

Prostorové modelování (NMTP438)

verze 27. 7. 2014

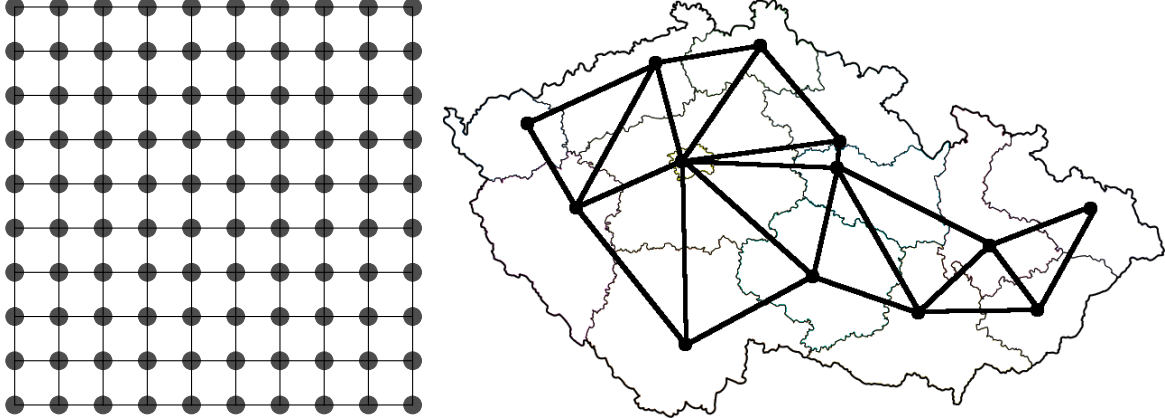
Obsah

Obsah	1
1. Prostorové modely na mříži	2
1.1 Markovská náhodná pole	2
1.2 Gaussovské modely	7
1.3 Míra prostorové autokorelace	10
2. Náhodná pole	13
2.1 Základní definice	13
2.2 Variogram a autokovarianční funkce	15
3. Náhodné míry	23
3.1 Lokálně konečné míry	24
3.2 Náhodné míry	26
3.3 Jednoduché bodové procesy a náhodné množiny	27
3.4 Poissonův bodový proces	30
3.5 Momentové míry	33
3.6 Palmovo rozdělení	35
4. Bodové procesy v euklidovském prostoru	38
4.1 Stacionární bodové procesy na \mathbb{R}^d	38
4.2 Charakteristiky bodových procesů	40
4.3 Modely bodových procesů	43
4.4 Konečné bodové procesy s hustotou	49
4.5 Vnější podmiňování	55
4.6 Nehomogenní bodové procesy	60
5. Kótované bodové procesy	61
5.1 Základní definice	61
5.2 Modely kótování	63
5.3 Vícerozměrné bodové procesy	65
5.4 Procesy s kvantitativními kótami	68
6. Dodatky	70
6.1 Normální rozdělení	70
6.2 Besselovy funkce	71
6.3 Teorie míry	71
Literatura	72

1. Prostorové modely na mříži

1.1 Markovská náhodná pole

Nechť $L \subseteq \mathbb{R}^d$ je konečná množina, kterou budeme označovat jako *mříž* (*lattice*). Nemusí nutně jít o regulární mříž bodů jako je např. $L = \{1, 2, \dots, N\}^d$ (pro $N = 10$ a $d = 2$ je znázorněna na obrázku 1 vlevo). Vrcholy mříže často reprezentují nějakou oblast (příklad je na obrázku 1 vpravo). Počet bodů mříže budeme značit $n = |L|$.



Obrázek 1. Dva příklady mříží v rovině. Vlevo je pravidelná čtvercová mříž o velikosti $n = 100$. Vpravo je znázorněno 13 krajských měst ČR, dvě krajská jsou spojena hranou, pokud příslušné kraje mají společnou hranici.

Definice 1. *Náhodné pole* (*random field*) na mříži L je rodina náhodných veličin $\{Z_i : i \in L\}$ definovaných na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Množinu hodnot, které mohou náhodné veličiny Z_i nabývat, označíme $S \subseteq \mathbb{R}$.

Občas bude výhodné využít toho, že mříž L můžeme očíslovat indexy $1, \dots, n$. Na náhodné pole $\mathbf{Z} = \{Z_i : i \in L\}$ pak pohlížíme jako na náhodný vektor $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)^T$. Jeho rozdělení je dané hustotou $p(\mathbf{z})$ vzhledem k σ -konečné míře $\nu = \nu_1 \times \dots \times \nu_n$ na S^n . S vědomím izomorfie mezi L a $\{1, \dots, n\}$ budeme stejným symbolem značit hustotu $p(\mathbf{z})$ na S^L , v tomto případě $\mathbf{z} = (z_i, i \in L) \in S^L$. Pro $A \subseteq L$ budeme psát zkráceně $\mathbf{Z}_A = \{Z_j : j \in A\}$ a $\mathbf{z}_A = (z_j, j \in A)$. Pro $A, B \subseteq L$ disjunktní bude $\mathbf{z}_A \mathbf{w}_B$ značit $(y_j, j \in A \cup B)$, přitom

$$y_j = \begin{cases} z_j, & \text{když } j \in A, \\ w_j, & \text{když } j \in B. \end{cases}$$

Nechť \sim je symetrická relace na $L \times L$. Řekneme, že dva body mříže jsou *sousedé* (*neighbours*), pokud jsou v této relaci. Pro jednoduchost budeme používat následující značení: $\partial i = \{j \in L : j \sim i, j \neq i\}$, $-i = L \setminus \{i\}$ pro $i \in L$ a $-A = L \setminus A$ pro $A \subseteq L$. Množina L spolu s relací \sim generuje neorientovaný graf, jehož množina vrcholů je L a dva vrcholy $i, j \in L$ jsou spojeny hranou právě tehdy, když $i \sim j$. Obráceně každý neorientovaný graf určuje systém sousedů. Obrázek 1 ukazuje dva příklady takovýchto neorientovaných grafů.

Definice 2. Množina $A \subseteq L$ je *klika* (*clique*) vzhledem k \sim , jestliže $i \sim j$ pro každé $i, j \in A, i \neq j$.

Poznámka 1. Prázdná množina a všechny jednoprvkové podmnožiny L jsou kliky.

V rámci úspory značení budeme symbol p používat nejen pro sdruženou hustotu, ale i pro marginální hustoty a hustoty podmíněných rozdělání. Ze zápisu argumentů funkce p bude vždy jasné, o kterou hustotu se jedná.

Definice 3. Náhodné pole $\{Z_i : i \in L\}$ se nazývá *markovské* vzhledem k relaci \sim , jestliže pro každé $i \in L$ je podmíněné rozdělení $Z_i | \mathbf{Z}_{-i}$ stejné jako podmíněné rozdělení $Z_i | \mathbf{Z}_{\partial i}$. V řeči podmíněných hustot to znamená, že $p(z_i | \mathbf{z}_{-i}) = p(z_i | \mathbf{z}_{\partial i})$ pro ν -s.v. $\mathbf{z} = (z_i, i \in L) \in S^L$ splňující $p(\mathbf{z}) > 0$. Tato podmínka se označuje jako *lokální markovská vlastnost* (*local Markov property*). Hustoty $p(z_i | \mathbf{z}_{\partial i})$ se nazývají *lokální charakteristiky* (*local characteristics*).

Poznámka 2. V případě $\partial i = \emptyset$ lokální markovská podmínka znamená, že podmíněné rozdělení $Z_i \mid \mathbf{Z}_{-i}$ je stejné jako rozdělení Z_i neboli Z_i a \mathbf{Z}_{-i} jsou nezávislé.

Příklad: Markovský řetězec $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ je jednorozměrné markovské náhodné pole ($d = 1$ a $L = \{1, \dots, n\}$) vzhledem k relaci $i \sim j \Leftrightarrow |i - j| \leq 1$ (viz cvičení).

Definice 4. Necht' A, B, C jsou po dvou disjunktní podmnožiny L . Řekneme, že \mathbf{Z}_A a \mathbf{Z}_B jsou *podmíněně nezávislé* (*conditionally independent*) při daném \mathbf{Z}_C , jestliže

$$p(\mathbf{z}_A \mathbf{z}_B \mid \mathbf{z}_C) = p(\mathbf{z}_A \mid \mathbf{z}_C) p(\mathbf{z}_B \mid \mathbf{z}_C)$$

pro ν -s.v. \mathbf{z} splňující $p(\mathbf{z}_C) > 0$.

Lemma 1. Necht' $\{Z_i : i \in L\}$ je markovské náhodné pole a A, B, C jsou po dvou disjunktní podmnožiny L . Pak \mathbf{Z}_A a \mathbf{Z}_B jsou podmíněně nezávislé při daném \mathbf{Z}_C právě tehdy, když

$$p(\mathbf{z}_A \mid \mathbf{z}_B \mathbf{z}_C) = p(\mathbf{z}_A \mid \mathbf{z}_C)$$

pro ν -s.v. \mathbf{z} splňující $p(\mathbf{z}_B \mathbf{z}_C) > 0$.

Důkaz: Plyne jednoduchou úpravou z definice podmíněné hustoty (viz cvičení). □

Lokální markovská vlastnost z definice 3 je tedy ekvivalentní tomu, že Z_i a $\mathbf{Z}_{-\{i\} \cup \partial i}$ jsou podmíněně nezávislé při daném $\mathbf{Z}_{\partial i}$.

Počet sousedů je většinou daleko menší než počet všech vrcholů mříže. Zatímco plně podmíněná rozdělení $Z_i \mid \mathbf{Z}_{-i}$ mohou být komplikována, tak lokální charakteristiky závisí jenom na sousedech daného vrcholu. Díky lokální markovské vlastnosti je tak struktura náhodného pole jednodušší. Například u metod MCMC jsou kroky v Gibbsově výběrovém plánu typicky daleko snadnější.

U markovských řetězců pravděpodobnosti přechodu (nebo přechodové hustoty) spolu s počátečním rozdělením určují sdružené rozdělení řetězce. Nabízí se otázka, kdy systém lokálních charakteristik korektně určuje sdruženou hustotu náhodného pole. Na rozdíl od markovských řetězců nemůžeme čekat, že bychom mohli lokální charakteristiky volit libovolně tak, aby sdružená hustota existovala a byla jednoznačná (viz cvičení). Následující věta říká, že podmíněná rozdělení dobře definují sdružené rozdělení, pokud jsou odvozena ze sdružené hustoty určitého tvaru.

Věta 2. (*Hammersleyho-Cliffordova věta*) Náhodné pole s hustotou splňující $p(\mathbf{z}) > 0$ pro každé $\mathbf{z} \in S^L$ je markovské právě tehdy, když existují funkce $g_C : S^C \rightarrow \mathbb{R}^+$ takové, že

$$p(\mathbf{z}) = \prod_{C \in \mathcal{C}} g_C(\mathbf{z}_C), \quad \mathbf{z} \in S^L,$$

kde $\mathcal{C} = \{C \subseteq L : C \text{ je klika}\}$.

Důkaz: Jednodušší implikace je zprava doleva. Pokud má hustota požadovaný tvar, potom

$$p(z_i \mid \mathbf{z}_{-i}) = \frac{p(\mathbf{z})}{p(\mathbf{z}_{-i})} = \frac{\prod_{C \in \mathcal{C}} g_C(\mathbf{z}_C)}{\int_S \prod_{C \in \mathcal{C}: i \in C} g_C(w_i \mathbf{z}_{-i \cap C}) \prod_{C \in \mathcal{C}: i \notin C} g_C(\mathbf{z}_C) \nu_i(dw_i)} \propto \prod_{C \in \mathcal{C}: i \in C} g_C(\mathbf{z}_C)$$

a uvědomíme-li si, že $i \in C$ implikuje $C \subseteq \{i\} \cup \partial i$, tak také

$$p(z_i \mid \mathbf{z}_{\partial i}) = \frac{p(\mathbf{z}_{\{i\} \cup \partial i})}{p(\mathbf{z}_{\partial i})} \propto \prod_{C \in \mathcal{C}: i \in C} g_C(\mathbf{z}_C).$$

Předpokládejme nyní, že náhodné pole je markovské. Zvolme pevně konfiguraci $\mathbf{w} \in S^L$. Zavedme

$$\Psi_A(\mathbf{z}_A) = -\log p(\mathbf{z}_A \mathbf{w}_{-A}) \quad \text{a} \quad \Phi_A(\mathbf{z}_A) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A|-|B|} \Psi_B(\mathbf{z}_B), \quad A \subseteq L.$$

Z lemmatu 3 plyne, že $\Psi_A(\mathbf{z}_A) = \sum_{B \subseteq A} \Phi_B(\mathbf{z}_B)$. Pro hustotu $p(\mathbf{z})$ dostáváme

$$p(\mathbf{z}) = \exp\{-\Psi_L(\mathbf{z}_L)\} = \exp\left\{-\sum_{B \subseteq L} \Phi_B(\mathbf{z}_B)\right\} = \prod_{B \subseteq L} g_B(\mathbf{z}_B),$$

kde $g_B(\mathbf{z}_B) = \exp\{-\Phi_B(\mathbf{z}_B)\}$. Zbývá tak ukázat, že pokud B není klika, tak $g_B = 1$, neboli $\Phi_B = 0$. Pokud B není klika, tak existují dva různé vrcholy $i, j \in B$ takové, že $i \not\sim j$. Pro $A \subseteq B \setminus \{i, j\}$ označme $A_1 = A \cup \{i\}$, $A_2 = A \cup \{j\}$, $A_3 = A \cup \{i, j\}$. Potom

$$\begin{aligned}\Phi_B(\mathbf{z}_B) &= \sum_{A \subseteq B} (-1)^{|B|-|A|} \Psi_A(\mathbf{z}_A) \\ &= \sum_{A \subseteq B \setminus \{i, j\}} (-1)^{|B|-|A|} [\Psi_A(\mathbf{z}_A) - \Psi_{A_1}(\mathbf{z}_{A_1}) - \Psi_{A_2}(\mathbf{z}_{A_2}) + \Psi_{A_3}(\mathbf{z}_{A_3})] \\ &= \sum_{A \subseteq B \setminus \{i, j\}} (-1)^{|B|-|A|} \log \frac{p(\mathbf{z}_{A_1} \mathbf{w}_{-A_1}) p(\mathbf{z}_{A_2} \mathbf{w}_{-A_2})}{p(\mathbf{z}_{A_3} \mathbf{w}_{-A_3}) p(\mathbf{z}_A \mathbf{w}_{-A})} \\ &= \sum_{A \subseteq B \setminus \{i, j\}} (-1)^{|B|-|A|} \log \frac{p(z_i | \mathbf{z}_A \mathbf{w}_{-A_1}) p(w_i | \mathbf{z}_{A_2} \mathbf{w}_{-A_3})}{p(z_i | \mathbf{z}_{A_2} \mathbf{w}_{-A_3}) p(w_i | \mathbf{z}_A \mathbf{w}_{-A_1})} \\ &= \sum_{A \subseteq B \setminus \{i, j\}} (-1)^{|B|-|A|} \log \frac{p(z_i | \mathbf{z}_A \mathbf{w}_{-A_3}) p(w_i | \mathbf{z}_A \mathbf{w}_{-A_3})}{p(z_i | \mathbf{z}_A \mathbf{w}_{-A_3}) p(w_i | \mathbf{z}_A \mathbf{w}_{-A_3})} = 0.\end{aligned}$$

Využili jsme vztahu $p(z_i | \mathbf{z}_A \mathbf{w}_{-A_1}) = p(z_i | \mathbf{z}_A \mathbf{w}_{-A_3}) = p(z_i | \mathbf{z}_{A_2} \mathbf{w}_{-A_3})$, který plyne z lokální markovské vlastnosti a toho, že $i \not\sim j$.

Poznamenejme, že $\Phi_\emptyset = \Psi_\emptyset = -\log p(\mathbf{w})$ a $g_\emptyset = e^{-\Phi_\emptyset} = p(\mathbf{w})$ je normující konstanta, která bývá obecně obtížně určitelná. □

Lemma 3. (Möbiova inverzní formule) Necht' Φ, Ψ jsou reálné funkce definované na potenční množině konečné množiny L . Pak platí

$$\Phi(A) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A|-|B|} \Psi(B) \quad \forall A \subseteq L \quad \iff \quad \Psi(A) = \sum_{B \subseteq A} \Phi(B) \quad \forall A \subseteq L.$$

Důkaz: Nejprve ukážeme implikaci zleva doprava:

$$\sum_{B \subseteq A} \Phi(B) = \sum_{B \subseteq A} \sum_{D \subseteq B} (-1)^{|B|-|D|} \Psi(D) = \sum_{D \subseteq A} \sum_{C \subseteq A \setminus D} (-1)^{|C|} \Psi(D) = \Psi(A),$$

protože součet $\sum_{C \subseteq A \setminus D} (-1)^{|C|}$ je různý od nuly pouze, když $A \setminus D = \emptyset$. To si lze uvědomit z identity $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = 0$ pro $n \in \mathbb{N}$, která plyne z binomické věty.

Opačná implikace se ukáže analogicky:

$$\sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A|-|B|} \Psi(B) = \sum_{B \subseteq A} \sum_{D \subseteq B} (-1)^{|A|-|B|} \Phi(D) = \sum_{D \subseteq A} \sum_{C \subseteq A \setminus D} (-1)^{|A|-|D|-|C|} \Phi(D) = \Phi(A).$$

□

Definice 5. Rozdělení náhodného pole $\{Z_i : i \in L\}$ s hustotou

$$p(\mathbf{z}) = \exp \left\{ - \sum_{C \in \mathcal{C}} \Phi_C(\mathbf{z}_C) \right\}, \quad \mathbf{z} \in S^L, \quad (1)$$

se nazývá *Gibbsovo rozdělení*. Náhodné pole $\{Z_i : i \in L\}$ se pak označuje jako *gibbsovské*. Ve statistické mechanice, kde hraje důležitou roli, se jeho hustota většinou zapisuje jako $p(\mathbf{z}) = \exp\{-E/T\}$, kde E značí celkovou energii a T teplotu. Přitom $T\Phi_C(\mathbf{z}_C)$ představuje potenciál konfigurace \mathbf{z}_C a $T\Psi_C(\mathbf{z}_C)$ energii \mathbf{z}_C .

Hammersleyho-Cliffordova věta říká, že každé markovské náhodné pole s všude kladnou hustotou je gibbsovské, přičemž $g_C(\mathbf{z}_C) = \exp\{-\Phi_C(\mathbf{z}_C)\}$. Místo abychom specifikovali podmíněná rozdělení přímo, lze je zkonstruovat pomocí volby potenciálových funkcí Φ_C . Protože vyjádření

$$p(\mathbf{z}) = \prod_{C \in \mathcal{C}} g_C(\mathbf{z}_C)$$

není jednoznačné, nejsou ani potenciály jednoznačné. Lokální charakteristiky lze pomocí potenciálů zapsat následovně:

$$p(z_i | \mathbf{z}_{-i}) \propto \exp \left\{ - \sum_{C \in \mathcal{C}: i \in C} \Phi_C(\mathbf{z}_C) \right\}. \quad (2)$$

Uvedme několik příkladů markovských náhodných polí.

Příklad: Nejjednodušší netriviální situaci tvoří dvouprvkový stavový prostor $S = \{0, 1\}$. V obrazové analýze představují vrcholy mříže L pixely, $z_i = 1$ obvykle označuje černou barvu a $z_i = 0$ bílou barvu pixelu i . Definujeme-li (pro $C \neq \emptyset$)

$$\Phi_C(\mathbf{z}_C) = \begin{cases} -\beta, & \text{pokud } C = \{i, j\}, i \sim j \text{ a } z_i = z_j, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $\beta \geq 0$ je parametr (fyzikálně označovaný jako *inverzní teplota*), dostaneme sdruženou hustotu

$$p(\mathbf{z}) = \frac{1}{c(\beta)} \exp \left\{ \beta \sum_{\{i, j\}: i \sim j} \mathbf{1}_{[z_i = z_j]} \right\},$$

kde

$$c(\beta) = \sum_{\mathbf{z} \in \{0, 1\}^L} \exp \left\{ \beta \sum_{\{i, j\}: i \sim j} \mathbf{1}_{[z_i = z_j]} \right\} = e^{\Phi_0}$$

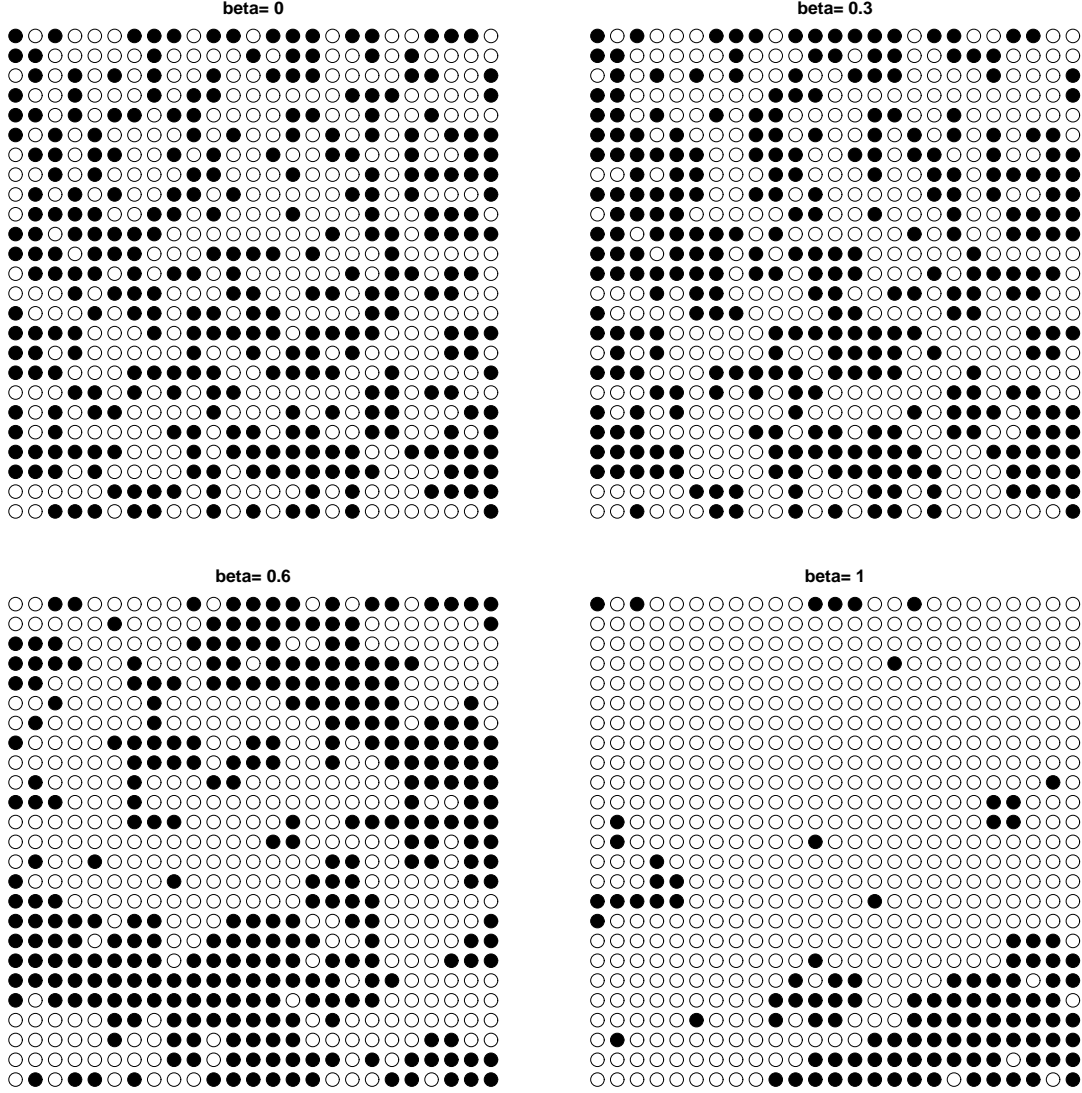
je normující konstanta, ve statistické fyzice se nazývá *partiční suma* nebo *partiční funkce* (*partition function*). Lokální charakteristiky splňují

$$p(z_i | \mathbf{z}_{\partial i}) = \mathbb{P}(Z_i = z_i | \mathbf{Z}_{\partial i} = \mathbf{z}_{\partial i}) = \frac{\exp \left\{ \beta \sum_{j \in \partial i} \mathbf{1}_{[z_j = z_i]} \right\}}{\exp \left\{ \beta \sum_{j \in \partial i} \mathbf{1}_{[z_j = 1]} \right\} + \exp \left\{ \beta \sum_{j \in \partial i} \mathbf{1}_{[z_j = 0]} \right\}}.$$

Pro $\beta = 0$ má každá konfigurace stejnou pravděpodobnost, jedná se o náhodné přiřazení 0 a 1 vrcholům mříže. Pro $\beta > 0$ má větší pravděpodobnost konfigurace, kde se sousedi přitahují. Pravděpodobnost, že daný pixel je černý za předpokladu, že má k černých sousedů je úměrná hodnotě $e^{\beta k}$. Pro $\beta \rightarrow \infty$ převládá v celé konfiguraci jeden stav. Na obrázku 2 jsou nasimulované realizace náhodného pole na pravidelné mříži 25×25 pro různé volby parametru β .

Takto definované náhodné pole se nazývá *Isingův model* [6]. Ve statistické fyzice se využívá jako základní model pro feromagnetismus. Hodnoty ve vrcholech mříže reprezentují spiny, většinou se používá $+1$ pro orientaci nahoru a -1 pro orientaci dolů.

Isingův model (i obecnější markovská náhodná pole) lze rozšířit na nekonečnou mříž. Problém je, že množina všech konfigurací je potom nespočetná a vyjádření (1) tak nemá smysl. Lze však stále uvažovat lokální charakteristiky (pokud každý vrchol má konečně sousedů) tvaru (2). Gibbsovo rozdělení se dá definovat tak, že jeho podmíněná rozdělení jsou určena danými lokálními charakteristikami. Otázkou zůstává, jak je to s existencí a jednoznačností takto definovaného rozdělení. Ukazuje se, že Gibbsovo rozdělení na nekonečné mříži existuje (pokud množina stavů je kompaktní), ale není obecně jednoznačné. V tom případě se mluví o *fázovém přechodu* (*phase transition*). Pro konkrétnost uvažujme pravidelnou rovinnou mříž $L_N = \{-N, \dots, N\}^2$. Zajímá nás chování Isingova modelu pro $N \rightarrow \infty$, tj. $L_N \nearrow \mathbb{Z}^2$. Existuje kritická hodnota $\beta_c = \log(1 + \sqrt{2}) \doteq 0,881$ (analyticky spočtena Onsagerem [8]), při které dochází k fázovému přechodu. Pro $\beta \leq \beta_c$ je Gibbsovo rozdělení jednoznačné, pro $\beta > \beta_c$ není jednoznačné. V případě $\beta > \beta_c$ hodnoty na hranici mříže L_N ovlivňují marginální rozdělení $Z_{(0,0)}$, když $N \rightarrow \infty$. V konfiguraci jsou interakce dalekého dosahu a fyzikálně to znamená, že částice je magnetizována.



Obrázek 2. Simulace Isingova modelu na pravidelné mřížce 25×25 pro $\beta \in \{0; 0,3; 0,6; 1\}$.

Pokud bychom v definici Φ_C připustili nenulové hodnoty pro jednobodové kliky ($\Phi_{\{i\}}(z_i) = -\beta h_i$), tak celková energie je

$$E = - \sum_{i \in L} h_i - \sum_{\{i,j\}: i \sim j} \mathbf{1}_{[z_i = z_j]}$$

a sdružená hustota $p(\mathbf{z}) = \exp\{-E/T\} = \exp\{-\beta E\}$. Fyzikálně lze hodnoty h_i interpretovat jako vliv vnějšího magnetického pole. Další možné zobecnění je připustit, že síla interakce závisí na poloze nebo hodnotě pole v daném místě. Znamená to, že β je pak funkcí i, j, z_i a z_j . Také se dají uvažovat i interakce vyšších řádů než jen párové.

Přes jednoduchou lokální strukturu je Isingův model celkem komplikovaný. Sdružená hustota obsahuje výpočetně složitou normující konstantu, takže například simulovat realizace modelu přímo je prakticky nemožné a je třeba využít metod MCMC.

Příklad: Vícebarevným zobecněním Isingova modelu je *Pottsův model*. Nechť

$$S = \{0, 1, \dots, n_c - 1\},$$

kde $n_c > 2$ určuje počet barev. Potenciálové funkce Φ_C jsou definovány stejně jako v Isingově modelu. Lokální charakteristiky jsou

$$p(z_i | \mathbf{z}_{\partial i}) = \mathbb{P}(Z_i = z_i | \mathbf{Z}_{\partial i} = \mathbf{z}_{\partial i}) = \frac{\exp\left\{\beta \sum_{j \in \partial i} \mathbf{1}_{[z_j = z_i]}\right\}}{\sum_{k=0}^{n_c-1} \exp\left\{\beta \sum_{j \in \partial i} \mathbf{1}_{[z_j = k]}\right\}}, \quad z_i \in \{0, \dots, n_c - 1\}.$$

Příklad: V Pottsově modelu nezáleží na uspořádání barev (prvků množiny S). Pokud by ale stavy představovaly různé odstíny šedé, kde hraje uspořádání roli, nabízí se například model s následujícími lokálními charakteristikami

$$\begin{aligned} p(z_i | \mathbf{z}_{\partial i}) &= \mathbb{P}(Z_i = z_i | \mathbf{Z}_{\partial i} = \mathbf{z}_{\partial i}) = \binom{n_c - 1}{z_i} \pi(\mathbf{z}_{\partial i})^{z_i} (1 - \pi(\mathbf{z}_{\partial i}))^{n_c - 1 - z_i} \\ &= \binom{n_c - 1}{z_i} (1 - \pi(\mathbf{z}_{\partial i}))^{n_c - 1} \exp \left\{ z_i \log \frac{\pi(\mathbf{z}_{\partial i})}{1 - \pi(\mathbf{z}_{\partial i})} \right\}, \end{aligned}$$

kde $\pi(\mathbf{z}_{\partial i})$ jsou předepsané pravděpodobnosti. Znamená to, že $Z_i | \mathbf{Z}_{\partial i} = \mathbf{z}_{\partial i}$ má binomické rozdělení s parametry $n_c - 1$ a $\pi(\mathbf{z}_{\partial i})$. Předpokládáme-li, že $\pi(\mathbf{z}_{\partial i})$ splňují

$$\log \frac{\pi(\mathbf{z}_{\partial i})}{1 - \pi(\mathbf{z}_{\partial i})} = -\beta_i - \sum_{j \in \partial i} \beta_{ij} z_j, \quad (3)$$

dostáváme markovské náhodné pole s potenciály $\Phi_{\{i\}}(z_i) = \beta_i z_i - \log \binom{n_c - 1}{z_i}$, $\Phi_{\{i,j\}}(z_i z_j) = \beta_{ij} z_i z_j$ a $\Phi_C(\mathbf{z}_C) = 0$ pro $|C| > 2$. Vztah (3) je analogický k modelu logistické regrese, a proto se o tomto modelu pro náhodné pole $\{Z_i : i \in L\}$ mluví jako o *autologistickém modelu*.

Příklad: Přejdeme nyní ke spočetné množině hodnot: $S = \mathbb{N}_0$. V praxi se tato situace vyskytuje, pokud data určují počty nějakých událostí, např. počty případů jisté nemoci v daném místě. Uvažujme model, kdy tyto počty mají Poissonovo rozdělení s intenzitou $\lambda(\mathbf{z}_{\partial i})$ závislou na počtech v okolních místech:

$$p(z_i | \mathbf{z}_{\partial i}) = \mathbb{P}(Z_i = z_i | \mathbf{Z}_{\partial i} = \mathbf{z}_{\partial i}) = \exp\{-\lambda(\mathbf{z}_{\partial i})\} \frac{\lambda(\mathbf{z}_{\partial i})^{z_i}}{z_i!} = \exp\{-\lambda(\mathbf{z}_{\partial i}) + z_i \log \lambda(\mathbf{z}_{\partial i}) - \log z_i!\}.$$

Tyto lokální charakteristiky se nazývají *auto-Poissonovy*. Abychom dostali Gibbsovo rozdělení náhodného pole, požadujeme

$$\log \lambda(\mathbf{z}_{\partial i}) = -\beta_i - \sum_{j \in \partial i} \beta_{ij} z_j.$$

Musíme však ještě zajistit konečnost normující konstanty

$$\sum_{\mathbf{z} \in S^L} \exp \left\{ -\sum_{i \in L} (\log z_i! + \beta_i z_i) - \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{C}} \beta_{ij} z_i z_j \right\}.$$

Dá se ukázat, že suma je konečná právě tehdy, když $\beta_{ij} \geq 0$ pro všechna $i, j \in L$ taková, že $i \sim j$, $i \neq j$ (viz cvičení). Podmínka $\beta_{ij} \geq 0$ znamená, že velké hodnoty sousedů místa i znamenají větší pravděpodobnost malých hodnot v i . Proto je praktické použití auto-Poissonova modelu omezené.

1.2 Gaussovské modely

Nejpoužívanější příklad náhodných polí se spojitými hodnotami jsou gaussovská pole. Necht $\{Z_i : i \in L\}$ má n -rozměrné normální rozdělení se střední hodnotou $\boldsymbol{\mu}$ a regulární varianční maticí $\boldsymbol{\Sigma}$, tj. sdružená hustota má tvar

$$p(\mathbf{z}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det \boldsymbol{\Sigma}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}) \right\}, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^L.$$

Inverzi varianční matice (tzv. *matici přesností (precision matrix)*) označme $\mathbf{Q} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ a její prvky q_{ij} , $i, j \in L$. Pak podmíněná rozdělení $Z_i | \mathbf{Z}_{-i}$ jsou normální se střední hodnotou

$$\mu_i - \frac{1}{q_{ii}} \sum_{j \neq i} q_{ij} (z_j - \mu_j)$$

a rozptylem $\frac{1}{q_{ii}}$ (viz cvičení, srovnej také s větou 79). Odtud se nabízí vhodná volba relace sousedství, která zaručí lokální markovskou vlastnost. Položíme-li $i \sim j \Leftrightarrow q_{ij} \neq 0$, pak dostáváme markovské náhodné pole, neboť podmíněné rozdělení $Z_i | \mathbf{Z}_{-i}$ nezávisí na Z_j pro j , která nejsou sousedem i .

Definice 6. Náhodné pole $\mathbf{Z} = \{Z_i : i \in L\}$, které má n -rozměrné normální rozdělení s regulární varianční maticí Σ , nazveme *gaussovské markovské náhodné pole*. Jedná se o případ markovského náhodného pole vzhledem k relaci definované předpisem $i \sim j \Leftrightarrow q_{ij} \neq 0$, kde q_{ij} jsou prvky matice $\mathbf{Q} = \Sigma^{-1}$.

Následující tvrzení říká, že náhodné veličiny odpovídající nesousedním vrcholům jsou podmíněně nezávislé.

Věta 4. Necht' $\mathbf{Z} = \{Z_i : i \in L\}$ je gaussovské markovské náhodné pole. Potom pro $i \neq j$ jsou Z_i a Z_j podmíněně nezávislé při $\mathbf{Z}_{-\{i,j\}}$ právě tehdy, když $i \not\sim j$ (neboli $q_{ij} = 0$).

Důkaz: Mohli bychom jednoduše použít lemma 1 a znalosti rozdělení $Z_i \mid \mathbf{Z}_{-i}$. Zkusme ale postupovat přímo z definice. Připomeňme, že podmíněná nezávislost Z_i a Z_j při daném $\mathbf{Z}_{-\{i,j\}}$ znamená, že $p(z_i, z_j \mid \mathbf{z}_{-\{i,j\}}) = p(z_i \mid \mathbf{z}_{-\{i,j\}})p(z_j \mid \mathbf{z}_{-\{i,j\}})$. Přitom sdružené rozdělení \mathbf{Z} je normální, a proto i podmíněné hustoty jsou hustoty normálního rozdělení. Ze vztahu pro sdruženou hustotu

$$p(\mathbf{z}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det \Sigma}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k,l} (z_k - \mu_k) q_{kl} (z_l - \mu_l) \right\}$$

zjistíme, že

$$p(z_i, z_j \mid \mathbf{z}_{-\{i,j\}}) \propto \exp \left\{ -(z_i - \mu_i)(z_j - \mu_j)q_{ij} - \frac{1}{2}(z_i - \mu_i)^2 q_{ii} - \sum_{k \neq i,j} (z_i - \mu_i)(z_k - \mu_k)q_{ik} - \frac{1}{2}(z_j - \mu_j)^2 q_{jj} - \sum_{l \neq i,j} (z_j - \mu_j)(z_l - \mu_l)q_{jl} \right\}.$$

Pokud $q_{ij} = 0$, potom

$$p(z_i, z_j \mid \mathbf{z}_{-\{i,j\}}) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2}(z_i - \mu_i)^2 q_{ii} - (z_i - \mu_i) \sum_{k \neq i,j} (z_k - \mu_k)q_{ik} \right\} \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2}(z_j - \mu_j)^2 q_{jj} - (z_j - \mu_j) \sum_{l \neq i,j} (z_l - \mu_l)q_{jl} \right\},$$

kde až na normující konstantu je první člen $p(z_i \mid \mathbf{z}_{-\{i,j\}})$ a druhý $p(z_j \mid \mathbf{z}_{-\{i,j\}})$.

Obráceně, pokud $p(z_i, z_j \mid \mathbf{z}_{-\{i,j\}}) = p(z_i \mid \mathbf{z}_{-\{i,j\}})p(z_j \mid \mathbf{z}_{-\{i,j\}})$, nevystupuje na pravé straně vyjádření $p(z_i, z_j \mid \mathbf{z}_{-\{i,j\}})$ člen s $(z_i - \mu_i)(z_j - \mu_j)$, tudíž $q_{ij} = 0$. □

Jednoduchým příkladem gaussovského markovského náhodného pole je gaussovská autoregresní posloupnost řádu 1 (viz cvičení). Více informací o teorii i aplikacích gaussovských markovských náhodných polí lze nalézt v monografii [11].

Gaussovské markovské náhodné pole jsme definovali pomocí sdruženého rozdělení, které je určeno střední hodnotou $\boldsymbol{\mu}$ a maticí přesností \mathbf{Q} . Alternativně bychom mohli předepsat plná podmíněná rozdělení $Z_i \mid \mathbf{Z}_{-i}$. Samozřejmě nemůžeme volit podmíněná rozdělení zcela libovolně (viz cvičení).

Lemma 5. (*Brookovo lemma*) Necht' p je hustota n -rozměrného náhodného vektoru. Pro $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ splňující $p(\mathbf{x}), p(\mathbf{y}) > 0$ platí

$$\frac{p(\mathbf{x})}{p(\mathbf{y})} = \prod_{i=1}^n \frac{p(x_i \mid x_1, \dots, x_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n)}{p(y_i \mid x_1, \dots, x_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n)} \\ = \prod_{i=1}^n \frac{p(x_i \mid y_1, \dots, y_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)}{p(y_i \mid y_1, \dots, y_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)}.$$

Důkaz: Z rovnosti

$$\frac{p(x_n \mid x_1, \dots, x_{n-1}) p(x_1, \dots, x_{n-1})}{p(y_n \mid x_1, \dots, x_{n-1}) p(x_1, \dots, x_{n-1})} = \frac{p(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)}{p(x_1, \dots, x_{n-1}, y_n)}$$

plyne

$$p(\mathbf{x}) = \frac{p(x_n|x_1, \dots, x_{n-1})}{p(y_n|x_1, \dots, x_{n-1})} p(x_1, \dots, x_{n-1}, y_n).$$

Nyní podobně vyjádříme poslední člen na pravé straně:

$$p(x_1, \dots, x_{n-1}, y_n) = \frac{p(x_{n-1}|x_1, \dots, x_{n-2}, y_n)}{p(y_{n-1}|x_1, \dots, x_{n-2}, y_n)} p(x_1, \dots, x_{n-2}, y_{n-1}, y_n).$$

Takto postupně dostaneme první dokazovanou rovnost. Druhá se obdrží analogicky tak, že postupně upravujeme vzorec

$$p(\mathbf{x}) = \frac{p(x_1|x_2, \dots, x_n)}{p(y_1|x_2, \dots, x_n)} p(y_1, x_2, \dots, x_n).$$

□

Brookovo lemma dává návod, jak z plných podmíněných hustot získat sdruženou hustotu. Zvolíme pevně \mathbf{y} a dopočítáme hustotu $p(\mathbf{x})$, kterou tak máme vyjádřenu až na normující konstantu $p(\mathbf{y})$. Tu můžeme určit tak, aby integrál sdružené hustoty byl roven jedné. Pokud by se stalo, že výsledkem není integrovatelná funkce, nevede náš systém podmíněných hustot na vlastní sdruženou hustotu. Systém plných podmíněných hustot, který dává vlastní sdruženou hustotu, nazveme konzistentní.

Definice 7. Systém podmíněných hustot $\{p(z_i|\mathbf{z}_{-i}) : i \in L\}$ se nazývá *konzistentní (consistent)*, pokud existuje sdružená hustota $p(\mathbf{z})$ náhodného pole $\{Z_i : i \in L\}$ taková, že $p(z_i|\mathbf{z}_{-i})$ jsou příslušné podmíněné hustoty. Náhodné pole $\{Z_i : i \in L\}$ se nazývá *podmíněný autoregresní model (conditional autoregressive model)* a označuje se zkratkou CAR.

