

Úlohy ke cvičení NSTP005 – základy bodových procesů

1. Necht Φ je bodový proces a $B \in \mathcal{B}^d$ je pevná množina. Ukažte, že $\Phi_B = \Phi \cap B$ je bodový proces.
2. Mějme dva bodové procesy Φ_1 a Φ_2 . Ukažte, že i $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ je bodový proces.
3. Mějme nezávislé náhodné veličiny U_1 a U_2 s rovnoměrným rozdělením na intervalu $[0, a]$, $a > 0$. Definujme bodový proces Φ v \mathbb{R}^2 jako

$$\Phi = \{(U_1 + ma, U_2 + na) : m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Určete míru intenzity tohoto procesu.

4. Necht $\{B_n, B_n \in \mathcal{B}_0^d\}$ je neklesající posloupnost ($B_n \subseteq B_{n+1}$) taková, že $\cup_n B_n = \mathbb{R}^d$. Uvažujme posloupnost binomických bodových procesů $\Phi^{(n)}$ s mírou ν na B_n a předpokládejme, že existuje $0 < \lambda < \infty$ tak, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\nu(B_n)} = \lambda.$$

Ukažte, že pro libovolnou $A \in \mathcal{B}^d$ a $k \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\Phi^{(n)}(A) = k) = e^{-\lambda\nu(A)} \frac{(\lambda\nu(A))^k}{k!}.$$

5. Za stejných předpokladů jako v minulé úloze ukažte, že pro $A, B \in \mathcal{B}^d$, $A \cap B = \emptyset$ a $k, l \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\Phi^{(n)}(A) = k, \Phi^{(n)}(B) = l) = e^{-\lambda\nu(A)} \frac{(\lambda\nu(A))^k}{k!} e^{-\lambda\nu(B)} \frac{(\lambda\nu(B))^l}{l!}.$$

6. Ukažte, že homogenní Poissonův bodový proces je stacionární a izotropní.
7. Mějme lokálně konečnou difúzní míru Λ . Uvažujme systém $\{B_i, B_i \in \mathcal{B}_0^d\}$ spočetně mnoha po dvou disjunktních množin takový, že $\cup_i B_i = \mathbb{R}^d$. Bodový proces Φ zkonstruujeme následujícím způsobem (nezávisle na sobě):
 - $N_i \sim \text{Po}(\Lambda(B_i))$,
 - za podmínky $N_i = n$, necht $\Phi_i = \{X_1, \dots, X_n\}$ je binomický proces na B_i s mírou Λ ,
 - $\Phi = \cup_i \Phi_i$.

Ukažte, že Φ je Poissonův bodový proces s mírou intenzity Λ .

8. Necht Φ je Poissonův bodový proces s mírou intenzity Λ . Uvažujme pevnou množinu $B \in \mathcal{B}^d$ a položme $\Phi_B = \Phi \cap B$. Ukažte, že Φ_B je Poissonův bodový proces a určete jeho míru intenzity.
9. Mějme dva nezávislé Poissonovy bodové procesy Φ_1 a Φ_2 s mírami intenzit Λ_1 a Λ_2 . Ukažte, že $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ je Poissonův bodový proces a určete jeho míru intenzity.
10. Ověřte, že platí následující vztahy:
 - a) $\text{var } \Phi(B) = M^{(2)}(B \times B) - \Lambda(B)^2$,
 - b) $\text{cov}(\Phi(B_1), \Phi(B_2)) = M^{(2)}(B_1 \times B_2) - \Lambda(B_1)\Lambda(B_2)$,
 - c) $M^{(2)}(B_1 \times B_2) = \Lambda(B_1 \cap B_2) + \alpha^{(2)}(B_1 \times B_2)$,
 - d) $M^{(3)}(B_1 \times B_2 \times B_3) = \Lambda(B_1 \cap B_2 \cap B_3) + \alpha^{(2)}((B_1 \cap B_2) \times B_3) + \alpha^{(2)}((B_1 \cap B_3) \times B_2) + \alpha^{(2)}((B_2 \cap B_3) \times B_1) + \alpha^{(3)}(B_1 \times B_2 \times B_3)$,
 - e) $\alpha^{(n)}(B \times \dots \times B) = \mathbb{E}[\Phi(B)(\Phi(B) - 1) \dots (\Phi(B) - n + 1)]$.

