

## Úlohy ke cvičení NSTP005 – základy bodových procesů

1. Necht  $\Phi$  je bodový proces a  $B \in \mathcal{B}^d$  je pevná množina. Ukažte, že  $\Phi_B = \Phi \cap B$  je bodový proces.
2. Mějme dva bodové procesy  $\Phi_1$  a  $\Phi_2$ . Ukažte, že i  $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$  je bodový proces.
3. Mějme nezávislé náhodné veličiny  $U_1$  a  $U_2$  s rovnoměrným rozdělením na intervalu  $[0, a]$ ,  $a > 0$ . Definujme bodový proces  $\Phi$  v  $\mathbb{R}^2$  jako

$$\Phi = \{(U_1 + ma, U_2 + na) : m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Určete míru intenzity tohoto procesu.

4. Necht  $\{B_n, B_n \in \mathcal{B}_0^d\}$  je neklesající posloupnost ( $B_n \subseteq B_{n+1}$ ) taková, že  $\cup_n B_n = \mathbb{R}^d$ . Uvažujme posloupnost binomických bodových procesů  $\Phi^{(n)}$  s mírou  $\nu$  na  $B_n$  a předpokládejme, že existuje  $0 < \lambda < \infty$  tak, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\nu(B_n)} = \lambda.$$

Ukažte, že pro libovolnou  $A \in \mathcal{B}^d$  a  $k \in \mathbb{N}_0$  platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\Phi^{(n)}(A) = k) = e^{-\lambda\nu(A)} \frac{(\lambda\nu(A))^k}{k!}.$$

5. Za stejných předpokladů jako v minulé úloze ukažte, že pro  $A, B \in \mathcal{B}^d$ ,  $A \cap B = \emptyset$  a  $k, l \in \mathbb{N}_0$  platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\Phi^{(n)}(A) = k, \Phi^{(n)}(B) = l) = e^{-\lambda\nu(A)} \frac{(\lambda\nu(A))^k}{k!} e^{-\lambda\nu(B)} \frac{(\lambda\nu(B))^l}{l!}.$$

6. Ukažte, že homogenní Poissonův bodový proces je stacionární a izotropní.
7. Mějme lokálně konečnou difúzní míru  $\Lambda$ . Uvažujme systém  $\{B_i, B_i \in \mathcal{B}_0^d\}$  spočetně mnoha po dvou disjunktních množin takový, že  $\cup_i B_i = \mathbb{R}^d$ . Bodový proces  $\Phi$  zkonstruujeme následujícím způsobem (nezávisle na sobě):
  - $N_i \sim \text{Po}(\Lambda(B_i))$ ,
  - za podmínky  $N_i = n$ , necht  $\Phi_i = \{X_1, \dots, X_n\}$  je binomický proces na  $B_i$  s mírou  $\Lambda$ ,
  - $\Phi = \cup_i \Phi_i$ .

Ukažte, že  $\Phi$  je Poissonův bodový proces s mírou intenzity  $\Lambda$ .

8. Necht  $\Phi$  je Poissonův bodový proces s mírou intenzity  $\Lambda$ . Uvažujme pevnou množinu  $B \in \mathcal{B}^d$  a položme  $\Phi_B = \Phi \cap B$ . Ukažte, že  $\Phi_B$  je Poissonův bodový proces a určete jeho míru intenzity.
9. Mějme dva nezávislé Poissonovy bodové procesy  $\Phi_1$  a  $\Phi_2$  s mírami intenzit  $\Lambda_1$  a  $\Lambda_2$ . Ukažte, že  $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$  je Poissonův bodový proces a určete jeho míru intenzity.
10. Ověřte, že platí následující vztahy:
  - a)  $\text{var } \Phi(B) = M^{(2)}(B \times B) - \Lambda(B)^2$ ,
  - b)  $\text{cov}(\Phi(B_1), \Phi(B_2)) = M^{(2)}(B_1 \times B_2) - \Lambda(B_1)\Lambda(B_2)$ ,
  - c)  $M^{(2)}(B_1 \times B_2) = \Lambda(B_1 \cap B_2) + \alpha^{(2)}(B_1 \times B_2)$ ,
  - d)  $M^{(3)}(B_1 \times B_2 \times B_3) = \Lambda(B_1 \cap B_2 \cap B_3) + \alpha^{(2)}((B_1 \cap B_2) \times B_3) + \alpha^{(2)}((B_1 \cap B_3) \times B_2) + \alpha^{(2)}((B_2 \cap B_3) \times B_1) + \alpha^{(3)}(B_1 \times B_2 \times B_3)$ ,
  - e)  $\alpha^{(n)}(B \times \dots \times B) = \mathbb{E}[\Phi(B)(\Phi(B) - 1) \dots (\Phi(B) - n + 1)]$ .