Budeme-li volit podmíněná rozdělení normální, dostaneme gaussovský CAR model. Mějme matici $\mathbf{B} = (b_{ij})_{i,j \in L}$ s nulovými diagonálními prvky ($b_{ii} = 0$ pro každé $i \in L$) a kladné parametry τ_i^2 , $i \in L$. Označme \mathbf{D} diagonální matici s prvky $d_{ii} = \tau_i^2$ na diagonále. Uvažujme systém podmíněných rozdělení takový, že $Z_i | \mathbf{Z}_{-i}$ má normální rozdělení se střední hodnotou $\sum_{j \in L} b_{ij} Z_j$ a rozptylem τ_i^2 . Očíslujme vrcholy mříže L indexy $1, \dots, n$ a zvolme pevně $\mathbf{y} = \mathbf{o}$ jako nulový vektor v \mathbb{R}^n . Pak podle lemmatu 5 je

$$\frac{p(\mathbf{x})}{p(\mathbf{o})} = \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2\tau_i^2} + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \frac{b_{ij}}{\tau_i^2} x_i x_j \right\} = \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2\tau_i^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{b_{ij}}{\tau_i^2} x_i x_j \right\}.$$

Porovnáním výrazů obdržíme nutné podmínky

$$\frac{b_{ij}}{\tau_i^2} = \frac{b_{ji}}{\tau_j^2} \quad \text{pro všechna } i, j. \quad (4)$$

Za jejich platnosti je

$$p(\mathbf{x}) = p(\mathbf{o}) \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2\tau_i^2} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{b_{ij}}{2\tau_i^2} x_i x_j \right\} = p(\mathbf{o}) \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_i x_j \right\},$$

kde q_{ij} jsou prvky matice $\mathbf{Q} = (\mathbf{I} - \mathbf{B})\mathbf{D}^{-1}$ a \mathbf{I} je jednotková matice. Odtud vidíme, že za předpokladu pozitivní definitnosti \mathbf{Q} (což je ekvivalentní pozitivní definitnosti matice $\mathbf{I} - \mathbf{B}$) je $p(\mathbf{x})$ hustota centrovaného n -rozměrného normálního rozdělení s maticí přesností \mathbf{Q} . Normující konstanta $p(\mathbf{o})$ je rovna $(2\pi)^{-n/2} \sqrt{\det \mathbf{Q}}$. Matice \mathbf{Q} je symetrická díky (4). Všimněme si, že matice \mathbf{B} není symetrická, pokud všechna τ_i^2 nejsou stejná. Uvedená volba n podmíněných normálních rozdělení je tedy konzistentní za předpokladu (4) a pozitivní definitnosti $\mathbf{I} - \mathbf{B}$. V tom případě získáváme gaussovský podmíněný autoregresní model, na který se můžeme také dívat jako na gaussovské markovské náhodné pole vzhledem k relaci $i \sim j \Leftrightarrow q_{ij} \neq 0$. Celý systém se dá stručně zapsat jako $\mathbf{Z} = \mathbf{B}\mathbf{Z} + \varepsilon$, což je ekvivalentní vyjádření $(\mathbf{I} - \mathbf{B})\mathbf{Z} = \varepsilon$. Jelikož \mathbf{Z} má centrované n -rozměrné normální rozdělení s varianční maticí $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{D}(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}$, má ε centrované n -rozměrné normální rozdělení s varianční maticí $\mathbf{D}(\mathbf{I} - \mathbf{B})^T$, tedy složky ε nejsou nezávislé. Pro jednoduchost jsme uvažovali centrovaný případ, ale stejně tak bychom mohli do modelu přidat střední hodnotu $\boldsymbol{\mu}$:

$$\mathbf{Z} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{B}(\mathbf{Z} - \boldsymbol{\mu}) + \varepsilon. \quad (5)$$

Kromě přístupu přes podmíněná rozdělení je možné uvažovat prostorové gaussovské modely, při kterých je náhodné pole definováno simultánně. Motivací je zobecnění modelu autoregresní posloupnosti z časových náhodných procesů. Vztah (5) lze do složek přepsat jako

$$Z_i - \mu_i = \sum_{j \in L} b_{ij}(Z_j - \mu_j) + \varepsilon_i, \quad i \in L.$$

Zatímco u podmíněných autoregresních modelů \mathbf{Z} indukují rozdělení ε , necháme nyní ε indukovat rozdělení \mathbf{Z} .

Definice 8. Nechť $\varepsilon = \{\varepsilon_i : i \in L\}$ je kolekce nezávislých náhodných veličin s normálním rozdělením $N(0, \sigma^2)$. Opět předpokládáme, že matice \mathbf{B} má nulové diagonální prvky a že $(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}$ existuje. Matice \mathbf{B} nemusí být nutně symetrická. Definujeme náhodné pole $\mathbf{Z} = \{Z_i : i \in L\}$ předpisem

$$(\mathbf{I} - \mathbf{B})(\mathbf{Z} - \boldsymbol{\mu}) = \varepsilon. \quad (6)$$

Mluvíme o *simultánním (simultaneous) autoregresivním modelu*, pro který se používá zkratka SAR.

Zřejmě $\mathbb{E}\mathbf{Z} = \boldsymbol{\mu}$ a varianční matice \mathbf{Z} je

$$\mathbb{E}(\mathbf{Z} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{Z} - \boldsymbol{\mu})^T = \sigma^2(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^T)^{-1}.$$

Protože \mathbf{Z} je lineární kombinací ε , je rozdělení \mathbf{Z} gaussovské. Vztah (6) splývá s (5). Rozdíl je v tom, že tentokrát jsme v analogii s autoregresním modelem časových řad uvažovali ε jako bílý šum. Prvky matice \mathbf{B} určují prostorové závislosti. Pokud $b_{ij} = 0$, tak Z_i a Z_j jsou podmíněně nezávislé za $\mathbf{Z}_{-\{i,j\}}$. Sdružená hustota má tvar

$$p(\mathbf{z}) = \frac{\det(\mathbf{I} - \mathbf{B})}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})^T(\mathbf{I} - \mathbf{B}^T)(\mathbf{I} - \mathbf{B})(\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}) \right\}, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n.$$

Všimněme si, že $\text{cov}(\varepsilon, \mathbf{Z}) = \sigma^2(\mathbf{I} - \mathbf{B}^T)^{-1}$, a tedy na rozdíl kauzální časové autoregresní posloupnosti nemusí být ε_i nezávislé s autoregresory.

Podobně se dá uvažovat zobecnění modelu klouzavých součtů nebo ARMA modelů na prostorové modely.

Definice 9. Nechť $\varepsilon = \{\varepsilon_i : i \in L\}$ je kolekce nezávislých náhodných veličin s normálním rozdělením $N(0, \sigma^2)$, $\boldsymbol{\mu}$ je vektor středních hodnot a \mathbf{E} je matice taková, že $\mathbf{I} - \mathbf{E}$ je regulární. Náhodné pole $\mathbf{Z} = \{Z_i : i \in L\}$ dané vztahem $\mathbf{Z} = \boldsymbol{\mu} + (\mathbf{I} - \mathbf{E})\varepsilon$ se nazývá *model prostorových klouzavých součtů (spatial moving average)* a označuje se zkratkou SMA. Pokud navíc uvažujeme matici \mathbf{B} takovou, že $\mathbf{I} - \mathbf{B}$ je regulární, tak definujeme *model SARMA* předpisem

$$(\mathbf{I} - \mathbf{B})(\mathbf{Z} - \boldsymbol{\mu}) = (\mathbf{I} - \mathbf{E})\varepsilon.$$

V případě SMA modelu má \mathbf{Z} n -rozměrné normální rozdělení se střední hodnotou $\boldsymbol{\mu}$ a varianční maticí $\sigma^2(\mathbf{I} - \mathbf{E})(\mathbf{I} - \mathbf{E}^T)$. U SARMA modelu je varianční matice tvaru $\sigma^2(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{E})(\mathbf{I} - \mathbf{E}^T)(\mathbf{I} - \mathbf{B}^T)^{-1}$.

1.3 Míra prostorové autokorelace

Jak už sám název napovídá, označují *prostorové autokorelace* v náhodném poli $\{Z_i : i \in L\}$ korelace mezi dvojicemi veličin Z_i a Z_j pro $i, j \in L$. Zavedeme některé statistické míry, které slouží k posouzení, do jaké míry jsou prostorová data korelována.

Typicky se prostorové autokorelace projevují především u veličin odpovídajícím místům, které jsou v prostoru „blízko“ sobě. U markovských náhodných polí je „blízkost“ v prostoru vyjádřena pomocí relace \sim . Každé dvojici (i, j) bodů mříže L přiřadíme nezápornou váhu w_{ij} . Požadujeme přitom, aby $w_{ij} = 0$, pokud $i = j$ nebo $i \not\sim j$. Váhy w_{ij} se označují jako *prostorové váhy blízkosti (spatial proximity weights, spatial connectivity weights)*. Nejjednodušším příkladem jsou *binární váhy*

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{pokud } i \sim j, i \neq j, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Dalším používaným příkladem jsou *normalizované binární váhy*

$$w_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{|\partial i|}, & j \in \partial i, \\ 0, & j \notin \partial i, \end{cases}$$

kde $|\partial i|$ značí počet prvků množiny ∂i . Všimněme si, že nevyžadujeme symetrii, nemusí tedy platit $w_{ij} = w_{ji}$. Označme \mathbf{W} matici, jejíž prvky jsou w_{ij} , $i, j \in L$. V případě normalizovaných binárních vah je tato matice stochastická (součty v řádku má rovny 1), pokud předpokládáme, že každý vrchol mříže má aspoň jednoho souseda.

Uvažujme nejprve binární náhodná pole, tj. množina stavů $S = \{0, 1\}$ je dvouprvková. Stav většinou představují to, zda v daném místě i sledovaný jev nastal ($Z_i = 1$) nebo ne ($Z_i = 0$). V analýze obrazu typicky hodnota 1 odpovídá černé barvě pixelu i a hodnota 0 bílé barvě.

Definice 10. Nechť $\mathbf{Z} = \{Z_i, i \in L\}$ je náhodné pole s množinou stavů $S = \{0, 1\}$. Definujeme *černá-černá sčítací statistiku (black-black join count statistic)* jako

$$BB = \frac{1}{2} \sum_{i \in L} \sum_{j \in L} w_{ij} Z_i Z_j$$

a *černá-bílá (black-white) sčítací statistiku* jako

$$BW = \frac{1}{2} \sum_{i \in L} \sum_{j \in L} w_{ij} (Z_i - Z_j)^2.$$

Poznámka 3. Zkratky BB a BW pocházejí z anglických výrazů. Význam je ten, že sčítáme váhy přes dvojice sousedů, které jsou buď oba černé ($Z_i = Z_j = 1$), nebo jeden černý a druhý bílý ($Z_i = 1$ a $Z_j = 0$ nebo naopak). Pro binární váhy je BB přímo roven počtu dvojic sousedů, které mají oba černou barvu. Obdobně BW je pak počet dvojic sousedů s různými barvami.

Předpokládejme, že z n bodů mříže je jich m černých (náhodné pole nabývá hodnoty 1) a $n-m$ bílých (náhodné pole nabývá hodnoty 0). Situaci, kdy neexistují prostorové autokorelace v datech, si můžeme představit tak, že černé a bílé hodnoty jsou bodům mříže přiřazeny zcela náhodně. Samozřejmě existuje mnoho způsobů, jak toto náhodné přiřazení provést. Nejpřirozenější jsou *binomický* a *hypergeometrický* výběrový model. Při binomickém předpokládáme, že každý vrchol je obarven nezávisle na ostatních buď černou barvou s pravděpodobností π (tuto pravděpodobnost bychom z dat odhadli jako m/n), nebo bílou s pravděpodobností $1 - \pi$. Potom $\mathbb{P}(Z_i = 1) = \pi$ pro každé $i \in L$ a počet černých vrcholů má binomické rozdělení s parametry n a π . Zřejmě platí $\mathbb{E}BB = \frac{1}{2}\pi^2 w$ a $\mathbb{E}BW = \pi(1 - \pi)w$, kde $w = \mathbf{1}^T \mathbf{W} \mathbf{1} = \sum_{i \in L} \sum_{j \in L} w_{ij}$ a $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$. Pokud chceme zaručit, že počet černých vrcholů bude právě m , je vhodný hypergeometrický výběrový plán. Při něm z n vrcholů náhodně (bez vracení) vybereme m , které obarvíme černě, a zbylých $n - m$ bíle. V tom případě $\mathbb{P}(Z_i = 1) = m/n$ a $\mathbb{P}(Z_i = 1, Z_j = 1) = \frac{m(m-1)}{n(n-1)}$, a proto

$$\mathbb{E}BB = \frac{w}{2} \cdot \frac{m(m-1)}{n(n-1)}.$$

Vzorečky pro rozptyl v obou modelech jsou o něco komplikovanější (viz [3]). Pokud statistika BB spočtená z dat je výrazně větší než $\mathbb{E}BB$ svědčí to pro pozitivní autokorelace, sousední vrcholy mříže mají tendenci mít stejnou barvu. Naopak velké hodnoty BW odpovídají negativním autokorelacím, neboť sousední vrcholy mříže jsou spíše odlišné barvy. Pro realizace Isingova modelu z obrázku 2 jsou hodnoty BW postupně (s rostoucím β) 588, 489, 352 a 133. Přitom teoretická střední hodnota pro případ $\beta = 0$ (nulové prostorové autokorelace – nezávislé rovnoměrné náhodné přiřazení 0 a 1 vrcholům mříže) je 600. S rostoucím β se výrazněji projevují pozitivní prostorové autokorelace.

Pro spojitá data se jako míra podobnosti veličin v místech i a j nejčastěji používá $(Z_i - \bar{Z})(Z_j - \bar{Z})$ nebo $(Z_i - Z_j)^2$. Spojením příspěvků těchto veličin přes všechny dvojice sousedů a normováním odhadem rozptylu dostaneme následující indexy.

Definice 11. Nechť $\{Z_i : i \in L\}$ je náhodné pole s konstantní střední hodnotou $\mathbb{E}Z_i = \mu$ a konstantním rozptylem $\text{var } Z_i = \sigma^2$. *Moranův index* je definován předpisem

$$I = \frac{n \sum_{i \in L} \sum_{j \in L} w_{ij} (Z_i - \bar{Z})(Z_j - \bar{Z})}{w \sum_{i \in L} (Z_i - \bar{Z})^2},$$

kde $\bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_{i \in L} Z_i$. *Gearyho index* je dán vztahem

$$c = \frac{n-1}{2w} \frac{\sum_{i \in L} \sum_{j \in L} w_{ij} (Z_i - Z_j)^2}{\sum_{i \in L} (Z_i - \bar{Z})^2}.$$

Budeme uvažovat dva různé předpoklady, které oba vedou na situaci, ve které jsou prostorové autokorelace nulové:

1. předpoklad normality: náhodné pole \mathbf{Z} je tvořeno nekorelovanými náhodnými veličinami s normálním rozdělením $N(\mu, \sigma^2)$;
2. předpoklad znáhodnění: každá z $n!$ permutací přiřazení pozorovaných hodnot vrcholům mříže je stejně pravděpodobná.

Střední hodnotu za předpokladu normality budeme značit \mathbb{E}_g a za předpokladu znáhodnění \mathbb{E}_r . Označme $Y_i = Z_i - \bar{Z}$, $M_2 = \sum_{i \in L} Y_i^2$,

$$R = \sum_{i \in L} \sum_{j \in L} w_{ij} Y_i Y_j \quad \text{a} \quad V = \sum_{i \in L} \sum_{j \in L} w_{ij} (Z_i - Z_j)^2.$$

Zřejmě platí $\mathbb{E}_g Y_i = 0$, $\mathbb{E}_g Y_i^2 = \mathbb{E}_g (Z_i - \bar{Z})^2 = (1 - 1/n)\sigma^2$, $\mathbb{E}_g Y_i Y_j = \mathbb{E}_g (Z_i - \bar{Z})(Z_j - \bar{Z}) = -\sigma^2/n$ a $\mathbb{E}_g (Z_i - Z_j)^2 = 2\sigma^2$ pro $i \neq j$. Připomeneme-li si, že $w_{ii} = 0$, pak máme

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_g M_2 &= \sum_{i \in L} \mathbb{E}_g Y_i^2 = (n-1)\sigma^2, \\ \mathbb{E}_g R &= \sum_{i \in L} \sum_{j \in L} w_{ij} \mathbb{E}_g Y_i Y_j = -\frac{\sigma^2}{n} w, \\ \mathbb{E}_g V &= \sum_{i \in L} \sum_{j \in L} w_{ij} \mathbb{E}_g (Z_i - Z_j)^2 = 2\sigma^2 w. \end{aligned}$$

Protože index I se nezmění, vynásobíme-li Z_i nenulovou konstantou, tak podle věty 80 jsou M_2 a I nezávislé. Proto

$$\frac{n}{w} \mathbb{E}_g R = \mathbb{E}_g I M_2 = \mathbb{E}_g I \cdot \mathbb{E}_g M_2 = (n-1)\sigma^2 \mathbb{E}_g I,$$

z čehož dostáváme, že $\mathbb{E}_g I = -\frac{1}{n-1}$. Podobně věta 80 zaručuje nezávislost M_2 a c , z čehož odvodíme

$$\frac{n-1}{2w} \mathbb{E}_g V = \mathbb{E}_g c M_2 = \mathbb{E}_g c \cdot \mathbb{E}_g M_2 = (n-1)\sigma^2 \mathbb{E}_g c,$$

a proto $\mathbb{E}_g c = 1$.

Za předpokladu znáhodnění jsou $\bar{Z} = \bar{z}$ a $M_2 = \sum_{i \in L} (z_i - \bar{z})^2 = m_2$ konstantní (každá permutace vede na stejnou hodnotu). Pro $i \neq j$ je

$$\mathbb{E}_r Y_i Y_j = \sum_{k \in L} \sum_{l \in L: l \neq k} \frac{1}{n(n-1)} (z_k - \bar{z})(z_l - \bar{z}) = -\frac{1}{n(n-1)} \sum_{k \in L} (z_k - \bar{z})^2 = -\frac{m_2}{n(n-1)}$$

a

$$\mathbb{E}_r (Z_i - Z_j)^2 = \sum_{k \in L} \sum_{l \in L: l \neq k} \frac{1}{n(n-1)} (z_k - z_l)^2 = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k \in L} \sum_{l \in L} (y_k - y_l)^2 = \frac{2m_2}{n-1},$$

kde $y_i = z_i - \bar{z}$ a využili jsme toho, že $\sum_{i \in L} y_i = 0$. Odtud

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_r I &= \frac{n}{wm_2} \sum_{i \in L} \sum_{j \in L} w_{ij} \mathbb{E}_r Y_i Y_j = -\frac{1}{n-1}, \\ \mathbb{E}_r c &= \frac{n-1}{2wm_2} \sum_{i \in L} \sum_{j \in L} w_{ij} \mathbb{E}_r (Z_i - Z_j)^2 = 1. \end{aligned}$$

Ukázali jsme, že $\mathbb{E}_g I = \mathbb{E}_r I = -\frac{1}{n-1}$ a $\mathbb{E}_g c = \mathbb{E}_r c = 1$. Vyjádření rozptylu za předpokladu normality a znáhodnění se už ovšem liší (viz [3]). Moranovu a Gearyho statistiku lze interpretovat následovně:

pokud $I > \mathbb{E}I$ nebo $c < \mathbb{E}c$, tak vrchol mříže má tendenci být spojen s vrcholem mříže, který má podobnou hodnotu pole, prostorová autokorelace je kladná. Naopak, pokud $I < \mathbb{E}I$ nebo $c > \mathbb{E}c$, mají hodnoty ve dvou sousedních vrcholech mříže tendenci být odlišné.

Předpoklad konstantní střední hodnoty a konstantního rozptylu náhodného pole je důležitý. Jinak by totiž hodnoty v blízkých místech mohly být podobné ne kvůli kladné prostorové autokorelaci, ale proto, že se jedná o nezávislé realizace z rozdělení s podobnou střední hodnotou. Podobně hodnoty v bodech, které jsou v prostoru vzdálené, by se mohly jevit odlišné proto, že se mění střední hodnota náhodného pole.

2. Náhodná pole

Náhodné pole chápeme jako náhodný proces s d -rozměrnou indexovou množinou D . V této kapitole se budeme zabývat případem, kdy D je souvislá a má kladnou d -rozměrnou Lebesgueovu míru. Základní definice a tvrzení jsou analogické jednorozměrnému případu a lze je pro $d = 1$ nalézt v [9].

2.1 Základní definice

Definice 12. Nechť D je pevná podmnožina \mathbb{R}^d . *Náhodné pole* je kolekce reálných náhodných veličin $\{Z(x) : x \in D\}$ definovaných na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Konečně rozměrná rozdělení náhodného pole jsou popsána distribučními funkcemi

$$F_{x_1, \dots, x_n}(t_1, \dots, t_n) = \mathbb{P}(Z(x_1) \leq t_1, \dots, Z(x_n) \leq t_n), \quad t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

kde $n \in \mathbb{N}$ a $x_1, \dots, x_n \in D$.

Definice 13. Řekneme, že systém distribučních funkcí $\{F_{x_1, \dots, x_n} : n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in D\}$ je *konzistentní*, když pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in D$, $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ a permutaci i_1, \dots, i_n čísel $1, \dots, n$ platí

$$F_{x_1, \dots, x_n}(t_1, \dots, t_n) = F_{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}}(t_{i_1}, \dots, t_{i_n})$$

a

$$F_{x_1, \dots, x_n}(t_1, \dots, t_n) = \lim_{t_{n+1} \rightarrow \infty} F_{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}}(t_1, \dots, t_n, t_{n+1}).$$

Distribuční funkce konečně rozměrných rozdělení náhodného pole zřejmě tvoří konzistentní systém. Opačně platí následující věta.

Věta 6. (Daniellova-Kolmogorovova existenční věta) Nechť $\{F_{x_1, \dots, x_n} : n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in D\}$ je konzistentní systém distribučních funkcí. Pak existuje náhodné pole $\{Z(x) : x \in D\}$ na nějakém pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ takové, že platí (7) pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in D$.

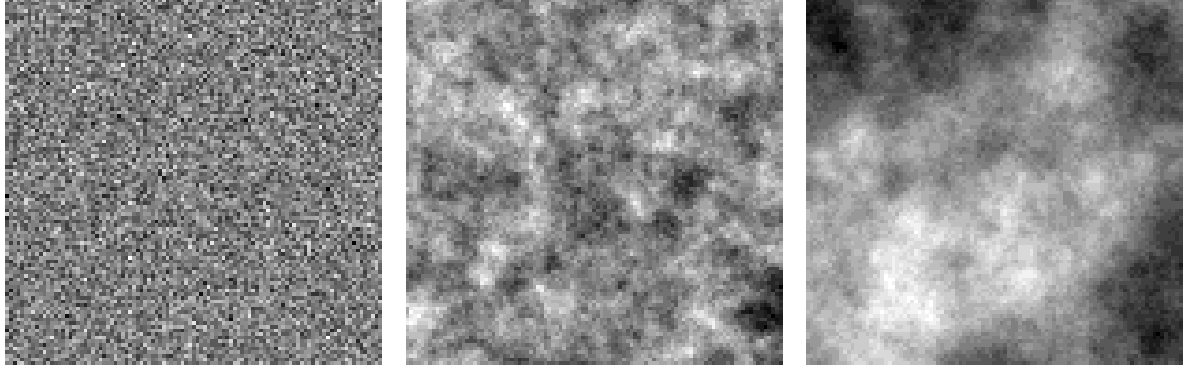
Důkaz: [14], věta I.10.3. □

Nejvíce studována jsou gaussovská náhodná pole, která mají všechna konečně rozměrná rozdělení normální.

Definice 14. Náhodné pole $\{Z(x) : x \in D\}$ je *gaussovské*, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x_1, \dots, x_n \in D$ má náhodný vektor $(Z(x_1), \dots, Z(x_n))^T$ n -rozměrné normální rozdělení.

Poznámka 4. Gaussovské náhodné pole je určeno střední hodnotou $\mu(x) = \mathbb{E}Z(x)$ a autokovarianční funkcí $C(x, y) = \text{cov}(Z(x), Z(y))$, $x, y \in D$.

Tři realizace gaussovských náhodných polí s konstantní střední hodnotou a různě volenými autokovariančními funkcemi $C(x, y)$ jsou vykresleny na obrázku 3.



Obrázek 3. Vygenerované realizace gaussovských náhodných polí ve čtverci $D = [0, 10]^2$. Byla volena konstantní střední hodnota i rozptyl ($\mu(x) = 0$ a $\text{var} Z(x) = 1$ pro každé $x \in D$) a tři různé autokovarianční funkce. Vlevo se neprojevují žádné závislosti ($C(x, y) = \mathbf{1}_{[x=y]}$), uprostřed jsou výraznější ($C(x, y) = e^{-2\|x-y\|}$) a vpravo jsou nejsilnější ($C(x, y) = e^{-0,1\|x-y\|}$).

V praxi většinou pozorujeme pouze jednu realizaci z náhodného pole Z v konečně mnoha bodech x_1, \dots, x_n . K tomu, abychom mohli dělat nějaké statistické závěry, tak potřebujeme přijmout další předpoklady na náhodné pole Z .

Definice 15. Náhodné pole $\{Z(x) : x \in D\}$ je *striktně stacionární* (*strictly stationary*), pokud konečně rozměrná rozdělení vektorů $(Z(x_1), \dots, Z(x_n))^T$ a $(Z(x_1 + h), \dots, Z(x_n + h))^T$ jsou stejná pro každé $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in D$ a $h \in \mathbb{R}^d$ takové, že $x_1 + h, \dots, x_n + h \in D$. Řekneme, že náhodné pole s konečnými druhými momenty je *slabě stacionární* (*weakly stationary*), pokud střední hodnota je konstantní ($\mathbb{E}Z(x) = \mu$ pro všechna $x \in D$) a autokovarianční funkce $C(x, y) = \text{cov}(Z(x), Z(y))$ je invariantní vůči posunutím, tj. $C(x + h, y + h) = C(x, y)$ pro každé $x, y \in D$ a $h \in \mathbb{R}^d$ splňující $x + h, y + h \in D$. V tom případě je $C(x, y) = C(x - y)$ pro všechna $x, y \in D$, kde se dopouštíme zjednodušení ve značení a používáme písmeno C i pro funkci jedné proměnné na \mathbb{R}^d . Je-li splněna pouze podmínka na autokovarianční funkci (střední hodnota nemusí být konstantní), tak náhodné pole je *kovariančně stacionární*.

Poznámka 5. Striktně stacionární náhodné pole s konečnými druhými momenty je slabě stacionární. U gaussovského náhodného pole plyne ze slabé stacionarity striktní stacionarita. Realizace na obrázku 3 pocházejí ze stacionárních gaussovských náhodných polí.

Dále budeme potřebovat ještě jeden druh stacionarity.

Definice 16. Řekneme, že náhodné pole $\{Z(x) : x \in D\}$ je *vnitřně stacionární* (*intrinsic(ally) stationary*), pokud pro každé $x, y \in D$ je $\mathbb{E}(Z(x) - Z(y)) = 0$ a $\text{var}(Z(x) - Z(y))$ je funkcí rozdílu $x - y$.

Poznámka 6. Pro slabě stacionární náhodné pole platí: $\mathbb{E}(Z(x) - Z(y)) = \mu - \mu = 0$ a

$$\text{var}(Z(x) - Z(y)) = \text{var} Z(x) + \text{var} Z(y) - 2 \text{cov}(Z(x), Z(y)) = 2(C(0) - C(x - y)). \quad (8)$$

Znamená to, že každé slabě stacionární náhodné pole je také vnitřně stacionární. Obrácená implikace neplatí, např. pro $d = 1$ je Wienerův proces vnitřně stacionární ($\text{var}(Z(x + h) - Z(x)) = |h|$), ale není slabě stacionární ($\text{var} Z(x) = |x|$).

Definice 17. Řekneme, že náhodné pole $\{Z(x) : x \in D\}$ je L_2 -*spojité* nebo také *spojité podle kvadratického středu* (*mean square continuous*) v bodě $x \in D$, jestliže $\mathbb{E}(Z(x + h) - Z(x))^2 \rightarrow 0$ pro $\|h\| \rightarrow 0+$. Pole je L_2 -spojité, pokud je L_2 -spojité v každém bodě $x \in D$.

Poznámka 7. Je dobré si uvědomit, že L_2 -spojitost neznamená spojitost realizací náhodného pole.

O hladkosti náhodného pole vypovídá jeho diferencovatelnost.

Definice 18. Náhodné pole $\{Z(x) : x \in D\}$ je L_2 -*diferencovatelné* nebo také *diferencovatelné podle kvadratického středu* (*mean square differentiable*) v bodě $x \in D$ ve směru $h \in \mathbb{R}^d$, jestliže existuje limita

pro $t \rightarrow 0$ podílu $(Z(x + th) - Z(x))/t$ v prostoru L_2 . Pokud tuto limitu označíme $Z'(x, h)$, tak musí tedy platit

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathbb{E} \left(\frac{Z(x + th) - Z(x)}{t} - Z'(x, h) \right)^2 = 0.$$

Nechť $\{e_1, \dots, e_d\}$ je kanonická báze prostoru \mathbb{R}^d , pak $Z'(x, e_j)$, $j = 1, \dots, d$, jsou *parciální derivace* (*partial derivatives*) náhodného pole v bodě x .

2.2 Variogram a autokovarianční funkce

Definice a vlastnosti

Náhodná pole se používají jako modely pro geostatistická data (např. teplota, kvalita vzduchu nebo koncentrace minerálů v půdě). V geostatistice je oblíbeným nástrojem pro popis prostorové korelační struktury tzv. variogram.

Definice 19. Pro vnitřně stacionární náhodné pole $\{Z(x) : x \in D\}$ definujeme *variogram* jako

$$2\gamma(h) = \text{var}(Z(x+h) - Z(x)), \quad h \in D - D,$$

kde $D - D = \{h \in \mathbb{R}^d : h = x - y, x \in D, y \in D\}$. Pro $\gamma(h)$ se používá označení *semivariogram*. Pokud navíc je $\gamma(h)$ pouze funkcí $\|h\|$, mluvíme o *izotropním* semivariogramu či variogramu a při značení používáme rovněž písmeno γ pro funkci, která je v tomto případě definovaná na nezáporných číslech.

Pro slabě stacionární náhodná pole je (semi)variogram omezená funkce a z (8) dostáváme vztah mezi semivariogramem a autokovarianční funkcí: $\gamma(h) = C(o) - C(h)$.

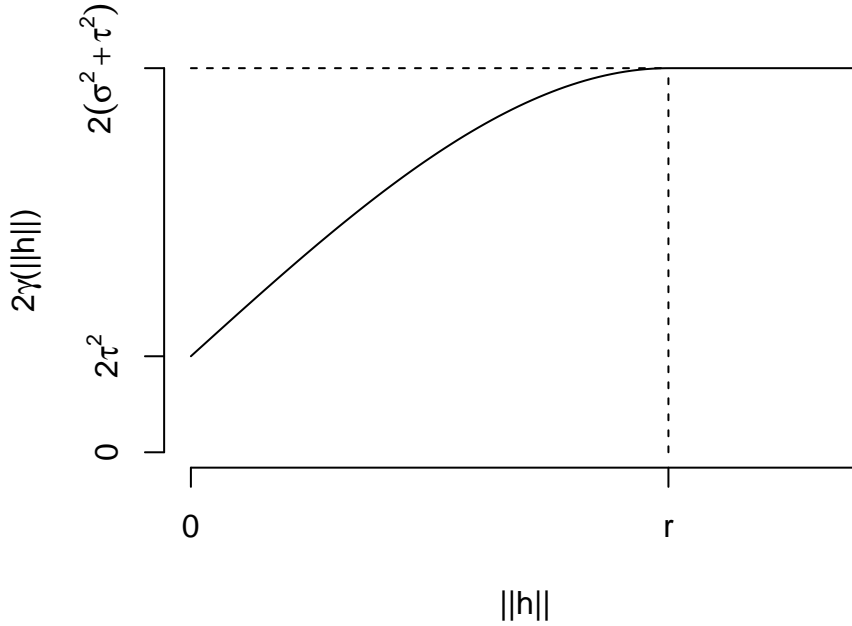
Z definice je vidět, že zřejmě platí $\gamma(h) = \gamma(-h)$, $\gamma(o) = 0$ a $\gamma(h) \geq 0$. Dále $\gamma(h) \rightarrow 0$ pro $\|h\| \rightarrow 0+$ právě tehdy, když náhodné pole je L_2 -spojité. To plyne přímo z definice, neboť pro vnitřně stacionární náhodné pole je $2\gamma(h) = \text{var}(Z(x+h) - Z(x)) = \mathbb{E}(Z(x+h) - Z(x))^2$. Pokud $\gamma(h)$ není spojitá v počátku, tak se hovoří o tzv. *efektu zbytkového rozptylu* (*nugget effect*). Funkce γ nemusí být omezená.

Definice 20. Pokud existuje limita $\lim_{\|h\| \rightarrow 0+} 2\gamma(h) = 2\tau^2 > 0$, nazývá se *zbytkový rozptyl* (*nugget*). Pokud existuje konečná limita $\lim_{\|h\| \rightarrow \infty} 2\gamma(h) = 2(\tau^2 + \sigma^2)$, nazývá se *práh* (*sill*). V tom případě definujeme *rozsah* (*range*) jako

$$r = \inf\{s \geq 0 : 2\gamma(h) = 2(\tau^2 + \sigma^2) \text{ pro všechna } h \in \mathbb{R}^d : \|h\| \geq s\}.$$

Hodnotě $2\sigma^2$ se říká *částečný práh* (*partial sill*).

Příklad izotropního variogramu se zbytkovým rozptylem, prahem a konečným rozsahem je znázorněn na obrázku 4.



Obrázek 4. Ilustrace definice zbytkového rozptylu, prahu a rozsahu.

Zbytkový rozptyl znamená, že opakovaná měření ve stejném místě dávají rozdílné hodnoty. Vyskytuje se například v situaci, kdy nepozorujeme přímo realizaci náhodného pole, ale pozorované hodnoty jsou zatíženy nějakou chybou. Mějme vnitřně stacionární náhodné pole $\{S(x) : x \in D\}$ (tzv. signál) s variogramem $2\gamma_S(h)$, který je spojitý v počátku, a vnitřně stacionární náhodné pole $\{\varepsilon(x) : x \in D\}$ (tzv. šum), které je nezávislé na $\{S(x) : x \in D\}$. Pozorujeme realizaci náhodného pole $\{Z(x) : x \in D\}$, kde $Z(x) = S(x) + \varepsilon(x)$. Pokud $\varepsilon(x)$ jsou nekorelované náhodné veličiny s konstantní střední hodnotou a rozptylem τ^2 (tzv. *bílý šum (white noise)*), potom variogram $\{Z(x) : x \in D\}$ je

$$2\gamma(h) = 2\gamma_S(h) + 2\tau^2 \mathbf{1}_{[h \neq 0]}$$

a zbytkový rozptyl je tudíž roven $2\tau^2$.

Autokovarianční funkce slabě stacionárního náhodného pole má tyto vlastnosti: $C(h) = C(-h)$; $C(o) = \text{var } Z(x) \geq 0$; $|C(h)| \leq C(o)$, tudíž C je omezená funkce. Následující věta dává spojitost mezi L_2 -spojitostí náhodného pole a spojitostí jeho autokovarianční funkce.

Věta 7. *Nechť $\{Z(x) : x \in D\}$ je náhodné pole s konečnými druhými momenty (tj. $\mathbb{E}Z(x)^2 < \infty$ pro každé $x \in D$) a takové, že střední hodnota $\mu(x) = \mathbb{E}Z(x)$ je spojitá na D . Náhodné pole je spojitě podle kvadratického středu právě tehdy, když autokovarianční funkce $C(x, y)$ je spojitá ve všech bodech, které splňují $x = y$.*

Důkaz: Využijeme rozpisu

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z(x+h) - Z(x))^2 &= \text{var}(Z(x+h) - Z(x)) + (\mu(x+h) - \mu(x))^2 \\ &= C(x+h, x+h) - 2C(x+h, x) + C(x, x) + (\mu(x+h) - \mu(x))^2. \end{aligned}$$

Pokud je funkce $C(x, y)$ spojitá v bodech $x = y$, pak pravá strana jde pro $\|h\| \rightarrow 0+$ k nule, a proto je náhodné pole L_2 -spojité.

Naopak L_2 -spojitost náhodného pole implikuje

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0+} [C(x+h, x+h) - 2C(x+h, x) + C(x, x)] = 0, \quad (9)$$

což po umocnění dává

$$4 \lim_{\|h\| \rightarrow 0^+} C(x+h, x)^2 = \left(\lim_{\|h\| \rightarrow 0^+} C(x+h, x+h) + C(x, x) \right)^2.$$

Z Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti máme

$$C(x+h, x)^2 \leq C(x+h, x+h)C(x, x),$$

a tak

$$4 \lim_{\|h\| \rightarrow 0^+} C(x+h, x+h)C(x, x) \geq \left(\lim_{\|h\| \rightarrow 0^+} C(x+h, x+h) + C(x, x) \right)^2.$$

Jelikož nerovnost $4ab \geq (a+b)^2$ platí pouze pro $a=b$, musí být $\lim_{\|h\| \rightarrow 0^+} C(x+h, x+h) = C(x, x)$. Vzhledem k (9) pak je také $\lim_{\|h\| \rightarrow 0^+} C(x+h, x) = C(x, x)$. □

Důsledek 8. *Slabě stacionární náhodné pole je spojitě podle kvadratického středu právě tehdy, když jeho autokovarianční funkce je spojitá v počátku.*

Důkaz: Tvzení plyne ihned z věty 7, lze však také jednoduše dokázat přímo. Stačí si uvědomit vztah (8) mezi variogramem a autokovarianční funkcí a to, že jsme si již povšimli, že vnitřně stacionární náhodné pole je L_2 -spojité právě tehdy, když variogram je spojitý v počátku. □

Podobně se dá ukázat, že L_2 -diferencovatelnost slabě stacionárního (případně vnitřně stacionárního) náhodného pole souvisí s diferencovatelností autokovarianční funkce (případně variogramu) v počátku.

Nyní vyslovíme pomocné tvrzení, které se bude hodit při výpočtech charakteristik druhého řádu náhodného pole.

Lemma 9. *Pro kovariančně stacionární náhodné pole $\{Z(x) : x \in D\}$ platí:*

$$\text{cov} \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j Z(x_j), \sum_{j=1}^n \beta_j Z(x_j) \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \beta_k C(x_k - x_j)$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in D$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$.

Pro vnitřně stacionární náhodné pole $\{Z(x) : x \in D\}$ platí:

$$\text{cov} \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j Z(x_j), \sum_{j=1}^n \beta_j Z(x_j) \right) = - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \beta_k \gamma(x_k - x_j)$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in D$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ splňující $\sum_{j=1}^n \alpha_j = \sum_{j=1}^n \beta_j = 0$.

Důkaz: První vztah je obvyklý vzoreček pro výpočet kovariance lineárních kombinací náhodných veličin. K důkazu druhého vztahu použijeme

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j Z(x_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j (Z(x_j) - Z(x_1)), \quad \sum_{j=1}^n \beta_j Z(x_j) = \sum_{j=1}^n \beta_j (Z(x_j) - Z(x_1))$$

a identitu

$$2\gamma(x_j - x_k) = 2\gamma(x_j - x_1) + 2\gamma(x_k - x_1) - 2\text{cov}(Z(x_j) - Z(x_1), Z(x_k) - Z(x_1)),$$

která plyne z $Z(x_j) - Z(x_k) = (Z(x_j) - Z(x_1)) - (Z(x_k) - Z(x_1))$ spočtením rozptylu na obou stranách. Celkem tak máme

$$\begin{aligned} \text{cov} \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j Z(x_j), \sum_{j=1}^n \beta_j Z(x_j) \right) &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \beta_k \text{cov}(Z(x_j) - Z(x_1), Z(x_k) - Z(x_1)) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \beta_k (\gamma(x_j - x_1) + \gamma(x_k - x_1) - \gamma(x_j - x_k)) \\ &= - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \beta_k \gamma(x_j - x_k). \end{aligned}$$

□

Definice 21. Nechť $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ je symetrická funkce, tj. $f(x) = f(-x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$. Řekneme, že f je *pozitivně semidefinitní* (*positive semidefinite*), jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ platí

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \alpha_k f(x_j - x_k) \geq 0.$$

Funkce f se nazývá *podmíněně negativně definitní* (*conditional negative definite*), pokud pro každé $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$ a $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ splňující $\sum_{j=1}^n \beta_j = 0$ platí

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \beta_j \beta_k f(x_j - x_k) \leq 0.$$

Důsledek 10. Autokovarianční funkce kovariančně stacionárního náhodného pole je pozitivně semidefinitní. Variogram vnitřně stacionárního náhodného pole je podmíněně negativně definitní.

Důkaz: Z lemmatu 9 plyne

$$0 \leq \text{var} \sum_{j=1}^n \alpha_j Z(x_j) = \text{cov} \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j Z(x_j), \sum_{j=1}^n \alpha_j Z(x_j) \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \alpha_k C(x_j - x_k)$$

pro libovolné $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ a

$$0 \leq \text{var} \sum_{j=1}^n \beta_j Z(x_j) = \text{cov} \left(\sum_{j=1}^n \beta_j Z(x_j), \sum_{j=1}^n \beta_j Z(x_j) \right) = - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \beta_j \beta_k \gamma(x_j - x_k)$$

pro libovolné $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ splňující $\sum_{j=1}^n \beta_j = 0$.

□

Platí dokonce, že třída všech autokovariančních funkcí kovariančně stacionárních náhodných polí splývá s třídou pozitivně semidefinitních funkcí. Podobně třída všech variogramů vnitřně stacionárních náhodných polí splývá s třídou podmíněně negativně definitních funkcí, které jsou nulové v počátku.

Věta 11. Ke každé pozitivně semidefinitní funkci $C : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ existuje kovariančně stacionární náhodné pole takové, že C je jeho autokovarianční funkce. Ke každé podmíněně negativně definitní funkci $\gamma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ splňující $\gamma(o) = 0$ existuje vnitřně stacionární náhodné pole takové, že 2γ je jeho variogram.

Důkaz: Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a libovolná $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$ je matice $\Sigma = (C(x_i - x_j))_{i,j=1,\dots,n}$ pozitivně semidefinitní (plyne z pozitivní semidefinitnosti funkce C) a můžeme tak uvažovat n -rozměrné centrované normální rozdělení s varianční maticí Σ . Dostáváme konzistentní systém konečně rozměrných rozdělení, a proto podle Daniellovy-Kolmogorovy věty (věta 6) existuje gaussovské náhodné pole $\{Z(x) : x \in \mathbb{R}^d\}$, které splňuje $\text{cov}(Z(x), Z(y)) = C(x - y)$. Stejným způsobem se ukáže, že pro libovolnou pozitivně semidefinitní funkci C na $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ existuje gaussovské náhodné pole s autokovarianční funkcí $C(x, y)$.

