb{R}^d\}$ a Λ jsou nezávislé. Případ $b = 0$ znamená nezávislé normálně rozdělené kóty. Případ $b > 0$ modeluje situaci, kdy kóty jsou velké v místech s velkou intenzitou bodů. Oproti tomu $b < 0$ dává malé kóty v místech s velkou intenzitou. Tento způsob kótování se nazývá *kótování závislé na intenzitě (intensity-dependent marking)*. Výsledný kótovaný bodový proces $\Psi = \{(X, M(X)) : X \in \Phi\}$ se nazývá *kótovaný Coxův proces s kótami závislými na intenzitě (intensity-marked Cox process)*. Určete střední typickou kótu a korelační funkci kót tohoto procesu.

Úlohy ke cvičení NSTP154 – procesy s kvalitativními a kvantitativními kótami

1. Ukažte, že pro Poissonův vícerozměrný bodový proces platí $\mathrm{CE}_{ij} = 1$.

2. Uvažujme dvourozměrný nezávisle kótovaný bodový proces. Ukažte, že index míšení je roven $2p_1p_2$.

3. Ukažte, že index segregace dvourozměrného bodového procesu nabývá hodnot z intervalu $[-1, 1]$ a je roven nule pro nezávisle kótovaný proces. Rozhodněte, jaké nejvyšší a nejnižší hodnoty může nabývat v závislosti na p_1.

4. Předpokládejme, že podprocesy Φ_i a Φ_j jsou nezávislé. Ukažte, že potom platí $J_{ij}(r) = 1$.

5. Nechť Ψ je vícerozměrný bodový proces a nechť $K(r)$ je K-funkce příslušného nekótovaného bodového procesu Φ. Ukažte, že
a) za předpokladu nezávislého kótování platí $K_{ij}(r) = K(r)$ pro každé i a j,
b) za předpokladu modelu náhodné superpozice platí $K_{ij}(r) = \omega_d r^d$ pro $i \neq j$.

6. Pro stacionární a izotropní vícerozměrný bodový proces dokažte vztahy $g_{ij}(r) = g_{ji}(r)$ a

$$g_{ij}(r) = \frac{K'_{ij}(r)}{\sigma_d r^{d-1}}, \quad r > 0.$$

7. Dokažte vztah $\kappa_f(r) = \mathbb{E}_{or} f(M(o), M(r))$, $r > 0$.

8. Nechť Ψ je stacionární a izotropní kótovaný bodový proces s geostatistickým kótováním. Vyjádřete $k_{mm}(r)$, $k_{m\cdot}(r)$, $\gamma_m(r)$, $E(r)$ a $V(r)$ jako funkce střední hodnoty a kovarianční funkce (příp. variogramu) příslušného náhodného pole generujícího kóty. Speciálně ukažte, že pro nezávisle kótovaný bodový proces platí $k_f(r) = 1$, $\gamma_m(r) = \operatorname{var} M_o$, $E(r) = \mathbb{E}M_o$ a $V(r) = \operatorname{var} M_o$, kde M_o je typická kóta.