

## Zápočtová písemka NSTP198 – 4. 12. 2009

1. Mějme urnu a 3 koule. V každém kroku budeme koule z urny odebírat nebo do urny přidávat podle následujícího schématu. Pokud je urna prázdná, naplníme ji všemi třemi koulemi. V opačném případě z urny odebereme s pravděpodobností  $\frac{1}{3}$  dvě koule, s pravděpodobností  $\frac{1}{3}$  jednu kouli a s pravděpodobností  $\frac{1}{3}$  žádnou kouli. Pokud bychom měli odebrat více koulí než se právě v urně nachází, tak odebereme všechny koule, které v urně jsou. Nechť  $X_n$  značí počet koulí v urně po  $n$  krocích.
- Ukažte, že  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tvoří homogenní Markovův řetězec.
  - Určete matici pravděpodobností přechodu  $\mathbb{P}$ .
  - Klasifikujte stavy řetězce.
  - Předpokládejte, že počáteční rozdělení je rovnoměrné (každý stav má stejnou pravděpodobnost) a spočítejte absolutní pravděpodobnosti po prvním kroku.
  - Spočítejte stacionární rozdělení (pokud existuje).
2. Klasifikujte stavy Markovova řetězce s maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Spočítejte stacionární rozdělení (pokud existuje) a určete matici pravděpodobností absorpce do množiny trvalých stavů.

3. Uvažujme částici, která se pohybuje po celočíselných bodech na přímce. V každém kroku se posune o jednotku dál od nuly s pravděpodobností  $1/4$  a o jednotku blíž k nule s pravděpodobností  $3/4$ . V případě, že je v nule přejde s pravděpodobností  $1/2$  do  $1$  a s pravděpodobností  $1/2$  do  $-1$ . Označme  $X_n$  vzdálenost částice od nuly v čase  $n$ .
- Určete matici pravděpodobností přechodu Markovova řetězce  $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ .
  - Klasifikujte stavy řetězce.
  - Určete stacionární rozdělení (pokud existuje).