Mějme $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ takové, že $\sum_{j=0}^n \beta_j = 0$. Pak pro každé $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$ je

$$0 \leq - \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \beta_j \beta_k \gamma(x_j - x_k) = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \beta_j \beta_k (\gamma(x_j) + \gamma(x_k) - \gamma(x_j - x_k)). \quad (10)$$

Uvažujme funkci $C(x, y) = \gamma(x) + \gamma(y) - \gamma(x - y)$, pro kterou zřejmě platí $C(o, x) = C(x, o) = 0$ pro libovolné $x \in \mathbb{R}^d$. Položíme-li $x_0 = o$, pak pro libovolné $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ je

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \alpha_k C(x_j, x_k) = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \alpha_j \alpha_k C(x_j, x_k),$$

což je nezáporné díky (10), stačí totiž vzít $\alpha_0 = -\sum_{j=1}^n \alpha_j$. Zjistili jsme, že $C(x, y)$ je pozitivně semidefinitní funkce na $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, a proto podle první části důkazu existuje centrované gaussovské náhodné pole $\{Z(x) : x \in \mathbb{R}^d\}$ takové, že $\text{cov}(Z(x), Z(y)) = C(x, y)$. Zbývá ověřit, že je vnitřně stacionární a jeho variogram je 2γ :

$$\begin{aligned} \text{var}(Z(x) - Z(y)) &= C(x, x) + C(y, y) - 2C(x, y) \\ &= 2\gamma(x) + 2\gamma(y) - 2\gamma(x) - 2\gamma(y) + 2\gamma(x - y) = 2\gamma(x - y). \end{aligned}$$

□

Spektrální rozklad

Podobně jako u náhodných procesů lze uvažovat spektrální rozklad autokovarianční funkce náhodného pole. Ten je založen na Bochnerově větě, která říká, že každá pozitivně definitní funkce má jednoznačnou spektrální reprezentaci ve tvaru Fourierovy transformace nějaké konečné míry. Tedy pro (komplexní) slabě stacionární L_2 -spojité náhodné pole lze autokovarianční funkci vyjádřit jako

$$C(h) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\omega^T h} dS(\omega), \quad h \in \mathbb{R}^d, \quad (11)$$

kde S je tzv. *spektrální distribuční funkce (spectral distribution function)*, která má následující vlastnosti:

1. $\lim_{\min_{i=1, \dots, d} \omega_i \rightarrow \infty} S(\omega_1, \dots, \omega_d) = C(o)$,
2. $\lim_{\omega_i \rightarrow -\infty} S(\omega_1, \dots, \omega_d) = 0$ pro každé $i = 1, \dots, d$,
3. S je zprava spojitá v každé složce,
4. S je neklesající v ω neboli pro každé $\omega, \vartheta \in \mathbb{R}^d$ takové, že $\omega_i < \vartheta_i, i = 1, \dots, d$, platí

$$\mu_S((\omega, \vartheta]) = \sum_{\delta_1=0}^1 \cdots \sum_{\delta_d=0}^1 (-1)^{d-\sum_{i=1}^d \delta_i} S(\omega_1 + \delta_1(\vartheta_1 - \omega_1), \dots, \omega_d + \delta_d(\vartheta_d - \omega_d)) \geq 0,$$

kde $(\omega, \vartheta] = (\omega_1, \vartheta_1] \times \cdots \times (\omega_d, \vartheta_d]$.

Funkce S generuje konečnou Lebesgueovu-Stieltjesovu míru μ_S . Integrál v (11) je třeba chápat jako integrál podle této míry (místo $dS(\omega)$ bychom mohli psát $\mu_S(d\omega)$), jedná se tedy o Lebesgueův-Stieltjesův integrál. Pokud existuje hustota $s(\omega)$ funkce $S(\omega)$, nazývá se *spektrální hustota (spectral density)*. Inverzní formule pro spektrální hustotu má tvar (pokud $\int_{\mathbb{R}^d} |C(h)| dh < \infty$)

$$s(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\omega^T h} C(h) dh, \quad \omega \in \mathbb{R}^d.$$

Pro náhodné pole s reálnými hodnotami je

$$C(h) = \int_{\mathbb{R}^d} \cos(\omega^T h) dS(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} \cos(\omega^T h) s(\omega) d\omega, \quad h \in \mathbb{R}^d$$

a

$$s(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \cos(\omega^T h) C(h) dh, \quad \omega \in \mathbb{R}^d,$$

pokud existuje spektrální hustota. Pro izotropní autokovarianční funkci se nahradí d -rozměrná Fourierova transformace jednorozměrným integrálem (tzv. *Hankelova* nebo *Besselova transformace*):

$$C(\|h\|) = \int_0^\infty \Omega_d(\omega \|h\|) dH(\omega), \quad (12)$$

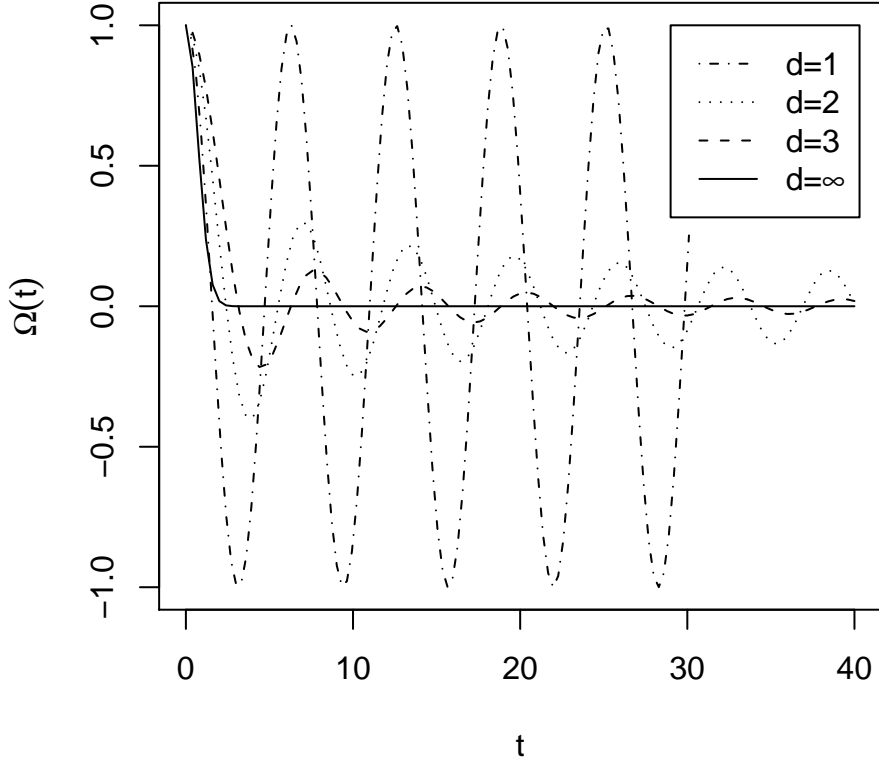
kde

$$\Omega_d(t) = \left(\frac{2}{t}\right)^v \Gamma(d/2) J_v(t),$$

$v = d/2 - 1$ a J_v je Besselova funkce prvního druhu řádu v (viz podkapitola 6.2). Funkce $H(u)$ je neklesající na \mathbb{R}^+ s konečnou limitou pro $u \rightarrow \infty$ a souvisí se spektrální distribuční funkcí vztahem

$$H(u) = \mu_S(b(o, u)) = \int_{b(o, u)} dS(\omega),$$

kde $b(x, r)$ značí uzavřenou kouli se středem v x a poloměrem r . Speciálně je $\Omega_1(t) = \cos t$, $\Omega_2(t) = J_0(t)$, $\Omega_3(t) = \frac{\sin t}{t}$ a $\lim_{d \rightarrow \infty} \Omega_d(t) = e^{-t^2}$. Tyto funkce jsou znázorněny na obrázku 5.



Obrázek 5. Funkce $\Omega_d(t)$ pro $d = 1, d = 2, d = 3$ a $d \rightarrow \infty$.

Variogram vnitřně stacionárního náhodného pole má rovněž spektrální reprezentaci:

$$2\gamma(h) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1 - \cos(\omega^T h)}{\|\omega\|^2} dF(\omega), \quad h \in \mathbb{R}^d,$$

kde F generuje míru na \mathbb{R}^d , která nemá atom v počátku a splňuje $\int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|\omega\|^2)^{-1} dF(\omega) < \infty$. V izotropním případě platí

$$2\gamma(\|h\|) = \int_0^\infty \frac{1 - \Omega_d(\omega\|h\|)}{\omega^2} dF(\omega),$$

kde F nemá atom v 0 a $\int_0^\infty (1 + \omega^2)^{-1} dF(\omega) < \infty$.

Lemma 12. Každý variogram vnitřně stacionárního náhodného pole splňuje

$$\frac{2\gamma(h)}{\|h\|^2} \rightarrow 0 \quad \text{pro } \|h\| \rightarrow \infty.$$

Důkaz: Ze spektrálního rozkladu plyne, že

$$\frac{2\gamma(h)}{\|h\|^2} = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1 - \cos(\omega^T h)}{\|\omega\|^2 \|h\|^2} F(d\omega).$$

Protože pro $\|h\| \geq 2$ je

$$\left| \frac{1 - \cos(\omega^T h)}{\|\omega\|^2 \|h\|^2} \right| \leq \frac{1}{2} \min \left(1, \frac{1}{\|\omega\|^2} \right) \leq \frac{1}{1 + \|\omega\|^2},$$

dostaneme tvrzení z Lebesgueovy věty o integrovatelné majorantě. □

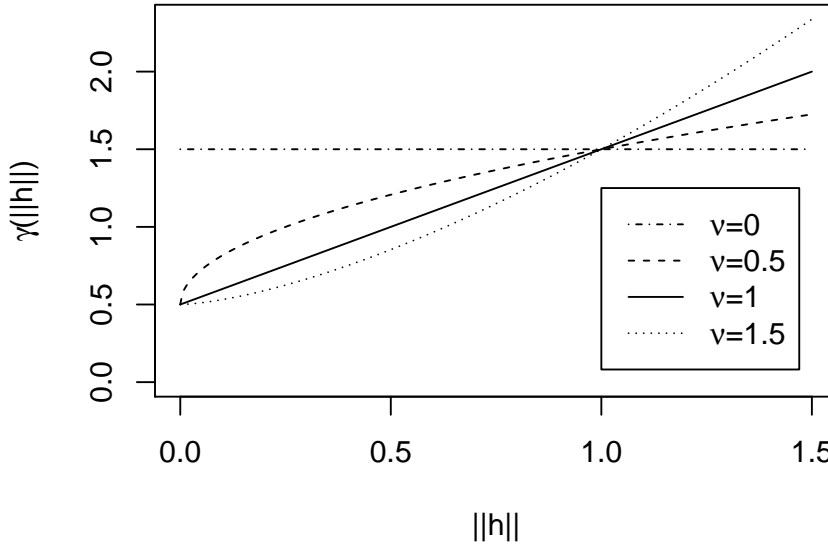
Parametrické modely

Uvedme si několik základních parametrických modelů pro izotropní semivariogramy. Ve všech modelech je jedním z parametrů zbytkový rozptyl $2\tau^2 \geq 0$.

1. *mocninný (power)*:

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & \text{pro } h = o, \\ \tau^2 + \sigma^2 \|h\|^\nu & \text{pro } h \neq o, \end{cases}$$

kde $0 \leq \nu < 2$ a $\sigma > 0$. Pokud $\nu > 0$, tak tento model nemá práh a příslušné náhodné pole není slabě stacionární. Příklad $\nu = 0$ se označuje jako *model zbytkového rozptylu (nugget model)*, příklad náhodného pole s tímto variogramem je bílý šum, který je tvořen nekorelovanými náhodnými veličinami s konstantní střední hodnotou a konečným rozptylem $\tau^2 + \sigma^2$. Jedna realizace bílého šumu je na obrázku 3 vlevo. Pro $\nu = 1$ se mocninný model nazývá *lineární*, protože se jedná o lineární funkci $\|h\|$. Průběh semivariogramu pro různé hodnoty ν je znázorněn na obrázku 6. Příklad $d = 1$ a $\tau = 0$ odpovídá frakcionálnímu Brownovu pohybu s Hurstovým parametrem $H = \nu/2$, $0 < H < 1$. Pro $d > 1$ a $\tau = 0$ máme tzv. *frakcionální izotropní Brownův pohyb (fractional isotropic Brownian motion)* v \mathbb{R}^d nebo také *Lévyho frakcionální Brownovo náhodné pole (Lévy's fractional Brownian random field)* [2], viz cvičení.



Obrázek 6. Mocninný model izotropního semivariogramu pro $\tau^2 = 0,5$, $\sigma^2 = 1$ a různé volby parametru ν .

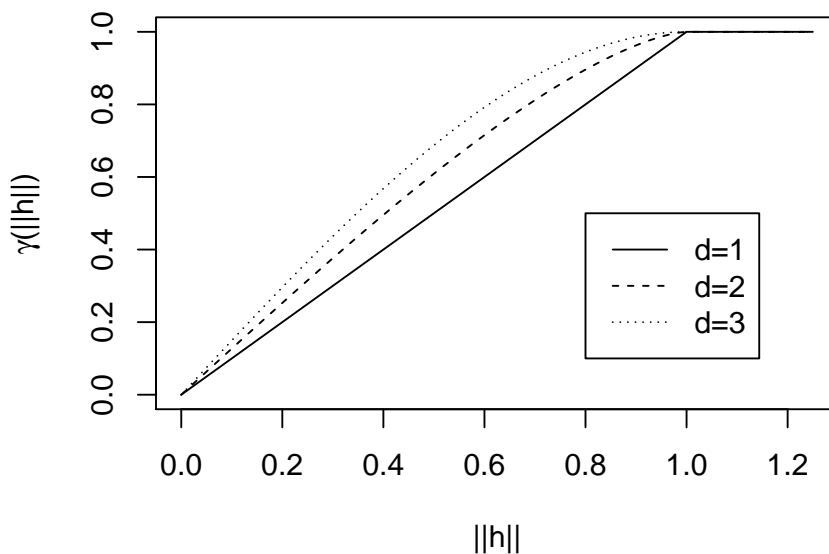
2. *sférický (spherical)*:

$$\gamma(h) = \tau^2 \mathbf{1}_{[h \neq o]} + \sigma^2 \left(1 - \frac{|b(o, \varrho) \cap b(h, \varrho)|}{|b(o, \varrho)|} \right),$$

kde $\sigma \geq 0$, $\varrho > 0$. Práh tohoto modelu je $2(\tau^2 + \sigma^2)$ a rozsah $r = 2\varrho$, viz obrázek 7. Nejčastěji používaný je sférický model pro $d = 3$:

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & \text{pro } h = o, \\ \tau^2 + \sigma^2 \left(\frac{3\|h\|}{2r} - \frac{\|h\|^3}{2r^3} \right) & \text{pro } 0 < \|h\| \leq r, \\ \tau^2 + \sigma^2 & \text{pro } \|h\| \geq r. \end{cases}$$

Tento model je platný také pro nižší dimenze $d = 1$ a $d = 2$. Obecně však model platný v nižší dimenzi není platný ve vyšší dimenzi (viz cvičení). Explicitní vyjádření sférického modelu pro $d = 2$ obsahuje goniometrické funkce a je přenecháno na cvičení.

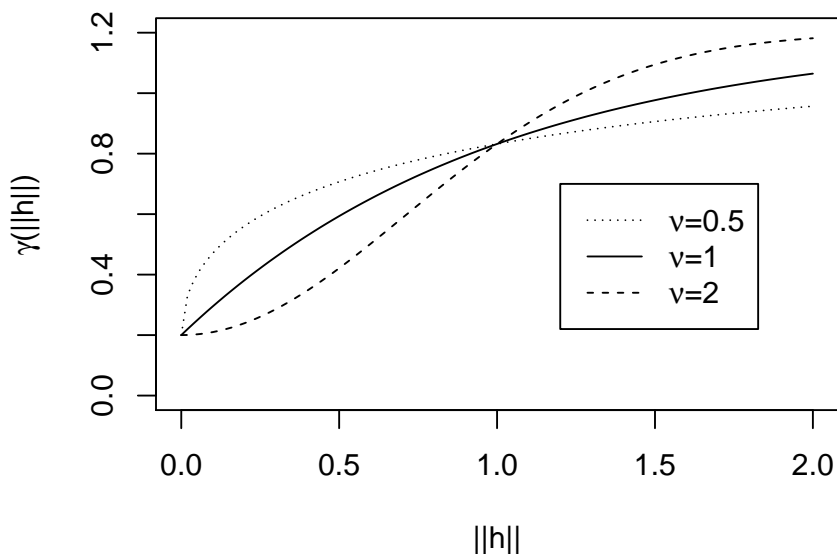


Obrázek 7. Graf sférického semivariogramu v dimenzích $d = 1$, $d = 2$ a $d = 3$ pro volbu parametrů $\tau^2 = 0$, $\sigma^2 = 1$ a $r = 1$.

3. zobecněný exponenciální (generalized exponential):

$$\gamma(h) = \tau^2 \mathbf{1}_{[h \neq 0]} + \sigma^2 (1 - \exp\{-(\|h\|/a)^\nu\}),$$

kde $\sigma \geq 0$, $a > 0$ a $0 < \nu \leq 2$. Práh tohoto modelu je $2(\tau^2 + \sigma^2)$, rozsah je nekonečný. Příslušný graf funkce γ je zakreslen na obrázku 8. Nejčastěji jsou užívány dva speciální případy: pro $\nu = 1$ máme *exponenciální* model a pro $\nu = 2$ dostáváme *gaussovský* model.



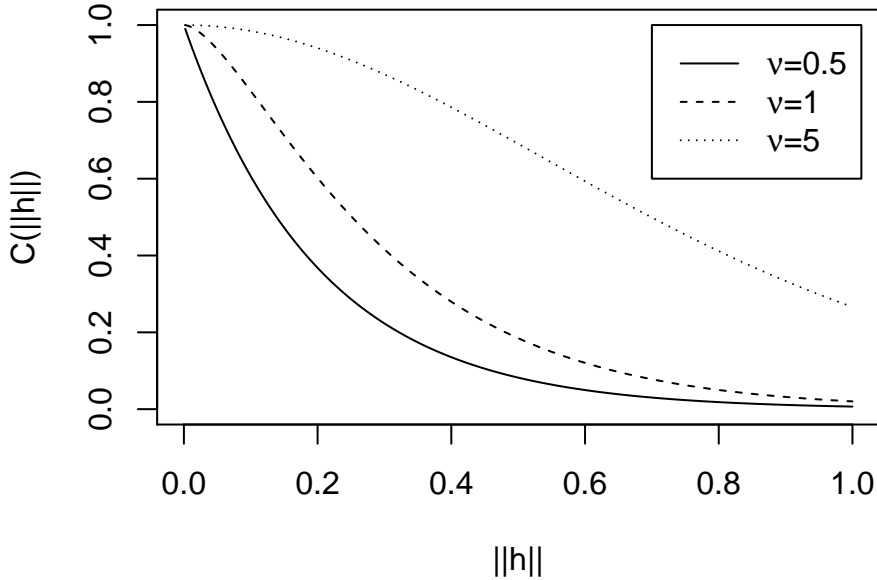
Obrázek 8. Zobecněný exponenciální model izotropního semivariogramu pro volbu parametrů $\tau^2 = 0,2$, $\sigma^2 = 1$, $a = 1$ a $\nu \in \{0,5; 1; 2\}$.

Sférický a zobecněný exponenciální model mají práh, a proto vedou na slabě stacionární náhodné pole s autokovarianční funkcí $C(h) = \sigma^2 + \tau^2 - \gamma(h)$. Celkem širokou flexibilní třídu parametrických modelů pro izotropní autokovarianční funkci tvoří *Whittleův-Matérnov model*:

$$C(h) = \tau^2 \mathbf{1}_{[h=0]} + \sigma^2 \frac{1}{2^{\nu-1} \Gamma(\nu)} (\alpha \|h\|)^\nu K_\nu(\alpha \|h\|), \quad (13)$$

kde $\tau^2 \geq 0$, $\nu > 0$, $\alpha > 0$, $\sigma^2 > 0$ jsou parametry a K_ν značí modifikovanou Besselovu funkci druhého druhu řádu ν (viz podkapitola 6.2). Parametr τ^2 je zbytkový rozptyl, $\tau^2 + \sigma^2$ udává rozptyl náhodného pole, α je parametr měřítka a parametr ν souvisí s diferencovatelností autokovarianční funkce a tedy také příslušného náhodného pole (pro gaussovská náhodná pole platí, že jeho realizace jsou k -krát diferencovatelné právě tehdy, když $\nu > k$). Graf autokovarianční funkce pro různé volby ν lze nalézt na obrázku 9. Pro $\nu = 1/2$ jde o exponenciální autokovarianční funkci: $C(h) = \sigma^2 \exp\{-\alpha \|h\|\}$. Příklad $\nu = 1$ byl navržen v původním Whittleově článku [15]. Spektrální hustota kovarianční funkce (13) má následující tvar:

$$s(\omega) = \sigma^2 \frac{\Gamma(\nu + \frac{d}{2})}{\Gamma(\nu) \pi^{d/2}} \cdot \frac{\alpha^{2\nu}}{(\alpha^2 + \omega^2)^{\nu + \frac{d}{2}}}.$$



Obrázek 9. Whittleova-Matérnova autokovarianční funkce pro $\alpha = 5$, $\sigma = 1$ a tři různé volby ν .

3. Náhodné míry

Nechť (E, ϱ) je separabilní lokálně kompaktní metrický prostor. Připomeňme, že separabilní znamená, že obsahuje spočetnou hustou podmnožinu, a lokálně kompaktní znamená, že pro každé $x \in E$ existuje $\delta_x > 0$ takové, že $b(x, \delta_x)$ je kompaktní.

Poznámka 8. Lze najít ekvivalentní metriku (tzn. metriku generující stejný systém otevřených množin), vzhledem k níž je každá omezená uzavřená množina kompaktní. Taková metrika je i úplná. Budeme uvažovat, že ϱ má tyto vlastnosti.

Příklad: Pro aplikace je nejdůležitějším příkladem d -rozměrný euklidovský prostor $E = \mathbb{R}^d$ s euklidovskou metrikou $\varrho(x, y) = \|x - y\|_d$. Pro geometrické modely se často uvažuje $E = \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ prostor neprázdných kompaktních podmnožin \mathbb{R}^d s Hausdorffovou metrikou

$$\varrho(K, L) = \max \left\{ \sup_{x \in K} \inf_{y \in L} \|x - y\|_d, \sup_{y \in L} \inf_{x \in K} \|x - y\|_d \right\}.$$

Budeme používat následující značení pro systémy podmnožin prostoru E :

- $\mathcal{B}(E)$... borelovské množiny,
- $\mathcal{B}_0(E)$... omezené borelovské množiny,
- $\mathcal{F}(E)$... uzavřené množiny,
- $\mathcal{G}(E)$... otevřené množiny,
- $\mathcal{K}(E)$... kompaktní množiny,
- $\mathcal{K}'(E)$... neprázdné kompaktní množiny.

Pokud nemůže dojít k nedorozumění, budeme symbol E vynechávat a psát zkráceně $\mathcal{B}, \mathcal{B}_0, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{K}, \mathcal{K}'$.

3.1 Lokálně konečné míry

Definice 22. Míra μ na (E, \mathcal{B}) je *lokálně konečná* (*locally finite*), jestliže je konečná na \mathcal{K} , tj. $\mu(K) < \infty$ pro každé $K \in \mathcal{K}$. Symbolem $\mathcal{M} = \mathcal{M}(E)$ označíme množinu všech lokálně konečných měr na (E, \mathcal{B}) a symbolem $\mathcal{M}_f = \mathcal{M}_f(E) = \{\mu \in \mathcal{M} : \mu(E) < \infty\}$ množinu všech konečných měr na (E, \mathcal{B}) . Dále označme

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}(E) = \{\mu \in \mathcal{M} : \mu(B) \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\} \forall B \in \mathcal{B}\}$$

množinu všech celočíselných lokálně konečných měr na (E, \mathcal{B}) .

Definice 23. Pro $B \in \mathcal{B}(E)$ nazveme *jednorozměrnou projekcí* zobrazení $\pi_B : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ definované předpisem $\pi_B(\mu) = \mu(B)$. Na prostoru $\mathcal{M}(E)$ zavedeme σ -algebru \mathfrak{M} jako nejmenší σ -algebru, vůči které jsou projekce π_B měřitelné, zkráceně píšeme

$$\mathfrak{M} = \sigma\{\mu \mapsto \mu(B) \text{ měřitelné, } B \in \mathcal{B}\}.$$

Na prostoru $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ definujeme σ -algebru \mathfrak{N} jako stopu σ -algebry \mathfrak{M} na \mathcal{N} :

$$\mathfrak{N} = \{\mathcal{U} \cap \mathcal{N} : \mathcal{U} \in \mathfrak{M}\}.$$

Poznámka 9. Označíme-li $\mathcal{M}_{B,r} = \{\mu \in \mathcal{M} : \mu(B) < r\}$ pro $B \in \mathcal{B}$ a $r \in [0, \infty]$, pak $\pi_B^{-1}([0, r)) = \mathcal{M}_{B,r}$, a proto je $\mathfrak{M} = \sigma\{\mathcal{M}_{B,r} : B \in \mathcal{B}, r \in [0, \infty]\}$.

Lemma 13. Každá lokálně konečná míra na E je σ -konečná.

Důkaz: Z požadavků na E plyne existence množin $K_n \in \mathcal{K}$ takových, že $K_n \nearrow E$, přičemž $\mu(K_n) < \infty$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Můžeme například uvažovat koule se stejným středem a zvětšujícím se poloměrem.

Lemma 14.

1. Necht' $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}_0$ je systém množin uzavřený na konečné průniky takový, že $\sigma\mathcal{S} = \mathcal{B}$ a existují $A_n \in \mathcal{S}$ takové, že $A_n \nearrow E$. Pak

$$\mathfrak{M} = \sigma\{\mu \mapsto \mu(A) \text{ měřitelné, } A \in \mathcal{S}\}.$$

2. Platí, že $\mathcal{N} \in \mathfrak{M}$.

Důkaz: 1. Označme

$$\widetilde{\mathfrak{M}} = \sigma\{\mu \mapsto \mu(A) \text{ měřitelné, } A \in \mathcal{S}\} = \sigma\{\pi_A^{-1}([0, r)) : A \in \mathcal{S}, r \in [0, \infty]\}.$$

Pak zřejmě platí $\widetilde{\mathfrak{M}} \subseteq \mathfrak{M}$. Definujeme-li

$$\mathcal{D}_n = \{B \in \mathcal{B} : \pi_{B \cap A_n} \text{ je } \widetilde{\mathfrak{M}}\text{-měřitelné}\},$$

pak lehce ověříme, že se jedná o Dynkinův systém, který obsahuje \mathcal{S} . Podle Dynkinovy věty proto platí $\mathcal{D}_n = \sigma\mathcal{S} = \mathcal{B}$. Pro každé $B \in \mathcal{B}$ je $\mu(B \cap A_n) \nearrow \mu(B)$, tedy zobrazení π_B je $\widetilde{\mathfrak{M}}$ -měřitelné (limita měřitelných). Protože \mathfrak{M} je nejmenší σ -algebra, pro kterou jsou π_B měřitelné, musí být $\mathfrak{M} \subseteq \widetilde{\mathfrak{M}}$.

2. Mějme systém \mathcal{S} jako v 1. části a navíc spočetný. Potom

$$\mathcal{N}_0 = \{\mu \in \mathcal{M} : \mu(A) \in \mathbb{N} \cup \{0\} \forall A \in \mathcal{S}\} \in \mathfrak{M},$$

protože jde o spočetný průnik měřitelných množin. Zřejmě je $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}_0$. Definujme $\mathcal{D}_n = \{B \in \mathcal{B} : \mu(B \cap A_n) \in \mathbb{N} \cup \{0\} \forall \mu \in \mathcal{N}_0\}$. Jedná se o Dynkinův systém obsahující \mathcal{S} , a proto $\mathcal{D}_n = \mathcal{B}$. Pro každé $\mu \in \mathcal{N}_0$ a $B \in \mathcal{B}$ je $\mu(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B \cap A_n) \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$, a tudíž $\mu \in \mathcal{N}$.

□

Pro $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_0$ označme σ -algebru generovanou zobrazeními $\pi_{B_1}, \dots, \pi_{B_n}$:

$$\mathfrak{M}_{B_1, \dots, B_n} = \sigma\{\pi_{B_i} \text{ je měřitelné pro každé } i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Lemma 15. *Bud' $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}_0$ okruh takový, že $\sigma\mathcal{S} = \mathcal{B}$. Pak*

$$\mathfrak{M}_0 = \bigcup \{\mathfrak{M}_{A_1, \dots, A_n} : n \in \mathbb{N}, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S} \text{ po dvou disjunktní}\}$$

je algebra a $\sigma\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}$.

Důkaz: Protože $\mathcal{M}_{A_1, \dots, A_n}$ je σ -algebra, je systém \mathfrak{M}_0 uzavřený na doplňky a obsahuje \emptyset i E . Uzavřenost na konečná sjednocení (průniky) se dá lehce nahlédnout pro množiny $\mathcal{U} = \{\mu : \mu(A) \in D_1\} \in \mathfrak{M}_A$ a $\mathcal{V} = \{\mu : \mu(B) \in D_2\} \in \mathfrak{M}_B$. Pak totiž platí

$$\begin{aligned} \mathcal{U} \cap \mathcal{V} &= \{\mu : \mu(A) \in D_1, \mu(B) \in D_2\} = \{\mu : \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) \in D_1, \\ &\quad \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) \in D_2\} \in \mathfrak{M}_{A \setminus B, A \cap B, B \setminus A} \subseteq \mathfrak{M}_0 \end{aligned}$$

a podobně $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} \in \mathfrak{M}_{A \setminus B, A \cap B, B \setminus A} \subseteq \mathfrak{M}_0$. Analogicky se ukáže, že pro $\mathcal{U} \in \mathfrak{M}_{A_1, \dots, A_m}$ a $\mathcal{V} \in \mathfrak{M}_{B_1, \dots, B_n}$ je $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}, \mathcal{U} \cup \mathcal{V} \in \mathfrak{M}_0$.

Označme $\mathcal{D} = \{B \in \mathcal{B} : \pi_B \text{ je } \sigma\mathfrak{M}_0\text{-měřitelné}\}$. Zřejmě jde o monotónní systém, který obsahuje \mathcal{S} , tedy \mathcal{D} je σ -algebra a je rovna \mathcal{B} . Podle definice \mathfrak{M} musí být $\mathfrak{M} \subseteq \sigma\mathfrak{M}_0$, tudíž $\mathfrak{M} = \sigma\mathfrak{M}_0$. □

Definice 24. Řekneme, že posloupnost konečných měr $\mu_n \in \mathcal{M}_f$ konverguje *slabě (weakly)* k $\mu \in \mathcal{M}_f$ (píšeme $\mu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{w} \mu$), jestliže

$$\int_E f(x) \mu_n(dx) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_E f(x) \mu(dx)$$

pro každou spojitou omezenou funkci f na E . Posloupnost $\mu_n \in \mathcal{M}$ konverguje *vágně (vaguely)* k $\mu \in \mathcal{M}$ (píšeme $\mu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{v} \mu$), jestliže

$$\int_E f(x) \mu_n(dx) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_E f(x) \mu(dx)$$

pro každou spojitou omezenou funkci f na E s kompaktním nosičem.

Příklad: Pro $E = \mathbb{R}$ uvažujme $\mu_n = \delta_n$ jako Diracovu míru v bodě $n \in \mathbb{N}$. Potom μ_n konverguje vágně k nulové míře, ale nekonverguje slabě.

Definice 25. *Prochorovova vzdálenost* konečných měr $\mu, \nu \in \mathcal{M}_f$ je definována vztahem

$$\varrho_P(\mu, \nu) = \inf\{\varepsilon > 0 : \mu(F) \leq \nu(F^\varepsilon) + \varepsilon, \nu(F) \leq \mu(F^\varepsilon) + \varepsilon \text{ pro každé } F \in \mathcal{F}\},$$

kde $F^\varepsilon = \{x \in E : \exists y \in F, d(x, y) < \varepsilon\}$ je otevřené ε -okolí uzavřené množiny F . Pro $\mu, \nu \in \mathcal{M}$ položme

$$\widehat{\varrho}_P(\mu, \nu) = \int_0^\infty e^{-r} \frac{\varrho_P(\mu^{(r)}, \nu^{(r)})}{1 + \varrho_P(\mu^{(r)}, \nu^{(r)})} dr,$$

kde $\mu^{(r)}$ je restrikce míry μ na kouli $b(x_0, r)$ pro libovolný pevně zvolený bod $x_0 \in E$.

Poznámka 10. *Není těžké se přesvědčit, že ϱ_P definuje metriku na \mathcal{M}_f (viz cvičení) a $\widehat{\varrho}_P$ definuje metriku na \mathcal{M} .*

Tvrzení 16.

a) *Prostor $(\mathcal{M}_f, \varrho_P)$ je separabilní úplný metrický prostor a metrika ϱ_P generuje slabou konvergenci měr:*

$$\varrho_P(\mu_n, \mu) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \iff \mu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{w} \mu.$$

b) *Prostor $(\mathcal{M}, \widehat{\varrho}_P)$ je separabilní úplný metrický prostor, jeho borelovská σ -algebra splývá s \mathfrak{M} a konvergence v prostoru $(\mathcal{M}, \widehat{\varrho}_P)$ se shoduje s vágní konvergencí měr:*

$$\widehat{\varrho}_P(\mu_n, \mu) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \iff \mu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{v} \mu.$$

Důkaz: [10], věta 2.2.

3.2 Náhodné míry

Definice 26. Necht' $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ je pravděpodobnostní prostor. *Náhodná míra (random measure)* Ψ je měřitelné zobrazení $\Psi : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathcal{M}, \mathfrak{M})$, *bodový proces (point process)* Φ je měřitelné zobrazení $\Phi : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathcal{N}, \mathfrak{N})$. *Rozdělení (distribution)* náhodné míry je pravděpodobnostní míra Q na $(\mathcal{M}, \mathfrak{M})$ definována vztahem $Q(\mathcal{U}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \Psi(\omega) \in \mathcal{U}\})$, $\mathcal{U} \in \mathfrak{M}$.

Poznámka 11. Bodový proces je speciální případ náhodné míry. V případě $E = \mathbb{R}^d$ nemá označení „proces“ nic společného s dynamickým vývojem v čase, a tak by vhodnější název možná byl „bodové pole“.

Poznámka 12. Náhodná míra Ψ je zobrazení z $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ do $(\mathcal{M}, \mathfrak{M})$, tedy pro $\omega \in \Omega$ je $\Psi(\omega)$ lokálně konečná míra. Hodnotu této míry na množině $B \in \mathcal{B}$ bychom označovali symbolem $\Psi(\omega)(B)$, často proměnnou ω vynecháváme a píšeme pouze $\Psi(B)$. Na cvičení bude ukázáno, že Ψ je náhodná míra právě tehdy, když $\Psi(B)$ je náhodná veličina pro každé $B \in \mathcal{B}$.

Definice 27. Pro náhodnou míru Ψ definujeme *míru intenzity (intensity measure)* předpisem $\Lambda(B) = \mathbb{E}\Psi(B)$, $B \in \mathcal{B}$.

Poznámka 13. Míra intenzity je borelovská míra, σ -aditivita plyne z Leviho věty o monotónní konvergenci ([7], věta 8.5). Míra intenzity nemusí být lokálně konečná, může existovat $B \in \mathcal{B}_0$ taková, že sice $\Psi(B) < \infty$, ale $\Lambda(B) = \mathbb{E}\Psi(B) = \infty$.

Rozdělení náhodné míry je jednoznačně určeno konečně rozměrnými projekcemi.

Věta 17. Necht' $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}_0$ je okruh takový, že $\sigma\mathcal{S} = \mathcal{B}$. Necht' Ψ_1 a Ψ_2 jsou dvě náhodné míry definované na stejném pravděpodobnostním prostoru. Pokud náhodné vektory $(\Psi_1(A_1), \dots, \Psi_1(A_n))^T$ a $(\Psi_2(A_1), \dots, \Psi_2(A_n))^T$ mají stejná rozdělení pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ a $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}$ po dvou disjunktní, pak Ψ_1 a Ψ_2 jsou stejně rozdělené.

Důkaz: Podle předpokladu se rozdělení Ψ_1 a Ψ_2 shodují na algebře \mathfrak{M}_0 , což je systém uzavřený na konečné průniky, a tak věta o jednoznačném rozšíření míry (věta 82) říká, že rozdělení Ψ_1 a Ψ_2 se rovnají na $\sigma\mathfrak{M}_0$, a to je podle lemmatu 15 rovno \mathfrak{M} . □

Tvrzení 18. Mějme $\{\xi_A, A \in \mathcal{B}_0\}$ soubor nezáporných náhodných veličin na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, který splňuje:

1. $A, B \in \mathcal{B}_0, A \cap B = \emptyset \Rightarrow \xi_{A \cup B} = \xi_A + \xi_B$ s.j.,
2. $A_n \in \mathcal{B}_0, A_n \searrow \emptyset \Rightarrow \xi_{A_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ s.j.

Pak existuje náhodná míra Ψ taková, že $\Psi(A) = \xi_A$ pro všechna $A \in \mathcal{B}_0$ s.j.

Důkaz: Jde o mírné zobecnění věty o existenci regulární verze podmíněné pravděpodobnosti ([14], věta VI.1.21). Kompletní důkaz lze nalézt v [5], Theorem 9.1.XV. □

Poznámka 14. Předpokládáme, že $\mathbb{P}(\omega : \xi_{A \cup B}(\omega) \neq \xi_A(\omega) + \xi_B(\omega)) = 0$ pro každé A a B disjunktní, ale potřebujeme, aby $\mathbb{P}(\omega : \xi_{A \cup B}(\omega) \neq \xi_A(\omega) + \xi_B(\omega)) = 0$ pro každé A a B disjunktní).

Věta 19. (o existenci náhodné míry s danými konečně rozměrnými projekcemi) Necht' pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_0$ po dvou disjunktní je dána pravděpodobnostní míra Q_{B_1, \dots, B_n} na $([0, \infty)^n, \mathcal{B}([0, \infty)^n))$ tak, že platí:

1. (projektivnost) $Q_{B_1, \dots, B_n}(\cdot) = Q_{B_1, \dots, B_n, B_{n+1}}((\Pi_n^{n+1})^{-1}(\cdot))$, kde $\Pi_n^{n+1} : [0, \infty)^{n+1} \rightarrow [0, \infty)^n$ je kanonická projekce $(u_1, \dots, u_n, u_{n+1})^T \mapsto (u_1, \dots, u_n)^T$,
2. (symetrie) $Q_{B_1, \dots, B_n}(U_1 \times \dots \times U_n) = Q_{B_{\pi(1)}, \dots, B_{\pi(n)}}(U_{\pi(1)} \times \dots \times U_{\pi(n)})$ pro každou permutaci π množiny $\{1, \dots, n\}$,
3. (aditivita) $Q_{A \cup B}(U) = Q_{A, B}(\{(u, v) \in [0, \infty)^2 : u + v \in U\})$ pro $A \cap B = \emptyset$,
4. (spojitost v \emptyset) $A_n \in \mathcal{B}_0, A_n \searrow \emptyset \Rightarrow Q_{A_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \delta_0$.

Pak existuje právě jedna pravděpodobnostní míra Q na $(\mathcal{M}, \mathfrak{M})$ taková, že Q_{B_1, \dots, B_n} jsou konečně rozměrná rozdělení Q .

Důkaz: Pro $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}_0$ (ne nutně po dvou disjunktní) definujeme rozdělení Q_{A_1, \dots, A_n} následovně: buďte $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}_0$ po dvou disjunktní takové, že pro každé $i = 1, \dots, n$ lze psát $A_i = \cup_{j \in I_i} B_j$, kde $I_i \subseteq \{1, \dots, k\}$. Soubor množin B_1, \dots, B_k nazveme disjunktním rozkladem množin A_1, \dots, A_n . Položíme

$$Q_{A_1, \dots, A_n}(U) = Q_{B_1, \dots, B_k}(\phi^{-1}U), \quad U \in \mathcal{B}([0, \infty)^n),$$

kde

$$\phi : (x_1, \dots, x_k) \mapsto \left(\sum_{i \in I_1} x_i, \dots, \sum_{i \in I_n} x_i \right).$$

Korektnost této definice plyne z následujícího faktu: jsou-li množiny A_i, B_j, I_i a zobrazení ϕ jako výše a jsou-li navíc $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}_0$ po dvou disjunktní, pak

$$Q_{A_1, \dots, A_n}(\mathcal{U}) = Q_{B_1, \dots, B_k}(\phi^{-1}\mathcal{U}), \quad \mathcal{U} \in \mathcal{B}([0, \infty)^n).$$

To lze dokázat indukcí podle n za využití vlastnosti projektivnosti, aditivity a symetrie.

Ověříme nyní, že rozdělení $\{Q_{A_1, \dots, A_n} : A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}_0, n \in \mathbb{N}\}$ tvoří projektivní systém. Buď C_1, \dots, C_l disjunktní rozklad A_1, \dots, A_{n+1} takový, že $C_i \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$ pro $i = 1, \dots, l-1$ (tj. $C_l = A_{n+1} \setminus \cup_{i=1}^n A_i$) a $A_i = \cup_{j \in I_i} C_j$, $i = 1, \dots, n+1$ (tedy $l \in I_{n+1}$). Definujeme-li zobrazení

$$\phi : (x_1, \dots, x_{l-1}) \mapsto \left(\sum_{i \in I_1} x_i, \dots, \sum_{i \in I_n} x_i \right)$$

a

$$\psi : (x_1, \dots, x_l) \mapsto \left(\sum_{i \in I_1} x_i, \dots, \sum_{i \in I_n} x_i, \sum_{i \in I_{n+1}} x_i \right),$$

pak platí $\phi \circ \Pi_{l-1}^l = \Pi_n^{n+1} \circ \psi$. Z komutativity diagramu

$$\begin{array}{ccc} Q_{C_1, \dots, C_l} & \xrightarrow{\Pi_{l-1}^l} & Q_{C_1, \dots, C_{l-1}} \\ \downarrow \psi & & \downarrow \phi \\ Q_{A_1, \dots, A_{n+1}} & \xrightarrow{\Pi_n^{n+1}} & Q_{A_1, \dots, A_n} \end{array}$$

tak plyne požadovaná projektivita

$$Q_{A_1, \dots, A_n}(\cdot) = Q_{A_1, \dots, A_{n+1}}((\Pi_n^{n+1})^{-1}(\cdot)).$$

Podle Daniellovy-Kolmogorovovy věty existuje pravděpodobnostní míra Q_0 na $([0, \infty)^{\mathcal{B}_0}, \mathcal{B}([0, \infty)^{\mathcal{B}_0})$ taková, že Q_{A_1, \dots, A_n} pro $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}_0$ jsou konečně rozměrná rozdělení Q_0 . Nechť $\{\xi_A : A \in \mathcal{B}_0\}$ je soubor náhodných veličin, který má rozdělení Q_0 . Podmínky 3. a 4. zaručují splnění předpokladů tvrzení 18, neboť $Q_{A_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{w} \delta_0$ znamená $\xi_{A_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} 0$, což je ekvivalentní $\xi_{A_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0$, protože ale ξ_{A_n} konvergují monotónně s.j., je konvergence k nule také ve smyslu s.j. Existuje tedy náhodná míra Ψ , jejíž rozdělení Q na $(\mathcal{M}, \mathfrak{M})$ je hledanou pravděpodobnostní mírou. \square

3.3 Jednoduché bodové procesy a náhodné množiny

Definice 28. Bodový proces Φ je *jednoduchý (simple)*, jestliže $P(\Phi \in \mathcal{N}^*) = 1$, kde $\mathcal{N}^* = \{\nu \in \mathcal{N} : \nu(\{x\}) \leq 1 \text{ pro každé } x \in E\}$.

K tomu, abychom ukázali měřitelnost \mathcal{N}^* , budeme potřebovat zavést posloupnost zjemňujících se spočetných rozkladů prostoru E .

Definice 29. Řekneme, že $\mathcal{S} = \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n \subseteq \mathcal{B}_0(E)$ je *DC-systém (dissecting-covering system)*, jestliže

1. $\mathcal{S}_n = \{A_1^n, A_2^n, \dots\}$ je disjunktní spočetný rozklad E pro každé n , tj. $E = \cup_j A_j^n$,
2. pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $A \in \mathcal{S}_n$ existují $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{S}_{n+1}$ takové, že $A = A_1 \cup \dots \cup A_k$,
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{A \in \mathcal{S}_n} \text{diam } A = 0$, kde $\text{diam } A = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in A\}$.