11. Necht Φ je Poissonův bodový proces s mírou intenzity Λ . Ukažte, že pro $B_1, B_2 \in \mathcal{B}^d$ platí

$$\text{cov}(\Phi(B_1), \Phi(B_2)) = \Lambda(B_1 \cap B_2).$$

12. Necht Φ je binomický bodový proces o n bodech v $B \in \mathcal{B}^d$ s mírou ν . Ukažte, že pro $B_1, B_2 \in \mathcal{B}^d$ platí

$$\text{cov}(\Phi(B_1), \Phi(B_2)) = n \frac{\nu(B_1 \cap B_2 \cap B)}{\nu(B)} - n \frac{\nu(B_1 \cap B)}{\nu(B)} \frac{\nu(B_2 \cap B)}{\nu(B)}.$$

Úlohy ke cvičení NSTP005 – charakteristiky a modely bodových procesů

1. Mějme nezávislé náhodné veličiny U_1 a U_2 s rovnoměrným rozdělením na intervalu $[0, a]$, $a > 0$. Definujme bodový proces Φ v \mathbb{R}^2 jako

$$\Phi = \{(U_1 + ma, U_2 + na) : m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Určete Palmovo rozdělení tohoto procesu. Vyjádřete kontaktní distribuční funkci a distribuční funkci vzdálenosti nejbližšího souseda.

2. Z interpretace Palmova rozdělení usudte, jak bude vypadat Palmovo rozdělení binomického procesu.
 3. Dokažte, že pro homogenní Poissonův bodový proces platí $PI = CE = 1$, $G(r) = F(r) = 1 - e^{-\lambda\omega_d r^d}$ a $J(r) = 1$.
 4. Pomocí Campbellovy-Meckeho věty pro stacionární bodové procesy ukažte, že platí:

$$\lambda K(r) = \mathbb{E} \sum_{X \in \Phi \cap B} \frac{\Phi(b(X, r) \setminus \{X\})}{\lambda|B|}, \quad r > 0,$$

kde $B \in \mathcal{B}_0^d$ je libovolná s kladnou Lebesgueovou mírou ($|B| > 0$).

5. Disperze náhodné veličiny $\Phi(B)$ je definována jako

$$D(\Phi(B)) = \frac{\text{var } \Phi(B)}{\mathbb{E}\Phi(B)}, \quad B \in \mathcal{B}_0^d.$$

Ukažte, že

- pro Poissonův proces je $D(\Phi(B)) = 1$,
- binomický proces je poddisperzní, tj. $D(\Phi(B)) \leq 1$,
- Coxův proces je nadisperzní, tj. $D(\Phi(B)) \geq 1$.

6. Nechť Y je náhodná veličina s gama rozdělením. Ukažte, že příslušný smíšený Poissonův proces Φ (tj. Coxův proces s řídicí mírou $Y|\cdot|$) je negativně binomický proces, což znamená, že $\Phi(B)$ má negativně binomické rozdělení pro každé $B \in \mathcal{B}_0^d$.

7. Nechť Y je stacionární gaussovské náhodné pole na \mathbb{R}^d , tj. realizace jsou $y : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ a pro každé $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^d$ a $k \in \mathbb{N}$ má náhodný vektor $(Y(x_1), \dots, Y(x_k))$ k -rozměrné normální rozdělení se střední hodnotou $(\mu, \dots, \mu)^T$ a kovarianční maticí $(\sigma^2 r(x_i - x_j))_{i,j=1}^k$, funkce $r(\cdot)$ je autokorelační funkce náhodného pole. Definujme náhodnou míru $\Lambda(B) = \int_B e^{Y(x)} dx$, $B \in \mathcal{B}^d$. Stacionární Coxův proces s řídicí mírou Λ se nazývá logaritmicke-gaussovský Coxův proces (LGCP).