11. Necht  $\Phi$  je Poissonův bodový proces s mírou intenzity  $\Lambda$ . Ukažte, že pro  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}^d$  platí

$$\text{cov}(\Phi(B_1), \Phi(B_2)) = \Lambda(B_1 \cap B_2).$$

12. Necht  $\Phi$  je binomický bodový proces o  $n$  bodech v  $B \in \mathcal{B}^d$  s mírou  $\nu$ . Ukažte, že pro  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}^d$  platí

$$\text{cov}(\Phi(B_1), \Phi(B_2)) = n \frac{\nu(B_1 \cap B_2 \cap B)}{\nu(B)} - n \frac{\nu(B_1 \cap B)}{\nu(B)} \frac{\nu(B_2 \cap B)}{\nu(B)}.$$

## Úlohy ke cvičení NSTP005 – charakteristiky a modely bodových procesů

1. Mějme nezávislé náhodné veličiny  $U_1$  a  $U_2$  s rovnoměrným rozdělením na intervalu  $[0, a]$ ,  $a > 0$ . Definujme bodový proces  $\Phi$  v  $\mathbb{R}^2$  jako

$$\Phi = \{(U_1 + ma, U_2 + na) : m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Určete Palmovo rozdělení tohoto procesu. Vyjádřete kontaktní distribuční funkci a distribuční funkci vzdálenosti nejbližšího souseda.

2. Z interpretace Palmova rozdělení usudte, jak bude vypadat Palmovo rozdělení binomického procesu.  
 3. Dokažte, že pro homogenní Poissonův bodový proces platí  $PI = CE = 1$ ,  $G(r) = F(r) = 1 - e^{-\lambda\omega_d r^d}$  a  $J(r) = 1$ .  
 4. Pomocí Campbellovy-Meckeho věty pro stacionární bodové procesy ukažte, že platí:

$$\lambda K(r) = \mathbb{E} \sum_{X \in \Phi \cap B} \frac{\Phi(b(X, r) \setminus \{X\})}{\lambda|B|}, \quad r > 0,$$

kde  $B \in \mathcal{B}_0^d$  je libovolná s kladnou Lebesgueovou mírou ( $|B| > 0$ ).

5. Disperze náhodné veličiny  $\Phi(B)$  je definována jako

$$D(\Phi(B)) = \frac{\text{var } \Phi(B)}{\mathbb{E}\Phi(B)}, \quad B \in \mathcal{B}_0^d.$$

Ukažte, že

- a) pro Poissonův proces je  $D(\Phi(B)) = 1$ ,
- b) binomický proces je poddisperzní, tj.  $D(\Phi(B)) \leq 1$ ,
- c) Coxův proces je nadisperzní, tj.  $D(\Phi(B)) \geq 1$ .

6. Nechť  $Y$  je náhodná veličina s gama rozdělením. Ukažte, že příslušný smíšený Poissonův proces  $\Phi$  (tj. Coxův proces s řídicí mírou  $Y|\cdot|$ ) je negativně binomický proces, což znamená, že  $\Phi(B)$  má negativně binomické rozdělení pro každé  $B \in \mathcal{B}_0^d$ .

7. Nechť  $Y$  je stacionární gaussovské náhodné pole na  $\mathbb{R}^d$ , tj. realizace jsou  $y : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  a pro každé  $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^d$  a  $k \in \mathbb{N}$  má náhodný vektor  $(Y(x_1), \dots, Y(x_k))$   $k$ -rozměrné normální rozdělení se střední hodnotou  $(\mu, \dots, \mu)^T$  a kovarianční maticí  $(\sigma^2 r(x_i - x_j))_{i,j=1}^k$ , funkce  $r(\cdot)$  je autokorelační funkce náhodného pole. Definujme náhodnou míru  $\Lambda(B) = \int_B e^{Y(x)} dx$ ,  $B \in \mathcal{B}^d$ . Stacionární Coxův proces s řídicí mírou  $\Lambda$  se nazývá logaritmicke-gaussovský Coxův proces (LGCP).