Lemma 20. Existuje DC-systém v E . Je-li Λ libovolná lokálně konečná difúzní (tzn. $\Lambda(\{x\}) = 0$ pro každé $x \in E$) borelovská míra na E , existuje DC-systém na E splňující navíc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{A \in \mathcal{S}_n} \Lambda(A) = 0. \tag{14}$$

Důkaz: Nejprve sestrojíme disjunktí rozklad \mathcal{S}_1 prostoru E na borelovské množiny s diametry menšími nebo rovnými jedné. K tomu stačí vyjít z pokrytí $E = \cup_{x \in S} b(x, 1/2) = \cup_{i=1}^{\infty} \tilde{A}_i$, kde S je nějaká spočetná hustá podmnožina E , a provést „zdisjunktění“ tohoto rozkladu, tj. položíme $A_1^1 = \tilde{A}_1$, $A_2^1 = \tilde{A}_2 \setminus \tilde{A}_1$, $A_3^1 = \tilde{A}_3 \setminus (\tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_2)$, \dots . Postupně pak sestrojíme rozklady $\mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \dots$ indukci následovně. Máme-li \mathcal{S}_{n-1} sestrojeno a je-li $A \in \mathcal{S}_{n-1}$, z pokrytí kompaktní množiny \bar{A} otevřenými koulemi

$$\bar{A} \subseteq \cup_{x \in \bar{A}} \text{int } b\left(x, \frac{1}{2n}\right)$$

lze vybrat konečné pokrytí, jehož zdisjunktěním dostaneme rozklad $A = A_1 \cup \dots \cup A_k$ na borelovské množiny s diametry nejvýše rovnými $1/n$. Rozklad \mathcal{S}_n vznikne spojením všech rozkladů množin z \mathcal{S}_{n-1} .

Je-li dána neatomická míra $\Lambda \in \mathcal{M}$, pak vzhledem k σ -aditivě a lokální konečnosti Λ pro libovolné $x \in E$ platí

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Lambda(b(x, \varepsilon)) = 0.$$

Výše uvedenou konstrukci DC-systému můžeme modifikovat tak, že rozklad \mathcal{S}_n budeme vytvářet z kuliček $\text{int } b(x, \varepsilon(x, n))$ takových, aby $\Lambda(\text{int } b(x, \varepsilon(x, n))) < 1/n$ pro každé $x \in E$. Tím zaručíme platnost podmínky (14). □

Definice 30. Řekneme, že bod $x \in E$ je *atom* míry $\nu \in \mathcal{N}$, jestliže $\nu(\{x\}) > 0$. Dvojice $(x, m) \in E \times \mathbb{N}$ se nazývá *atomická dvojice* (*atomic pair*), pokud x je atom a $m = \nu(\{x\})$.

Z lokální konečnosti plyne, že každá míra $\nu \in \mathcal{N}$ má nejvýše spočetně mnoho atomů. Následující lemma říká, že atomy můžeme očíslovat měřitelným způsobem.

Lemma 21. Pro $\nu \in \mathcal{N}$ existují měřitelná zobrazení $\zeta_i : \mathcal{N} \rightarrow E$ taková, že

$$\nu = \sum_{i=1}^{\nu(E)} \delta_{\zeta_i(\nu)}.$$

Důkaz: Uvažujme DC-systém $\mathcal{S} = \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n$, kde $\mathcal{S}_n = \{A_1^n, A_2^n, \dots\}$. Mějme množinu $B \in \mathcal{B}$ takovou, že $\nu(B) > 0$. Definujeme-li induktivně posloupnost i_1, i_2, \dots splňující $\nu(B \cap A_{i_1}^1 \cap \dots \cap A_{i_r}^r) \in \mathbb{N}$ pro $r \in \mathbb{N}$, pak $\nu(B \cap \cap_{k \in \mathbb{N}} A_{i_k}^k) \in \mathbb{N}$. Protože z vlastnosti DC-systému plyne, že $\cap_{k \in \mathbb{N}} A_{i_k}^k$ má nulový diametr, obsahuje B atom. Proto ν lze zapsat jako

$$\nu = \sum_{(x, m)} m \delta_x,$$

kde součet je přes všechny atomické dvojice (x, m) míry ν .

Pro $x \in E$ vztahy $x \in A_{j_k(x)}^k$ jednoznačně definují posloupnost přirozených čísel $(j_1(x), j_2(x), \dots)$. To nám umožňuje definovat lineární uspořádání \prec na prostoru E :

$$x \prec y \iff (j_1(x), j_2(x), \dots) \leq_{\text{lex}} (j_1(y), j_2(y), \dots),$$

kde \leq_{lex} označuje lexikografické uspořádání. Pro každé $p \in \mathbb{N}$ sestrojíme měřitelné zobrazení $\zeta_p : \mathcal{N} \rightarrow E$, které míře ν přiřadí její p -tý atom (počítaný vzhledem k uspořádání \prec včetně násobnosti). Nechť (x, m) je atomická dvojice míry ν , pak všechny atomy y míry ν takové, že $y \prec x$ a $y \neq x$, leží v omezené množině $\cup_{i=1}^{j_1(x)} A_i^1$, proto těchto atomů je konečně mnoho a předpokládejme, že spolu s násobnostmi dají n . Definujeme $\zeta_{n+j}(\nu) = x$ pro $j = 1, \dots, m$. Toto provedeme pro každou atomickou dvojici (x, m) . Dostaneme $\zeta_p(\nu)$ pro libovolné $p \in \mathbb{N}$, pokud $\nu(E) = \infty$, a $\zeta_p(\nu)$ pro $p = 1, \dots, q$, pokud $\nu(E) = q < \infty$. V druhém případě položíme $\zeta_p(\nu) = a$ pro $p > q$, kde $a \in E$ je libovolně zvolený bod. Pro $p \in \mathbb{N}$ a $B \in \mathcal{B}$ je množina $\{\nu \in \mathcal{N} : \nu(E) < p, \zeta_p(\nu) \in B\}$ buď prázdná (když $a \notin B$), nebo rovna $\{\nu \in \mathcal{N} : \nu(E) < p\}$, v obou případech tedy měřitelná. Dále máme

$$\begin{aligned} \{\nu \in \mathcal{N} : \nu(E) \geq p, \zeta_p(\nu) \in B\} &= \cup_{j=1}^{\infty} \cup_{i_1, \dots, i_j=1}^{\infty} \left\{ \nu \in \mathcal{N} : \nu(B \cap A_{i_1}^1 \cap \dots \cap A_{i_j}^j) = \nu(A_{i_1}^1 \cap \dots \cap A_{i_j}^j) \in \mathbb{N}, \right. \\ &\quad \left. \nu\left(\cup_{(r_1, \dots, r_j) <_{\text{lex}} (i_1, \dots, i_j)} A_{r_1}^1 \cap \dots \cap A_{r_j}^j\right) \leq p-1, \right. \\ &\quad \left. \nu\left(\cup_{(r_1, \dots, r_j) \leq_{\text{lex}} (i_1, \dots, i_j)} A_{r_1}^1 \cap \dots \cap A_{r_j}^j\right) \geq p \right\} \in \mathfrak{N}, \end{aligned}$$

což ukazuje měřitelnost ζ_p . □

Definice 31. Řekneme, že lokálně konečná celočíselná míra $\nu \in \mathcal{N}$ je *jednoduchá*, pokud $\nu \in \mathcal{N}^*$.

Pro jednoduchou míru $\nu \in \mathcal{N}^*$ je $\zeta_i(\nu) \neq \zeta_j(\nu)$ pro každé $i \neq j$. Jednoduchý bodový proces je pak náhodná míra tvořená lokálně konečným součtem Diracových měr: $\Phi = \sum_{i=1}^{\Phi(E)} \delta_{X_i}$. Nyní ověříme korektnost definice 28 jednoduchého bodového procesu.

Lemma 22. Množina všech jednoduchých lokálně konečných celočíselných měr je měřitelná, tj. $\mathcal{N}^* \in \mathfrak{N}$.

Důkaz: Uvažujme $\mathcal{S} = \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n$ DC-systém v E . Pak je

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^* &= \{\nu \in \mathcal{N} : \forall A \in \mathcal{S} \exists n \in \mathbb{N} \forall B \in \mathcal{S}_n : B \subseteq A \Rightarrow \nu(B) \leq 1\} \\ &= \cap_{A \in \mathcal{S}} \cup_{n \in \mathbb{N}} \cap_{B \in \mathcal{S}_n : B \subseteq A} \{\nu \in \mathcal{N} : \nu(B) \leq 1\}, \end{aligned}$$

tedy $\mathcal{N}^* \in \mathfrak{N}$. □

Poznámka 15. Jednoduchý bodový proces můžeme chápat jako měřitelné zobrazení $\Phi : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathcal{N}^*, \mathfrak{N}^*)$, kde $\mathfrak{N}^* = \{\mathcal{U} \cap \mathcal{N}^* : \mathcal{U} \in \mathfrak{N}\}$ je stopa σ -algebry \mathfrak{N} v prostoru \mathcal{N}^* .

Definice 32. Množina $A \subseteq E$ se nazývá *lokálně konečná*, jestliže $A \cap B$ je konečná množina pro každé $B \in \mathcal{B}_0(E)$. Každá lokálně konečná množina je zřejmě uzavřená. Označme $\mathcal{F}_{lf} = \{A \in \mathcal{F} : A \text{ lokálně konečná}\}$ systém všech lokálně konečných množin.

Definice 33. Jako *nosič (support)* míry ν na E se označuje nejmenší uzavřená množina A v E taková, že $\nu(E \setminus A) = 0$. Značí se $\text{supp } \nu$ a platí

$$\text{supp } \nu = \bigcap \{F \in \mathcal{F} : \nu(E \setminus F) = 0\}.$$

Poznámka 16. Pro $\nu \in \mathcal{N}$ je $\text{supp } \nu$ lokálně konečná množina:

$$\text{supp } \nu = \{x \in E : \nu(\{x\}) \geq 1\} \in \mathcal{F}_{lf}.$$

Pro $A, A_1, \dots, A_k \subseteq E$ definujeme následující podmnožiny systému \mathcal{F} uzavřených množin:

$$\mathcal{F}^A = \{F \in \mathcal{F} : F \cap A = \emptyset\}, \quad \mathcal{F}_A = \{F \in \mathcal{F} : F \cap A \neq \emptyset\}$$

a

$$\mathcal{F}_{A_1, \dots, A_k}^A = \mathcal{F}^A \cap \mathcal{F}_{A_1} \cap \dots \cap \mathcal{F}_{A_k} = \{F \in \mathcal{F} : F \cap A = \emptyset, F \cap A_1 \neq \emptyset, \dots, F \cap A_k \neq \emptyset\}.$$

Pro $k = 0$ pokládáme $\mathcal{F}_{A_1, \dots, A_k}^A = \mathcal{F}^A$.

Definice 34. Definujme σ -algebru \mathfrak{F} na \mathcal{F} jako $\mathfrak{F} = \sigma\{\mathcal{F}^K : K \in \mathcal{K}\}$. *Náhodná uzavřená množina (random closed set)* v E je měřitelné zobrazení $\Xi : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathcal{F}, \mathfrak{F})$.

Poznámka 17. Na prostoru \mathcal{F} se zavádí topologie \mathcal{T} , jejíž bázi otevřených množin tvoří systém

$$\{\mathcal{F}_{G_1, \dots, G_k}^K : K \in \mathcal{K}, G_1, \dots, G_k \in \mathcal{G}, k \in \mathbb{N}_0\}.$$

Tento systém je uzavřený na konečné průniky, neboť

$$\mathcal{F}_{G_1, \dots, G_k}^K \cap \mathcal{F}_{G'_1, \dots, G'_m}^{K'} = \mathcal{F}_{G_1, \dots, G_k, G'_1, \dots, G'_m}^{K \cup K'},$$

a obsahuje $\mathcal{F} = \mathcal{F}^\emptyset$. Topologie \mathcal{T} se nazývá *Fellova* nebo také *hit-or-miss* topologie.

Lemma 23. Systém lokálně konečných množin je měřitelný: $\mathcal{F}_{lf} \in \mathfrak{F}$.

Důkaz: Nechť $\mathcal{S} = \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n$ je DC-systém v E . Potom

$$\mathcal{F}_{lf} = \{F \in \mathcal{F} : \forall A \in \mathcal{S} \exists k \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : \text{card}\{B \in \mathcal{S}_n : B \subseteq A, F \cap \bar{B} \neq \emptyset\} \leq k\}.$$

□

Definice 35. Náhodná lokálně konečná množina v E je měřitelné zobrazení $\Xi : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathcal{F}_{lf}, \mathfrak{F}_{lf})$, kde $\mathfrak{F}_{lf} = \{\mathcal{U} \cap \mathcal{F}_{lf} : \mathcal{U} \in \mathfrak{F}\}$ je stopa σ -algebry \mathfrak{F} v \mathcal{F}_{lf} .

Lemma 24. Necht' $\mathcal{N}_{B,r} = \{\nu \in \mathcal{N} : \nu(B) = r\}$ pro $B \in \mathcal{B}$ a $r \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$. Platí $\mathfrak{N} = \sigma\{\mathcal{N}_{K,0} : K \in \mathcal{K}\}$.
Důkaz: V lemmatu 14 můžeme vzít $\mathcal{S} = \mathcal{K} \subseteq \mathcal{B}_0$ a dostat tak, že

$$\mathfrak{N} = \sigma\{\{\nu \in \mathcal{N} : \nu(K) < r\} : K \in \mathcal{K}, r \in [0, \infty]\} = \sigma\{\mathcal{N}_{K,r} : K \in \mathcal{K}, r \in \mathbb{N}_0\}.$$

Pomoci DC-systému $\cup_{n=1}^{\infty} \{A_1^n, A_2^n, \dots\}$ můžeme psát

$$\mathcal{N}_{K,r} = \cup_{n_0 \in \mathbb{N}} \cap_{n \geq n_0} \cup_{i_1, \dots, i_m} (\mathcal{N}_{B \cap A_{i_1}^{n_0}, 0}^c \cap \mathcal{N}_{B \cap A_{i_2}^{n_0}, 0}^c \cap \dots \cap \mathcal{N}_{B \cap A_{i_m}^{n_0}, 0}^c \cap \mathcal{N}_{B \setminus (A_{i_1}^{n_0} \cup \dots \cup A_{i_m}^{n_0}), 0}),$$

což je prvek $\sigma\{\mathcal{N}_{K,0} : K \in \mathcal{K}\}$. Protože \mathfrak{N} je nejmenší σ -algebra obsahující $\mathcal{N}_{K,r}$, musí tak být $\mathfrak{N} \subseteq \sigma\{\mathcal{N}_{K,0} : K \in \mathcal{K}\}$. Opačná inkluze je zřejmá. □

Lemma 25. Zobrazení $i : \nu \mapsto \text{supp } \nu$ je oboustranně měřitelná bijekce mezi prostory $(\mathcal{N}^*, \mathfrak{N}^*)$ a $(\mathcal{F}_{lf}, \mathfrak{F}_{lf})$.

Důkaz: Stačí si uvědomit, že $i^{-1}(\mathcal{F}^K \cap \mathcal{F}_{lf}) = \{\nu \in \mathcal{N}^* : \text{supp } \nu \cap K = \emptyset\} = \{\nu \in \mathcal{N}^* : \nu(K) = 0\} \in \mathfrak{N}^*$.

Důsledek 26. Je-li Φ jednoduchý bodový proces na E , pak $\text{supp } \Phi$ je náhodná lokálně konečná množina v E . Naopak, je-li Ξ náhodná lokálně konečná množina v E , je $\sum_{X \in \Xi} \delta_X$ jednoduchý bodový proces na E .

Věta 27. (Choquetova-Matheronova) Rozdělení náhodné uzavřené množiny Ξ je jednoznačně určeno pravděpodobnostmi $\mathbb{P}(\Xi \cap K = \emptyset)$, $K \in \mathcal{K}$.

Důkaz: Systém $\mathfrak{F}_0 = \{\mathcal{F}^K : K \in \mathcal{K}\}$ je uzavřen na konečné průniky a generuje σ -algebru \mathfrak{F} , proto shodují-li se dvě rozdělení na \mathfrak{F}_0 , shodují se i na \mathfrak{F} . Rozdělení Q náhodné uzavřené množiny Ξ je tedy jednoznačně určeno hodnotami $Q(\mathcal{F}^K) = \mathbb{P}(\Xi \cap K = \emptyset)$, $K \in \mathcal{K}$. □

Definice 36. Necht' Φ je bodový proces. Prázdnými pravděpodobnostmi (void probabilities) rozumíme pravděpodobnosti $\mathbb{P}(\Phi(K) = 0)$, $K \in \mathcal{K}$.

Rozdělení jednoduchého bodového procesu je jednoznačně určeno prázdnými pravděpodobnostmi.

Důsledek 28. Jsou-li Φ_1 a Φ_2 dva jednoduché bodové procesy na E takové, že $\mathbb{P}(\Phi_1(K) = 0) = \mathbb{P}(\Phi_2(K) = 0)$ pro každé $K \in \mathcal{K}$, pak $\Phi_1 \stackrel{D}{=} \Phi_2$.

Poznámka 18. V $E = \mathbb{R}$ lze sestavit dva jednoduché bodové procesy s různými rozděleními takové, že $\mathbb{P}(\Phi_1(I) = 0) = \mathbb{P}(\Phi_2(I) = 0)$ pro každý interval $I \subseteq \mathbb{R}$ (viz cvičení).

3.4 Poissonův bodový proces

Ještě než se dostaneme k Poissonovu bodovému procesu, definujeme příbuzný proces.

Definice 37. Mějme míru ν na E a množinu $B \in \mathcal{B}(E)$ takovou, že $0 < \nu(B) < \infty$. Necht' $n \in \mathbb{N}$ a X_1, \dots, X_n jsou nezávislé stejně rozdělené (ν -rovnoměrně) náhodné elementy v B , tj.

$$\mathbb{P}(X_i \in A) = \frac{\nu(A)}{\nu(B)}, \quad A \subseteq B, A \in \mathcal{B}.$$

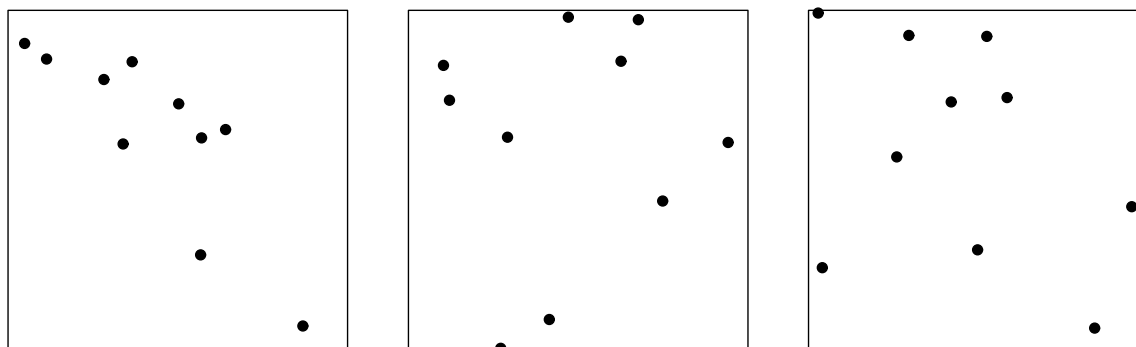
Potom $\Phi^{(n)} = \sum_{i=1}^n \delta_{X_i}$ je binomický bodový proces (binomial point process) o n bodech v B podle míry ν .

Poznámka 19. Lehce se ověří, že δ_{X_i} je bodový proces, $\Phi^{(n)}$ je pak dán součtem měřitelných. Můžeme si povšimnout, že pro $A \in \mathcal{B}$ má $\Phi^{(n)}(A)$ binomické rozdělení s parametry n a $\nu(A \cap B)/\nu(B)$. Míra intenzity je

$$\Lambda(A) = \mathbb{E}\Phi^{(n)}(A) = n \frac{\nu(A \cap B)}{\nu(B)}.$$

Pokud ν je difúzní (neatomická) míra, tak $\Phi^{(n)}$ je jednoduchý bodový proces.

Příklady tří realizací binomického procesu s 10 rovnoměrně rozdělenými body jsou znázorněny na obrázku 10.



Obrázek 10. Tři různé realizace binomického bodového procesu s 10 rovnoměrně rozdělenými body v rovinném okně jednotkového obsahu.

Obecněji můžeme uvažovat binomický bodový proces s náhodným počtem bodů v množině B .

Definice 38. Mějme (difúzní) míru ν a množinu $B \in \mathcal{B}$ takovou, že $0 < \nu(B) < \infty$. Nechť N je nezáporná celočíselná náhodná veličina a X_1, X_2, \dots jsou nezávislé ν -rovnoměrně rozdělené náhodné elementy v B , které jsou nezávislé na N . Pak $\Phi = \sum_{i=1}^N \delta_{X_i}$ je smíšený binomický bodový proces (mixed binomial point process). V případě $N = 0$ pokládáme $\Phi = 0$.

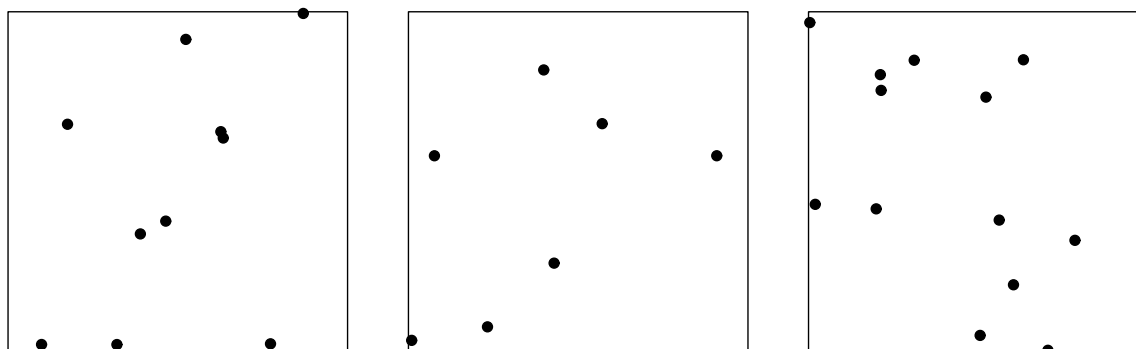
Poissonův proces představuje základní model bodových procesů. Slouží jako referenční proces při studiu popisných charakteristik a používá se jako základ pro konstrukci složitějších modelů. Jde o model úplné prostorové náhodnosti, ve kterém neexistují žádné interakce mezi body.

V případě $E = \mathbb{R}$ bývá Poissonův proces definován pomocí nezávislých přírůstků. V obecnějších prostorech budeme místo časových přírůstků uvažovat počty událostí (bodů) v disjunktních oblastech.

Definice 39. Nechť Λ je lokálně konečná difúzní míra na E . Bodový proces Φ takový, že

- (i) $\Phi(B)$ má Poissonovo rozdělení s parametrem $\Lambda(B)$ pro každé $B \in \mathcal{B}_0$,
- (ii) $\Phi(B_1), \dots, \Phi(B_n)$ jsou nezávislé pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_0$ po dvou disjunktní, nazveme Poissonův bodový proces (Poisson point process) s mírou intenzity Λ .

Příklady tří realizací Poissonova procesu v jednotkovém okně jsou znázorněny na obrázku 11.



Obrázek 11. Tři různé realizace Poissonova bodového procesu v rovinném okně jednotkového obsahu. Míra intenzity je násobkem Lebesgueovy míry a očekávaný počet bodů v oblasti jednotkového obsahu je 10. Počty bodů v okně jsou postupně 10, 7 a 13.

Důsledek 29. Nechť Λ je lokálně konečná difúzní míra na E . Potom existuje Poissonův bodový proces s mírou intenzity Λ a jeho rozdělení je jednoznačně určeno.

Důkaz: Jednoznačnost plyne z věty 17 a existence z věty 19. Pro $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_0$ po dvou disjunktí jsou podle definice konečně rozměrné projekce tvaru $Q_{B_1, \dots, B_n} = P_{B_1} \times \dots \times P_{B_n}$, kde P_{B_i} je Poissonovo rozdělení s parametrem $\Lambda(B_i)$. □

Věta 30. *Nechť Φ je Poissonův bodový proces s difúzní mírou intenzity $\Lambda \in \mathcal{M}$. Zvolme pevně $B \in \mathcal{B}$ takovou, že $0 < \Lambda(B) < \infty$. Potom podmíněně při $\Phi(B) = n$ má restrikce Φ na B stejné rozdělení jako binomický bodový proces na B s mírou Λ a n body.*

Důkaz: Označme Φ_B restrikci Φ na množinu B . Pro libovolnou kompaktní $K \subseteq B$ je

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Phi_B(K) = 0 \mid \Phi(B) = n) &= \frac{\mathbb{P}(\Phi(K) = 0, \Phi(B \setminus K) = n)}{\mathbb{P}(\Phi(B) = n)} = \frac{\mathbb{P}(\Phi(K) = 0)\mathbb{P}(\Phi(B \setminus K) = n)}{\mathbb{P}(\Phi(B) = n)} \\ &= \frac{e^{-\Lambda(K)} \frac{\Lambda(B \setminus K)^n}{n!} e^{-\Lambda(B \setminus K)}}{\frac{\Lambda(B)^n}{n!} e^{-\Lambda(B)}} = \left(\frac{\Lambda(B \setminus K)}{\Lambda(B)} \right)^n, \end{aligned}$$

což jsou přesně prázdné pravděpodobnosti binomického procesu. Díky tomu, že Λ je difúzní, máme jednoduché bodové procesy a stačí tak využít důsledek 28. □

Věta 30 říká, že z jedné realizace nepoznáme rozdíl mezi binomickým a Poissonovým procesem. Zatímco u binomického procesu je počet bodů v okně pevný, tak u Poissonova procesu má Poissonovo rozdělení, viz obrázek 10 a obrázek 11.

V důkazu věty 30 jsme využili toho, že Poissonův proces s difúzní mírou intenzity je jednoduchý.

Lemma 31. *Je-li míra $\Lambda \in \mathcal{M}$ difúzní, je Poissonův proces Φ s mírou intenzity Λ jednoduchý.*

Důkaz: Buď $\mathcal{S} = \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n$ DC-systém na E s vlastností (14). Jeho existence plyne z lemmatu 20. Podle rozpisu v důkazu lemmatu 22 je Φ jednoduchý právě tehdy, když

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{A \in \mathcal{S}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{B \in \mathcal{S}_n, B \subseteq A} [\Phi(B) > 1] \right) = 0.$$

Pro libovolnou $B \in \mathcal{B}_0$ je z vlastností Poissonova rozdělení

$$\mathbb{P}(\Phi(B) > 1) = e^{-\Lambda(B)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Lambda(B)^k}{k!} = o(\Lambda(B)), \quad \Lambda(B) \rightarrow 0.$$

Pro libovolnou $A \in \mathcal{S}$ dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\bigcup_{B \in \mathcal{S}_n, B \subseteq A} [\Phi(B) > 1] \right) &\leq \sum_{B \in \mathcal{S}_n, B \subseteq A} \mathbb{P}(\Phi(B) > 1) \\ &= \sum_{B \in \mathcal{S}_n, B \subseteq A} o(\Lambda(B)) = o(\Lambda(A)) = o(1), \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

z čehož plyne dokazované tvrzení. □

Z lemmatu 31 a důsledku 28 plyne, že bodový proces Φ je Poissonův proces s difúzní mírou intenzity Λ právě tehdy, když je jednoduchý a $\mathbb{P}(\Phi(K) = 0) = e^{-\Lambda(K)}$, $K \in \mathcal{K}$.

Definice 40. Je-li $\Lambda \in \mathcal{M}$, označme P_Λ rozdělení Poissonova procesu Φ_Λ na E s mírou intenzity Λ . Nechť Ψ je náhodná difúzní míra na E . Směs $Q = \int P_\Lambda \Psi(d\Lambda)$ je rozdělením *Coxova bodového procesu* (Cox point process) Φ_Ψ na E s *řídící mírou* (driving measure) Ψ .

Poznámka 20. Znamená to, že podmíněně při $\Psi = \Lambda$ je Φ_Ψ Poissonův bodový proces s mírou intenzity Λ . Proto se také někdy používá označení *dvojně stochastický Poissonův proces* (doubly stochastic Poisson process).

Lemma 32. *Míra intenzity Coxova procesu s řídicí mírou Ψ je rovna míře intenzity náhodné míry Ψ .*

Důkaz: Pro libovolné $B \in \mathcal{B}$ je

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Phi_\Psi(B) &= \int_{\mathcal{N}} \mu(B) \mathbb{Q}(d\mu) = \int_{\mathcal{M}} \int_{\mathcal{N}} \mu(B) P_\Lambda(d\mu) \Psi(d\Lambda) \\ &= \int_{\mathcal{M}} \mathbb{E}\Phi_\Lambda(B) \Psi(d\Lambda) = \int_{\mathcal{M}} \Lambda(B) \Psi(d\Lambda) = \mathbb{E}\Psi(B).\end{aligned}$$

Rozepsáno s využitím podmínění je to totéž jako

$$\mathbb{E}\Phi_\Psi(B) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(\Phi_\Psi(B) \mid \Psi)] = \mathbb{E}\Psi(B).$$

□

Coxův proces je přirozeným zobecněním Poissonova procesu, kdy míra intenzity není deterministická, ale je náhodná. Poissonův proces je speciálním případem Coxova procesu ($\Psi = \Lambda$ je deterministická míra). Nejjednodušší netriviální příklad Coxova procesu obdržíme, když Ψ bude (náhodným) násobkem nějaké deterministické míry Λ .

Definice 41. Nechtě $\Lambda \in \mathcal{M}$, $P_{t\Lambda}$ je rozdělení Poissonova bodového procesu s mírou intenzity $t\Lambda$ a Y je nezáporná náhodná veličina s rozdělením R . Bodový proces s rozdělením $Q = \int_0^\infty P_{t\Lambda} R(dt)$ se nazývá *smíšený Poissonův bodový proces*.

3.5 Momentové míry

Připomeňme, že jsme již definovali míru intenzity $\Lambda(\cdot) = \mathbb{E}\Psi(\cdot)$ náhodné míry Ψ .

Definice 42. Pro náhodnou míru Ψ je *momentová míra n -tého řádu* (*n -th order moment measure*) dána vztahem

$$M^{(n)}(A) = \mathbb{E}\Psi^n(A), \quad A \in \mathcal{B}(E^n),$$

kde Ψ^n značí n -tou mocninu míry Ψ ve smyslu obvyklého součinu měr. Speciálně tedy platí

$$M^{(n)}(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mathbb{E}\Psi(A_1) \cdots \Psi(A_n), \quad A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}.$$

Poznámka 21. Míra $M^{(n)}$ je vlastně míra intenzity náhodné míry Ψ^n na E^n . Pro bodový proces Φ na E je Φ^n bodový proces na E^n , přitom jeho atomy jsou uspořádané n -tice bodů procesu Φ .

Označme $E^{[n]} = \{(x_1, \dots, x_n) \in E^n : x_i \neq x_j \text{ pro } i \neq j\}$ množinu všech n -tic navzájem různých bodů z E . Jedná se o otevřenou podmnožinu E^n . Stopu \mathcal{B}^n v $E^{[n]}$ označme $\mathcal{B}^{[n]}$. Pro $\mu \in \mathcal{M}$ buď $\mu^{[n]} = \mu_n|_{E^{[n]}}$.

Definice 43. *Faktoriální momentovou míru n -tého řádu* (*n -th order factorial moment measure*) náhodné míry Ψ definujeme jako

$$\alpha^{(n)}(A) = \mathbb{E}\Psi^{[n]}(A), \quad A \in \mathcal{B}^n.$$

Poznámka 22. Momentové míry prvního řádu splývají s mírou intenzity: $M^{(1)} = \alpha^{(1)} = \Lambda$. Vztah mezi momentovou mírou n -tého řádu a momenty počtů bodů je následující:

$$M^{(n)}(B_1 \times \cdots \times B_n) = \mathbb{E}[\Phi(B_1) \cdots \Phi(B_n)], \quad B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B},$$

speciálně $M^{(n)}(B \times \cdots \times B) = \mathbb{E}\Phi(B)^n$ pro $B \in \mathcal{B}$. Podobně faktoriální momentová míra souvisí s faktoriálním momentem počtu bodů v dané oblasti:

$$\alpha^{(n)}(B \times \cdots \times B) = \mathbb{E}[\Phi(B)(\Phi(B) - 1) \cdots (\Phi(B) - n + 1)].$$

Ověření těchto vztahů je přenecháno na cvičení.

Jestliže Φ je jednoduchý bodový proces, potom pro $A \in \mathcal{B}^n$ je

$$M^{(n)}(A) = \mathbb{E} \sum_{X_1, \dots, X_n \in \text{supp } \Phi} \mathbf{1}_{[(X_1, \dots, X_n) \in A]}$$

a

$$\alpha^{(n)}(A) = \mathbb{E} \sum_{X_1, \dots, X_n \in \text{supp } \Phi}^{\neq} \mathbf{1}_{[(X_1, \dots, X_n) \in A]},$$

kde $\sum_{X_1, \dots, X_n \in \text{supp } \Phi}^{\neq}$ znamená, že se sčítá pouze přes n -tice navzájem různých bodů X_1, \dots, X_n .
Pro Poissonův bodový proces má faktoriální momentová míra jednoduchý tvar.

Věta 33. *Nechť Φ je Poissonův bodový proces s difúzní mírou intenzity Λ . Jeho faktoriální momentová míra je $\alpha^{(n)} = \Lambda^n$.*

Důkaz: Pro $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}^d$ po dvou disjunktní je

$$\alpha^{(n)}(B_1 \times \dots \times B_n) = \mathbb{E} \Phi(B_1) \cdots \Phi(B_n).$$

Z vlastnosti (ii) Poissonova procesu (definice 39) pak plyne

$$\alpha^{(n)}(B_1 \times \dots \times B_n) = \mathbb{E} \Phi(B_1) \cdots \mathbb{E} \Phi(B_n) = \Lambda(B_1) \cdots \Lambda(B_n).$$

Systém množin $\{B_1 \times \dots \times B_n : B_i \in \mathcal{B} \text{ a } B_i \cap B_j = \emptyset \text{ pro } i \neq j\}$ je uzavřený na konečné průniky a generuje borelovskou σ -algebru $\mathcal{B}^{[n]}$ na prostoru $E^{[n]}$. Protože míry $\alpha^{(n)}$ a Λ^n splývají na tomto systému množin, jsou si podle věty 82 o jednoznačnosti míry rovny na $\mathcal{B}^{[n]}$. Jelikož $\alpha^{(n)}$ má nulovou míru na $E^n \setminus E^{[n]}$, jsme s důkazem rovnosti měř hotovi. □

Poznámka 23. Faktoriální momentová míra Coxova procesu s řídicí mírou Ψ je $\alpha^n = \mathbb{E} \Psi^n$.

Následující věta se nám bude často hodit.

Věta 34. (Campbellova věta)

(i) *Nechť Ψ je náhodná míra a h libovolná nezáporná měřitelná funkce na E^n , potom*

$$\mathbb{E} \int_{E^n} h(x_1, \dots, x_n) \Psi^n(d(x_1, \dots, x_n)) = \int_{E^n} h(x_1, \dots, x_n) M^{(n)}(d(x_1, \dots, x_n))$$

a

$$\mathbb{E} \int_{E^{[n]}} h(x_1, \dots, x_n) \Psi^{[n]}(d(x_1, \dots, x_n)) = \int_{E^{[n]}} h(x_1, \dots, x_n) \alpha^{(n)}(d(x_1, \dots, x_n)).$$

(ii) *Pro jednoduchý bodový proces Φ a libovolnou nezápornou měřitelnou funkci h na E^n platí:*

$$\mathbb{E} \sum_{X_1, \dots, X_n \in \text{supp } \Phi} h(X_1, \dots, X_n) = \int_E \cdots \int_E h(x_1, \dots, x_n) M^{(n)}(dx_1, \dots, dx_n)$$

a

$$\mathbb{E} \sum_{X_1, \dots, X_n \in \text{supp } \Phi}^{\neq} h(X_1, \dots, X_n) = \int_E \cdots \int_E h(x_1, \dots, x_n) \alpha^{(n)}(dx_1, \dots, dx_n).$$

Důkaz: Pro indikátory plynou oba vztahy z definice 42. Zbytek důkazu probíhá pomocí standardních argumentů teorie míry. □

Definice 44. *Laplaceova transformace (Laplace transform) náhodné míry Ψ je funkcional L_Ψ definovaný vztahem*

$$L_\Psi(f) = \mathbb{E} \exp\left\{-\int_E f(x) \Psi(dx)\right\},$$

kde f je nezáporná měřitelná funkce na E .

Poznámka 24. Volíme-li speciálně $f = \sum_{i=1}^n t_i \mathbf{1}_{B_i}$ jednoduchou funkci, je

$$L_\Psi(f) = \mathbb{E} \exp\left\{-\sum_{i=1}^n t_i \Psi(B_i)\right\}$$

Laplaceova transformace náhodného vektoru $(\Psi(B_1), \dots, \Psi(B_n))$ v bodě (t_1, \dots, t_n) .

Důsledek 35. Laplaceova transformace určuje jednoznačně rozdělení náhodné míry.

Důkaz: Protože Laplaceova transformace nezáporného náhodného vektoru určuje jednoznačně jeho rozdělení, plyne tvrzení z věty 17. □

Lemma 36.

(i) Laplaceova transformace Poissonova bodového procesu Φ s mírou intenzity Λ je

$$L_\Phi(f) = \exp \left\{ - \int_E (1 - e^{-f(x)}) \Lambda(dx) \right\}.$$

(ii) Laplaceova transformace smíšeného Poissonova procesu s řídicí mírou $Y \cdot \Lambda$ je

$$L_\Phi(f) = L_Y \left(\int_E (1 - e^{-f(x)}) \Lambda(dx) \right),$$

kde $L_Y(t) = \mathbb{E}e^{-tY}$, $t \geq 0$, je Laplaceova transformace nezáporné náhodné veličiny Y .

Důkaz:

(i) Pokud je f jednoduchá funkce tvaru $f = \sum_{i=1}^n t_i \mathbf{1}_{B_i}$, kde $B_i \in \mathcal{B}$ jsou po dvou disjunktní, pak

$$\begin{aligned} L_\Phi(f) &= \mathbb{E} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n t_i \Phi(B_i) \right\} = \prod_{i=1}^n \mathbb{E} e^{-t_i \Phi(B_i)} \\ &= \prod_{i=1}^n e^{-\Lambda(B_i)(1-e^{-t_i})} = \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \Lambda(B_i)(1-e^{-t_i}) \right\}. \end{aligned}$$

Využili jsme znalosti Laplaceovy transformace náhodné veličiny $\Phi(B_i)$ s Poissonovým rozdělením. Standardními argumenty teorie míry dostáváme tvrzení pro libovolnou nezápornou měřitelnou funkci f .

(ii) Postupně můžeme psát

$$\begin{aligned} L_\Phi(f) &= \int_{\mathcal{N}} e^{-\int_E f(x) \mu(dx)} Q(d\mu) = \int_0^\infty \int_{\mathcal{N}} e^{-\int_E f(x) \mu(dx)} Q_t(d\mu) R(dt) \\ &= \int_0^\infty \exp \left\{ -t \int_E (1 - e^{-f(x)}) \Lambda(dx) \right\} R(dt) = L_Y \left(\int_E (1 - e^{-f(x)}) \Lambda(dx) \right), \end{aligned}$$

kde Q_t je rozdělení Poissonova bodového procesu s mírou intenzity $t\Lambda$ a R je rozdělení náhodné veličiny Y . □

3.6 Palmovo rozdělení

Definice 45. Mějme dva měřitelné prostory (S, \mathcal{S}) a (T, \mathcal{T}) . Zobrazení $K : S \times \mathcal{T} \rightarrow [0, \infty]$ se nazývá *jádro (kernel)* z (S, \mathcal{S}) do (T, \mathcal{T}) , jestliže

- (i) pro každé $B \in \mathcal{T}$ je $s \mapsto K(s, B)$ nezáporná měřitelná funkce na S ,
- (ii) pro každé $s \in S$ je $K(s, \cdot)$ míra na (T, \mathcal{T}) .

Řekneme, že K je *markovské jádro* nebo také *pravděpodobnostní jádro*, pokud $K(s, \cdot)$ je pravděpodobnostní míra pro každé $s \in S$.

Příkladem jádra je regulární verze podmíněné střední hodnoty. Náhodná míra na E je jádro z (Ω, \mathcal{A}) do (E, \mathcal{B}) .

Věta 37. (o desintegraci) Nechť (S, \mathcal{S}) je měřitelný prostor a (T, \mathcal{T}) je úplný separabilní metrický prostor s borelovskou σ -algebrou. Mějme míru μ na $(S \times T, \mathcal{S} \otimes \mathcal{T})$ a nechť projekce $\nu(\cdot) = \mu(\cdot \times T)$ je σ -koněčná míra na (S, \mathcal{S}) . Pak existuje jádro K z (S, \mathcal{S}) do (T, \mathcal{T}) tak, že pro každou nezápornou měřitelnou funkci f na $S \times T$ platí

$$\int_{S \times T} f(s, t) \mu(d(s, t)) = \int_S \int_T f(s, t) K(s, dt) \nu(ds).$$

Je-li K' jiné jádro z (S, \mathcal{S}) do (T, \mathcal{T}) s touto vlastností, pak pro každé $B \in \mathcal{T}$ platí $\nu(\{s \in S : K(s, B) \neq K'(s, B)\}) = 0$.

Důkaz: Pro každou $B \in \mathcal{T}$ je míra $\mu(\cdot \times B)$ na (S, \mathcal{S}) absolutně spojitá vůči ν , protože $\mu(A \times B) \leq \nu(A)$. Existuje tedy její Radonova-Nikodymova derivace $\xi_B = \frac{d\mu(\cdot \times B)}{d\nu(\cdot)}$, kterou díky nerovnosti $\mu(A \times B) \leq \nu(A)$ můžeme volit tak, že $\xi_B(s) \in [0, 1]$ pro každé $s \in S$.