- Určete součinnou hustotu a párovou korelační funkci LGCP.
- Dokažte, že rozdělení LGCP je určeno intenzitou a párovou korelační funkcí.

8. Nechť Φ je Neymanův-Scottové Poissonův proces. Zdůvodněte, že podmíněně při Φ_p jsou dceřinné procesy Ψ_X nezávislé Poissonovy procesy s funkcí intenzity $\lambda_c p(\cdot - X)$.

9. Spočítejte párovou korelační funkci

- Thomasova procesu,
- Matérnova shlukového procesu pro $d = 2$.

10. Pro proces s pevným jádrem $r > 0$ a intenzitou λ definujeme *hustotu pokrytí* (packing density) jako $\tau = \lambda|b(o, r/2)|$. Jedná se vlastně o střední objemový podíl sjednocení koulí se středy v bodech procesu a poloměry $r/2$. Nalezněte maximální možné τ pro tyto modely:

- Matérnův proces s pevným jádrem typ I,
- Matérnův proces s pevným jádrem typ II.

11. Ukažte, že konečný bodový proces s hustotou $p(\varphi) = \alpha\beta^{\varphi(\mathbb{R}^d)}$ je Poissonův bodový proces s mírou intenzity $\beta\Lambda$ a určete normující konstantu α .

12. Ukažte, že bodový proces s hustotou

$$p(\varphi) = \exp\{|B| - \int_B \lambda(x) dx\} \prod_{x \in \varphi} \lambda(x)$$

vzhledem k rozdělení homogenního Poissonova procesu s jednotkovou intenzitou na $B \in \mathcal{B}_0^d$ je Poissonův bodový proces na B s funkcí intenzity λ .

13. Ukažte, že pro $\gamma > 1$ není hustota Straussova procesu integrovatelná.

Úlohy ke cvičení NSTP005 – geostatistika

1. Necht' $\{W_t^H, t \in \mathbb{R}_+^d\}$ je spojitě centrované gaussovské náhodné pole s kovariancemi

$$\mathbb{E}W_t^H W_s^H = \frac{1}{2}(\|t\|^{2H} + \|s\|^{2H} - \|t-s\|^{2H}), \quad t, s \in \mathbb{R}_+^d,$$

kde $H \in (0, 1)$. Takto definované náhodné pole se označuje jako *Lévyho frakcionální Brownovo náhodné pole* (*Lévy's fractional Brownian random field*). Určete jeho variogram.

2. Určete spektrální hustotu slabě stacionárního náhodného pole s kovarianční funkcí $C(h) = \exp\{-\|h\|^2\}$, $h \in \mathbb{R}^d$.

Návod: Využijte toho, že charakteristická funkce normálního rozdělení $N_d(0, \sigma^2 I)$ je $\exp\{-\sigma^2 \|t\|^2/2\}$.

3. Neparametrický odhad variogramu vnitřně stacionárního náhodného pole $\{Z(x) : x \in \mathbb{R}^d\}$ se dá maticově zapsat jako $2\hat{\gamma}(h) = Z^T A(h) Z$, kde $Z = (Z(x_1), \dots, Z(x_n))^T$. Určete matici $A(h)$ pro data na regulární mříži 3×3 , tj. $n = 9$, $d = 2$ a polohy x_i jsou tvaru $(k, l)^T$, $k, l \in \{1, 2, 3\}$.