- a) Určete součinnou hustotu a párovou korelační funkci LGCP.
- b) Dokažte, že rozdělení LGCP je určenou intenzitou a párovou korelační funkcí.

8. Nechť  $\Phi$  je Neymanův-Scottové Poissonův proces. Zdůvodněte, že podmíněně při  $\Phi_p$  jsou dceřinné procesy  $\Psi_X$  nezávislé Poissonovy procesy s funkcí intenzity  $\lambda_c p(\cdot - X)$ .

9. Spočítejte párovou korelační funkci

- a) Thomasova procesu,
- b) Matérnova shlukového procesu pro  $d = 2$ .

10. Pro proces s pevným jádrem  $r > 0$  a intenzitou  $\lambda$  definujeme *hustotu pokrytí (packing density)* jako  $\tau = \lambda|b(o, r/2)|$ . Jedná se vlastně o střední objemový podíl sjednocení koulí se středy v bodech procesu a poloměry  $r/2$ . Nalezněte maximální možné  $\tau$  pro tyto modely:

- a) Matérnův proces s pevným jádrem typ I,
- b) Matérnův proces s pevným jádrem typ II.

11. Ukažte, že konečný bodový proces s hustotou  $p(\varphi) = \alpha\beta^{\varphi(\mathbb{R}^d)}$  je Poissonův bodový proces s mírou intenzity  $\beta\Lambda$  a určete normující konstantu  $\alpha$ .

12. Ukažte, že bodový proces s hustotou

$$p(\varphi) = \exp\{|B| - \int_B \lambda(x) dx\} \prod_{x \in \varphi} \lambda(x)$$

vzhledem k rozdělení homogenního Poissonova procesu s jednotkovou intenzitou na  $B \in \mathcal{B}_0^d$  je Poissonův bodový proces na  $B$  s funkcí intenzity  $\lambda$ .

13. Ukažte, že pro  $\gamma > 1$  není hustota Straussova procesu integrovatelná.

## Úlohy ke cvičení NSTP005 – geostatistika

1. Necht'  $\{W_t^H, t \in \mathbb{R}_+^d\}$  je spojité centrované gaussovské náhodné pole s kovariancemi

$$\mathbb{E}W_t^H W_s^H = \frac{1}{2}(\|t\|^{2H} + \|s\|^{2H} - \|t-s\|^{2H}), \quad t, s \in \mathbb{R}_+^d,$$

kde  $H \in (0, 1)$ . Takto definované náhodné pole se označuje jako *Lévyho frakcionální Brownovo náhodné pole* (*Lévy's fractional Brownian random field*). Určete jeho variogram.

2. Určete spektrální hustotu slabě stacionárního náhodného pole s kovarianční funkcí  $C(h) = \exp\{-\|h\|^2\}$ ,  $h \in \mathbb{R}^d$ .

*Návod:* Využijte toho, že charakteristická funkce normálního rozdělení  $N_d(0, \sigma^2 I)$  je  $\exp\{-\sigma^2 \|t\|^2/2\}$ .

3. Neparametrický odhad variogramu vnitřně stacionárního náhodného pole  $\{Z(x) : x \in \mathbb{R}^d\}$  se dá maticově zapsat jako  $2\hat{\gamma}(h) = Z^T A(h) Z$ , kde  $Z = (Z(x_1), \dots, Z(x_n))^T$ . Určete matici  $A(h)$  pro data na regulární mříži  $3 \times 3$ , tj.  $n = 9$ ,  $d = 2$  a polohy  $x_i$  jsou tvaru  $(k, l)^T$ ,  $k, l \in \{1, 2, 3\}$ .

