Zápočtová písemka NSTP198 – 15. 1. 2010

1. V Karlíně je stojan na půjčování kol, který má tři místa. Předpokládejme, že v čase $t = 0$ jsou ve stojanu všechna tři kola. Cyklista, který má v čase t půjčené kolo, ho přijede vrátit v časovém intervalu $(t, t+h]$ s pravděpodobností $\lambda h + o(h)$, $\lambda > 0$. Pravděpodobnost, že přijede více než jeden cyklista v $(t, t+h]$ je $o(h)$. Nový zájemce o půjčení kola přijde v časovém intervalu $(t, t+h]$ s pravděpodobností $\mu h + o(h)$, $\mu > 0$, která je stejná pro všechna $t \geq 0$. Pokud je stojan prázdný, člověk nečeká a odchází jinam. Předpokládejme, že vypůjčování a vracení kol probíhá nezávisle. Nechť X_t je počet kol ve stojanu v čase $t \geq 0$. Určete matici intenzit procesu $\{X_t, t \geq 0\}$ a stacionární rozdělení (pokud existuje). Jaká je střední doba setrvání v počátečním stavu?

2. Uvažujme Markovův řetězec s maticí intenzit

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Určete matici pravděpodobností přechodu ve vnořeném diskrétním řetězci. Najděte stacionární rozdělení ve vnořeném diskrétním řetězci. Najděte stacionární rozdělení v řetězci s maticí intenzit Q.

3. Na letišti uvažujme pět přepážek pro odbavení cestujících. Předpokládejme, že příchody cestujících k přepážkám tvoří Poissonův proces. Pokud jsou všechny přepážky obsazeny, řadí se cestující do jedné fronty (na letišti je dost místa, takže fronta může být libovolně dlouhá). Dále předpokládejme, že doby odbavení jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou 3 minuty. Najděte limitní rozdělení počtu cestujících v systému (u přepážek i ve frontě celkem), pokud cestující přicházejí v průměru každou minutu.