Zápočtová písemka NSTP199 – 29. 3. 2011

1. Nechť $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin s normovaným normálním rozdělením $N(0,1)$. Pro každé $t \in \mathbb{Z}$ definujme $X_t = a + bY_t + cY_{t-1}$, kde a, b, c jsou reálné konstanty.

a) Spočtěte autokovarianční funkci náhodné posloupnosti $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ a rozhodněte, zda se jedná o striktně a slabě stacionární posloupnost. (2 body)

b) Určete spektrální distribuční funkci a spektrální hustotu (pokud existuje) náhodné posloupnosti $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$. (3 body)

2. Nechť Z je náhodná veličina s alternativním rozdělením na $\{0,1\}$, tj. $P(Z=0) = 1-p$, $P(Z=1) = p$, $p \in [0,1]$. Definujme náhodný proces $X_t = \mathrm{e}^{tZ} - \mathbb{E}\mathrm{e}^{tZ}$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Zjistěte, zda $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ je slabě stacionární proces a určete jeho autokovarianční funkci. (2 body)

b) Zjistěte, jestli jde o proces spojitý podle středu. (1 bod)

c) Rozhodněte, jestli existuje derivace procesu podle středu. (1 bod)

d) Rozhodněte, zda existuje Riemannův integrál procesu na omezeném intervalu $[a,b]$. (1 bod)

3. Uvažujme slabě stacionární náhodnou posloupnost $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ se spektrální distribuční funkcí

$$F(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{pro } -\pi \leq \lambda < 0, \\ \lambda^2 & \text{pro } 0 \leq \lambda \leq \pi. \end{cases}$$

Určete její autokovarianční funkci. (4 body)