

Zápočtová písemka NSTP199 – 4. 4. 2013

1. Definujme náhodný proces $\{Y_t, t \in [0, 1]\}$ (tzv. Brownův most) předpisem

$$Y_t = W_t - tW_1, \quad t \in [0, 1],$$

kde $\{W_t, t \geq 0\}$ je Wienerův proces.

a) Zjistěte, zda $\{Y_t\}$ je slabě stacionární proces a určete jeho autokovarianční funkci. (2 body)

b) Rozhodněte o spojitosti a diferencovatelnosti procesu $\{Y_t\}$ podle středu. Existuje Riemannův integrál $\int_0^1 Y_t dt$? (4 body)

2. Mějme náhodnou veličinu U s rovnoměrným rozdělením na intervalu $(0, 2\pi)$. Definujme $X_t = \sin t + \cos U$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Zjistěte, zda náhodný proces $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ je slabě nebo kovariančně stacionární. (1 bod)

b) Rozhodněte o spojitosti a diferencovatelnosti procesu $\{X_t\}$ podle středu. (1 bod)

c) Určete spektrální distribuční funkci a spektrální hustotu (pokud existuje). (2 body)

3. Určete autokovarianční funkci stacionární náhodné posloupnosti $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ se spektrální hustotou $f(\lambda) = \frac{\pi - |\lambda|}{\pi^2}$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$. (4 body)