Předpokládejme nejprve, že ν je pravděpodobnostní míra (tj. $\nu(S) = 1$). Pak $(\xi_B, B \in \mathcal{T})$ je soubor nezáporných náhodných veličin na pravděpodobnostním prostoru (S, \mathcal{S}, ν) , který splňuje předpoklady tvrzení 18: $\xi_{B \cup B'} = \xi_B + \xi_{B'}$ s.j. pro disjunktní $B, B' \in \mathcal{T}$ plyne z toho, že $\mu(\cdot \times (B \cup B')) = \mu(\cdot \times B) + \mu(\cdot \times B')$; pro posloupnost množin $B_n \in \mathcal{T}$ splňující $B_n \searrow \emptyset$ je $\mu(S \times B_n) = \int_S \xi_{B_n}(s) \nu(ds) = \mathbb{E} \xi_{B_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, z čehož dostaneme $\xi_{B_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ s.j. díky tomu, že $\xi_{B_1} \geq \dots \geq \xi_{B_n} \geq \dots$ s.j. Proto existuje náhodná míra Ψ na T taková, že pro každé $B \in \mathcal{T}$ je $\Psi(B) = \xi_B$ s.j. Protože $\xi_T = 1$ s.j., je Ψ pravděpodobnostní míra s.j. a můžeme položit $K(s, B) = \Psi(s)(B)$. Pro $A \in \mathcal{S}$ a $B \in \mathcal{T}$ pak z definice Radonovy-Nikodymovy derivace platí

$$\mu(A \times B) = \int_S K(s, B) \nu(ds),$$

což je speciální případ dokazované rovnosti pro funkci $f = \mathbf{1}_{A \times B}$. Standardním postupem se platnost rovnosti rozšíří pro libovolnou měřitelnou funkci f na $S \times T$.

Uvedený postup se snadno zobecní na případ konečné míry ν ($\nu(S) < \infty$) tím, že pracujeme s mírou $\tilde{\mu}(\cdot) = \frac{\mu(\cdot)}{\nu(S)}$ a jádro K vynásobíme $\nu(S)$. Pro σ -konečnou ν využijeme prostory $(S_n, \mathcal{S}_n, \nu_n)$, kde $S_n \nearrow S$, $\nu(S_n) < \infty$ a $\nu_n = \nu|_{S_n}$.

Požadovaná jednoznačnost plyne z jednoznačnosti Radonovy-Nikodymovy derivace ν -s.j. □

Definice 46. Definujeme *Campbellovu míru* (Campbell measure) příslušnou náhodné míře Ψ jako

$$C(A) = \mathbb{E} \int_E \mathbf{1}_A(x, \Psi) \Psi(dx), \quad A \in \mathcal{B} \times \mathfrak{M}.$$

Speciálně platí

$$C(B \times \mathcal{U}) = \mathbb{E} \mathbf{1}_{[\Psi \in \mathcal{U}]} \Psi(B), \quad B \in \mathcal{B}, \mathcal{U} \in \mathfrak{M}.$$

Poznámka 25. Standardním postupem teorie míry máme, že pro libovolnou nezápornou měřitelnou funkci f na $E \times \mathcal{M}$ je

$$\int_{E \times \mathcal{M}} f(x, \mu) C(d(x, \mu)) = \int_{\mathcal{M}} \int_E f(x, \mu) \mu(dx) Q(d\mu) = \mathbb{E} \int_E f(x, \Psi) \Psi(dx),$$

kde Q je rozdělení náhodné míry Ψ .

Věta 38. Necht' Ψ je náhodná míra na E s rozdělením Q a mírou intenzity $\Lambda \in \mathcal{M}$. Pak existuje markovské jádro P z (E, \mathcal{B}) do $(\mathcal{M}, \mathfrak{M})$ takové, že

$$\int_{\mathcal{M}} \int_E f(x, \mu) \mu(dx) Q(d\mu) = \int_E \int_{\mathcal{M}} f(x, \mu) P(x, d\mu) \Lambda(dx) \quad (15)$$

pro libovolnou nezápornou měřitelnou funkci f na $E \times \mathcal{M}$. Je-li P' jiné markovské jádro s touto vlastností, pak $\Lambda(\{x \in E : P(x, \mathcal{U}) \neq P'(x, \mathcal{U})\}) = 0$ pro každé $\mathcal{U} \in \mathfrak{M}$.

Důkaz: Jelikož \mathcal{M} tvoří úplný separabilní metrický prostor (tvrzení 16), můžeme využít větu 37 pro $S = E$, $T = \mathcal{M}$, $\nu = \Lambda$ a $\mu = C$. □

Definice 47. Je-li P markovské jádro z věty 38, tak rozdělení $P_x(\cdot) = P(x, \cdot)$ se nazývá *Palmovo rozdělení* (Palm distribution) náhodné míry Ψ v bodě $x \in E$.

Poznámka 26. Ve skutečnosti nemá smysl mluvit o Palmově rozdělení v jednom konkrétním bodě, protože to může být definováno libovolně. Nicméně věta 38 zaručuje, že systém Palmových rozdělení $\{P_x : x \in E\}$ je jednoznačně určen pro Λ -s.v. x : jsou-li (P_x) a (\tilde{P}_x) dvě Palmova rozdělení náhodné míry Ψ , pak pro každé $\mathcal{U} \in \mathfrak{M}$ je $P_x(\mathcal{U}) = \tilde{P}_x(\mathcal{U})$ pro Λ -s.v. $x \in E$.

Lemma 39. Je-li Φ bodový proces s mírou intenzity $\Lambda \in \mathcal{M}$, pak $P_x(\{\mu \in \mathcal{M} : \mu(\{x\}) \geq 1\}) = 1$ pro Λ -s.v. $x \in E$.

Důkaz: Pro libovolnou $A \in \mathcal{B}_0$ dostaneme volbou $f(x, \mu) = \mathbf{1}_A(x) \mathbf{1}_{[\mu(\{x\}) \geq 1]}$ v definici Palmova rozdělení a využitím toho, že Φ je bodový proces, vztah

$$\begin{aligned} \int_A P_x(\{\mu \in \mathcal{M} : \mu(\{x\}) \geq 1\}) \Lambda(dx) &= \int_{\mathcal{M}} \int_A \mathbf{1}_{[\mu(\{x\}) \geq 1]} \mu(dx) Q(d\mu) \\ &= \int_{\mathcal{M}} \mu(A \cap \text{supp } \mu) Q(d\mu) = \int_{\mathcal{M}} \mu(A) Q(d\mu) = \mathbb{E}\Phi(A) = \Lambda(A). \end{aligned}$$

Odtud plyne, že

$$\int_A [1 - P_x(\{\mu \in \mathcal{M} : \mu(\{x\}) \geq 1\})] \Lambda(dx) = 0,$$

musí tedy být $P_x(\{\mu \in \mathcal{M} : \mu(\{x\}) \geq 1\}) = 1$ pro Λ -s.v. $x \in A$. □

Poznámka 27. Je-li Q rozdělení bodového procesu, pak P_x jsou rozdělení bodových procesů pro Λ -s.v. $x \in E$. Věta o desintegraci se použije na \mathcal{N} místo \mathcal{M} .

Definice 48. Pro bodový proces Φ definujeme *redukované Palmovo rozdělení (reduced Palm distribution)* v bodě x jako pravděpodobnostní míru $P_x^!$ danou předpisem

$$\int_{\mathcal{N}} g(\nu) P_x^!(d\nu) = \int_{\mathcal{N}} g(\nu - \delta_x) P_x(d\nu)$$

pro libovolnou nezápornou měřitelnou funkci g .

Věta 40. Pokud Φ je jednoduchý bodový proces (tj. $Q(\mathcal{N}^*) = 1$), pak $P_x(\mathcal{N}^*) = 1$ pro Λ -s.v. x .

Důkaz: Pro libovolnou množinu $A \in \mathcal{B}_0$ je podle definice Palmova rozdělení

$$\int_A P_x(\mathcal{M} \setminus \mathcal{N}^*) \Lambda(dx) = \int_{\mathcal{M}} \int_E \mathbf{1}_{\mathcal{M} \setminus \mathcal{N}^*}(\mu) \mathbf{1}_A(x) \mu(dx) Q(d\mu) = \int_{\mathcal{M} \setminus \mathcal{N}^*} \mu(A) Q(d\mu) = 0.$$

Poslední rovnost plyne z toho, že $Q(\mathcal{M} \setminus \mathcal{N}^*) = 0$. Nyní vidíme, že $P_x(\mathcal{M} \setminus \mathcal{N}^*) = 0$ pro Λ -s.v. $x \in A$. □

Poznámka 28. Palmovo rozdělení P_x jednoduchého bodového procesu Φ lze interpretovat jako podmíněné rozdělení bodového procesu za podmínky, že x je bod procesu. Pro $\varepsilon > 0$ malé totiž máme:

$$\mathbb{P}(\Phi \in \mathcal{U} \mid \Phi(b(x, \varepsilon)) > 0) = \frac{\mathbb{P}(\Phi \in \mathcal{U}, \Phi(b(x, \varepsilon)) > 0)}{\mathbb{P}(\Phi(b(x, \varepsilon)) > 0)} \approx \frac{\mathbb{E} \mathbf{1}_{[\Phi \in \mathcal{U}] \Phi(b(x, \varepsilon))}}{\mathbb{E} \Phi(b(x, \varepsilon))} = \frac{C(b(x, \varepsilon) \times \mathcal{U})}{\Lambda(b(x, \varepsilon))} \approx P_x(\mathcal{U}),$$

kde $b(x, \varepsilon)$ značí kouli o středu x a poloměru ε . Lemma 7.2 v [10] nabízí matematicky přesné odvození. Podobně $P_x^!$ lze interpretovat jako podmíněné rozdělení bodového procesu za podmínky, že x je bod procesu a ten nezapočítáváme.

Poznámka 29. V teorii bodových procesů se často používá označení *typický bod (typical point)*. Jeho význam se interpretuje pomocí Palmova rozdělení. Pokud za Palmova rozdělení P_x má bod x nějakou danou vlastnost, řekneme, že typický bod má tuto vlastnost.

Věta 41. (Campbellova-Meckeova věta) Pro jednoduchý bodový proces Φ a libovolnou nezápornou měřitelnou funkci h platí:

$$\mathbb{E} \sum_{X \in \text{supp } \Phi} h(X, \Phi) = \int_{E \times \mathcal{N}} h(x, \nu) C(d(x, \nu)) = \int_E \int_{\mathcal{N}} h(x, \nu) P_x(d\nu) \Lambda(dx)$$

a

$$\mathbb{E} \sum_{X \in \text{supp } \Phi} h(X, \Phi - \delta_X) = \int_E \int_{\mathcal{N}} h(x, \nu) P_x^!(d\nu) \Lambda(dx).$$

Důkaz: První rovnost v prvním vztahu se ukáže standardním postupem teorie míry. Pro $h(x, \nu) = \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_U(\nu)$ je

$$\mathbb{E} \sum_{X \in \text{supp } \Phi} h(X, \Phi) = \mathbb{E} \Phi(A) \mathbf{1}_{[\Phi \in U]} = C(A \times U).$$

Druhá rovnost pak plyne z věty 38. Druhý vztah pak plyne z prvního a definice 48. \square

Věta 42. (*Slivnyakova věta*) Pro Poissonův proces Φ s rozdělením Π a mírou intenzity $\Lambda \in \mathcal{M}$ platí $P_x = \Pi * \delta_{(\delta_x)}$, neboli $P_x^! = \Pi$, pro Λ -s.v. $x \in E$. Symbol $*$ zde značí konvoluci měr. Jinak řečeno, $\Phi + \delta_x$ má rozdělení P_x pro Λ -s.v. $x \in E$.

Důkaz: Obecný důkaz lze nalézt v [5], Proposition 13.1.VII nebo v [10], věta 7.3. Ukažme si důkaz pro difúzní Λ , pak podle lemmatu 31 je $\Phi + \delta_x$ jednoduchý bodový proces. Označme $\tilde{\Phi}_x$ jednoduchý bodový proces s rozdělením P_x . Podle důsledku 28 stačí ověřit, že $\Phi + \delta_x$ a $\tilde{\Phi}_x$ mají stejné prázdné pravděpodobnosti. Vezměme libovolnou $A \in \mathcal{B}_0$ a $K \in \mathcal{K}$. Připomeňme, že $\mathcal{N}_{K,0} = \{\nu : \nu(K) = 0\}$. Ověříme, že

$$\int_A P_x(\mathcal{N}_{K,0}) \Lambda(dx) = \int_A \mathbb{P}((\Phi + \delta_x)(K) = 0) \Lambda(dx).$$

Levá strana je rovna $C(A \times \mathcal{N}_{K,0}) = \mathbb{E} \Phi(A) \mathbf{1}_{[\Phi(K)=0]}$. Pravou stranu můžeme upravit na

$$\begin{aligned} \int_A \mathbb{P}(\Phi(K) = 0, x \notin K) \Lambda(dx) &= \int_{A \setminus K} \int_{\mathcal{N}} \mathbf{1}_{[\nu(K)=0]} Q(d\nu) \Lambda(dx) \\ &= \Lambda(A \setminus K) \mathbb{P}(\Phi(K) = 0) = \mathbb{E} \Phi(A \setminus K) \mathbf{1}_{[\Phi(K)=0]}, \end{aligned}$$

kde jsme v posledním kroku využili nezávislost $\Phi(A \setminus K)$ a $\Phi(K)$. Zřejmě platí $\mathbb{E} \Phi(A) \mathbf{1}_{[\Phi(K)=0]} = \mathbb{E} \Phi(A \setminus K) \mathbf{1}_{[\Phi(K)=0]}$, čímž je důkaz hotov. \square

4. Bodové procesy v euklidovském prostoru

V této kapitole uvažujeme prostor $E = \mathbb{R}^d$ s euklidovskou metrikou. Příslušnou borelovskou σ -algebru $\mathcal{B}(E)$ budeme značit \mathcal{B}^d .

4.1 Stacionární bodové procesy na \mathbb{R}^d

Definice 49. Pro $z \in \mathbb{R}^d$ označme t_z operátor posunutí na \mathcal{M} vztahem

$$(t_z \mu)(A) = \mu(A - z), \quad \mu \in \mathcal{M}, A \in \mathcal{B}^d.$$

Řekneme, že náhodná míra Ψ na \mathbb{R}^d je *stacionární (stationary)*, jestliže $t_z \Psi$ a Ψ mají stejné rozdělení pro každé $z \in \mathbb{R}^d$, tj. rozdělení náhodné míry je invariantní vůči posunutím.

Poznámka 30. Pokud $\mu = \sum_{i=1}^{\tau} \delta_{x_i}$, pak $t_z \mu = \sum_{i=1}^{\tau} \delta_{x_i+z}$.

Definice 50. Pro rotaci \mathcal{O} kolem počátku označme $R_{\mathcal{O}}$ operátor rotace na \mathcal{M} vztahem

$$(R_{\mathcal{O}} \mu)(A) = \mu(\mathcal{O}^{-1}A), \quad \mu \in \mathcal{M}, A \in \mathcal{B}^d.$$

Náhodná míra Ψ na \mathbb{R}^d je *izotropní (isotropic)*, jestliže $R_{\mathcal{O}} \Psi$ a Ψ mají stejné rozdělení pro každou rotaci \mathcal{O} , tj. rozdělení náhodné míry je invariantní vůči otočením kolem počátku.

Lemma 43. Je-li Ψ stacionární náhodná míra s lokálně konečnou mírou intenzity Λ , pak Λ je nezáporným násobkem Lebesgueovy míry, tj. $\Lambda(B) = \lambda|B|$, $B \in \mathcal{B}^d$, pro nějaké $\lambda \geq 0$.

Důkaz: Ze stacionarity máme $\Lambda(B+z) = \Lambda(B)$ pro každé $z \in \mathbb{R}^d$. Tvzení plyne z toho, že Lebesgueova míra je až na násobek jediná lokálně konečná translačně invariantní míra na $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$, viz cvičení 26.6 v [7]. \square

Definice 51. Násobek $\lambda \geq 0$ z lemmatu 43 se nazývá *intenzita (intensity)* stacionární náhodné míry.

Intenzita udává střední hodnotu míry množiny s jednotkovým objemem. V případě bodových procesů jde o střední počet bodů procesu v množině s jednotkovým objemem.

Definice 52. Nechť Ψ je náhodná míra s mírou intenzity Λ . Existuje-li hustota λ míry Λ vzhledem k Lebesgueově míře (tj. $\Lambda(B) = \int_B \lambda(x) dx$, $B \in \mathcal{B}^d$), potom λ se nazývá *funkce intenzity (intensity function)*.

Z lemmatu 43 víme, že pro stacionární náhodnou míru je míra intenzity násobkem Lebesgueovy míry, proto funkce intenzity je konstantní a je rovna tomuto násobku, tedy intenzitě.

Definice 53. Poissonův bodový proces Φ na \mathbb{R}^d , pro který existuje funkce intenzity λ a je konstantní, se nazývá *homogenní (homogeneous) Poissonův bodový proces* s intenzitou λ . Pokud je navíc tato intenzita rovna 1, mluvíme o *standardním (standard) Poissonově bodovém procesu*.

Poznámka 31. Homogenní Poissonův bodový proces je stacionární a izotropní (viz cvičení).

Definice 54. Nechť Ψ je náhodná míra na \mathbb{R}^d s faktoriální momentovou mírou n -tého řádu $\alpha^{(n)}$. Pokud existuje hustota $\lambda^{(n)}$ faktoriální momentové míry $\alpha^{(n)}$ vzhledem k (nd) -rozměrné Lebesgueově míře, pak se nazývá *součinnová hustota n -tého řádu (n -th order product density)*.

Poznámka 32. Součinnová hustota prvního řádu splývá s funkcí intenzity. Budeme psát $\lambda^{(1)} = \lambda$.

Poznámka 33. Podobně jako u funkce intenzity můžeme součinnovou hustotu n -tého řádu zavést heuristicky. Uvažujme n infinitesimalně malých disjunktních koulí se středy v x_1, \dots, x_n a objemy dx_1, \dots, dx_n . Potom $\lambda^{(n)}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$ je pravděpodobnost, že v každé z těchto koulí je bod procesu.

Důsledek 44. Pokud existuje funkce intenzity λ Poissonova bodového procesu Φ , tak pro součinnovou hustotu n -tého řádu platí $\lambda^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \lambda(x_i)$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$.

Důkaz: Plyne z věty 33. □

Z definice stacionarity (definice 49) plyne, že momentové míry stacionárního bodového procesu jsou invariantní vůči diagonálním posunutím, tj.

$$M^{(n)}(B_1 \times \cdots \times B_n) = M^{(n)}((B_1 + y) \times \cdots \times (B_n + y))$$

a

$$\alpha^{(n)}(B_1 \times \cdots \times B_n) = \alpha^{(n)}((B_1 + y) \times \cdots \times (B_n + y))$$

pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}^d$ a $y \in \mathbb{R}^d$. Pokud existuje součinnová hustota, tak splňuje

$$\lambda^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \lambda^{(n)}(x_1 + y, \dots, x_n + y) \quad (16)$$

pro skoro všechna $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$ a $y \in \mathbb{R}^d$.

Věta 45. Nechť Ψ je stacionární náhodná míra na \mathbb{R}^d s intenzitou $0 < \lambda < \infty$. Zvolme libovolnou omezenou borelovskou množinu $A \in \mathcal{B}_0^d$ s kladnou Lebesgueovou mírou ($|A| > 0$). Pro $\mathcal{U} \in \mathfrak{M}$ a $x \in \mathbb{R}^d$ označme $t_x^{-1}\mathcal{U} = \{\mu : t_x\mu \in \mathcal{U}\}$. Potom

$$P_o(\mathcal{U}) = \frac{1}{\lambda|A|} \mathbb{E} \int_A \mathbf{1}_{\mathcal{U}}(t_{-x}\Psi) \Psi(dx), \quad \mathcal{U} \in \mathfrak{M},$$

$$P_x(\mathcal{U}) = P_o(t_x^{-1}\mathcal{U}), \quad \mathcal{U} \in \mathfrak{M},$$

jsou Palmova rozdělení náhodné míry Ψ .

Důkaz: Je třeba ověřit, že takto definovaný systém rozdělení splňuje (15), a tudíž vyhovuje definici Palmových rozdělení. Přitom v (15) stačí uvažovat $f(x, \mu) = \mathbf{1}_B(x)\mathbf{1}_{\mathcal{U}}(\mu)$. Ze stacionarity víme, že míra intenzity Λ je násobkem Lebesgueovy míry (lemma 43), proto

$$\begin{aligned} \int_B P_x(\mathcal{U}) \Lambda(dx) &= \lambda \int_B P_o(t_x^{-1}\mathcal{U}) dx = \lambda \int_B \frac{1}{\lambda|A|} \mathbb{E} \int_A \mathbf{1}_{t_x^{-1}\mathcal{U}}(t_{-y}\Psi) \Psi(dy) dx \\ &= \frac{1}{|A|} \int_B \mathbb{E} \int_A \mathbf{1}_{\mathcal{U}}(t_{x-y}\Psi) \Psi(dy) dx = \frac{1}{|A|} \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_A(y)\mathbf{1}_B(y+z)\mathbf{1}_{\mathcal{U}}(t_z\Psi) \Psi(dy) dz, \end{aligned}$$

kde jsme v posledním kroku použili Fubiniho větu a substituci $z = x - y$. Nyní provedeme substituci $\Psi(dy) = t_z\Psi(dx)$ a využijeme stacionarity Ψ . Dostaneme postupně

$$\begin{aligned} \int_B P_x(\mathcal{U}) \Lambda(dx) &= \frac{1}{|A|} \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_A(x-z) \mathbf{1}_B(x) \mathbf{1}_{\mathcal{U}}(t_z\Psi) (t_z\Psi)(dx) dz \\ &= \frac{1}{|A|} \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_A(x-z) \mathbf{1}_B(x) \mathbf{1}_{\mathcal{U}}(\Psi) \Psi(dx) dz \\ &= \mathbb{E} \int_B \mathbf{1}_{\mathcal{U}}(\Psi) \Psi(dx) = C(B \times \mathcal{U}). \end{aligned}$$

□

Pokud budeme mluvit o Palmově rozdělení stacionárního náhodné míry, máme na mysli soubor rozdělení $(P_x, x \in \mathbb{R}^d)$ z věty 45, který je určen Palmovým rozdělením P_o v počátku a vztahem $P_x(\cdot) = P_o(t_x^{-1}\cdot)$. Podobně redukované Palmovo rozdělení stacionárního jednoduchého bodového procesu budeme uvažovat tvaru

$$\begin{aligned} P_o^!(\mathcal{U}) &= \frac{1}{\lambda|A|} \mathbb{E} \sum_{X \in \text{supp } \Phi \cap A} \mathbf{1}_{\mathcal{U}}(t_{-X}(\Phi - \delta_X)), \quad \mathcal{U} \in \mathfrak{N}, \\ P_x^!(\mathcal{U}) &= P_o^!(t_x^{-1}\mathcal{U}), \quad \mathcal{U} \in \mathfrak{N}. \end{aligned}$$

Campbellova-Meckeho věta má pak následující tvar.

Věta 46. *Pro stacionární jednoduchý bodový proces Φ s intenzitou λ a libovolnou nezápornou měřitelnou funkcí h platí:*

$$\mathbb{E} \sum_{X \in \text{supp } \Phi} h(X, \Phi) = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathcal{N}} h(x, \nu) P_x(d\nu) dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathcal{N}} h(x, t_x\nu) P_o(d\nu) dx$$

a

$$\mathbb{E} \sum_{X \in \text{supp } \Phi} h(X, \Phi - \delta_X) = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathcal{N}} h(x, \nu) P_x^!(d\nu) dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathcal{N}} h(x, t_x\nu) P_o^!(d\nu) dx.$$

Poznámka 34. Symbolem \mathbb{E}_o (resp. $\mathbb{E}_o^!$) budeme značit střední hodnotu vzhledem k P_o (resp. $P_o^!$), tj.

$$\mathbb{E}_o h(\Phi) = \int h(\nu) P_o(d\nu), \quad \mathbb{E}_o^! h(\Phi) = \int h(\nu) P_o^!(d\nu).$$

4.2 Charakteristiky bodových procesů

V této podkapitole se budeme věnovat popisným charakteristikám bodových procesů na \mathbb{R}^d . Rozlišujeme číselné a funkcionální charakteristiky. Číselné charakteristiky popisují vlastnosti bodového procesu jednou číselnou hodnotou. U stacionárních bodových procesů je nejjednodušší a nejdůležitější číselnou charakteristikou intenzita (definice 51). Moderní prostorová statistika používá spíše funkcionální charakteristiky. Příkladem funkcionální charakteristiky je funkce intenzity (definice 52). Intenzita a funkce intenzity jsou charakteristiky prvního řádu (jsou odvozeny od momentové míry prvního řádu). Funkce intenzity je definována i pro nestacionární bodové procesy. My se v této podkapitole zaměříme na stacionární bodové procesy.

Nejprve si uvedme příklady dvou číselných charakteristik, které jsou založeny na vzájemných vzdálenostech mezi body procesu.

Definice 55. Uvažujme stacionární bodový proces Φ s intenzitou λ a jako D_o označme vzdálenost od počátku o k nejbližšímu bodu procesu Φ , tj. $D_o = \inf\{r \geq 0 : \Phi(b(o, r)) > 0\}$. Definujeme *Pielouvé index náhodnosti* (Pielou's index of randomness) jako

$$\text{PI} = \lambda \omega_d \mathbb{E}(D_o)^d$$

a *index agregace* (aggregation index) nebo také *Clarkův-Evansův index* (Clark-Evans index) předpisem

$$\text{CE} = \frac{d(\lambda \omega_d)^{1/d}}{\Gamma(1/d)} \mathbb{E}_o^! D_o,$$

kde $\omega_d = |b(o, 1)| = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(1+d/2)}$ je objem d -rozměrné jednotkové koule.

Tyto indexy úzce souvisí s následujícími funkcionálními charakteristikami.

Definice 56. Nechť Φ je stacionární bodový proces a D_o je vzdálenost od počátku k nejbližšímu bodu procesu. *Kontaktní distribuční funkce (spherical contact distribution function)* je dána předpisem

$$F(r) = \mathbb{P}(\Phi(b(o, r)) > 0) = \mathbb{P}(D_o \leq r), \quad r > 0.$$

Oproti tomu *distribuční funkci vzdálenosti nejbližšího souseda (nearest-neighbour distance distribution function)* definujeme jako

$$G(r) = P_o^!(\{\nu \in \mathcal{N} : \nu(b(o, r)) > 0\}), \quad r > 0.$$

Dále ještě zavedeme *J-funkci (J-function)*:

$$J(r) = \frac{1 - G(r)}{1 - F(r)}, \quad r > 0 : F(r) < 1.$$

Poznámka 35. Zobecnění funkcí F a G lze obdržet tak, že se v jejich definici místo koulí $b(o, r)$ uvažuje rB , kde B je nějaká konvexní a kompaktní množina obsahující o .

U funkce G podobně jako u indexu agregace nás zajímá vzdálenost od typického bodu procesu k nejbližšímu bodu procesu (tzv. sousedu), zatímco u funkce F i Pielouvé indexu náhodnosti se díváme na vzdálenost od daného bodu v prostoru k nejbližšímu bodu procesu.

Věta 47. V případě homogenního Poissonova procesu s intenzitou λ platí $PI = CE = 1$, $F(r) = G(r) = 1 - e^{-\lambda\omega_d r^d}$ a $J(r) = 1$.

Důkaz: Přenechán na cvičení. □

Poznámka 36. Odchylky charakteristik od teoretických hodnot pro Poissonův proces indikují buď shlukování bodů nebo tendence k regularitě. Pro shlukování svědčí hodnoty Pielouvé indexu náhodnosti větší než 1, hodnoty indexu agregace menší než 1 a hodnoty funkce J menší než 1, zatímco pro regularitu je tomu naopak.

Doposud zavedené charakteristiky byly definovány pomocí vzdáleností k nejbližšímu bodu procesu, a tudíž jsou poněkud „krátkozraké“, neboť vzdálenosti mezi více vzdálenými body se již neberou v úvahu. Na druhou stranu často se podstatné prostorové korelace v datech objevují především mezi body, které jsou blízko u sebe. Jiná třída charakteristik je založena na momentové míře druhého řádu. Tu můžeme definovat obecněji pro náhodné míry.

Definice 57. Nechť Ψ je stacionární náhodná míra s intenzitou $0 < \lambda < \infty$. *Redukovaná momentová míra druhého řádu (reduced second-order moment measure)* \mathcal{K} je definována pomocí vztahu

$$\lambda\mathcal{K}(B) = \int_{\mathcal{M}} \mu(B \setminus \{o\}) P_o(d\mu), \quad B \in \mathcal{B}^d.$$

Dále definujeme *redukovanou momentovou funkci druhého řádu (reduced second-order moment function)* nebo zkráceně *K-funkci (K-function)* jako

$$K(r) = \mathcal{K}(b(o, r)), \quad r \geq 0.$$

Poznámka 37. Speciálně, je-li Φ stacionární bodový proces, pak $\lambda\mathcal{K}(B) = \mathbb{E}_o^! \Phi(B)$, $B \in \mathcal{B}^d$. Můžeme tedy $\lambda K(r)$ interpretovat jako střední počet bodů procesu různých od počátku v kruhu o poloměru r se středem v počátku za podmínky, že v počátku je bod procesu.

Lemma 48. Pro stacionární náhodnou míru Ψ s intenzitou $0 < \lambda < \infty$ platí

$$\alpha^{(2)}(A \times B) = \lambda^2 \int_A \mathcal{K}(B - x) dx, \quad A, B \in \mathcal{B}^d.$$

Důkaz: Pravou stranu dokazované rovnosti upravíme postupně podle definice 57, lemmatu 43, vztahu mezi P_x a P_o z věty 45, věty 38 a definice 43:

$$\begin{aligned}\lambda^2 \int_A \mathcal{K}(B-x) dx &= \int_A \int_{\mathcal{M}} \mu((B-x) \setminus \{o\}) P_o(d\mu) \Lambda(dx) \\ &= \int_A \int_{\mathcal{M}} (t_{-x}\mu)((B-x) \setminus \{o\}) P_x(d\mu) \Lambda(dx) = \int_{\mathcal{M}} \int_A \mu(B \setminus \{x\}) \mu(dx) Q(d\mu) \\ &= \mathbb{E} \int_A \Psi(B \setminus \{x\}) \Psi(dx) = \alpha^{(2)}(A \times B).\end{aligned}$$

□

Důsledek 49. Pro stacionární Poissonův bodový proces je $\mathcal{K}(B) = |B|$ pro každé $B \in \mathcal{B}^d$ a $K(r) = \omega_d r^d$ pro $r \geq 0$.

Důkaz: Z definice redukované momentové míry druhého řádu a věty 42 dostaneme $\lambda \mathcal{K}(B) = \mathbb{E} \Phi(B) = \lambda |B|$. Odtud již plyne, že $\mathcal{K}(B) = |B|$ a speciálně $K(r) = \omega_d r^d$.

□

Definice 58. Někdy se místo K -funkce používá její transformace

$$L(r) = \left(\frac{K(r)}{\omega_d} \right)^{1/d}, \quad r \geq 0,$$

kteřou nazýváme L -funkce (L -funkce). Jedním z důvodů oblíbenosti L -funkce je, že pro Poissonův proces je (podle důsledku 49) rovna identitě ($L(r) = r$), což umožňuje snazší grafické srovnání.

Definice 59. Uvažujme bodový proces Φ , který nemusí být nutně stacionární. Za předpokladu, že existuje funkce intenzity λ a existuje součinná hustota druhého řádu $\lambda^{(2)}$, definujeme párovou korelační funkci (*pair correlation function*) předpisem

$$g(x, y) = \frac{\lambda^{(2)}(x, y)}{\lambda(x)\lambda(y)}, \quad x, y \in \mathbb{R}^d : \lambda(x) > 0, \lambda(y) > 0.$$

Je-li Φ stacionární, víme podle (16), že $\lambda^{(2)}(x, y) = \lambda^{(2)}(x-y, o) = \lambda^{(2)}(x-y)$ a $g(x, y) = \frac{\lambda^{(2)}(x-y)}{\lambda^2} = g(x-y)$ jsou funkcemi rozdílu $x-y$. Je-li Φ navíc izotropní, jsou $\lambda^{(2)}(x, y) = \lambda^{(2)}(\|x-y\|)$ a $g(x, y) = g(\|x-y\|)$ funkcemi vzdálenosti x a y . Poznamenejme, že na tomto místě i jinde poněkud zneužíváme značení a používáme pro funkce rozdílu $x-y$ nebo velikosti rozdílu $\|x-y\|$ stejné označení jako pro funkci dvojice (x, y) .

Poznámka 38. Párová korelační funkce může nabývat hodnot v intervalu $[0, \infty)$. Označení „korelační funkce“ je proto poněkud zavádějící.

Důsledek 50. Necht Φ je Poissonův bodový proces, pro který existuje funkce intenzity. Potom $g(x, y) = 1$.

Důkaz: Z věty 33 víme, že $\lambda^{(2)}(x, y) = \lambda(x)\lambda(y)$, a proto platí $g(x, y) = 1$.

□

Poznámka 39. Párová korelační funkce představuje užitečný nástroj pro grafické znázornění odchylek od Poissonova procesu. Pokud $g(x, y) > 1$, tak současný výskyt bodů x a y je pravděpodobnější než u Poissonova procesu se stejnou funkcí intenzity. Pro stacionární a izotropní procesy hodnoty párové korelační funkce $g(r)$ větší než 1 odpovídají tomu, že vzdálenosti r mezi body jsou typičtější než u modelu úplné prostorové náhodnosti. Tedy $g(r) > 1$ indikuje shlukování ve vzdálenostech r , zatímco $g(r) < 1$ znamená regularitu v příslušných vzdálenostech r .

Důsledek 51. Necht Ψ je stacionární náhodná míra a $A \in \mathcal{B}_0^d$ je libovolná omezená množina s kladnou Lebesgueovou mírou $|A| > 0$. Pak

$$\mathcal{K}(B) = \frac{1}{\lambda^2 |A|} \mathbb{E} \int_A \Psi((B+x) \setminus \{x\}) \Psi(dx), \quad B \in \mathcal{B}^d.$$

Důkaz: Podobně jako v důkazu lemmatu 48 dostaneme

$$\begin{aligned}\lambda^2 \int_A \mathcal{K}(B) dx &= \int_A \int_{\mathcal{M}} \mu(B \setminus \{o\}) P_o(d\mu) \Lambda(dx) \\ &= \int_A \int_{\mathcal{M}} \mu((B+x) \setminus \{x\}) P_x(d\mu) \Lambda(dx) \\ &= \mathbb{E} \int_A \Psi((B+x) \setminus \{x\}) \Psi(dx).\end{aligned}$$

□

Věta 52. *Je-li Φ stacionární jednoduchý bodový proces s párovou korelační funkcí g , potom \mathcal{K} je absolutně spojitá vzhledem k Lebesgueově míře a platí*

$$\mathcal{K}(B) = \int_B g(u) du, \quad B \in \mathcal{B}^d.$$

Důkaz: Podle důsledku 51 je

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(B) &= \frac{1}{\lambda^2 |A|} \mathbb{E} \sum_{X \in \text{supp } \Phi \cap A} \Phi((B+X) \setminus \{X\}) = \frac{1}{\lambda^2 |A|} \mathbb{E} \sum_{X \in \text{supp } \Phi} \sum_{Y \in \text{supp } \Phi} \mathbf{1}_{[X \in A]} \mathbf{1}_{[Y \in (B+X) \setminus \{X\}]} \\ &= \frac{1}{\lambda^2 |A|} \mathbb{E} \sum_{X, Y \in \text{supp } \Phi}^{\neq} \mathbf{1}_{[X \in A, Y-X \in B]} = \frac{1}{\lambda^2 |A|} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{[x \in A, y-x \in B]} \alpha^{(2)}(dx, dy) \\ &= \frac{1}{\lambda^2 |A|} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{[x \in A, y-x \in B]} \lambda^{(2)}(x, y) dx dy = \frac{1}{|A|} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{[x \in A, y-x \in B]} g(y-x) dx dy \\ &= \frac{1}{|A|} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{[x \in A, u \in B]} g(u) dx du = \int_B g(u) du, \quad B \in \mathcal{B}^d.\end{aligned}$$

Využili jsme Campbellovu větu (věta 34, definici 54 a definici 59).

□

Důsledek 53. *Nechť Φ je stacionární jednoduchý bodový proces s párovou korelační funkcí, která je invariantní vůči rotacím, tj. $g(x, y) = g(y-x) = g(\|y-x\|)$. Potom*

$$g(r) = \frac{K'(r)}{\sigma_d r^{d-1}},$$

kde $K'(r)$ je derivace K -funkce a $\sigma_d = d\omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$ je povrch jednotkové sféry \mathbb{S}^{d-1} v \mathbb{R}^d .

Důkaz: Podle věty 52 máme

$$K(r) = \int_{b(o,r)} g(u) du.$$

Pomocí polární dekompozice Lebesgueovy míry (sférické souřadnice) tak získáme

$$K(r) = \int_{b(o,r)} g(\|u\|) du = \int_0^r \sigma_d s^{d-1} g(s) ds.$$

□

4.3 Modely bodových procesů

Shlukové procesy

Definice 60. Mějme dány (na jednom pravděpodobnostním prostoru) bodový proces Φ_p (tzv. *rodičovský proces (parent process)*) a kolekci konečných bodových procesů $\{\zeta_x : x \in \mathbb{R}^d\}$. Potom

$$\Phi(\cdot) = \int_{\mathbb{R}^d} \zeta_x(\cdot) \Phi_p(dx)$$

se nazývá *shlukový bodový proces (cluster point process)*. Pro $X \in \text{supp } \Phi_p$ se ζ_X označuje jako *dceřinný proces (daughter process)* příslušný rodičovskému bodu X .

Definice 61. Shlukový bodový proces Φ takový, že $\{\zeta_x : x \in \mathbb{R}^d\}$ jsou navzájem nezávislé a nezávislé na Φ_p , se označuje jako *proces s nezávislými shluky*. Je-li navíc Φ_p Poissonův bodový proces, mluvíme o *Poissonově shlukovém bodovém procesu*.

Následující věta ukazuje, že některé Poissonovy shlukové bodové procesy jsou zároveň Coxovými bodovými procesy.

Věta 54. Necht Φ je Poissonův shlukový bodový proces takový, že Φ_p má difúzní míru intenzity Λ_p a ζ_x jsou konečné Poissonovy bodové procesy s difúzní mírou intenzity Λ_x . Předpokládejme, že náhodná míra $\Lambda(B) = \int_{\mathbb{R}^d} \Lambda_X(B) \Phi_p(dx) < \infty$ s.j. pro každé $B \in \mathcal{B}_0^d$. Potom Φ má stejné rozdělení jako Coxův bodový proces s řídicí mírou Λ .

Důkaz: Pro $B \in \mathcal{B}_0^d$ je

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Phi(B) = 0) &= \mathbb{E}[\mathbb{P}(\Phi(B) = 0 \mid \Phi_p)] = \mathbb{E}[\mathbb{P}(\bigcap_{X \in \text{supp } \Phi_p} [\zeta_X(B) = 0] \mid \Phi_p)] \\ &= \mathbb{E}[\prod_{X \in \text{supp } \Phi_p} \mathbb{P}(\zeta_X(B) = 0 \mid \Phi_p)] = \mathbb{E}[\prod_{X \in \text{supp } \Phi_p} e^{-\Lambda_X(B)}] \\ &= \mathbb{E} \exp\left\{-\sum_{X \in \text{supp } \Phi_p} \Lambda_X(B)\right\} = \mathbb{E} e^{-\Lambda(B)}, \end{aligned}$$

což jsou prázdne pravděpodobnosti Coxova procesu a tvrzení tak plyne z důsledku 28. □

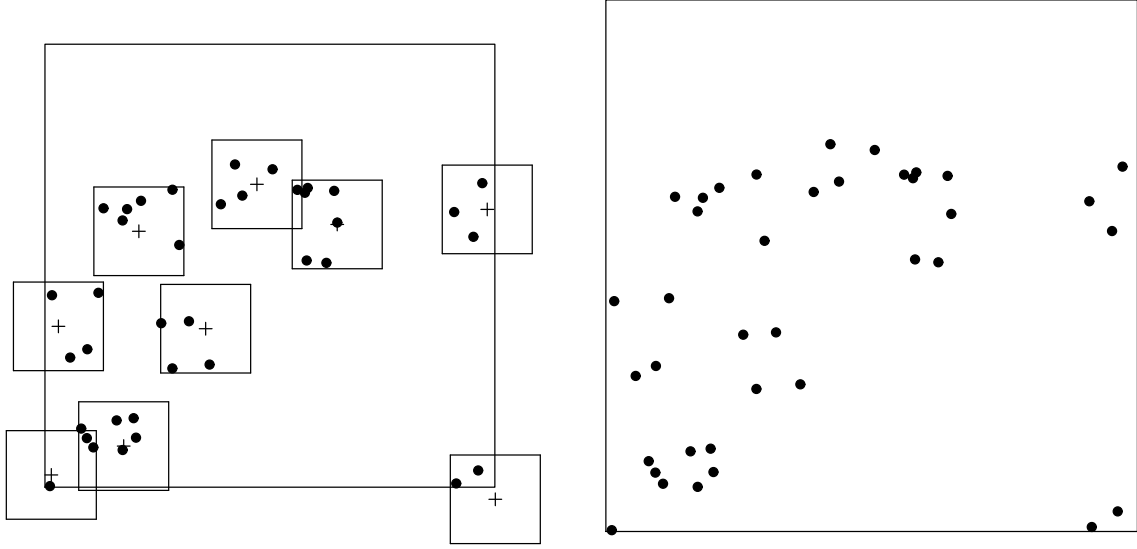
V následující definici zavedeme důležitou třídu Poissonových shlukových bodových procesů.

Definice 62. Mějme pevně danu pravděpodobnostní hustotu p na \mathbb{R}^d . Necht Φ je Poissonův shlukový bodový proces takový, že

- $\zeta_x(\mathbb{R}^d)$, $x \in \mathbb{R}^d$, jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny,
- ζ_x je smíšený binomický bodový proces tvořený nezávislými stejně rozdělenými náhodnými vektory s hustotou $p(\cdot - x)$, tj. body centrovaných procesů $t_{-x}\zeta_x$ jsou nezávislé stejně rozdělené s hustotou p .

Pak Φ se nazývá *Neymanův-Scottův proces (Neyman-Scott process)*. Pokud navíc $\zeta_x(\mathbb{R}^d)$ mají Poissonovo rozdělení s intenzitou λ_c , jde o *Neymanův-Scottův Poissonův proces (Neyman-Scott Poisson process)*. V tom případě je ζ_x Poissonův proces s funkcí intenzity $\lambda_c p(\cdot - x)$. Důkaz tohoto faktu se ověří na cvičení.

Na obrázku 12 je vlevo vysvětlen vznik Neymanova-Scottové bodového procesu. Rodičovský proces Φ_p je stacionární Poissonův bodový proces (body jsou znázorněny křížky), počty bodů dceřinných procesů jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s binomickým rozdělením se střední hodnotou $\mathbb{E}\zeta_x(\mathbb{R}^d) = 5$ a body každého dceřinného procesu jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory s rovnoměrným rozdělením ve čtverci se středem v bodě rodičovského procesu a délkou strany 0,2, tj. hustota p má tvar $p(x) = 1/0,2^2$ pro $x \in [-0,1; 0,1]^2$. Vzhledem k tomu, že se nosiče hustot pro jednotlivé shluky (dceřinné procesy) protínají, nelze z výsledné realizace shlukového procesu rozlišit, který bod náleží kterému dceřinnému procesu. Rovněž si můžeme povšimnout, že dceřinné body v okně pozorování mohou pocházet od rodičovských bodů, které leží mimo okno. Výsledná realizace Neymanova-Scottové procesu je vykreslena na obrázku 12 vpravo. V té už nevystupují body rodičovského procesu.



