Zápočtová písemka NSTP198 – 2. 12. 2010

1. Mějme urnu, do které se vejdou maximálně čtyři kuličky. V každém kroku rovnoměrně náhodně zvolíme jednu ze tří operací: odebrání, ponechání, přidání. Pokud je v osudí nějaká kulička a zvolili jsme operaci odebrání, tak jednu z kuliček z urny odstraníme. Jestliže urna není naplněná a zvolili jsme operaci přidání, doplníme do urny jednu kuličku. Ve všech ostatních případech neprovádíme nic. Nechť X_n označuje počet kuliček v urně po n krocích. Určete matici pravděpodobností přechodu homogenního Markovova řetězce $\{X_n\}$. Klasifikujte stavy a najděte stacionární rozdělení (pokud existuje). (4 body)

2. Uvažujme Markovův řetězec s maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2/5 & 1/5 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

Klasifikujte stavy řetězce a určete pravděpodobnosti absorpce do množiny trvalých stavů. (4 body)

3. Nechť $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin takových, že $P(Y_0 = 0) = 2/3$, $P(Y_0 = 2) = 1/3$ a $P(Y_n = 0) = P(Y_n = 2) = 1/2$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Definujme $X_n = \sum_{i=0}^{n} Y_i$ pro $n \in \mathbb{N}_0$.

a) Přesvědčte se, že $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ tvoří homogenní Markovův řetězec. (0 bodů)

b) Určete matici pravděpodobností přechodu. (1 bod)

c) Najděte stacionární rozdělení (pokud existuje). (2 body)

d) Klasifikujte stavy řetězce. (2 body)

e) Spočtěte absolutní pravděpodobnosti po jednom kroku, tj. určete rozdělení X_1. (1 bod)