

Zápočtová písemka NSTP198 – 1. 12. 2011

1. Necht' Markovův řetězec má matici pravděpodobností přechodu

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Klasifikujte jeho stavy a určete stacionární rozdělení. Předpokládejte, že počáteční rozdělení řetězce je rovnoměrné (každý stav má stejnou pravděpodobnost). Spočítejte absolutní pravděpodobnosti po dvou krocích. (5 bodů)

2. Částice se pohybuje po celočíselných bodech $\{0, 1, 2, 3\}$. V každém kroku přejde o jednotku vpravo s pravděpodobností $p \in (0, 1)$ a o jednotku vlevo s pravděpodobností $1 - p$. Pohyby částice jsou nezávislé na předchozích krocích. Dosáhne-li bodu 0 nebo 3, setrvá v něm. Necht' X_n je poloha částice v čase n .
- a) Přesvědčte se, že $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tvoří homogenní Markovův řetězec. (0 bodů)
 - b) Klasifikujte stavy řetězce. (2 body)
 - c) Určete pravděpodobnosti absorpce do množiny trvalých stavů. (2 body)
3. Uvažujme loterijní hru, ve které má každý sázející pravděpodobnost hlavní výhry $p \in (0, 1)$. Předpokládejme, že sázející se chovají nezávisle na sobě a jejich počet je konstantní (označme k). Losování probíhá každý den. Pokud daný den nikdo nevyhrál hlavní výhru, zvýší se jackpot o 1 000 Kč. Jestliže ale došlo k hlavní výhře, šťastný sázející získává celý jackpot (pokud je šťastných více, jackpot si mezi sebe rozdělí) a pro příští den je stanoven nový jackpot ve výši 10 000 Kč. Označme X_n výši jackpotu v n -tém dni losování.
- a) Přesvědčte se, že $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tvoří homogenní Markovův řetězec. (0 bodů)
 - b) Určete matici pravděpodobností přechodu. (1 bod)
 - c) Najděte stacionární rozdělení (pokud existuje). (2 body)
 - d) Klasifikujte stavy řetězce. (2 body)