Obrázek 12. Realizace Neymanova-Scottové bodového procesu ve čtvercovém okně jednotkového obsahu. Intenzita rodičovského bodového procesu je 10 (body znázorněny na levém obrázku křížky), počty bodů dceřinných procesů mají binomické rozdělení s parametry 10 a 1/2 a body dceřinných procesů (znázorněny puntíky) jsou rovnoměrně rozděleny ve čtverci o straně délky 0,2 (vyznačen na levém obrázku). Na pravém obrázku je samotná realizace procesu (pouze body dceřinných procesů).

Věta 55. *Mějme Neymanův-Scottové Poissonův proces Φ takový, že Φ_p je stacionární Poissonův bodový proces s intenzitou λ_p , pak Φ je stacionární proces s intenzitou $\lambda = \lambda_p \lambda_c$ a párovou korelační funkcí*

$$g(x) = 1 + \frac{h(x)}{\lambda_p},$$

kde $h(x) = \int p(y)p(y-x) dy$ je hustota $X_1 - X_2$, kde X_1 a X_2 jsou dva dceřinné body. Pokud je rozdělení dcer radiálně symetrické (tj. $p(x) = p(\|x\|) = p(r)$), tak Φ je izotropní a $g(x) = g(\|x\|) = g(r)$.

Důkaz: Stacionarita plyne ze stacionarity Φ_p a toho, že centrované dceřinné procesy $t_{-x}\zeta_x$ jsou nezávislé a stejně rozdělené. Podle věty 54 je Φ Coxův proces s řídicí mírou $\Lambda(B) = \sum_{X \in \text{supp } \Phi_p} \Lambda_X(B)$, kde míra Λ_x má hustotu $\lambda_c p(\cdot - x)$ vzhledem k Lebesgueově míře. Míra intenzity bodového procesu Φ je podle věty 34 rovna

$$\mathbb{E} \Lambda(B) = \mathbb{E} \sum_{X \in \text{supp } \Phi_p} \Lambda_X(B) = \lambda_p \int_{\mathbb{R}^d} \Lambda_x(B) dx = \lambda_p \int_{\mathbb{R}^d} \int_B \lambda_c p(y-x) dy dx = \lambda_p \lambda_c |B| = \lambda |B|.$$

Podobně užitím Campbellovy věty druhého řádu (věta 34) a věty 33 dostaneme pro faktoriální momentovou míru druhého řádu bodového procesu Φ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \Lambda(B_1) \Lambda(B_2) &= \mathbb{E} \sum_{X, Y \in \text{supp } \Phi_p} \Lambda_X(B_1) \Lambda_Y(B_2) = \mathbb{E} \sum_{X, Y \in \text{supp } \Phi_p}^{\neq} \Lambda_X(B_1) \Lambda_Y(B_2) + \mathbb{E} \sum_{X \in \text{supp } \Phi_p} \Lambda_X(B_1) \Lambda_X(B_2) \\ &= \lambda_p^2 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \Lambda_x(B_1) \Lambda_y(B_2) dy dx + \lambda_p \int_{\mathbb{R}^d} \Lambda_x(B_1) \Lambda_x(B_2) dx \\ &= \lambda_p^2 \lambda_c^2 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{B_1} \int_{B_2} p(u-x) p(v-y) dv du dy dx \\ &\quad + \lambda_p \lambda_c^2 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{B_1} \int_{B_2} p(u-x) p(v-x) dv du dx \\ &= \lambda^2 \cdot |B_1| \cdot |B_2| + \lambda \lambda_c \int_{B_1} \int_{B_2} \int_{\mathbb{R}^d} p(u-x) p(v-x) dx dv du. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že součinná hustota druhého řádu je

$$\lambda^{(2)}(u, v) = \lambda^2 + \lambda\lambda_c \int_{\mathbb{R}^d} p(u-x)p(v-x) dx,$$

a proto párová korelační funkce má tvar

$$g(u, v) = 1 + \frac{1}{\lambda_p} \int_{\mathbb{R}^d} p(u-x)p(v-x) dx.$$

Provedeme-li substituci $y = u - x$, zjistíme, že

$$g(u, v) = 1 + \frac{1}{\lambda_p} \int_{\mathbb{R}^d} p(y)p(v-u+y) dy$$

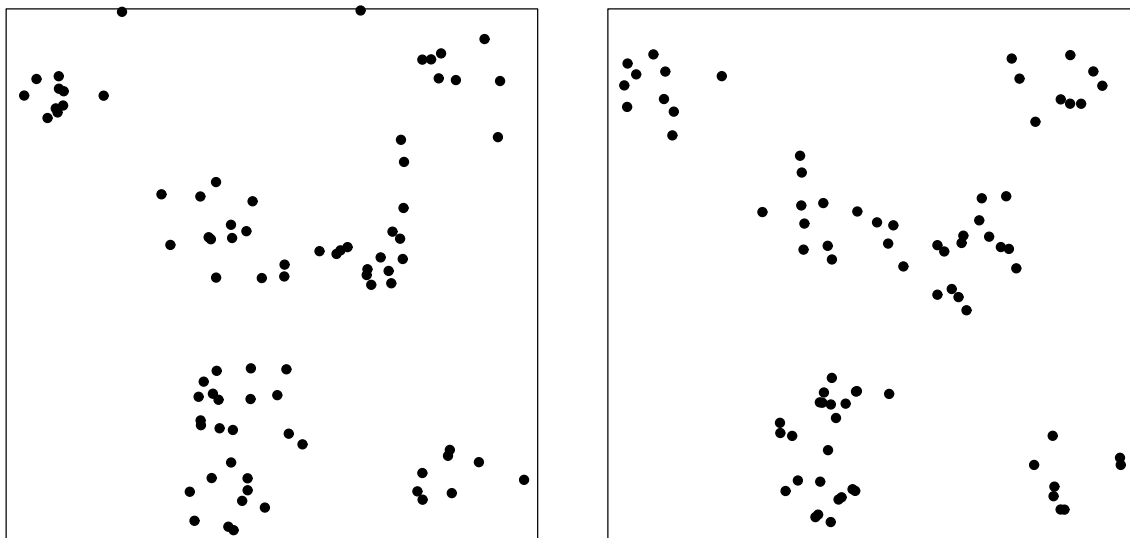
je funkcí $u - v$: $g(u, v) = g(u - v, 0) = g(u - v)$.

□

Všimněme si, že pro Neymanovy-Scottové Poissonovy procesy je párová korelační funkce vždy ale-
spoň 1. Nejznámějšími příklady těchto procesů s radiálně symetrickým rozdělením bodů shluků jsou:

- Thomasové procesy (Thomas process)*: p je hustota d -rozměrného normálního rozdělení $N_d(0, \sigma^2 I)$ s nulovou střední hodnotou a varianční maticí, která je násobkem jednotkové matice,
- Matérnův shlukový proces (Matérn cluster process)*: p je hustota rovnoměrného rozdělení na kouli $b(o, R)$.

Příklady konkrétních realizací těchto modelů naleznete na obrázku 13.



Obrázek 13. Realizace Thomasové procesu (vlevo) a Matérnůva shlukového procesu (vpravo) ve čtvercovém okně jednotkového obsahu. Rodičovský bodový proces je v obou případech stejný a jeho intenzita je 10. Počty bodů ve shluku mají Poissonovo rozdělení se střední hodnotou 5 a jsou v obou případech pro každý bod rodičovského procesu stejné. Liší se pouze rozdělení bodů v jednotlivých dceřinných procesech. U Thomasové procesu jde o normální rozdělení se směrodatnou odchylkou $\sigma = 0,05$, zatímco u Matérnůva shlukového procesu jsou body shluku rovnoměrně rozděleny na kouli o poloměru $R = 0,1$.

Zředěné procesy

Jednou z nejjednodušších operací s bodovými procesy je *zředění (thinning)*, kdy z daného bodového procesu vypustíme některé jeho body. Uvažujme případ tzv. *nezávislého zředění (independent thinning)*, kdy odebrání určitého bodu procesu nezávisí na ostatních bodech procesu.

Definice 63. Necht $p : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ je měřitelná funkce. Shlukový bodový proces s nezávislými shluky takovými, že

$$\zeta_x = \begin{cases} \delta_x & \text{s pravděpodobností } p(x), \\ 0 & \text{s pravděpodobností } 1 - p(x), \end{cases}$$

nazýváme *nezávisle zředěný bodový proces*.

Poznámka 40. Když $\{U(x) : x \in \mathbb{R}^d\}$ jsou nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na $(0, 1)$ a nezávislé na jednoduchém bodovém procesu Φ_p . Pak $\Phi = \sum_{X \in \text{supp } \Phi_p: U(X) < p(X)} \delta_X$ je bodový proces vzniklý nezávislým zředěním procesu Φ_p .

Věta 56. Nezávislým zředěním bodového procesu Φ_p s mírou intenzity Λ_p obdržíme bodový proces Φ s mírou intenzity

$$\Lambda(B) = \int_B p(x) \Lambda_p(dx), \quad B \in \mathcal{B}^d.$$

Důkaz: Platí

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Phi(B) &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Phi(B) \mid \Phi_p]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\int_{\mathbb{R}^d} \zeta_x(B) \Phi_p(dx) \mid \Phi_p]] \\ &= \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\zeta_x(B) \Phi_p(dx) = \mathbb{E} \int_B p(x) \Phi_p(dx) = \int_B p(x) \Lambda_p(dx). \end{aligned}$$

Využili jsme nezávislost $\{\zeta_x\}$ a Φ_p a Campbellovu větu (věta 34). □

Z Poissonova bodového procesu vznikne nezávislým ztenčením opět Poissonův bodový proces.

Věta 57. Pro Poissonův bodový proces Φ_p s difúzní mírou intenzity $\Lambda_p \in \mathcal{M}$ je příslušný nezávisle zředěný bodový proces Φ Poissonův bodový proces s mírou intenzity

$$\Lambda(B) = \int_B p(x) \Lambda_p(dx), \quad B \in \mathcal{B}^d.$$

Důkaz: Spočteme prázdné pravděpodobnosti zředěného procesu Φ a ukážeme, že se rovnají prázdným pravděpodobnostem Poissonova bodového procesu s mírou intenzity Λ . Důkaz tím bude hotov díky důsledku 28. Pro $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ je

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Phi(K) = 0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\Phi_p(K) = n) \mathbb{P}(\Phi(K) = 0 \mid \Phi_p(K) = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda_p(K)^n}{n!} e^{-\Lambda_p(K)} \prod_{X \in \text{supp } \Phi_p \cap K} \mathbb{P}(U(X) \geq p(X) \mid \Phi_p(K) = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda_p(K)^n}{n!} e^{-\Lambda_p(K)} \left[\int_0^1 \int_K \mathbf{1}_{[u \geq p(x)]} \frac{\Lambda_p(dx)}{\Lambda_p(K)} du \right]^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\Lambda_p(K)}}{n!} \left[\int_K (1 - p(x)) \Lambda_p(dx) \right]^n \\ &= e^{-\Lambda_p(K)} \exp \left\{ \int_K (1 - p(x)) \Lambda_p(dx) \right\} = e^{-\int_K p(x) \Lambda_p(dx)}. \end{aligned}$$

K vyjádření podmíněné pravděpodobnosti v prvním řádku jsme použili větu 30, která říká, že podmíněně při $\Phi_p(B) = n$ jsou body procesu nezávislé a rozdělené podle pravděpodobnostní míry $\Lambda_p|_B/\Lambda_p(B)$. □

Procesy s pevným jádrem

Celá řada modelů vzniká zředěním daného bodového procesu. V definici 63 bylo uvažováno nezávislé zředění.

U procesů s pevným jádrem nejsou žádné dva body procesu od sebe blíže než o danou vzdálenost $r > 0$. Jedna z možností, jak takový proces zkonstruovat, je pomocí tzv. *závislého zředění*. To využijeme v definici následujících dvou procesů s pevným jádrem.

Definice 64. Mějme dáno $r > 0$ a buď Φ stacionární Poissonův bodový proces s intenzitou λ . Bodový proces

$$\Phi_I(\cdot) = \int_{\mathbb{R}^d} \delta_x(\cdot) \mathbf{1}_{[\Phi(b(x,r) \setminus \{x\})=0]} \Phi(dx)$$

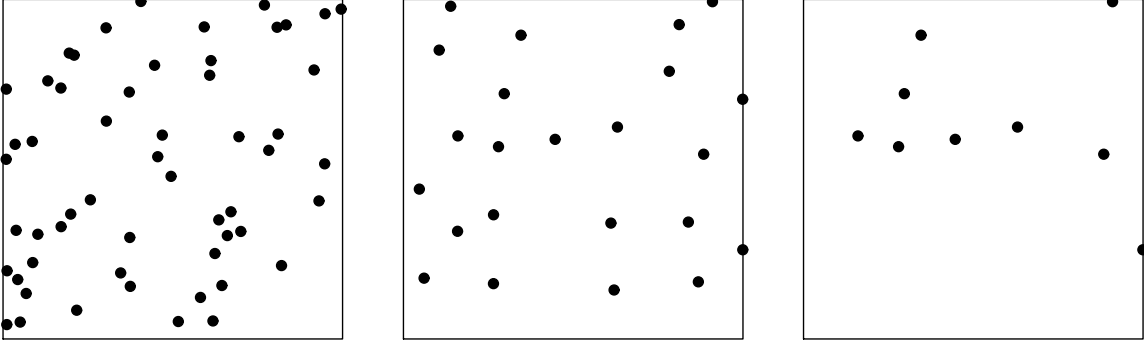
se nazývá *Matérnův proces s pevným jádrem typu I (Matérn hard-core process I)*. Nechť Φ_m je stacionární Poissonův bodový proces na $\mathbb{R}^d \times [0, 1]$ s mírou intenzity $\Lambda(B \times I) = \lambda \cdot |B| \cdot |I|$, $B \in \mathcal{B}^d$, $I \in \mathcal{B}([0, 1])$. Bodový proces

$$\Phi_{II}(\cdot) = \int_{\mathbb{R}^d \times [0,1]} \delta_x(\cdot) \mathbf{1}_{[\Phi_m((b(x,r) \setminus \{x\}) \times [0,u])=0]} \Phi_m(d(x,u))$$

se nazývá *Matérnův proces s pevným jádrem typu II (Matérn hard-core process II)*.

U modelu prvního typu vymažeme každý bod procesu Φ , pro který existuje jiný bod procesu ve vzdálenosti nanejvýš r . Oproti tomu u druhého typu je každému bodu $X \in \Phi$ přiřazena váha $U(X) \in [0, 1]$ a vymažeme ty body, pro které existuje ve vzdálenosti nanejvýš r jiný bod procesu s menší vahou. Ekvivalentně si můžeme představit, že pro každou dvojici různých bodů $X, Y \in \Phi$, které splňují $0 < \|X - Y\| \leq r$, vymažeme oba body (u procesu typu I) nebo jen bod s větší vahou (u procesu typu II).

Na obrázku 14 je zobrazen stacionární Poissonův bodový proces, jehož zředěním se dostanou Matérnovy procesy s pevným jádrem typu I a II. V případě procesu typu I se díky přísnější podmínce na zředování získá menší počet bodů než u typu II.



Obrázek 14. Vlevo je znázorněna realizace stacionárního Poissonova bodového procesu s intenzitou 50 v rovinném okně jednotkového obsahu. Z této konfigurace bodů je odvozena realizace Matérnova procesu s pevným jádrem typu II (uprostřed) a typu I (vpravo), pevné jádro je zvoleno jako $r = 0,1$.

Věta 58. Bodové procesy Φ_I a Φ_{II} z definice 64 jsou stacionární a jejich intenzity jsou

$$\lambda_I = \lambda e^{-\lambda \omega_d r^d} \quad \text{a} \quad \lambda_{II} = \frac{1 - e^{-\lambda \omega_d r^d}}{\omega_d r^d}.$$

Důkaz: Stacionarita plyne z konstrukce procesů. Intenzitu určíme tak, že spočteme střední počet bodů procesu v množině $B \in \mathcal{B}_0^d$.

Nejprve uvažujme typ I. Z Campbellovy-Meckeho věty a Slivnyakovy věty dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Phi_I(B) &= \mathbb{E} \int_B \mathbf{1}_{[\Phi(b(x,r) \setminus \{x\})=0]} \Phi(dx) = \lambda \int_B \int_{\mathcal{N}} \mathbf{1}_{[\nu(b(x,r))=0]} P_x^!(d\nu) dx \\ &= \lambda \int_B \mathbb{P}(\Phi(b(x,r)) = 0) dx = \lambda e^{-\lambda \omega_d r^d} |B|. \end{aligned}$$

Pro typ II opět použitím Campbellovy-Meckeho věty a Slivnyakovy věty získáme

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Phi_{II}(B) &= \mathbb{E} \int_{B \times [0,1]} \mathbf{1}_{[\Phi_m((b(x,r) \setminus \{x\}) \times [0,u])=0]} \Phi_m(d(x,u)) = \lambda \int_B \int_0^1 \mathbb{P}(\Phi_m(b(x,r) \times [0,u]) = 0) du dx \\ &= \lambda |B| \int_0^1 e^{-\lambda u \omega_d r^d} du = \lambda |B| \frac{1 - e^{-\lambda \omega_d r^d}}{\lambda \omega_d r^d}, \end{aligned}$$

což vede k požadovanému vztahu $\mathbb{E}\Phi_{II}(B) = \lambda_{II}|B|$.

□

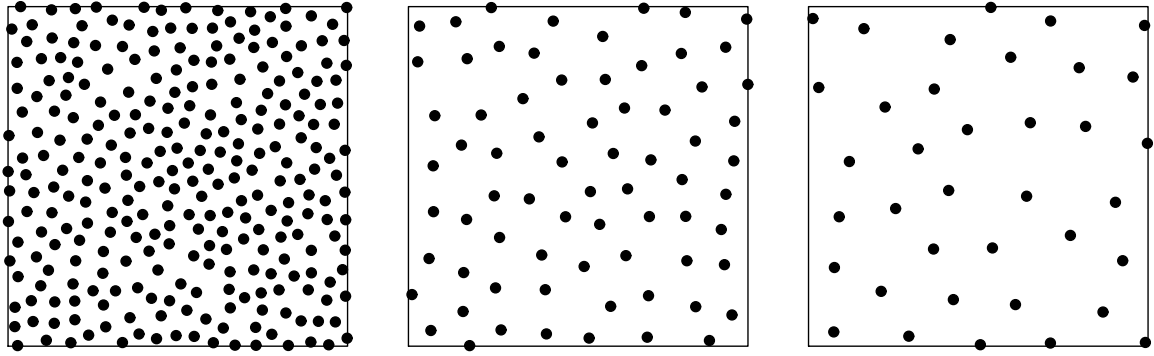
Jiná možnost, jak konstruovat procesy s pevným jádrem, je založena na sekvenčním postupu.

Definice 65. Je dáno $r > 0$ a $B \in \mathcal{B}_0^d$. Model náhodné sekvenční adsorpce (random sequential adsorption) v množině B se konstruuje následovně:

- (i) zvolme $X_1 \in B$ rovnoměrně náhodně,
- (ii) je-li $k - 1$ bodů zvoleno, zvolme X_k rovnoměrně náhodně v $B \setminus \cup_{i=1}^{k-1} b(X_i, r)$,
- (iii) konstrukce končí v n krocích, jestliže $B \subseteq \cup_{i=1}^n b(X_i, r)$.

Výsledný bodový proces je $\Phi = \sum_{i=1}^n \delta_{X_i}$.

Poznámka 41. Množiny $B \setminus \cup_{i=1}^{k-1} b(X_i, r)$ mohou mít komplikovaný geometrický tvar, proto se v praxi často používá zamítací metoda. Bod X_k se generuje rovnoměrně náhodně v množině B a pokud je blíž než některý z již zvolených bodů, zamítne se a generuje se nové X_k . Tato procedura se opakuje, dokud X_k nepadne do $B \setminus \cup_{i=1}^{k-1} b(X_i, r)$. Algoritmus se zastaví, pokud došlo k předem stanovenému počtu zamítnutých iterací po sobě. Také se dá algoritmus zastavit, pokud je již v okně umístěn předem daný počet bodů. Tři nasimulované realizace procesu náhodné sekvenční adsorpce pro různé volby r jsou na obrázku 15.



Obrázek 15. Tři realizace modelu náhodné sekvenční adsorpce v jednotkovém čtverci pro $r = 0,05$ (vlevo), $r = 0,1$ (uprostřed) a $r = 0,15$ (vpravo).

Definice 65 dává příklad konečného bodového procesu. V další podkapitole se budeme zabývat konečnými bodovými procesy s hustotou vzhledem k rozdělení Poissonova procesu.

4.4 Konečné bodové procesy s hustotou

V této podkapitole budeme pracovat s konečnými bodovými procesy na \mathbb{R}^d . Systém konečných bodových měř označme

$$\mathcal{N}_f = \{\nu \in \mathcal{N} : \nu(\mathbb{R}^d) < \infty\}.$$

Pokud navíc uvažujeme jednoduché míry, přidáme hvězdičku: $\mathcal{N}_f^* = \mathcal{N}_f \cap \mathcal{N}^*$.

Mějme Poissonův bodový proces Φ_P s konečnou difúzní mírou intenzity Λ . Rozdělení konečného Poissonova bodového procesu lze vyjádřit následovně ($\mathcal{U} \in \mathfrak{N}$):

$$\begin{aligned} \Pi(\mathcal{U}) &= \mathbb{P}(\Phi_P \in \mathcal{U}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\Phi_P(\mathbb{R}^d) = n) \mathbb{P}(\Phi_P \in \mathcal{U} \mid \Phi_P(\mathbb{R}^d) = n) \\ &= e^{-\Lambda(\mathbb{R}^d)} \left[\mathbf{1}_{[\emptyset \in \mathcal{U}]} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(\mathbb{R}^d)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{[\sum_{i=1}^n \delta_{x_i} \in \mathcal{U}]} \frac{\Lambda(dx_1)}{\Lambda(\mathbb{R}^d)} \cdots \frac{\Lambda(dx_n)}{\Lambda(\mathbb{R}^d)} \right] \\ &= e^{-\Lambda(\mathbb{R}^d)} \left[\mathbf{1}_{[\emptyset \in \mathcal{U}]} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{[\sum_{i=1}^n \delta_{x_i} \in \mathcal{U}]} \Lambda(dx_1) \cdots \Lambda(dx_n) \right], \end{aligned} \quad (17)$$

kde \emptyset značí nulovou míru, tj. $\emptyset(B) = 0$ pro každé $B \in \mathcal{B}^d$. Budeme vyšetřovat bodové procesy, jejichž rozdělení je absolutně spojitě vzhledem k Π .

Definice 66. Necht Π je rozdělení konečného jednoduchého Poissonova bodového procesu. Pokud $p : \mathcal{N}_f \rightarrow \mathbb{R}^+$ je měřitelná funkce taková, že $\int_{\mathcal{N}_f} p(\nu) \Pi(d\nu) = 1$, řekneme, že Φ je *bodový proces s hustotou* p vzhledem k rozdělení Π , jestliže platí

$$\mathbb{P}(\Phi \in \mathcal{U}) = \int_{\mathcal{U}} p(\nu) \Pi(d\nu) = \mathbb{E} \mathbf{1}_{[\Phi_P \in \mathcal{U}]} p(\Phi_P), \quad \mathcal{U} \in \mathfrak{N}.$$

Díky (17) lze rozdělení bodového procesu Φ také přepsat jako

$$\mathbb{P}(\Phi \in \mathcal{U}) = e^{-\Lambda(\mathbb{R}^d)} \left[\mathbf{1}_{[\emptyset \in \mathcal{U}]} p(\emptyset) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{[\sum_{i=1}^n \delta_{x_i} \in \mathcal{U}]} p\left(\sum_{i=1}^n \delta_{x_i}\right) \Lambda(dx_1) \cdots \Lambda(dx_n) \right].$$

Bodový proces Φ s hustotou p je konečný (díky podmínce $\Lambda(\mathbb{R}^d) < \infty$) a jednoduchý (díky tomu, že Λ je neatomická). Často se uvažuje případ, kdy Λ je restrikce Lebesgueovy míry na omezené množině $B \in \mathcal{B}_0^d$, hustota p je potom vzhledem k rozdělení standardního Poissonova procesu na B . Povšimněme si, že pro libovolnou Π -integrovatelnou funkci h na \mathcal{N}_f^* platí $\mathbb{E}h(\Phi) = \mathbb{E}h(\Phi_P)p(\Phi_P)$.

Příklad: Uvažujme hustotu p tvaru

$$p\left(\sum_{i=1}^n \delta_{x_i}\right) = \alpha \prod_{i=1}^n \beta(x_i),$$

kde $\alpha > 0$ a $\beta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$ je měřitelná funkce taková, že $\int_{\mathbb{R}^d} \beta(x) \Lambda(dx) < \infty$. Prázdným součinem ($n = 0$) rozumíme jedničku, tj. $p(\emptyset) = \alpha$. Definujme konečnou míru

$$\Lambda_\beta(B) = \int_B \beta(x) \Lambda(dx), \quad B \in \mathcal{B}^d.$$

Přesvědčíme se, že pro vhodné α je $\int_{\mathcal{N}_f} p(\nu) \Pi(d\nu) = 1$. Můžeme spočítat rozdělení bodového procesu Φ s hustotou p :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Phi \in \mathcal{U}) &= \alpha e^{-\Lambda(\mathbb{R}^d)} \left[\mathbf{1}_{[\emptyset \in \mathcal{U}]} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{[\sum_{i=1}^n \delta_{x_i} \in \mathcal{U}]} \beta(x_1) \cdots \beta(x_n) \Lambda(dx_1) \cdots \Lambda(dx_n) \right] \\ &= \alpha e^{-\Lambda(\mathbb{R}^d)} \left[\mathbf{1}_{[\emptyset \in \mathcal{U}]} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{[\sum_{i=1}^n \delta_{x_i} \in \mathcal{U}]} \Lambda_\beta(dx_1) \cdots \Lambda_\beta(dx_n) \right]. \end{aligned}$$

Srovnáním s (17) vidíme, že se opět jedná o rozdělení Poissonova procesu. Míra intenzity je tentokrát Λ_β a normující konstanta α musí být tvaru $\alpha = e^{\Lambda(\mathbb{R}^d) - \Lambda_\beta(\mathbb{R}^d)}$.

Pro definici bodového procesu s hustotou můžeme použít libovolnou nezápornou měřitelnou funkci h , která má kladný konečný integrál vzhledem k pravděpodobnostní míře Π , znormováním pak dostaneme hustotu p , rovnost až na normující konstantu zapisujeme $p(\nu) \propto h(\nu)$. Budou se nám hodit postačující podmínky pro Π -integrovatelnost funkce h .

Definice 67. Necht Λ je konečná difúzní míra na \mathbb{R}^d . Řekneme, že měřitelná funkce $h : \mathcal{N}_f^* \rightarrow \mathbb{R}^+$ je *lokálně stabilní* (*locally stable*), jestliže existuje nezáporná měřitelná funkce $k : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$ taková, že $\int_{\mathbb{R}^d} k(x) \Lambda(dx) < \infty$ a platí

$$h(\nu + \delta_x) \leq k(x)h(\nu) \quad \forall \nu \in \mathcal{N}_f^*, x \in \mathbb{R}^d \setminus \text{supp } \nu.$$

Funkce h je *stabilní ve smyslu Ruelleho* (*Ruelle stable*), jestliže existuje konstanta $c \geq 0$ a nezáporná funkce k splňující $\int_{\mathbb{R}^d} k(x) \Lambda(dx) < \infty$ tak, že

$$h(\nu) \leq c \prod_{x \in \text{supp } \nu} k(x) \quad \forall \nu \in \mathcal{N}_f^*.$$

Pokud můžeme míru $\nu \in \mathcal{N}_f^*$ obdržet z míry $\mu \in \mathcal{N}_f^*$ vynecháním některých atomů, píšeme $\nu \preceq \mu$. Je to ekvivalentní tomu, že $\text{supp } \nu \subseteq \text{supp } \mu$.

Definice 68. Nezáporná měřitelná funkce h na \mathcal{N}_f^* se nazývá *dědičná (hereditary)*, když pro každé $\mu \in \mathcal{N}_f^*$ platí

$$h(\mu) > 0 \Rightarrow h(\nu) > 0 \quad \forall \nu \leq \mu.$$

Věta 59. Necht $h : \mathcal{N}_f^* \rightarrow \mathbb{R}^+$ je měřitelná funkce a Π je rozdělení konečného Poissonova bodového procesu s mírou intenzity Λ .

- a) Je-li h lokálně stabilní, potom je stabilní ve smyslu Ruelleho.
- b) Je-li h stabilní ve smyslu Ruelleho, potom je Π -integrovatelná.
- c) Je-li h lokálně stabilní, potom je dědičná.

Důkaz: a) Položme $c = h(\emptyset)$. Tvrzení se lehce dokáže indukcí podle $n = \nu(\mathbb{R}^d)$. Pro $n = 0$ je zřejmě $h(\nu) = c \leq c$. Pokud tvrzení platí pro n , pak

$$h(\nu + \delta_x) \leq k(x)h(\nu) \leq k(x)c \prod_{y \in \text{supp } \nu} k(y) = c \prod_{y \in \nu + \delta_x} k(y).$$

b) Označíme-li $K = \int_{\mathbb{R}^d} k(x) \Lambda(dx)$, pak

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{N}_f} h(\nu) \Pi(d\nu) &= e^{-\Lambda(\mathbb{R}^d)} \left[h(\emptyset) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} h\left(\sum_{i=1}^n \delta_{x_i}\right) \Lambda(dx_1) \cdots \Lambda(dx_n) \right] \\ &\leq e^{-\Lambda(\mathbb{R}^d)} \left[c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} ck(x_1) \cdots k(x_n) \Lambda(dx_1) \cdots \Lambda(dx_n) \right] \\ &= ce^{-\Lambda(\mathbb{R}^d)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} K^n = ce^{-\Lambda(\mathbb{R}^d)} e^K < \infty. \end{aligned}$$

První rovnost plyne z (17) standardním postupem teorie míry.

c) Z definice lokální stability plyne, že $h(\nu + \delta_x) > 0 \Rightarrow h(\nu) > 0$. □

Definice 69. Pro bodový proces Φ s hustotou p je *Papangelouova podmíněná intenzita (Papangelou conditional intensity)* definována jako

$$\lambda^*(x, \nu) = \frac{p(\nu + \delta_x)}{p(\nu)}, \quad x \in \mathbb{R}^d, \nu \in \mathcal{N}_f : p(\nu) > 0.$$

Poznámka 42. Pro dědičné hustoty p lze lokální stabilitu ekvivalentně definovat jako $\lambda^*(x, \nu) \leq k(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ a $\nu \in \mathcal{N}_f$ s $p(\nu) > 0$, kde $\int_{\mathbb{R}^d} k(x) \Lambda(dx) < \infty$.

Definice 70. V mnoha aplikacích se vyskytují *bodové procesy s párovými interakcemi (pairwise interaction point processes)*, které mají hustotu vzhledem k rozdělení Poissonova procesu tvaru

$$p(\nu) \propto \prod_{x \in \text{supp } \nu} g(\delta_x) \prod_{\{x,y\} \subseteq \text{supp } \nu} g(\delta_x + \delta_y), \quad \nu \in \mathcal{N}_f^*, \quad (18)$$

kde g je tzv. *interakční funkce (interaction function)*, tedy nezáporná funkce taková, že pravá strana v (18) je Π -integrovatelná. Bodový proces nazveme *repulzivní (repulsive)*, jestliže $g(\delta_x + \delta_y) \leq 1$ pro všechna $x \neq y$. Definujeme *rozsah interakcí (range of interaction)* jako

$$R = \inf\{r > 0 : g(\delta_x + \delta_y) = 1 \text{ pro všechna } \|x - y\| > r\}.$$

Pokud $g(\delta_x) = \beta > 0$ je konstanta a $g(\delta_x + \delta_y) = \theta(\|x - y\|)$ je invariantní vůči posunutím a rotacím, mluvíme o *homogenním* bodovém procesu s párovými interakcemi. Motivováni statistickou fyzikou používáme pro funkci $\theta : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ označení *párová potenciálová funkce (pair potential function)*. Určuje sílu interakcí mezi body. Hodnoty menší než 1 znamenají odpudivé interakce mezi body v dané vzdálenosti, zatímco hodnoty větší než 1 odpovídají přitažlivým interakcím.

Papangelouva podmíněná intenzita bodových procesů s párovými interakcemi má tvar

$$\lambda^*(x, \nu) = g(\delta_x) \prod_{y \in \text{supp } \nu} g(\delta_x + \delta_y).$$

Funkce (18) je zřejmě dědičná a pokud

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(\delta_x) \Lambda(dx) < \infty \quad (19)$$

a $g(\delta_x + \delta_y) \leq 1$, tak je i lokálně stabilní, neboť $\lambda^*(x, \nu) \leq g(\delta_x)$ a v poznámce 42 lze vzít $k(x) = g(\delta_x)$. Znamená to, že za předpokladu (19) je hustota repulzivních procesů Π -integrovatelná. Pro homogenní proces s párovými interakcemi (19) zřejmě platí.

Již dříve jsme odvodili, že ve speciálním případě $g(\delta_x + \delta_y) = 1$ dostaneme Poissonův proces. Rozsah interakcí je v tomto případě $R = 0$.

Různé volby θ vedou na různé modely homogenních procesů s párovými interakcemi. Triviální volba $\theta(r) = 1$ pro každé $r > 0$ odpovídá homogennímu Poissonovu procesu s intenzitou β . Nejjednodušším a nejnámějším netriviálním příkladem konečného homogenního bodového procesu s párovými interakcemi je Straussův proces:

$$\theta(r) = \gamma \mathbf{1}_{[r \leq R]}, \quad 0 \leq \gamma \leq 1, \quad R > 0,$$

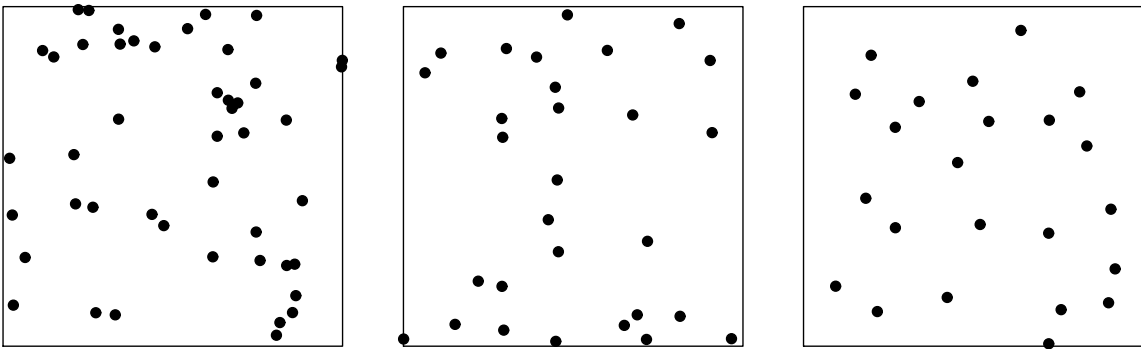
přitom pokládáme $0^0 = 1$.

Definice 71. Mějme reálné parametry $\beta > 0$, $0 \leq \gamma \leq 1$ a $R > 0$. *Straussův proces* je bodový proces Φ s hustotou

$$p(\nu) = \alpha \beta^{\nu(\mathbb{R}^d)} \gamma^{S_R(\nu)}, \quad \nu \in \mathcal{N}_f^*,$$

kde α je normující konstanta a $S_R(\nu) = \sum_{\{x,y\} \subseteq \text{supp } \nu} \mathbf{1}_{[\|x-y\| \leq R]}$ je počet dvojic různých atomů míry ν , jejichž vzdálenost je nejvýše R .

Normující konstanta $\alpha = \left(\int_{\mathcal{N}_f} \beta^{\nu(\mathbb{R}^d)} \gamma^{S_R(\nu)} \Pi(d\nu) \right)^{-1}$ je většinou neznámá. Lze ji spočítat například pro limitní případ $\gamma = 1$, který odpovídá Poissonovu procesu s mírou intenzity $\beta\Lambda$, vyjde $\alpha = e^{(1-\beta)\Lambda(\mathbb{R}^d)}$. Příklad $\gamma = 0$ znamená, že pokud má být $p(\nu) > 0$, musí být $S_R(\nu) = 0$ (pokládáme $0^0 = 1$) a výsledkem je bodový proces s pevným jádrem, tj. žádné dva body procesu nemůžou být blíže než R . Parametr R je roven rozsahu interakcí. Na obrázku 16 jsou nasimulované realizace Straussova procesu pro limitní hodnoty $\gamma = 1$ (vlevo) a $\gamma = 0$ (vpravo) a také pro $\gamma = 0,5$ (uprostřed), kde existují dvojice bodů ve vzdálenosti menší než R , ale je tomu tak méně často než u Poissonova procesu (případ $\gamma = 1$).



Obrázek 16. Tři realizace Straussova procesu ve čtvercovém okně jednotkového obsahu. Volba parametrů je $\beta = 50$, $R = 0,1$ a $\gamma = 1$ (vlevo), $\gamma = 0,5$ (uprostřed) a $\gamma = 0$ (vpravo). Rozdělení procesu je uvažováno vzhledem k standardnímu Poissonovu procesu na $[0, 1]^2$.

Strauss nazval tento proces modelem shlukování [13], to by odpovídalo případu $\gamma > 1$, pro který však $p(\nu)$ není Π -integrovatelná (viz cvičení). Pro $0 \leq \gamma \leq 1$ plyne Π -integrovatelnost z lokální stability. Straussův proces je tak modelem pro odpudivé interakce mezi body, jedná se o příklad repulzivního procesu.

Definice 72. Necht Π je rozdělení standardního Poissonova bodového procesu na omezené množině $B \in \mathcal{B}_0^d$. Mějme parametry $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $R > h > 0$. *Straussův bodový proces s pevným jádrem (Strauss hard-core point process)* je dán hustotou

$$p(\nu) = \begin{cases} 0, & \text{jestliže existují } x, y \text{ takové, že } \nu(\{x, y\}) = 2 \text{ a } 0 < \|x - y\| < h, \\ \alpha\beta^{\nu(B)}\gamma^{S_R(\nu)}, & \text{jinak,} \end{cases}$$

vzhledem k Π . Jde tedy o případ homogenního bodového procesu s párovými interakcemi a párovou potenciálovou funkcí

$$\theta(r) = \begin{cases} 0 & \text{pro } r \leq h, \\ \gamma & \text{pro } h < r \leq R, \\ 1 & \text{pro } r > R. \end{cases}$$

Poznámka 43. Díky podmínce na pevné jádro $h > 0$ a omezenosti množiny B existuje horní mez pro počet bodů procesu. To zajišťuje integrovatelnost hustoty i pro $\gamma > 1$.

Uvedme ještě příklad bodového procesu, ve kterém se vyskytují i interakce vyšších řádů než jen párové.

Definice 73. Bodový proces s hustotou

$$p(\nu) = \alpha\beta^{\nu(B)}\gamma^{-|U_{\nu,R}|}, \quad \nu \in \mathcal{N}_f^*,$$

vzhledem k rozdělení standardního Poissonova procesu na omezené množině $B \in \mathcal{B}_0^d$, kde $U_{\nu,R} = \bigcup_{x \in \text{supp } \nu} b(x, R)$ a $\beta > 0$, $R > 0$, $\gamma > 0$, se nazývá *bodový proces objemových interakcí* nebo také *Widomův-Rowlinsonův proces*. V $d = 2$ se mluví o *bodovém procesu plošných interakcí (area-interaction point process)*.

Papangelouova podmíněná intenzita bodového procesu objemových interakcí je tvaru

$$\lambda^*(x, \nu) = \beta\gamma^{-|b(x,r) \setminus \cup_{y \in \text{supp } \nu} b(y,r)|}.$$

Lehce se přesvědčíme, že jde o omezenou funkci:

$$\lambda^*(x, \nu) \leq \begin{cases} \beta & \text{pro } \gamma \geq 1, \\ \beta\gamma^{-\omega_d r^d} & \text{pro } \gamma < 1, \end{cases}$$

což znamená, že hustota p je lokálně stabilní, a proto integrovatelná.

Bodové procesy s párovými interakcemi i Widomův-Rowlinsonův proces jsou speciálním případem obecnější třídy bodových procesů, tzv. markovských bodových procesů.

Markovské bodové procesy

Definice 74. Buď \sim reflexivní a symetrická relace na $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Pokud $x \sim y$, říkáme, že $x, y \in \mathbb{R}^d$ jsou *sousedé (neighbours)*. Pro $B \in \mathcal{B}_0^d$ definujeme *sousedství (neighbourhood)* B jako $\partial B = \{x \in \mathbb{R}^d \setminus B : \exists y \in B, x \sim y\}$.

Nejpoužívanějším příkladem relace sousedství je $x \sim y \Leftrightarrow \|x - y\| \leq R$ pro dané $R > 0$ (tzv. *R-sousedství*).

Definice 75. Měřitelná funkce $h : \mathcal{N}_f \rightarrow \mathbb{R}^+$ splňuje *lokální markovskou vlastnost (local Markov property)* vzhledem k \sim , pokud pro každé $\nu \in \mathcal{N}_f$ splňující $h(\nu) > 0$ a pro každé x splňující $\nu(\{x\}) = 0$ platí

$$\frac{h(\nu + \delta_x)}{h(\nu)} = \frac{h(\nu + \delta_x - \sum_{i=1}^k \delta_{y_i})}{h(\nu - \sum_{i=1}^k \delta_{y_i})}$$

pro libovolné $y_1, \dots, y_k \in \text{supp } \nu \setminus \partial\{x\}$, tedy y_i jsou atomy míry ν takové, že $y_i \not\sim x$. Řekneme, že h je *markovská funkce (Markov function)* vzhledem k relaci \sim , jestliže je dědičná a splňuje lokální markovskou vlastnost.

Definice 76. Nechť Φ je konečný bodový proces s hustotou p vzhledem k rozdělení Poissonova procesu s konečnou difúzní mírou intenzity Λ . Bodový proces Φ je *markovský*, jestliže p je markovská.

Poznámka 44. Papangelouova podmíněná intenzita $\lambda^*(x, \nu)$ markovského procesu závisí pouze na x a $\nu|_{\partial\{x\}}$.

Definice 77. Množina $A \subseteq \mathbb{R}^d$ je *klika* (*clique*) vzhledem k \sim , jestliže $x \sim y$ pro každé $x, y \in A$. Řekneme, že nezáporná měřitelná funkce g je *interakční funkce* (*interaction function*) vzhledem k \sim , jestliže $g(\nu) = 1$, pokud $\text{supp } \nu$ není klika.