4. Mějme sférický model pro kovarianční funkci stacionárního a izotropního náhodného pole:

$$C(\|h\|) = \sigma^2 \frac{|b(o, \varrho) \cap b(h, \varrho)|}{|b(o, \varrho)|}, \quad h \in \mathbb{R}^d.$$

Tento model je platný v dimenzi d a ve všech nižších než však v dimenzích vyšších. Vyjádřete tuto kovarianční funkci v případě $d = 1$ a ukažte, že kdybychom obdrženou funkci uvažovali v \mathbb{R}^2 , tak nedostaneme pozitivně semidefinitní funkci.

Návod: Uvažujte body $x_{ij} = (i\sqrt{2}\varrho, j\sqrt{2}\varrho)$, $i, j = 1, \dots, 8$ a koeficienty $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}$.

5. Necht' náhodné veličiny X a Y mají sdruženou hustotu

$$f(x, y) = x + y, \quad x, y \in (0, 1).$$

Najděte nejlepší a nejlepší lineární predikci Y při daném X . V obou případech určete chybu predikce.

Úlohy ke cvičení NSTP005 – prostorové modely na mřížích

1. Ukažte, že $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ markovský řetězec je markovské náhodné pole vzhledem k relaci $i \sim j \Leftrightarrow |i - j| \leq 1$. Dokažte, že obrácená implikace platí následovně: pokud $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ je markovské náhodné pole s hustotou splňující $p(z) > 0$ pro každé $z = (z_1, \dots, z_n)^T$, potom je to markovský řetězec.

2. Lokální charakteristiky nemusí určovat sdružené rozdělení. Uvažujme mříž se dvěma vrcholy $L = \{i, j\}$ a předpokládejme, že $Z_i | Z_j = z_j$ má exponenciální rozdělení s intenzitou z_j a $Z_j | Z_i = z_i$ má exponenciální rozdělení s intenzitou z_i . Ukažte, že tato podmíněná rozdělení neodpovídají žádnému pravděpodobnostnímu rozdělení, tedy neexistuje vlastní sdružená hustota vektoru $(Z_i, Z_j)^T$.

3. Necht' $S = \mathbb{N}_0$ a L je konečná mříž v \mathbb{R}^d . Ukažte, že pokud $\beta_{ij} \geq 0$ pro každé $i, j \in L$, pak konstanta

$$\sum_{z \in S^L} \exp\left(-\sum_{i \in L} (\log z_i! + \beta_i z_i) - \sum_{\{i, j\} \in \mathcal{C}} \beta_{ij} z_i z_j\right)$$

je konečná. Naopak je nekonečná, pokud $\beta_{ij} < 0$ pro nějaké $i, j \in L$.

Návod: V prvním případě uvažujte konfigurace, pro které je $\max z_i = k$ (je jich $(k+1)^n - k^n$). V druhém případě uvažte konfigurace $z_i = z_j = k$ a $z_l = 0$ pro $l \in L \setminus \{i, j\}$.

4. Necht' náhodná veličina Z_1 má normální rozdělení $N(0, \frac{1}{1-\varphi^2})$, kde $|\varphi| < 1$. Uvažujme autoregresní posloupnost prvního řádu $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ definovanou předpisem

$$Z_t = \varphi Z_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 2, \dots, n,$$

kde $\{\varepsilon_t\}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s rozdělením $N(0, 1)$. Spočítejte kovarianční matici Σ vektoru $(Z_1, \dots, Z_n)^T$ a určete matici $Q = \Sigma^{-1}$. Ukažte, že $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ je gaussovské markovské náhodné pole vzhledem k relaci $i \sim j \Leftrightarrow |i - j| \leq 1$.

5. Necht' $\{Z_i, i \in L\}$ je gaussovské markovské náhodné pole s inverzí Q kovarianční matice. Ukažte, že

$$\text{corr}(Z_i, Z_j | Z_{-\{i, j\}}) = -\frac{q_{ij}}{\sqrt{q_{ii}q_{jj}}}, \quad i \neq j.$$