4. Mějme sférický model pro kovarianční funkci stacionárního a izotropního náhodného pole:

$$C(\|h\|) = \sigma^2 \frac{|b(o, \varrho) \cap b(h, \varrho)|}{|b(o, \varrho)|}, \quad h \in \mathbb{R}^d.$$

Tento model je platný v dimenzi  $d$  a ve všech nižších ne však v dimenzích vyšších. Vyjádřete tuto kovarianční funkci v případě  $d = 1$  a ukažte, že kdybychom obdrženou funkci uvažovali v  $\mathbb{R}^2$ , tak nedostaneme pozitivně semidefinitní funkci.

*Návod:* Uvažujte body  $x_{ij} = (i\sqrt{2}\varrho, j\sqrt{2}\varrho)$ ,  $i, j = 1, \dots, 8$  a koeficienty  $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}$ .

5. Necht' náhodné veličiny  $X$  a  $Y$  mají sdruženou hustotu

$$f(x, y) = x + y, \quad x, y \in (0, 1).$$

Najděte nejlepší a nejlepší lineární predikci  $Y$  při daném  $X$ . V obou případech určete chybu predikce.

## Úlohy ke cvičení NSTP005 – prostorové modely na mřížích

1. Ukažte, že  $\{Z_1, \dots, Z_n\}$  markovský řetězec je markovské náhodné pole vzhledem k relaci  $i \sim j \Leftrightarrow |i - j| \leq 1$ . Dokažte, že obrácená implikace platí následovně: pokud  $\{Z_1, \dots, Z_n\}$  je markovské náhodné pole s hustotou splňující  $p(z) > 0$  pro každé  $z = (z_1, \dots, z_n)^T$ , potom je to markovský řetězec.

2. Lokální charakteristiky nemusí určovat sdružené rozdělení. Uvažujme mříž se dvěma vrcholy  $L = \{i, j\}$  a předpokládejme, že  $Z_i | Z_j = z_j$  má exponenciální rozdělení s intenzitou  $z_j$  a  $Z_j | Z_i = z_i$  má exponenciální rozdělení s intenzitou  $z_i$ . Ukažte, že tato podmíněná rozdělení neodpovídají žádnému pravděpodobnostnímu rozdělení, tedy neexistuje vlastní sdružená hustota vektoru  $(Z_i, Z_j)^T$ .

3. Necht'  $S = \mathbb{N}_0$  a  $L$  je konečná mříž v  $\mathbb{R}^d$ . Ukažte, že pokud  $\beta_{ij} \geq 0$  pro každé  $i, j \in L$ , pak konstanta

$$\sum_{z \in S^L} \exp\left(-\sum_{i \in L} (\log z_i! + \beta_i z_i) - \sum_{\{i, j\} \in \mathcal{C}} \beta_{ij} z_i z_j\right)$$

je konečná. Naopak je nekonečná, pokud  $\beta_{ij} < 0$  pro nějaké  $i, j \in L$ .

*Návod:* V prvním případě uvažujte konfigurace, pro které je  $\max z_i = k$  (je jich  $(k+1)^n - k^n$ ). V druhém případě uvažte konfigurace  $z_i = z_j = k$  a  $z_l = 0$  pro  $l \in L \setminus \{i, j\}$ .

4. Necht' náhodná veličina  $Z_1$  má normální rozdělení  $N(0, \frac{1}{1-\varphi^2})$ , kde  $|\varphi| < 1$ . Uvažujme autoregresní posloupnost prvního řádu  $\{Z_1, \dots, Z_n\}$  definovanou předpisem

$$Z_t = \varphi Z_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 2, \dots, n,$$

kde  $\{\varepsilon_t\}$  je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s rozdělením  $N(0, 1)$ . Spočítejte kovarianční matici  $\Sigma$  vektoru  $(Z_1, \dots, Z_n)^T$  a určete matici  $Q = \Sigma^{-1}$ . Ukažte, že  $\{Z_1, \dots, Z_n\}$  je gaussovské markovské náhodné pole vzhledem k relaci  $i \sim j \Leftrightarrow |i - j| \leq 1$ .

5. Necht'  $\{Z_i, i \in L\}$  je gaussovské markovské náhodné pole s inverzí  $Q$  kovarianční matice. Ukažte, že

$$\text{corr}(Z_i, Z_j | Z_{-\{i, j\}}) = -\frac{q_{ij}}{\sqrt{q_{ii}q_{jj}}}, \quad i \neq j.$$