Věta 60. (*Hammersleyho-Cliffordova-Ripleyho-Kellyho věta*) Měřitelná funkce $h : \mathcal{N}_f \rightarrow \mathbb{R}^+$ je markovská právě tehdy, když existuje interakční funkce $g : \mathcal{N}_f \rightarrow \mathbb{R}^+$ taková, že

$$h(\mu) = \prod_{\nu \preceq \mu} g(\nu), \quad \mu \in \mathcal{N}_f. \quad (20)$$

Důkaz: Jedna implikace je zřejmá. Funkce h dána vztahem (20) je dědičná a splňuje lokální markovskou vlastnost.

Předpokládejme, že h je markovská a definujme g indukci: $g(\emptyset) = h(\emptyset)$; $g(\mu) = 1$, když $\text{supp } \mu$ není klika; a

$$g(\mu) = \frac{h(\mu)}{\prod_{\nu \preceq \mu} g(\nu)},$$

když $\text{supp } \mu \neq \emptyset$ je klika. Je-li $\prod_{\nu \preceq \mu} g(\nu) = 0$, potom existuje $\nu \preceq \mu$ tak, že $g(\nu) = 0$, a proto $h(\nu) = 0$, což z dědičnosti implikuje $h(\mu) = 0$. V tom případě definujeme $g(\mu) = 1$ (neboli pokládáme $0/0 = 1$). Funkce g je korektně definována a je to interakční funkce. Abychom ukázali, že platí (20) rozlišíme tři případy.

1. $\text{supp } \mu$ je klika: $h(\emptyset) = g(\emptyset)$ a $h(\mu) = \prod_{\nu \preceq \mu} g(\nu)$ pro $\mu \neq \emptyset$.
2. $h(\mu) = 0$ a $\text{supp } \mu$ není klika: existují $x, y \in \text{supp } \mu$ tak, že $x \not\sim y$. Je-li $\prod_{\nu \prec \mu} g(\nu) = 0$, kde $\nu \prec \mu$ znamená $\nu \preceq \mu$ a zároveň $\nu \neq \mu$, pak $\prod_{\nu \preceq \mu} g(\nu) = 0 = h(\mu)$. Sporem ukážeme, že nemůže být $\prod_{\nu \prec \mu} g(\nu) > 0$. Předpokládejme proto, že $\prod_{\nu \prec \mu} g(\nu) > 0$. Pokud $h(\mu - \delta_x) > 0$ pak z lokální markovské vlastnosti víme, že

$$0 = \frac{h(\mu)}{h(\mu - \delta_x)} = \frac{h(\mu - \delta_y)}{h(\mu - \delta_x - \delta_y)},$$

neboli $h(\mu - \delta_y) = 0$. To znamená, že pro aspoň jednu z měr $\mu - \delta_x$ a $\mu - \delta_y$, označme ji ν , platí $h(\nu) = 0$. Pokud by $\text{supp } \nu$ byla klika, pak by z $h(\nu) = 0$ plynulo $g(\nu) = 0$, což vede ke sporu. Proto $\text{supp } \nu$ není klika a má o jeden bod méně než $\text{supp } \mu$. Celou úvahu můžeme nyní zopakovat a dostat $\tilde{\nu} \prec \nu$, přitom $\text{supp } \tilde{\nu}$ není klika a má o jeden bod méně než $\text{supp } \nu$. Takto ale nemůžeme postupovat pořád, protože dříve nebo později odebráním bodů dojdeme ke klice (všechny jednobodové množiny jsou klicky). Tím dostáváme požadovaný spor.

3. $h(\mu) > 0$ a $\text{supp } \mu$ není klika: existují $x, y \in \text{supp } \mu$ tak, že $x \not\sim y$. Označme $\nu = \mu - \delta_x - \delta_y$. Z dědičnosti plyne, že $h(\nu) > 0$. Už víme, že vztah (20) platí pro klicky. Nyní ho ukážeme obecně indukci podle $n = \mu(\mathbb{R}^d)$. Pro $n = 0$ je $h(\emptyset) = g(\emptyset)$ z definice, pro $n = 1$ je $h(\delta_z) = g(\emptyset)g(\delta_z)$ z definice (pro tyto dva případy je μ klika). Předpokládejme, že vztah platí pro $n - 1$ a ukážeme ho pro n . Z lokální markovské vlastnosti dostaneme

$$h(\mu) = \frac{h(\nu + \delta_x + \delta_y)}{h(\nu + \delta_x)} h(\nu + \delta_x) = \frac{h(\nu + \delta_y)}{h(\nu)} h(\nu + \delta_x).$$

Nyní využijeme indukčního předpokladu a toho, že $g(\varphi) = 1$, pokud $\varphi(\{x, y\}) = 2$ (neboť $x \not\sim y$):

$$h(\mu) = \frac{\prod_{\varphi \preceq \nu + \delta_y} g(\varphi) \prod_{\varphi \preceq \nu + \delta_x} g(\varphi)}{\prod_{\varphi \preceq \nu} g(\varphi)} = \prod_{\varphi \preceq \nu + \delta_x + \delta_y} g(\varphi).$$

□

Podle věty 60 má každý markovský bodový proces hustotu

$$p(\mu) = \prod_{\nu \preceq \mu} g(\nu) = g(\emptyset) \exp \left\{ \sum_{\nu \preceq \mu, \nu \neq \emptyset} \log g(\nu) \right\} = \frac{\exp\{-U(\mu)\}}{Z}.$$

Ve statistické fyzice se používá označení *Gibbsův bodový proces* (*Gibbs point process*) s *energií* (*energy*)

$$U(\mu) = - \sum_{\nu \preceq \mu, \nu \neq \emptyset} \log g(\nu)$$

a *partiční funkci* (*partition function*) $Z = 1/g(\emptyset)$. Papangelouova podmíněná intenzita je potom rovna $\lambda^*(x, \mu) = e^{-E(x, \mu)}$, kde $E(x, \mu) = U(\mu + \delta_x) - U(\mu)$ je energie potřebná k doplnění bodu x ke konfiguraci μ .

Příkladem markovského bodového procesu vzhledem k R -sousedství je Straussův proces z definice 71. Papangelouova podmíněná intenzita $\lambda^*(x, \mu) = \beta \gamma^{\mu(\partial\{x\})}$ závisí pouze na x a $\mu|_{\partial\{x\}}$. Interakční funkce z věty 60 je

$$g(\nu) = \begin{cases} \alpha, & \nu(\mathbb{R}^d) = 0, \\ \beta, & \nu(\mathbb{R}^d) = 1, \\ \gamma, & \nu(\mathbb{R}^d) = 2, \text{ kde } 0 < \|x - y\| \leq R \text{ pro } x, y \in \text{supp } \nu, \\ 1, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Straussův proces tak obsahuje pouze párové interakce.

Jako příklad markovského bodového procesu, u kterého se objevují interakce vyšších řádů (interakční funkce $g(\nu)$ je různá od 1 i pro víceprvkové konfigurace ν), uveďme bodový proces objemových interakcí (73). Papangelouova podmíněná intenzita $\lambda^*(x, \nu) = \beta \gamma^{-|b(x, r) \cup \cup_{y \in \text{supp } \nu} b(y, r)|}$ závisí jen na těch y , pro které platí $\|x - y\| \leq 2r$. Jedná se o markovský bodový proces vzhledem k relaci $(2r)$ -sousedství. Z principu inkluze a exkluze vidíme, že interakční funkce z věty 60 je

$$g(\nu) = \begin{cases} \alpha, & \nu(\mathbb{R}^d) = 0, \\ \beta \gamma^{-\omega_d r^d}, & \nu(\mathbb{R}^d) = 1, \\ \gamma^{(-1)^k |b(x_1, r) \cap \dots \cap b(x_k, r)|}, & \nu = \sum_{i=1}^k \delta_{x_i}, k \geq 2. \end{cases}$$

4.5 Vnější podmiňování

V této podkapitole budeme obecněji místo euklidovského prostoru \mathbb{R}^d uvažovat separabilní lokálně kompaktní metrický prostor E . Buď Φ jednoduchý bodový proces na E s rozdělením Q a mírou intenzity $\Lambda \in \mathcal{M}$. Připomeňme, že v definici 46 jsme zavedli Campbellovu míru C . Podle lemmatu 39 je nosič C obsažen v $\{(x, \mu) : \mu(\{x\}) = 1\}$. Podobně jako u definice redukovaného Palmova rozdělení (definice 48) tak můžeme provést redukování bodu x .

Definice 78. *Redukovaná Campbellova míra* (*reduced Campbell measure*) jednoduchého bodového procesu Φ je definována vztahem

$$C^1(A) = \mathbb{E} \sum_{X \in \text{supp } \Phi} \mathbf{1}_{[(X, \Phi - \delta_X) \in A]}, \quad A \in \mathcal{B} \times \mathfrak{N}.$$

Poznámka 45. Pro libovolnou nezápornou měřitelnou funkci f na $E \times \mathcal{N}$ je

$$\int_{E \times \mathcal{N}} f(x, \nu) C^1(d(x, \nu)) = \int_{\mathcal{N}} \int_E f(x, \nu - \delta_x) \nu(dx) Q(d\nu).$$

Míra C^1 splňuje $C^1(B \times \mathcal{N}) = \Lambda(B)$, $B \in \mathcal{B}$. Redukované Palmovo rozdělení P_x^1 souvisí s redukovanou Campbellovou mírou vztahem

$$C^1(B \times \mathcal{U}) = \int_B P_x^1(\mathcal{U}) \Lambda(dx), \quad B \in \mathcal{B}, \mathcal{U} \in \mathfrak{N}.$$

Lemma 61. *Předpokládejme, že pro každou $B \in \mathcal{B}_0$ platí*

$$\mathbb{P}(\Phi(B) = 0 \mid \Phi|_{B^c}) > 0 \quad \text{s.j.} \tag{21}$$

Pak pro každou $B \in \mathcal{B}_0$ je míra $C^1(B \times \cdot)$ absolutně spojitá vůči Q .

Důkaz: Zvolme pevně $B \in \mathcal{B}_0$ a $\mathcal{U} \in \mathfrak{N}$ takovou, že $Q(\mathcal{U}) = 0$. Dokážeme, že $C^1(B \times \mathcal{U}) = 0$. Důkaz provedeme ve třech krocích.

1. Předpokládejme nejprve, že $\mathcal{U} \subseteq \{\nu : \nu(B) = 0\}$. Pak podle definice podmíněné pravděpodobnosti

$$\mathbb{P}(\Phi|_{B^c} \in \mathcal{U})\mathbb{P}(\Phi(B) = 0 \mid \Phi|_{B^c} \in \mathcal{U}) = \mathbb{P}(\Phi(B) = 0, \Phi|_{B^c} \in \mathcal{U}) \leq \mathbb{P}(\Phi \in \mathcal{U}) = Q(\mathcal{U}) = 0.$$

Podle předpokladu (21) je $\mathbb{P}(\Phi(B) = 0 \mid \Phi|_{B^c} \in \mathcal{U}) > 0$ s.j., musí tedy být $\mathbb{P}(\Phi|_{B^c} \in \mathcal{U}) = 0$. Nyní dostáváme

$$\begin{aligned} C^1(B \times \mathcal{U}) &= \int_{\mathcal{N}} \int_B \mathbf{1}_{\mathcal{U}}(\nu - \delta_x) \nu(dx) Q(d\nu) = \int_{\mathcal{N}} \mathbf{1}_{\{\nu(B)=1\}} \mathbf{1}_{\mathcal{U}}(\nu|_{B^c}) Q(d\nu) \\ &= \mathbb{P}(\Phi(B) = 1, \Phi|_{B^c} \in \mathcal{U}) \leq \mathbb{P}(\Phi|_{B^c} \in \mathcal{U}) = 0. \end{aligned}$$

2. Předpokládejme, že $\mathcal{U} \subseteq \{\nu : \nu(B) \leq m\}$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}$. Uvažujme posloupnost zjemňujících se rozkladů $B = \bigcup_{i=1}^{k_n} A_{n,i}$ takovou, že $\max_i \text{diam } A_{n,i} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Označme $V_n = \{\Phi(A_{n,i}) \leq 1 \ \forall i \in \{1, \dots, k_n\}\}$. Z důkazu lemmatu 22 víme, že $\mathbb{P}(V_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. Podle již dokázané 1. části platí

$$\begin{aligned} C^1(B \times \mathcal{U}) &= \sum_{i=1}^{k_n} C^1(A_{n,i} \times \mathcal{U}) = \sum_{i=1}^{k_n} C^1(A_{n,i} \times (\mathcal{U} \cap \{\nu : \nu(A_{n,i}) \geq 1\})) \\ &= \sum_{i=1}^{k_n} \int_{\mathcal{N}} \int_{A_{n,i}} \mathbf{1}_{\mathcal{U}}(\nu - \delta_x) \mathbf{1}_{\{\nu(A_{n,i}) \geq 2\}} \nu(dx) Q(d\nu) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k_n} \mathbb{E} \Phi(A_{n,i}) \mathbf{1}_{\{\Phi(A_{n,i}) \geq 2\}} \mathbf{1}_{\{\Phi(B) \leq m+1\}} \\ &\leq \mathbb{E} \mathbf{1}_{V_n^c} \mathbf{1}_{\{\Phi(B) \leq m+1\}} \sum_{i=1}^{k_n} \Phi(A_{n,i}) \mathbf{1}_{\{\Phi(A_{n,i}) \geq 2\}} \leq (m+1) \mathbb{P}(V_n^c) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

takže opět máme $C^1(B \times \mathcal{U}) = 0$.

3. Pro obecnou množinu $\mathcal{U} \in \mathfrak{N}$ využijeme vztah

$$C^1(B \times \mathcal{U}) = \lim_{m \rightarrow \infty} C^1(B \times (\mathcal{U} \cap \{\mu : \mu(B) \leq m\}))$$

a 2. části důkazu. □

Věta 62. *Nechť Φ je jednoduchý bodový proces na E s mírou intenzity $\Lambda \in \mathcal{M}$ a splňující předpoklad (21) pro každou $B \in \mathcal{B}_0$. Pak existuje jádro Λ^* z $(\mathcal{N}, \mathfrak{N}, Q)$ do (E, \mathcal{B}) takové, že $\Lambda^*(\cdot \mid \nu)$ je lokálně konečná míra pro Q -s.v. ν a pro každou nezápornou měřitelnou funkci f na $E \times \mathcal{N}$ platí*

$$\int_{E \times \mathcal{N}} f(x, \nu) C^1(d(x, \nu)) = \int_{\mathcal{N}} \int_E f(x, \nu) \Lambda^*(dx \mid \nu) Q(d\nu). \quad (22)$$

Je-li $\tilde{\Lambda}^*$ jiné jádro s výše uvedenými vlastnostmi, platí pro každou $B \in \mathcal{B}$:

$$Q(\{\nu : \tilde{\Lambda}^*(B \mid \nu) = \Lambda^*(B \mid \nu)\}) = 0.$$

Důkaz: Pro každou $B \in \mathcal{B}_0$ je podle předpokladu (21) a lemmatu 61 míra $C^1(B \times \cdot)$ absolutně spojitá vzhledem ke Q , existuje tedy příslušná Radonova-Nikodymova derivace $\xi_B = \frac{dC^1(B \times \cdot)}{dQ(\cdot)}$. Systém nezáporných funkcí $\{\xi_B : B \in \mathcal{B}_0\}$ na pravděpodobnostním prostoru $(\mathcal{N}, \mathfrak{N}, Q)$ splňuje předpoklady tvrzení 18, existuje tedy jeho regularizace (náhodná míra) Λ^* na tomto prostoru, která je hledaným jádrem. □

Definice 79. Zobrazení Λ^* z věty 62 se nazývá *Papangelouovo jádro*.

Poznámka 46. Vztah (22) se dá přepsat do tvaru

$$\mathbb{E} \sum_{X \in \text{supp } \Phi} f(X, \Phi \setminus \{X\}) = \int_E \mathbb{E} f(x, \Phi) \Lambda^*(dx | \Phi), \quad (23)$$

což se někdy označuje jako *Georgiiho-Nguyenova-Zessinova identita* (*Georgii-Nguyen-Zessin identity*).

Lemma 63. Za předpokladů věty 62 platí

- a) $\mathbb{E} \Lambda^*(B | \Phi) = \Lambda(B)$, $B \in \mathcal{B}$,
b) je-li $\Lambda^*(\cdot | \Phi) \ll \Lambda(\cdot)$ s.j., je $P_x^! \ll Q$ a

$$\frac{dP_x^!}{dQ}(\mu) = \frac{d\Lambda^*(\cdot | \mu)}{d\Lambda}(x).$$

Důkaz:

a)

$$\mathbb{E} \Lambda^*(B | \Phi) = \int_{\mathcal{N}} \Lambda^*(B | \nu) Q(d\nu) = C^!(B \times \mathcal{N}) = \Lambda(B)$$

- b) Ukážeme, že $P_x^!(\mathcal{U}) = \int_{\mathcal{U}} \frac{d\Lambda^*(\cdot | \mu)}{d\Lambda}(x) Q(d\nu)$ jsou verzi redukovaných Palmových rozdělání. To plyne z rovnosti

$$\int_B P_x^!(\mathcal{U}) \Lambda(dx) = \int_B \int_{\mathcal{U}} \frac{d\Lambda^*(\cdot | \mu)}{d\Lambda}(x) Q(d\nu) \Lambda(dx) = \int_{\mathcal{U}} \Lambda^*(B | \nu) Q(d\nu) = C^!(B \times \mathcal{U}).$$

□

Příklad: Je-li Φ Poissonův bodový proces s difúzní mírou intenzity $\Lambda \in \mathcal{M}$ a rozdělením Q , pak $C^!(B \times \mathcal{U}) = \Lambda(B)Q(\mathcal{U})$. Podmínka (21) je splněna pro každou $B \in \mathcal{B}_0$ a platí $\Lambda^*(\cdot | \nu) = \Lambda(\cdot)$ pro Q -s.v. ν .

Příklad: Nechť Φ je konečný bodový proces na $E = \mathbb{R}^d$ daný hustotou vzhledem k rozdělení Π Poissonova bodového procesu s konečnou mírou intenzity Λ . Potom existuje Papangelouovo jádro Λ^* a míra $\Lambda^*(\cdot | \nu)$ je absolutně spojitá spojitá vzhledem k Λ , přičemž

$$\frac{d\Lambda^*(\cdot | \nu)}{d\Lambda(\cdot)}(x) = \lambda^*(x, \nu),$$

kde $\lambda^*(x, \nu)$ je Papangelouova podmíněná intenzita. Ukážeme, že je splněn vztah (22). Levá strana má tvar

$$\begin{aligned} \int_{E \times \mathcal{N}} f(x, \nu) C^!(d(x, \nu)) &= \int_{\mathcal{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x, \nu - \delta_x) \nu(dx) Q(d\nu) = \int_{\mathcal{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x, \nu - \delta_x) p(\nu) \nu(dx) \Pi(d\nu) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathcal{N}} f(x, \nu) p(\nu + \delta_x) P_x^!(d\nu) \Lambda(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathcal{N}} f(x, \nu) p(\nu + \delta_x) \Pi(d\nu) \Lambda(dx), \end{aligned}$$

kde jsme využili Campbellovu-Meckeovu větu a Slivnyakovu větu. Pravou stranu pak upravíme s pomocí definice Papangelouovy podmíněné intenzity následovně:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{N}} \int_E f(x, \nu) \Lambda^*(dx | \nu) Q(d\nu) &= \int_{\mathcal{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x, \nu) \lambda^*(x, \nu) \Lambda(dx) Q(d\nu) \\ &= \int_{\mathcal{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x, \nu) \frac{p(\nu + \delta_x)}{p(\nu)} p(\nu) \Lambda(dx) \Pi(d\nu) \\ &= \int_{\mathcal{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x, \nu) p(\nu + \delta_x) \Lambda(dx) \Pi(d\nu). \end{aligned}$$

Definice 80. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme redukovanou Campbellovu míru n -tého řádu $C^{!n}$ na $E^{[n]} \times \mathcal{N}$ vztahem

$$\begin{aligned} \int_{E^{[n]} \times \mathcal{N}} f(x_1, \dots, x_n, \nu) C^{!n}(d(x_1, \dots, x_n, \nu)) \\ = \int_{\mathcal{N}} \int_{E^{[n]}} f(x_1, \dots, x_n, \nu - \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}) \mu^{[n]}(d(x_1, \dots, x_n)) Q(d\nu) \end{aligned}$$

a Papangelouovo jádro n -tého řádu $\Lambda^{*(n)}$ z \mathcal{N} do $E^{[n]}$ vztahem

$$\int_{E^{[n]} \times \mathcal{N}} f(x_1, \dots, x_n, \nu) C^{!n}(d(x_1, \dots, x_n, \nu)) = \int_{\mathcal{N}} \int_{E^{[n]}} f(x_1, \dots, x_n, \nu) \Lambda^{*(n)}(d(x_1, \dots, x_n) | \nu) Q(d\nu).$$

Pro $n = 0$ dodefinujeme $C^{!0} = Q$ a $\Lambda^{*(0)}(\{\emptyset\} | \nu) = 1$ pro $\nu \in \mathcal{N}$.

Lemma 64. Pro $m, n \in \mathbb{N}$ a $A \in \mathcal{B}(E^m)$, $B \in \mathcal{B}(E^n)$ platí

$$\int_B \Lambda^{*(m)}(A | \nu + \sum_{i=1}^n \delta_{y_i}) \Lambda^{*(n)}(d(y_1, \dots, y_n) | \nu) = \Lambda^{*(m+n)}(A \times B | \nu) \quad \text{s.j.}$$

Důkaz: Provedeme důkaz pro $m = n = 1$, obecný případ by se ukázal analogicky. Pro $A, B \in \mathcal{B}$ dokazujeme rovnost

$$\int_B \Lambda^*(A | \nu + \delta_y) \Lambda^*(dy | \nu) = \Lambda^{*(2)}(A \times B | \nu) \quad \text{s.j.}$$

Vezměme libovolnou $\mathcal{U} \in \mathfrak{N}$, pak platí

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{U}} \int_B \Lambda^*(A | \nu + \delta_y) \Lambda^*(dy | \nu) Q(d\nu) &= \int_{B \times \mathcal{U}} \Lambda^*(A | \nu + \delta_y) C^!(d(y, \nu)) \\ &= \int_{\mathcal{N}} \int_E \mathbf{1}_B(y) \mathbf{1}_{\mathcal{U}}(\nu - \delta_y) \Lambda^*(A | \nu) \nu(dy) Q(d\nu) \\ &= \int_{E \times \mathcal{N}} \int_E \mathbf{1}_A(x) \mathbf{1}_B(y) \mathbf{1}_{\mathcal{U}}(\nu - \delta_y) \nu(dy) C^!(d(x, \nu)) \\ &= \int_{\mathcal{N}} \int_A \int_B \mathbf{1}_{\mathcal{U}}(\nu - \delta_x - \delta_y) (\nu - \delta_x)(dy) \nu(dx) Q(d\nu) \\ &= C^{!2}(A \times B \times \mathcal{U}), \end{aligned}$$

čímž je rovnost dokázána. □

Poznámka 47. Vztahem z lemmatu 64 se někdy definuje konvoluce jader $\Lambda^{*(m)}$ a $\Lambda^{*(n)}$, takže lemma 64 říká, že $\Lambda^{*(m+n)} = \Lambda^{*(m)} * \Lambda^{*(n)}$. Operace konvoluce jader je obecně asociativní a v našem případě i komutativní, protože $\Lambda^{*(m+n)}(\cdot | \nu)$ je symetrická míra (invariantní vůči permutacím v X^{m+n}). Papangelouovo jádro n -tého řádu lze tedy získat jako n -tou konvoluční mocninou jádra Λ^* .

Definice 81. *Gibbsovo jádro* příslušné jednoduchému bodovému procesu Φ je jádro G z \mathcal{N} do \mathcal{N} definované pro $\mathcal{U} \in \mathfrak{N}$ jako

$$G(\mathcal{U} | \nu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Lambda^{*(n)}(\{(x_1, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n \delta_{x_i} \in \mathcal{U}\} | \nu).$$

Poznámka 48. Nosič míry $G(\cdot | \nu)$ je obsažen v množině všech konečných měr na E .

Věta 65. Za předpokladu (21) platí pro libovolnou $B \in \mathcal{B}_0$ a $\mathcal{U} \in \mathfrak{N}(B)$

$$G(\mathcal{U} | \Phi|_{B^c}) = \frac{\mathbb{P}(\Phi|_B \in \mathcal{U} | \Phi|_{B^c})}{\mathbb{P}(\Phi(B) = 0 | \Phi|_{B^c})} \quad \text{s.j.}$$

Důkaz: Za předpokladu (21) je dokazovaná rovnost ekvivalentní rovnosti

$$\mathbb{E} [G(\mathcal{U} | \Phi|_{B^c}) \mathbf{1}_{\{\Phi(B)=0\}} | \Phi|_{B^c}] = \mathbb{P}(\Phi|_B \in \mathcal{U} | \Phi|_{B^c}) \quad \text{s.j.}$$

Pro ověření této rovnosti stačí ukázat, že integrály přes množinu $[\Phi|_{B^c} \in \mathcal{V}]$ se rovnají pro libovolnou $\mathcal{V} \in \mathfrak{N}(B^c)$. Na levé straně dostaneme

$$\begin{aligned}
\int_{[\Phi(B)=0, \Phi|_{B^c} \in \mathcal{V}]} G(\mathcal{U} | \Phi|_{B^c}) d\mathbb{P} &= \int_{\{\mu(B)=0, \mu|_{B^c} \in \mathcal{V}\}} G(\mathcal{U} | \mu) Q(d\mu) \\
&= \int_{\{\mu(B)=0, \mu|_{B^c} \in \mathcal{V}\}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Lambda^{*(n)} \left(\left\{ \sum_{i=1}^n \delta_{x_i} \in \mathcal{U} \right\} | \mu \right) Q(d\mu) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} C^{ln} \left(\left\{ \sum_{i=1}^n \delta_{x_i} \in \mathcal{U} \right\} \times \{\mu(B) = 0, \mu|_{B^c} \in \mathcal{V}\} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\{\mu(B)=n, \mu - \sum_{i=1}^n \delta_{x_i} \in \mathcal{V}\}} \mu^{[n]} \left(\left\{ (x_1, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n \delta_{x_i} \in \mathcal{U} \right\} \right) Q(d\mu) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\Phi(B) = n, \Phi|_B \in \mathcal{U}, \Phi|_{B^c} \in \mathcal{V}) = \mathbb{P}(\Phi|_B \in \mathcal{U}, \Phi|_{B^c} \in \mathcal{V}),
\end{aligned}$$

což se rovná integrálu z pravé strany a důkaz je hotov. \square

Definice 82. Lokální specifikací (local specification) bodového procesu Φ tvoří systém jader $\{\pi_B : B \in \mathcal{B}_0\}$ z $\mathcal{N}(B^c)$ do $\mathcal{N}(B)$ definovaných jako

$$\pi_B(\mathcal{U} | \mu) = G(\mathcal{U} | \mu) \mathbb{P}(\Phi(B) = 0 | \Phi|_{B^c} = \mu), \quad \mathcal{U} \in \mathfrak{N}(B), \mu \in \mathcal{N}(B^c).$$

Poznámka 49. Podle věty 65 jsou lokální specifikace rovny podmíněným rozdělením procesu v omezené oblasti za podmínky jeho stavu vně této oblasti.

Příklad: Pro Poissonův bodový proces Φ s difúzní mírou intenzity $\Lambda \in \mathcal{M}$ a rozdělením Π je $\Lambda^{*(n)}(\cdot | \mu) = \Lambda^n(\cdot)$ a

$$G(\mathcal{U} | \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Lambda^n(\{(x_1, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n \delta_{x_i} \in \mathcal{U}\}) = e^{\Lambda(B)} \Pi(\mathcal{U}), \quad \mathcal{U} \in \mathfrak{N}(B).$$

Lokální specifikace splývají s rozdělením Π .

Příklad: Pro markovský bodový proces Φ na \mathbb{R}^d s hustotou $p(\mu) = \frac{1}{Z} \exp\{-U(\mu)\}$ je Papangelouova podmíněná intenzita $\lambda^*(x, \mu) = e^{-E(x, \mu)}$, kde $E(x, \mu) = U(\mu + \delta_x) - U(\mu)$ je energie potřebná k doplnění bodu x ke konfiguraci $\text{supp } \mu$. Mějme dáno $E(x, \mu)$ a položme

$$\Lambda^*(B | \mu) = \int_B e^{-E(x, \mu)} \Lambda(dx).$$

Předpokládejme, že $E(x, \mu)$ závisí jen na x a $\mu|_{\partial\{x\}}$ a splňuje podmínku symetrie:

$$E(x, \mu) + E(y, \mu + \delta_x) = E(x, \mu + \delta_y) + E(y, \mu).$$

Pak můžeme definovat symetrická jádra $\Lambda^{*(n)} = \Lambda^* * \dots * \Lambda^*$ z \mathcal{N} do $E^{[n]}$ a Gibbsovo jádro G z \mathcal{N} do \mathcal{N} . Za předpokladu $Z_B(\mu) := G(\mathcal{N}(B) | \mu) < \infty$, $B \in \mathcal{B}_0$, $\mu \in \mathcal{N}(B^c)$, můžeme položit $\pi_B(\cdot | \mu) = \frac{G(\cdot | \mu)}{Z_B(\mu)}$ pro $\mu \in \mathcal{N}(B^c)$. Pak π_B jsou pravděpodobnostní jádra, splňují podmínku konzistence a za obecných předpokladů k nim existuje jednoduchý bodový proces Φ na E takový, že $\pi_B(\mathcal{U} | \Phi|_{B^c}) = \mathbb{P}(\Phi|_B \in \mathcal{U} | \Phi|_{B^c})$ s.j. pro každé $\mathcal{U} \in \mathcal{N}(B)$.

Definice 83. Bodový proces Φ je *Gibbsův*, jestliže jeho lokální specifikace splňují $\pi_B(\mathcal{U} | \mu) = \pi_B(\mathcal{U} | \mu|_{\partial B})$ pro $\mathcal{U} \in \mathfrak{N}(B)$, $\mu \in \mathcal{N}(B^c)$.

4.6 Nehomogenní bodové procesy

Uvažujme speciální třídu bodových procesů na \mathbb{R}^d , která připouští nekonstantní funkci intenzity, ale vyžaduje, aby charakteristiky druhého řádu byly invariantní vůči posunutím.

Definice 84. Nechť Φ je bodový proces s funkcí intenzity λ . Předpokládejme, že

$$\mathcal{K}_{\text{inhom}}(B) = \int_{\mathcal{N}} \int_{B+x} \frac{1}{\lambda(y)} \mu(dy) P_x^!(d\mu), \quad B \in \mathcal{B}^d,$$

nezávisí na $x \in \mathbb{R}^d$. Potom se Φ nazývá *po převážení funkcí intenzity slabě stacionární (second-order intensity reweighted stationary)* bodový proces. Pro takovýto proces můžeme zavést *nehomogenní K-funkci*

$$K_{\text{inhom}}(r) = \mathcal{K}_{\text{inhom}}(b(o, r)), \quad r > 0.$$

Lemma 66. Nechť Φ je po převážení funkcí intenzity slabě stacionární, pak pro libovolné $A \in \mathcal{B}^d$ s kladnou a konečnou Lebesgueovou mírou ($0 < |A| < \infty$) platí

$$\mathcal{K}_{\text{inhom}}(B) = \frac{1}{|A|} \mathbb{E} \sum_{X, Y \in \Phi}^{\neq} \frac{\mathbf{1}_{[X \in A, Y - X \in B]}}{\lambda(X)\lambda(Y)}, \quad B \in \mathcal{B}^d. \quad (24)$$

Důkaz: Aplikujme Campbellovu-Meckeovu větu (věta 41) na funkci

$$h(x, \mu) = \frac{\mathbf{1}_{[x \in A]}}{\lambda(x)|A|} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mathbf{1}_{[y-x \in B]}}{\lambda(y)} \mu(dy),$$

pak

$$\mathbb{E} \sum_{X \in \text{supp } \Phi} h(X, \Phi - \delta_X) = \frac{1}{|A|} \mathbb{E} \sum_{X \in \text{supp } \Phi} \frac{\mathbf{1}_{[X \in A]}}{\lambda(X)} \sum_{Y \in \Phi, Y \neq X} \frac{\mathbf{1}_{[Y-X \in B]}}{\lambda(Y)}$$

a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathcal{N}} h(x, \nu) P_x^!(d\nu) \Lambda(dx) &= \frac{1}{|A|} \int_A \int_{\mathcal{N}} \int_{B+x} \frac{1}{\lambda(x)\lambda(y)} \nu(dy) P_x^!(d\nu) \lambda(x) dx \\ &= \frac{1}{|A|} \int_A \mathcal{K}_{\text{inhom}}(B) dx = \mathcal{K}_{\text{inhom}}(B). \end{aligned}$$

□

Poznámka 50. Všimněme si, že pravá strana v (24) je dobře definována, protože $\lambda(X) > 0$ s.j. pro všechna $X \in \text{supp } \Phi$.

Lemma 67. Každý stacionární bodový proces Φ je po převážení funkcí intenzity slabě stacionární a platí $\mathcal{K}_{\text{inhom}}(B) = \mathcal{K}(B)$ pro každé $B \in \mathcal{B}^d$, kde \mathcal{K} je redukovaná momentová míra druhého řádu procesu Φ .

Důkaz: Pro stacionární bodové procesy je $P_x^!(\cdot) = P_o^!(t_x^{-1}\cdot)$, a tak

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{N}} \int_{B+x} \frac{1}{\lambda(y)} \mu(dy) P_x^!(d\mu) &= \int_{\mathcal{N}} \int_{B+x} \frac{1}{\lambda(y)} (t_x \mu)(dy) P_o^!(d\mu) \\ &= \int_{\mathcal{N}} \int_B \frac{1}{\lambda(y)} \mu(dy) P_o^!(d\mu) \\ &= E_o^! \sum_{Y \in \Phi \cap B} \frac{1}{\lambda(Y)} = \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}_o^! \Phi(B) = \frac{1}{\lambda} \lambda \mathcal{K}(B) = \mathcal{K}(B). \end{aligned}$$

□

Lemma 68. Každý Poissonův bodový proces s funkcí intenzity λ je po převážení funkcí intenzity slabě stacionární a platí $\mathcal{K}_{\text{inhom}}(B) = |B|$, $B \in \mathcal{B}^d$.

Důkaz: S využitím Slivnyakovy věty (věta 42) dostaneme

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{\text{inhom}}(B) &= \int_{\mathcal{N}} \int_{B+x} \frac{1}{\lambda(y)} \mu(dy) P_x^!(d\mu) \\ &= \mathbb{E} \int_{B+x} \frac{1}{\lambda(y)} \Phi(dy) = \mathbb{E} \sum_{Y \in B+x} \frac{1}{\lambda(Y)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{[y \in B+x]} \frac{1}{\lambda(y)} \lambda(y) dy = |B|.\end{aligned}$$

□

Věta 69. *Nechť Φ je bodový proces na \mathbb{R}^d takový, že existuje párová korelační funkce a je invariantní vůči posunutím, tj. $g(x, y) = g(y - x)$. Potom Φ je po převážení funkcí intenzity slabě stacionární a*

$$\mathcal{K}_{\text{inhom}}(B) = \int_B g(u) du, \quad B \in \mathcal{B}^d.$$

Důkaz: Označíme-li

$$\mathcal{K}_{\text{inhom}}^x(B) = \int_{\mathcal{N}} \int_{B+x} \frac{1}{\lambda(y)} \mu(dy) P_x^!(d\mu), \quad B \in \mathcal{B}^d,$$

potom pro libovolné $A \in \mathcal{B}^d$ je

$$\begin{aligned}\int_A \mathcal{K}_{\text{inhom}}(B) dx &= \int_A \int_{\mathcal{N}} \int_{B+x} \frac{1}{\lambda(x)\lambda(y)} \mu(dy) P_x^!(d\mu) \Lambda(dx) \\ &= \mathbb{E} \sum_{X \in \text{supp } \Phi \cap A} \sum_{Y \in \text{supp } \Phi, Y \neq X} \frac{\mathbf{1}_{[Y \in B+X]}}{\lambda(X)\lambda(Y)} = \mathbb{E} \sum_{X, Y \in \text{supp } \Phi}^{\neq} \frac{\mathbf{1}_{[X \in A]} \mathbf{1}_{[Y \in B+X]}}{\lambda(X)\lambda(Y)} \\ &= \int \int \frac{\mathbf{1}_{[x \in A, y-x \in B]}}{\lambda(x)\lambda(y)} \alpha^{(2)}(dx, dy) = \int \int \mathbf{1}_{[x \in A, y-x \in B]} g(x, y) dx dy \\ &= \int \int \mathbf{1}_{[x \in A, u \in B]} g(u) dx du = |A| \int_B g(u) du.\end{aligned}$$

Odtud nyní vidíme, že $\mathcal{K}_{\text{inhom}}^x(B) = \int_B g(u) du$ nezávisí na x .

□

Poznámka 51. Za předpokladů věty 69 je redukovaná momentová míra druhého řádu $\mathcal{K}_{\text{inhom}}$ absolutně spojitá vzhledem k Lebesgueově míře a její hustota je rovna párové korelační funkci g . Příkladem bodového procesu, kdy redukovaná momentová míra druhého řádu není absolutně spojitá, je náhodně posunutá pravidelná mříž (viz cvičení).

Další třídou nehomogenních bodových procesů jsou konečné bodové procesy s nehomogenními interakcemi.

Jiné možnosti, jak obdržet modely pro nehomogenní bodové vzorky, jsou založeny na operacích, které z homogenního procesu vyrobí nehomogenní bodový proces: nezávislé zředění (definice 63), lokální škálování a transformace. Podle věty 56 vznikne nezávislým ztenčováním bodového procesu s konstantní funkcí intenzity λ na množině B bodový proces s funkcí intenzity danou součinem λ a funkce udávající pravděpodobnosti zachování bodů, která nemusí být konstantní.

5. Kótované bodové procesy

5.1 Základní definice

Kótovaný bodový proces dostaneme z bodového procesu, pokud každému bodu přiřadíme určitou veličinu (tzv. kótu).

Definice 85. Uvažujme úplný separabilní lokálně kompaktní metrický prostor \mathbb{M} , kterému budeme říkat *prostor kót (mark space)*, jeho příslušnou borelovskou σ -algebru označíme jako $\mathcal{B}(\mathbb{M})$. *Kótovaný bodový proces (marked point process)* je jednoduchý bodový proces $\Phi_{\mathbb{M}}$ na prostoru $\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}$ takový, že

jeho míra intenzity Λ_m splňuje $\Lambda_m(B \times \mathbb{M}) < \infty$ pro každé $B \in \mathcal{B}_0^d$. Pro každý kótovaný bodový proces můžeme uvažovat příslušný *nekótovaný bodový proces* (*unmarked point process*) nebo také *podkladový proces* (*ground process*) Φ daný projekcí na první složku prostoru $\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}$: $\Phi(B) = \Phi_m(B \times \mathbb{M})$, $B \in \mathcal{B}^d$.

Poznámka 52. V češtině se někdy používá místo slova *kóta* označení *značka* a mluví se o *značkováných bodových procesech*.

Poznámka 53. Každý bodový proces na \mathbb{R}^d lze reprezentovat jako kótovaný bodový proces s prostorem kót \mathbb{N} . Kóty představují násobnosti bodů.

Je dobré si uvědomit, že ne každý bodový proces na $\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}$ je kótovaný bodový proces. Například když za prostor kót vezmeme $\mathbb{M} = \mathbb{R}$ a budeme uvažovat stacionární Poissonův bodový proces na \mathbb{R}^{d+1} (poslední složka odpovídá kóte) s kladnou intenzitou, tak pro ten je počet bodů procesu v množině $B \times \mathbb{M}$ ($B \in \mathcal{B}_0^d$, $|B| > 0$) skoro jistě nekonečný, tedy $\Lambda_m(B \times \mathbb{M}) = \infty$.

Nekótovaný bodový proces Φ dostaneme z procesu Φ_m , pokud zapomeneme na kóty a bereme do úvahy pouze polohy bodů. Mohlo by se stát, že mezi atomy Φ_m budou (X, M_1) a (X, M_2) , kde $X \in \mathbb{R}^d$ a $M_1 \neq M_2$ jsou dvě různé kóty z prostoru \mathbb{M} . Pak by proces Φ nebyl jednoduchý (bod X by byl počítán dvakrát). Někdy proto budeme navíc předpokládat, že Φ je jednoduchý bodový proces. Budeme-li chtít pak mluvit o kóte příslušné bodu $X \in \text{supp } \Phi$, budeme ji značit $M(X)$, tedy $(X, M(X)) \in \text{supp } \Phi_m$.

Z lemmatu 21 plyne, že kótovaný bodový proces můžeme vyjádřit konečným nebo spočetným součtem Diracových měr a jednotlivé atomy mohou být očíslovány měřitelným způsobem:

$$\Phi_m = \sum_{i=1}^{\Phi(\mathbb{R}^d)} \delta_{(X_i, M_i)}. \quad (25)$$

Prostor kót může být celkem komplikovaný. My se později podrobněji zaměříme na diskrétní nebo kategoričké kóty (podkapitola 5.3) a reálné kóty (podkapitola 5.4). Příklad, kdy \mathbb{M} je prostor neprázdných kompaktních množin, hraje důležitou roli ve stochastické geometrii (viz [12]). Funkcionální kóty jsou studovány ve článku [4]. Nejjednodušší prostor kót je konečná množina, pak můžeme její prvky bez újmy na obecnosti očíslovat $1, \dots, k$.

Definice 86. Kótovaný bodový proces Φ_m s prostorem kót $\mathbb{M} = \{1, \dots, k\}$ označujeme jako *vícerozměrný bodový proces* (*multivariate point process*). Lze na něj pohlížet jako na k -tici bodových procesů na \mathbb{R}^d : $\Phi_m = (\Phi_1, \dots, \Phi_k)$, kde $\Phi_i(\cdot) = \Phi_m(\cdot \times \{i\})$, $i = 1, \dots, k$. Pokud chceme zdůraznit počet složek, mluvíme o *k-rozměrném bodovém procesu* (speciálně dvourozměrném, trojrozměrném atd.).

Stacionární kótované bodové procesy jsou takové, jejichž rozdělení je invariantní vůči transformacím, které posunou body procesu, ale zanechají kóty nezměněny. Podobně rozdělení izotropních kótovaných bodových procesů se nezmění po rotaci bodů kolem počátku v \mathbb{R}^d a zachování kót.

Definice 87. Řekneme, že kótovaný bodový proces Φ_m je *stacionární*, jestliže rozdělení $t_z \Phi_m$ je stejné jako rozdělení Φ_m pro libovolné $z \in \mathbb{R}^d$, kde $(t_z \mu)(B \times L) = \mu((B - z) \times L)$, $B \in \mathcal{B}^d$, $L \in \mathcal{B}(\mathbb{M})$, $\mu \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{M})$. Kótovaný bodový proces Φ_m je *izotropní*, jestliže $R_O \Phi_m$ a Φ_m mají stejné rozdělení pro libovolnou rotaci O kolem počátku, kde $(R_O \mu)(B \times L) = \mu(O^{-1}B \times L)$.

Poznámka 54. Pokud je Φ_m stacionární (příp. izotropní) kótovaný bodový proces, potom i příslušný nekótovaný bodový proces Φ je stacionární (příp. izotropní). Intenzitou stacionárního kótovaného bodového procesu pak rozumíme intenzitu bodového procesu Φ .

Věta 70. *Je-li Φ_m stacionární kótovaný bodový proces s konečnou a kladnou intenzitou λ , pak existuje (jednoznačně určená) pravděpodobnostní míra \mathbb{Q} na \mathbb{M} tak, že míra intenzity procesu Φ_m má tvar*

$$\Lambda_m(B \times L) = \lambda |B| \mathbb{Q}(L), \quad B \in \mathcal{B}^d, \quad L \in \mathcal{B}(\mathbb{M}). \quad (26)$$

Důkaz: Pro každou $L \in \mathcal{B}(\mathbb{M})$ uvažujme lokálně konečnou míru $\mu_L(B) = \Lambda_m(B \times L)$, $B \in \mathcal{B}^d$. Z předpokladu stacionarity plyne, že je to translačně invariantní míra na \mathbb{R}^d , a proto je násobkem Lebesgueovy míry: $\mu_L(B) = \lambda_L |B|$. Položíme-li $\mathbb{Q}(L) = \frac{\lambda_L}{\lambda}$, tak snadno nahlédneme, že \mathbb{Q} je pravděpodobnostní míra, která splňuje (26). □

Definice 88. Praviděpodobnostní míra \mathbb{Q} z věty 70 se nazývá *stacionární rozdělení kót* (*stationary mark distribution*). Náhodný element M_0 v prostoru \mathbb{M} (měřitelné zobrazení z $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ do $(\mathbb{M}, \mathcal{B}(\mathbb{M}))$) s rozdělením \mathbb{Q} budeme nazývat *typická kóta* (*typical mark*).

Důsledek 71. (*Campbellova věta prvního řádu pro stacionární kótované bodové procesy*) Necht' Φ_m je stacionární kótovaný bodový proces a h je nezáporná měřitelná funkce na $\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}$. Pak platí

$$\mathbb{E} \sum_{(X, M) \in \text{supp } \Phi_m} h(X, M) = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{M}} h(x, m) \mathbb{Q}(dm) dx.$$

Důkaz: Tvrzení plyne z věty 34 a věty 70. □

Faktoriální momentovou míra druhého řádu kótovaného bodového procesu Φ_m značíme $\alpha_m^{(2)}$. Pro pevné $L_1, L_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{M})$ je zřejmě míra $\alpha_m^{(2)}(\cdot \times L_1 \times \cdot \times L_2)$ absolutně spojitá vzhledem k míře $\alpha^{(2)}(\cdot \times \cdot) = \alpha_m^{(2)}(\cdot \times \mathbb{M} \times \cdot \times \mathbb{M})$, tj. k faktoriální momentové míře druhého řádu nekótovaného bodového procesu Φ . Pokud předpokládáme, že $\alpha^{(2)}$ je σ -konečná míra, pak (pro pevné $L_1, L_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{M})$) existuje Radonova-Nikodymova derivace $P_{x_1 x_2}(L_1 \times L_2)$. Podobně jako u zavedení Palmova rozdělení můžeme uvažovat regulární verzi, tj. takovou, že pro pevné $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$ je $P_{x_1 x_2}(\cdot \times \cdot)$ pravděpodobnostní míra.

Věta 72. Necht' Φ_m je kótovaný bodový proces takový, že nekótovaný bodový Φ má σ -konečnou faktoriální momentovou míru druhého řádu $\alpha^{(2)}$. Potom existuje markovské jádro $(x_1, x_2) \mapsto P_{x_1 x_2}$ z $(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d \times \mathcal{B}^d)$ do $(\mathbb{M} \times \mathbb{M}, \mathcal{B}(\mathbb{M}) \times \mathcal{B}(\mathbb{M}))$ takové, že

$$\alpha_m^{(2)}(B_1 \times L_1 \times B_2 \times L_2) = \int_{B_1 \times B_2} P_{x_1 x_2}(L_1 \times L_2) \alpha^{(2)}(d(x_1, x_2)),$$

$B_1, B_2 \in \mathcal{B}^d, L_1, L_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{M})$.

Důkaz: Tvrzení plyne z věty 37 o desintegraci. □

Definice 89. Rozdělení $P_{x_1 x_2}$ z věty 72 označujeme jako *dvoubodové rozdělení kót* (*two-point mark distribution*) v bodech $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d, x_1 \neq x_2$.

Poznámka 55. Dvoubodové rozdělení kót můžeme interpretovat jako rozdělení kót v bodech x_1 a x_2 za podmínky, že x_1 a x_2 jsou body procesu. Pokud je Φ_m stacionární a izotropní, závisí rozdělení $P_{x_1 x_2}$ jen na vzdálenosti $r = \|x_1 - x_2\|$ bodů x_1 a x_2 . V tom případě budeme místo $P_{x_1 x_2}$ psát P_{or} . Střední hodnotu vzhledem k P_{or} budeme značit \mathbb{E}_{or} .

Palmovo rozdělení (resp. redukované Palmovo rozdělení) kótovaného bodového procesu Φ_m v bodě (x, m) označíme P_x^m (resp. P_x^{lm}). Pro stacionární Φ_m je $P_x^m(\cdot) = P_o^m(t_x^{-1} \cdot)$, resp. $P_x^{lm}(\cdot) = P_o^{lm}(t_x^{-1} \cdot)$.

5.2 Modely kótování

Definice 90. Poissonův bodový proces Φ_m na $\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}$ s difúzní mírou intenzity Λ_m takovou, že $\Lambda_m(B \times \mathbb{M}) < \infty$ pro každou $B \in \mathcal{B}_0^d$, nazýváme *Poissonův kótovaný bodový proces* s mírou intenzity Λ_m .

Poznámka 56. Nekótovaný bodový proces Φ je Poissonův bodový proces na \mathbb{R}^d s mírou intenzity $\Lambda(\cdot) = \Lambda_m(\cdot \times \mathbb{M})$.

Poznámka 57. Je-li \mathbb{M} konečná množina, řekněme $\{1, \dots, k\}$, mluvíme o Poissonově vícerozměrném bodovém procesu $\Phi_m = (\Phi_1, \dots, \Phi_k)$. V tom případě přímo z definice plyne, že všechny podprocesy $\Phi_i, i = 1, \dots, k$, tvoří nezávislé Poissonovy bodové procesy na \mathbb{R}^d .

Jiný způsob, kterak lze obdržet Poissonův kótovaný bodový proces, vychází z tzv. nezávislého kótování. V tuto chvíli se bude hodit reprezentovat kótovaný bodový proces pomocí (25).

Definice 91. Kótovaný bodový proces $\Phi_m = \sum_i \delta_{(X_i, M_i)}$ se nazývá *nezávisle kótovaný* (*independently marked*), pokud náhodné kóty $\{M_i\}$ jsou nezávislé stejně rozdělené a nezávislé s nekótovaným bodovým procesem $\Phi = \sum_i \delta_{X_i}$. Rozdělení \mathbb{Q} kót $\{M_i\}$ se nazývá *rozdělení kót* (*mark distribution*) kótovaného bodového procesu Φ_m .

Věta 73. Necht' Φ_m je nezávisle kótovaný bodový proces s rozdělením kót \mathbb{Q} . Potom jeho míra intenzity je

$$\Lambda_m(B \times L) = \Lambda(B)\mathbb{Q}(L), \quad B \in \mathcal{B}^d, L \in \mathcal{B}(\mathbb{M}), \quad (27)$$

kde Λ je míra intenzity nekótovaného bodového procesu Φ . Pokud je Φ_m stacionární, tak rozdělení kót splývá se stacionárním rozdělením kót z definice 88.

Důkaz: Označme $\tau = \Phi_m(\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}) = \Phi(\mathbb{R}^d)$. Pro $B \in \mathcal{B}^d$ a $L \in \mathcal{B}(\mathbb{M})$ je

$$\begin{aligned} \Lambda_m(B \times L) &= \mathbb{E} \sum_{i=1}^{\tau} \delta_{(X_i, M_i)}(B \times L) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}} \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{[\tau=k]} \sum_{i=1}^k \delta_{(X_i, M_i)}(B \times L) \right] \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}} \sum_{i=1}^k \mathbb{E} \mathbf{1}_{[\tau=k]} \mathbf{1}_{[X_i \in B, M_i \in L]} = \sum_{k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}} \sum_{i=1}^k \mathbb{E} \mathbf{1}_{[\tau=k]} \mathbf{1}_{[X_i \in B]} \mathbb{E} \mathbf{1}_{[M_i \in L]} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}} \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{[\tau=k]} \sum_{i=1}^k \delta_{X_i}(B) \right] \mathbb{Q}(L) = \mathbb{E} \Phi(B) \cdot \mathbb{Q}(L) = \Lambda(B)\mathbb{Q}(L). \end{aligned}$$

Pro stacionární kótovaný bodový proces je $\Lambda(B) = \lambda|B|$. Z (26) tak plyne, že stacionární rozdělení kót splývá s rozdělením kót. □

Princip nezávislého kótování jsme již několikrát použili. Objevuje se v definici nezávislého zředění (definice 63) nebo Matérnova bodového procesu s pevným jádrem typu II (definice 64). Při důkazu věty 58 jsme vlastně využili toho, že nezávislým kótováním Poissonova bodového procesu dostaneme Poissonův kótovaný bodový proces.

Věta 74. Uvažujme nezávisle kótovaný bodový proces Φ_m takový, že příslušný nekótovaný bodový proces Φ je Poissonův bodový proces na \mathbb{R}^d . Potom Φ_m je Poissonův kótovaný bodový proces.

Důkaz: Prázdné pravděpodobnosti Poissonova kótovaného bodového procesu jsou $\exp\{-\Lambda_m(A)\}$, $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{M})$. Opět označíme $\tau = \Phi_m(\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}) = \Phi(\mathbb{R}^d)$ a spočteme prázdné pravděpodobnosti procesu Φ_m :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Phi_m(A) = 0) &= \sum_{k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}} \mathbb{P}(\tau = k, \cap_{i=1}^k [(X_i, M_i) \notin A]) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}} \mathbb{E} \mathbf{1}_{[\tau=k]} \prod_{i=1}^k \mathbf{1}_{[(X_i, M_i) \notin A]} = \sum_{k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}} \mathbb{E} \mathbf{1}_{[\tau=k]} \prod_{i=1}^k \int_{\mathbb{M}} \mathbf{1}_{[(X_i, m) \notin A]} \mathbb{Q}(dm) \\ &= \mathbb{E} \prod_{i=1}^{\tau} \int_{\mathbb{M}} \mathbf{1}_{[(X_i, m) \notin A]} \mathbb{Q}(dm) = \mathbb{E} \prod_{i=1}^{\tau} \left(1 - \int_{\mathbb{M}} \mathbf{1}_{[(X_i, m) \in A]} \mathbb{Q}(dm) \right). \end{aligned}$$

Nyní stačí využít toho, že pro Poissonův bodový proces na \mathbb{R}^d s mírou intenzity Λ platí (viz lemma 36)

$$\mathbb{E} \prod_{X \in \text{supp } \Phi} f(X) = \exp \left\{ - \int_{\mathbb{R}^d} (1 - f(x)) \Lambda(dx) \right\}$$

pro libovolnou měřitelnou funkci $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$. Dostaneme

$$\mathbb{P}(\Phi_m(A) = 0) = \exp \left\{ - \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{M}} \mathbf{1}_{[(x, m) \in A]} \mathbb{Q}(dm) \Lambda(dx) \right\},$$

což je podle věty 73 přesně $\exp\{-\Lambda_m(A)\}$. Z důsledku 28 pak plyne, že Φ_m má stejné rozdělení jako Poissonův kótovaný bodový proces. □

Předchozí věta říká, že aplikováním nezávislého kótování na Poissonův bodový proces obdržíme Poissonův kótovaný bodový proces. Ne každý Poissonův kótovaný bodový proces lze však získat tímto

postupem. Podle věty 73 má výsledný proces míru intenzity součinného tvaru. Poissonovy kótované bodové procesy s obecnou mírou intenzity nedostaneme nezávislým kótováním. Příslušný nekótovaný bodový proces je sice stále Poissonův, ale kóty mohou obecně záviset na polohách. Ovšem ve stacionárním případě tomu tak není.

Věta 75. *Stacionární Poissonův kótovaný bodový proces je nezávisle kótovaný.*

Důkaz: Můžeme předpokládat, že míra intenzity je nenulová (jinak není, co dokazovat). Pak reprezentace (25) je $\Phi_m = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{(X_i, M_i)}$, neboť ze stacionarity plyne $\tau = \Phi_m(\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}) = \infty$ s.j. Podle věty 70 máme $\Lambda_m(B \times L) = \lambda|B|\mathbb{Q}(L)$. Uvažujme posloupnost $\{\tilde{M}_i\}$ nezávislých stejně rozdělených náhodných elementů s hodnotami v \mathbb{M} a rozdělením \mathbb{Q} , která je nezávislá na nekótovaném bodovém procesu $\Phi = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{X_i}$. Potom $\tilde{\Phi}_m = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{(X_i, \tilde{M}_i)}$ je nezávisle kótovaný bodový proces, jehož míra intenzity je podle věty 73 rovna $\Lambda_m(B \times L) = \lambda|B|\mathbb{Q}(L)$. Proto mají Φ_m a $\tilde{\Phi}_m$ stejná rozdělení. \square

Poznámka 58. Předpoklad stacionarity jsme využili jenom k tvaru míry intenzity. Stejným způsobem dostaneme, že každý Poissonův kótovaný bodový proces s mírou intenzity součinného tvaru $\Lambda_m(B \times L) = \Lambda(B)\mathbb{Q}(L)$ je nezávisle kótovaný.

Nezávislé kótování dává nejjednodušší model pro kótované bodové procesy: kóty jsou nezávislé na polohách a nezávislé navzájem mezi sebou. U vícerozměrných bodových procesů můžeme uvažovat jiný model, který významně využívá nezávislost.

Definice 92. Vícerozměrný bodový proces $\Phi_m = (\Phi_1, \dots, \Phi_k)$ splňuje *model náhodné superpozice (random superposition)*, jestliže podprocesy Φ_1, \dots, Φ_k jsou nezávislé.

Nezávislé kótování a náhodná superpozice jsou obecně odlišné, ale splývají pro stacionární Poissonův vícerozměrný bodový proces (věta 75).

Jeden z možných přístupů, který připouští závislé kóty, je tzv. geostatistické kótování.

Definice 93. Nechť Φ je jednoduchý bodový proces na \mathbb{R}^d a $\{M(x) : x \in \mathbb{R}^d\}$ je náhodné pole s hodnotami v prostoru kót \mathbb{M} , které je nezávislé s Φ . Potom $\Phi_m = \sum_{X \in \text{supp } \Phi} \delta_{(X, M(X))}$ je *geostatistický kótovaný bodový proces*.

Prostorové korelace v náhodném poli $\{M(x) : x \in \mathbb{R}^d\}$ způsobují korelovanost kót procesu Φ_m . I když je geostatistické kótování vhodné v řadě aplikací, tak předpoklad nezávislosti kót na polohách je celkem omezující pro reálné použití.

Jako příklad situace, kdy jsou kóty závislé na polohách, uveďme tzv. *zkonstruované kóty (constructed marks)*. Ty jsou vytvořeny určitým mechanismem z daných nekótovaných bodů. Konstrukce obvykle odráží geometrické rozmístění bodů. Nejjednodušším příkladem může být vzdálenost bodu procesu k nejbližšímu sousedu: $M(X) = d(X, \Phi \setminus \{X\})$, nebo počet dalších bodů procesu ve vzdálenosti menší než dané $r > 0$: $M(X) = \Phi(b(X, r)) - 1$.

5.3 Vícerozměrné bodové procesy

V této podkapitole se budeme věnovat procesům s kvalitativními kótami. Pro určitost budeme předpokládat, že prostor kót je $\mathbb{M} = \{1, \dots, k\}$. Vícerozměrný bodový proces byl zaveden v definici 86. Omezíme se na stacionární případ a definujeme základní číselné a funkcionální popisné charakteristiky, které zachycují prostorové aspekty kót.

Uvažujme tedy stacionární vícerozměrný proces $\Phi_m = (\Phi_1, \dots, \Phi_k)$. Bodové procesy Φ_i jsou rovněž stacionární a označme jejich intenzity λ_i , $i = 1, \dots, k$. Nekótovaný bodový proces $\Phi = \sum_{i=1}^k \Phi_i$ má intenzitu $\lambda = \sum_{i=1}^k \lambda_i$. Stacionární rozdělení kót \mathbb{Q} je atomická míra na \mathbb{M} , označme $p_i = \mathbb{Q}(\{i\})$ pravděpodobnost kóty i . Podle (26) je

$$\mathbb{E}\Phi_i(B) = \Lambda_m(B \times \{i\}) = \lambda p_i |B|,$$

a tudíž intenzita podprocesu Φ_i splňuje $\lambda_i = \lambda p_i$. Pravděpodobnost kóty i je dána podílem intenzity λ_i a celkové intenzity λ .

Nejprve zavedeme dvě číselné charakteristiky.

Definice 94. Nechť D_j je vzdálenost od počátku k nejbližšímu bodu procesu Φ_j . *Dvourozměrný index agregace* nebo také *dvourozměrný Clarkův-Evansův index* je definován jako

$$CE_{ij} = \frac{d(\lambda_j \omega_d)^{1/d}}{\Gamma(1/d)} \mathbb{E}_o^i D_j, \quad i, j = 1, \dots, k.$$

Poznámka 59. Index udává podíl střední vzdálenosti typického bodu s kótou i k nejbližšímu bodu procesu s kótou j u zadaného procesu ku stejné veličině pro Poissonův vícerozměrný bodový proces se stejnými intenzitami. To znamená, že pro Poissonův vícerozměrný bodový proces je $CE_{ij} = 1$. Hodnoty $CE_{ij} > 1$ indikují odpuzování mezi body s kótami i a j , zatímco hodnoty $CE_{ij} < 1$ ukazují na jejich přitahování. V případě $i = j$ dostáváme index agregace bodového procesu Φ_i (viz definice 55).

Definice 95. Označme i -tý nejbližší bod nekótovaného procesu Φ od počátku jako Z_i . *Index míšení* bere do úvahy p nejbližších sousedů typického bodu a udává střední podíl těch, které jsou odlišného typu. Je definován jako

$$\bar{M}_p = \frac{1}{p} \mathbb{E}_o^! \sum_{i=1}^p \mathbf{1}_{[M(o) \neq M(Z_i)]},$$

kde využíváme úmluvu, že $M(o)$ označuje kótu počátku a $M(Z_i)$ označuje kótu bodu Z_i .

Poznámka 60. Jestliže kolem typického bodu jsou spíše body s odlišnou kótou, pak index míšení nabývá velkých hodnot. Naopak v případě, že body s různými kótami mají tendenci se od sebe distancovat, nabývá index malých hodnot.

Nyní definujeme základní funkcionální charakteristiky pro stacionární vícerozměrné bodové procesy. Nechť $D_i(x) = d(x, \text{supp } \Phi_i)$ značí vzdálenost bodu x k nejbližšímu bodu procesu s kótou i . Nechť $D(x) = d(x, \text{supp } \Phi)$ značí vzdálenost bodu x k nejbližšímu bodu procesu s libovolnou kótou.

Definice 96. *Křížová distribuční funkce vzdálenosti nejbližšího souseda* nebo také *křížová G-funkce* je dána vztahem

$$G_{ij}(r) = P_o^i(D_j(o) \leq r), \quad r \geq 0.$$

Kondenzovanou G-funkci definujeme předpisem

$$G_i.(r) = P_o^i(D(o) \leq r), \quad r \geq 0.$$

Poznámka 61. Křížová G -funkce je distribuční funkce vzdálenosti bodu s kótou i k nejbližšímu sousedu s kótou j . Kondenzovaná G -funkce představuje distribuční funkci vzdálenosti bodu s kótou i k nejbližšímu bodu procesu s jakoukoli kótou.

Definice 97. Definujeme *křížovou J-funkci* předpisem

$$J_{ij}(r) = \frac{1 - G_{ij}(r)}{1 - F_j(r)}, \quad r \geq 0 : F_j(r) < 1,$$

kde $F_j(r)$ je kontaktní distribuční funkce bodového procesu Φ_j (viz definice 56). Dále zavedeme *kondenzovanou J-funkci* vztahem

$$J_i.(r) = \frac{1 - G_i.(r)}{1 - F(r)}, \quad r \geq 0 : F(r) < 1,$$

kde $F(r)$ je kontaktní distribuční funkce nekótovaného bodového procesu Φ .

Pro stacionární Poissonův vícerozměrný bodový proces je $G_{ij}(r) = 1 - e^{-\lambda_j \omega_d r^d}$, $G_i.(r) = 1 - e^{-\lambda \omega_d r^d}$, a proto $J_{ij}(r) = 1$ a $J_i.(r) = 1$. To, že křížová J -funkce je konstantně rovna 1, platí obecněji za předpokladu modelu náhodné superpozice. Pokud jsou totiž podprocesy Φ_i a Φ_j nezávislé, pak $G_{ij}(r) = F_j(r)$ a $J_{ij}(r) = 1$.

Definice 98. Nechť $J(r)$ je J -funkce bodového procesu Φ . Definujeme *I-funkci* vztahem

$$I(r) = \sum_{i=1}^k p_i J_{ii}(r) - J(r), \quad r \geq 0 : F(r) < 1.$$

Poznámka 62. Za předpokladu modelu náhodné superpozice je I -funkce identicky rovna nule. Odchytky od nulové funkce ukazují na přitažlivé nebo odpudivé vazby mezi body různého typu.

Definice 99. *Křížovou redukovanou momentovou míru druhého řádu* \mathcal{K}_{ij} definujeme pomocí vztahu

$$\lambda_j \mathcal{K}_{ij}(B) = \mathbb{E}_o^{l_i} \Phi_j(B), \quad B \in \mathcal{B}^d,$$

kde λ_j je intenzita podprocesu Φ_j . Dále definujeme *křížovou K -funkci* jako

$$K_{ij}(r) = \mathcal{K}_{ij}(b(o, r)), \quad r \geq 0.$$

Podobně zadefinujeme *kondenzovanou redukovanou momentovou míru druhého řádu* předpisem

$$\lambda \mathcal{K}_i(B) = \mathbb{E}_o^{l_i} \Phi(B), \quad B \in \mathcal{B}^d$$

a *kondenzovanou K -funkci* jako

$$K_i(r) = \mathcal{K}_i(b(o, r)), \quad r \geq 0.$$

Poznámka 63. Znamená to, že $\lambda_j K_{ij}(r)$ představuje střední počet bodů s kótou j umístěných v kouli o poloměru r a střed v typickém bodě s kótou i . Pro $i = j$ dostaneme K -funkci podprocesu Φ_i . Podobně $\lambda K_i(r)$ označuje střední počet bodů (s libovolnou kótou) v kouli o poloměru r a střed v typickém bodě s kótou i , přitom střed nezapočítáváme. Kondenzovanou K -funkci můžeme dostat z křížových K -funkcí pomocí vztahu

$$\lambda K_i(r) = \sum_{j=1}^k \lambda_j K_{ij}(r).$$

Je-li g párová korelační funkce vícerozměrného bodového procesu Φ_m , píšeme zkráceně $g_{ij}(x, y) = g((x, i), (y, j))$.

Věta 76. *Nechť existuje součinnová hustota druhého řádu $\lambda_m^{(2)}$ stacionárního vícerozměrného bodového procesu Φ_m . Křížová redukovaná momentová míra druhého řádu je absolutně spojitá vzhledem k Lebesgueově míře a platí*

$$\mathcal{K}_{ji}(B) = \int_B g_{ij}(u) du, \quad B \in \mathcal{B}^d.$$

Dále je symetrická ve smyslu

$$\mathcal{K}_{ij}(B) = \mathcal{K}_{ji}(-B), \quad B \in \mathcal{B}^d.$$

Pro křížovou K -funkci pak speciálně platí

$$K_{ij}(r) = K_{ji}(r), \quad r \geq 0.$$

Důkaz: Analogicky k důkazu věty 52 dostaneme

$$\mathcal{K}_{ij}(B) = \frac{1}{\lambda_i \lambda_j |A|} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{[x \in A, y-x \in B]} \alpha_{ij}^{(2)}(dx, dy),$$

kde $\alpha_{ij}^{(2)}(B_1 \times B_2) = \alpha_m^{(2)}(B_1 \times \{i\} \times B_2 \times \{j\})$. Pro součinnovou hustotu $\lambda_m^{(2)}((x, i), (y, j))$, použijme zkrácené označení $\lambda_{ij}^{(2)}(x, y)$. Ze stacionarity máme, že $\lambda_{ij}^{(2)}(x, y) = \lambda_{ij}^{(2)}(x - y)$ je funkcí rozdílu $x - y$. Z definice faktoriální momentové míry druhého řádu zřejmě plyne, že $\alpha_{ij}^{(2)}(B_1 \times B_2) = \alpha_{ji}^{(2)}(B_2 \times B_1)$, a proto $\lambda_{ij}^{(2)}(x, y) = \lambda_{ji}^{(2)}(y, x)$, neboli $\lambda_{ij}^{(2)}(u) = \lambda_{ji}^{(2)}(-u)$. S využitím tohoto zjištění získáváme

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{ij}(B) &= \frac{1}{\lambda_i \lambda_j |A|} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{[x \in A, y-x \in B]} \lambda_{ij}^{(2)}(x - y) dx dy \\ &= \frac{1}{\lambda_i \lambda_j |A|} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{[x \in A, u \in B]} \lambda_{ij}^{(2)}(-u) dx du \\ &= \frac{1}{\lambda_i \lambda_j |A|} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{[x \in A, u \in B]} \lambda_{ji}^{(2)}(u) dx du = \frac{1}{\lambda_i \lambda_j} \int_B \lambda_{ji}^{(2)}(u) du. \end{aligned}$$

Podobnou úpravou dojdeme k tomu, že

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{ji}(-B) &= \frac{1}{\lambda_i \lambda_j |A|} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{[x \in A, y-x \in -B]} \lambda_{ji}^{(2)}(x-y) dx dy \\ &= \frac{1}{\lambda_i \lambda_j |A|} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{[x \in A, u \in B]} \lambda_{ji}^{(2)}(u) dx du = \frac{1}{\lambda_i \lambda_j} \int_B \lambda_{ji}^{(2)}(u) du.\end{aligned}$$

□

Důsledek 77. Pro stacionární a izotropní vícerozměrný bodový proces je křížová párová korelační funkce symetrická: $g_{ij}(r) = g_{ji}(r)$. Dále platí následující vztah mezi křížovou párovou korelační funkcí a křížovou K -funkcí:

$$g_{ij}(r) = \frac{K'_{ij}(r)}{\sigma_d r^{d-1}}, \quad r > 0.$$

Důkaz: Je analogický důkazu vztahu mezi párovou korelační funkcí a K -funkcí pro bodové procesy (důsledek). Věta 76 říká, že křížová párová korelační funkce je hustotou křížové redukované momentové míry druhého řádu:

$$\mathcal{K}_{ji}(B) = \int_B g_{ij}(u) du.$$

To s využitím izotropie a polární dekompozice Lebesgueovy míry vede na

$$K_{ij}(r) = \int_{b(o,r)} g_{ij}(\|u\|) du = \int_0^r \sigma_d s^{d-1} g(s) ds.$$

□

5.4 Procesy s kvantitativními kótami

Nyní přejdeme od kvalitativních kót ke kvantitativním. Budeme předpokládat, že prostor kót je $\mathbb{M} = \mathbb{R}$. V celé podkapitole bude Φ_m stacionární kótovaný bodový proces s intenzitou λ a se stacionárním rozdělením kót \mathbb{Q} . Příslušný nekótovaný bodový proces jako obvykle značíme Φ . Opět definujeme základní číselné a funkcionální popisné charakteristiky. Samozřejmě můžeme použít běžně používané charakteristiky k tomu, abychom popsali stacionární rozdělení kót. Pokud je M_0 typická kóta procesu Φ_m , pak např. $F(t) = \mathbb{Q}((-\infty, t])$ je její distribuční funkce, $\mathbb{E}M_0 = \int_{\mathbb{R}} m \mathbb{Q}(dm)$ je střední typická kóta a $\text{var } M_0$ je rozptyl typické kóty.

Definice 100. Míra součtu kót je definována jako

$$S(B) = \int_{B \times \mathbb{M}} m \Phi_m(d(x, m)), \quad B \in \mathcal{B}^d.$$

Poznámka 64. Pokud jsou kóty nezáporné, jedná se o stacionární náhodnou míru na \mathbb{R}^d . Její intenzita je

$$\lambda_S = \mathbb{E}S([0, 1]^d) = \lambda \mathbb{E}M_0,$$

jak plyne z věty 71 s $h(x, m) = m \mathbf{1}_{[x \in [0, 1]^d]}$.

Definice 101. Definujeme *index disperze součtu kót* jako

$$\text{IMD} = \frac{\text{var } S(B)}{\lambda |B| \mathbb{E}M_0},$$

kde B je nějaká testovací množina, např. koule o poloměru r . Tento index udává podíl rozptylu součtu kót v množině B a odpovídající střední hodnoty.

Definice 102. Nechť Z_1 je bod procesu Φ , který je nejbližší počátku. Pro měřitelnou funkci $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je *nenormalizovaná korelační index nejbližších sousedů* dán jako

$$\bar{\nu}_f = \mathbb{E}_o^! f(M(o), M(Z_1)).$$

Položíme-li

$$c_f = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(m_1, m_2) \mathbb{Q}(dm_1) \mathbb{Q}(dm_2)$$

a pokud $c_f \neq 0$, dostaneme *korelační index nejbližších sousedů*

$$\bar{n}_f = \frac{\bar{\nu}_f}{c_f}.$$

Poznámka 65. Hodnoty $\bar{n}_f > 1$ indikují, že střední hodnota funkce kóty typického bodu a kóty jeho nejbližšího souseda je větší než funkce typické kóty a její nezávislé kopie. Jestliže jsou kóty typického bodu a nejbližšího souseda nezávislé, pak $\bar{n}_f = 1$. Nejčastější volba f je $f(m_1, m_2) = m_1 m_2$, pro kterou mluvíme o *indexu součinu kót nejbližších sousedů*. Hodnoty tohoto indexu větší než 1 nastávají, pokud střední hodnota součinu kót typického bodu a jeho nejbližšího souseda je větší než součin středních kót, což znamená, že mezi sousedy působí vzájemná stimulace. Mezi další časté volby funkce f patří $f(m_1, m_2) = m_2$ a $f(m_1, m_2) = \frac{1}{2}(m_1 - m_2)^2$.

V následujícím budeme navíc uvažovat, že Φ_m je izotropní kótovaný bodový proces.

Definice 103. Pro měřitelnou funkci $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zavedme *faktoriální momentovou míru druhého řádu příslušnou funkci f* vztahem

$$\alpha_f^{(2)}(B_1 \times B_2) = \mathbb{E} \sum_{(X_1, M_1), (X_2, M_2) \in \text{supp } \Phi_m}^{\neq} f(M_1, M_2) \mathbf{1}_{[X_1 \in B_1, X_2 \in B_2]}.$$

Předpokládejme, že existuje hustota $\lambda_f^{(2)}(x, y)$ této míry vzhledem k Lebesgueově míře. Ze stacionarity a izotropie plyne, že $\lambda_f^{(2)}(x, y) = \lambda_f^{(2)}(\|x - y\|)$ je funkcí $\|x - y\|$. Za předpokladu, že existuje i součinná hustota druhého řádu $\lambda^{(2)}$ procesu Φ definujeme *nenormalizovanou f -korelační funkci kót* jako

$$\kappa_f(r) = \frac{\lambda_f^{(2)}(r)}{\lambda^{(2)}(r)}, \quad r > 0 : \lambda^{(2)}(r) > 0.$$

Položíme-li

$$c_f = \int \int f(m_1, m_2) \mathbb{Q}(dm_1) \mathbb{Q}(dm_2)$$

a pokud $c_f \neq 0$, dostaneme *f -korelační funkci kót*

$$k_f(r) = \frac{\kappa_f(r)}{c_f}, \quad r > 0.$$

Poznámka 66. Nenormalizovaná f -korelační funkce kót může nabývat libovolných nezáporných hodnot, označení „korelační funkce“ je proto poněkud zavádějící.

Interpretace nenormalizované f -korelační funkce kót bude jasnější z následujícího lemmatu.

Lemma 78. *Nechť Φ_m je stacionární a izotropní kótovaný bodový proces. Označme $M(o)$ kótu počátku a $M(r)$ kótu libovolného bodu ve vzdálenosti r od počátku. Nenormalizovaná f -korelační funkci kót splňuje*

$$\kappa_f(r) = \mathbb{E}_{or} f(M(o), M(r)), \quad r > 0.$$

Důkaz: Rozepíšeme $\alpha_f^{(2)}$ podle Campbellové věty druhého řádu (věta 34) a využít větu 72:

$$\begin{aligned} \alpha_f^{(2)}(B_1 \times B_2) &= \int_{B_2 \times \mathbb{R}} \int_{B_1 \times \mathbb{R}} f(m_1, m_2) \alpha_m^{(2)}(d(x_1, m_1), d(x_2, m_2)) \\ &= \int_{B_2} \int_{B_1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(m_1, m_2) P_{x_1, x_2}(dm_1, dm_2) \alpha^{(2)}(dx_1, dx_2) \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že

$$\lambda_f^{(2)}(x, y) = \lambda^{(2)}(x, y) \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(m_1, m_2) P_{x,y}(dm_1, dm_2),$$

a tudíž

$$\kappa_f(r) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(m_1, m_2) P_{or}(dm_1, dm_2).$$

□

Funkce $\kappa_f(r)$ tak vlastně představuje střední hodnotu funkce f kót dvojice bodů procesu, které jsou ve vzájemné vzdálenosti r . Rovněž je vidět, že normalizace c_f je volena tak, aby $k_f(r)$ byla rovna 1, kdykoli jsou kóty ve vzdálenosti r nezávislé. Speciální volbou funkce f se získají různé charakteristiky druhého řádu kótovaného bodového procesu. Uvedeme přehled nejčastěji používaných.

Definice 104. Pokud je střední typická kóta nenulová, tak definujeme *korelační funkci kót* předpisem

$$k_{mm}(r) = \frac{\mathbb{E}_{or} M(o)M(r)}{(\mathbb{E}M_0)^2}, \quad r > 0,$$

tj. jde o $k_f(r)$ s $f(m_1, m_2) = m_1 m_2$. V případě nenulové střední typické kóty zavedeme *r-funkci kót* jako

$$k_{m\cdot}(r) = \frac{\mathbb{E}_{or} M(o)}{\mathbb{E}M_0}, \quad r > 0,$$

neboli $k_{m\cdot}(r) = k_f(r)$ s $f(m_1, m_2) = m_1$.

Variogram kót definujeme předpisem

$$\gamma_m(r) = \frac{1}{2} \mathbb{E}_{or} (M(o) - M(r))^2, \quad r > 0,$$

neboli $\gamma_m(r) = \kappa_f(r)$ s $f(m_1, m_2) = \frac{1}{2}(m_1 - m_2)^2$. Volbou $f(m_1, m_2) = m_1$ dostáváme *E-funkci*

$$E(r) = \mathbb{E}_{or} M(o), \quad r > 0.$$

Dále definujeme *V-funkci* jako

$$V(r) = \mathbb{E}_{or} (M(o) - E(r))^2, \quad r > 0.$$

Poznámka 67. Funkce $E(r)$ udává střední kótu bodu, pro který existuje jiný bod procesu ve vzdálenosti r . Pokud jsou polohy a kóty závislé, tak existence jiného bodu ve vzdálenosti r může ovlivnit velikost kóty daného bodu. Znормováním střední typickou kótou dostaneme funkci $k_{m\cdot}(r)$.

6. Dodatky

6.1 Normální rozdělení

Věta 79. Necht' náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ má n -rozměrné normální rozdělení s vektorem středních hodnot $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$ a varianční maticí $\boldsymbol{\Sigma}$. Mějme $k \in \{1, \dots, n-1\}$, rozdělme vektor \mathbf{X} na $\mathbf{X}_1 = (X_1, \dots, X_k)^T$ a $\mathbf{X}_2 = (X_{k+1}, \dots, X_n)^T$, vektor $\boldsymbol{\mu}$ na $\boldsymbol{\mu}_1 = (\mu_1, \dots, \mu_k)^T$ a $\boldsymbol{\mu}_2 = (\mu_{k+1}, \dots, \mu_n)^T$ a matici $\boldsymbol{\Sigma}$ na 4 podmatice $\boldsymbol{\Sigma}_{11}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{12}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{21}$ a $\boldsymbol{\Sigma}_{22}$ o řádech $k \times k$, $k \times (n-k)$, $(n-k) \times k$ a $(n-k) \times (n-k)$:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}.$$

Potom podmíněné rozdělení \mathbf{X}_1 při \mathbf{X}_2 je k -rozměrné normální rozdělení se střední hodnotou $\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{12} \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} (\mathbf{X}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)$ a varianční maticí $\boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12} \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{21}$.

Důkaz: Lze najít např. v [1].

□

Věta 80. Necht' X_1, \dots, X_n jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s normálním rozdělením $N(0, 1)$ a necht' $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je libovolná měřitelná funkce nezávislá na změně měřítka, tedy splňující $h(ax_1, \dots, ax_n) = h(x_1, \dots, x_n)$ pro každé $a > 0$ a $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Potom náhodné veličiny $H = h(X_1, \dots, X_n)$ a $Q = X_1^2 + \dots + X_n^2$ jsou nezávislé.

Důkaz: Předpokládejme, že existuje momentová vytvořující funkce náhodné veličiny H na nějakém okolí U nuly. Potom momentová vytvořující funkce náhodného vektoru $(H, Q)^T$ je

$$\begin{aligned} \mathbb{E}e^{t_1 H + t_2 Q} &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{t_1 h(x_1, \dots, x_n)} e^{-(1-2t_2) \sum_{i=1}^n x_i^2/2} d(x_1, \dots, x_n) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{t_1 h(y_1, \dots, y_n)} e^{-\sum_{i=1}^n y_i^2/2} (1-2t_2)^{-n/2} d(y_1, \dots, y_n) \\ &= (1-2t_2)^{-n/2} \mathbb{E}e^{t_1 H}, \quad t_1 \in U, t_2 < 1/2, \end{aligned}$$

což je tvaru součinu dvou momentových vytvořujících funkcí. Odtud vidíme, že H a Q jsou nezávislé a Q má χ^2 -rozdělení o n stupních volnosti. V případě, že neexistuje momentová vytvořující funkce náhodné veličiny H , museli bychom přejít k charakteristickým funkcím. □

6.2 Besselovy funkce

Besselova funkce prvního druhu řádu ν je definována jako

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k + \nu}.$$

Jedná se o řešení Besselovy diferenciální rovnice

$$y'' + \frac{1}{z}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)y = 0.$$

Existují dva druhy *modifikovaných Besselových funkcí*. Jedná se o řešení modifikované Besselovy rovnice

$$w'' + \frac{1}{z}w' - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right)w = 0.$$

Modifikovaná Besselova funkce prvního druhu řádu ν je

$$I_\nu(z) = i^{-\nu} J_\nu(zi) = e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i} J_\nu(zi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k + \nu}$$

a modifikovaná Besselova funkce druhého druhu řádu ν má tvar

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \pi \nu}.$$

Speciálně pro $\nu = 1/2$ je

$$I_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sinh z, \quad K_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-z} z^{-1/2}.$$

6.3 Teorie míry

Definice 105. Systém podmnožin prostoru E se nazývá *okruh (ring)*, jestliže je uzavřený na konečná sjezdnocení, rozdíly a obsahuje prázdnou množinu. Pokud navíc obsahuje celý prostor, nazývá se *algebra*.

Definice 106. Systém \mathcal{D} podmnožin prostoru E se nazývá *Dynkinův*, pokud

- (i) $\emptyset \in \mathcal{D}, E \in \mathcal{D}$,
- (ii) $A \in \mathcal{D} \Rightarrow A^c \in \mathcal{D}$,

(iii) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{D}$ po dvou disjunktní $\Rightarrow \cup_i A_i \in \mathcal{D}$.

Věta 81. (Dynkinova) Jestliže \mathcal{P} je systém uzavřený na konečné průniky a \mathcal{D} je Dynkinův systém obsahující \mathcal{P} , potom $\sigma\mathcal{P} \subseteq \mathcal{D}$.

Věta 82. (o jednoznačném rozšíření míry) Necht' (E, \mathcal{E}) je měřitelný prostor a $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{E}$ je systém množin uzavřený na konečné průniky takový, že $\sigma\mathcal{S} = \mathcal{E}$. Pokud se dvě σ -konečné míry μ a ν shodují na \mathcal{S} , potom $\mu = \nu$.

Důkaz: Viz 5.5 v [7] nebo Lemma 2.2 v [10].

□

Literatura

- [1] J. ANDĚL (2011): *Základy matematické statistiky*, 3. vydání, Matfyzpress, Praha.
- [2] Z. CIESIELSKI AND A. KAMONT (1995): Levy's fractional Brownian random field and function spaces, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **60**, 99–118.
- [3] A. D. CLIFF AND J. K. ORD (1981): *Spatial Processes; Models and Applications*, Pion Limited, London.
- [4] C. COMAS, P. DELICADO AND J. MATEU (2011): A second order approach to analyse spatial point patterns with functional marks, *TEST* **20**, 503–523.
- [5] D. J. DALEY AND D. VERE-JONES (2008): *An Introduction to the Theory of Point Processes, Volume II: General Theory and Structure*, druhé vydání, Springer-Verlag, New York.
- [6] E. ISING (1925): Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus, *Z. Physik* **31**, 253–258.
- [7] J. LUKEŠ A J. MALÝ (2002): *Míra a integrál*, Karolinum, Praha.
- [8] L. ONSAGER (1944): Crystal statistics. I. A two-dimensional model with an order-disorder transition, *Phys. Rev.* **65**, 117–149.
- [9] Z. PRÁŠKOVÁ (2004): *Základy náhodných procesů II*, Karolinum, Praha.
- [10] J. RATAJ (2006): *Bodové procesy*, Karolinum, Praha.
- [11] H. RUE AND L. HELD (2005): *Gaussian Markov Random Fields: Theory and Applications*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.
- [12] R. SCHNEIDER, W. WEIL (2008): *Stochastic and Integral Geometry*, Springer-Verlag, Berlin.
- [13] D. J. STRAUSS (1975): A model for clustering, *Biometrika* **62**, 467–475.
- [14] J. ŠTĚPÁN (1987): *Teorie pravděpodobnosti – matematické základy*, Academia, Praha.
- [15] P. WHITTLE (1954): On stationary processes in the plane, *Biometrika* **41**, 434–449.