Prostorové modelování (NMTP438)

Komentáře k samostudiu v letním semestru 2019/20

5. a 6. týden

Podkapitola 3.1

Základní definice a tvrzení týkající se prostoru lokálně konečných měr. Uplatní se některé znalosti z teorie míry.

Lemma 19 – v $\mathbb{R}^d$ se jako příklad $\mathcal{S}$ dají uvažovat uzavřené obdélníky.

Lemma 20 – v $\mathbb{R}^d$ by se v důkazu dal použít systém $\mathcal{S}$ uzavřených obdélníků s vrcholy s racionálními souřadnicemi.

Lemma 21 – v $\mathbb{R}^d$ je příkladem $\mathcal{S}$ systém konečných sjednocení obdélníků.

Tvrzení 22 – uvedeno bez důkazu, důkaz není třeba dohledávat a studovat. Tvrzení se týká toho, že prostory konečných a lokálně konečných měr lze metrizovat, a využije se jen v jednom místě později (při zavedení Palmova rozdělení).

Podkapitola 3.2

Definuje se klíčový pojem náhodné míry (jako speciální případ se dostane bodový proces). Jednoznačnost a existence.

Lemma 23 – důkaz přenechán na cvičení

Tvrzení 25 – uvedeno bez důkazu, není třeba dohledávat a studovat. Tvrzení říká, za jakých podmínek kolekce náhodných veličin indexovaných množinami, vytváří náhodnou míru. V kombinaci s Daniellovou-Kolmogorovovou větou to dává existenci náhodné míry s danými konečně rozměrnými rozděleními (věta 26).

Věta 26 – důkaz jen pro zájemce, při samostudiu ho lze přeskočit.

Podkapitola 3.3

Bodové procesy se nejčastěji uvažují jednoduché, což znamená, že atomy mají míru 1.

Lemma 29 – zobecnění lemmatu 18, důkaz jen pro zájemce, při samostudiu ho lze přeskočit.

Od Definice 41 až do konce podkapitoly – je rozebrán vztah mezi jednoduchými bodovými procesy a lokálně konečnými náhodnými uzavřenými množinami, tuto část není třeba studovat.

Podkapitola 3.4

Je zaveden Poissonův proces na obecném prostoru. Jedná se o nejdůležitější model bodových procesů.

Důsledek 37 – existence a jednoznačnost Poissonova procesu, důkaz lze při samostudiu vynechat.

Definice 47 – pokud by vám definice Coxova procesu přes směs pravděpodobnostních rozdělení přišla nepřehledná, stačí použít definici z poznámky 24.

7. a 8. týden

Podkapitola 3.5

Analogií momentů náhodných veličin jsou pro náhodné míry tzv. momentové míry.

Věta 42 – důkaz tohoto a některých dalších tvrzení je založen na standardním argumentu teorie míry. Jde o to, že pokud jsme schopni nějaký vztah ověřit pro indikátory, použijeme aditivitu k jeho ověření pro jednoduché funkce a pak monotonii k ověření pro libovolnou nezápornou měřitelnou funkci.

Podkapitola 3.6

Palmovo rozdělení hraje pro náhodné míry podobnou roli jako podmíněné rozdělení pro náhodné veličiny. Názorná je interpretace v případě jednoduchého bodového procesu. Palmovo rozdělení v bodě x se pak dá představit jako podmíněné rozdělení bodového procesu za podmínky, že tento proces obsahuje x (viz poznámka 34).

Věta 45 – souvisí s existencí podmíněných pravděpodobnostních měr. V důkazu je naznačena hlavní idea. Opírá se o Radonovu–Nikodymovu větu a tvrzení 25, které jsme nedokazovali.

Poznámka 35 – hodně zhruba řečeno je typický bod náhodně vybraný bod ze všech bodů bodového procesu.

9. a 10. týden

Podkapitola 4.1

Eukleidovský prostor je vektorový, takže můžeme na něm uvažovat posunutí a díky tomu definovat stacionarní náhodné míry a bodové procesy.

Podkapitola 4.2

Popisné charakteristiky umožňují vyjádřit vlastnosti bodového procesu jednodušším objektem (číslem nebo funkcí).

Věta 55 – výpočet charakteristik pro Poissonův proces přenechán jako cvičení.

Podkapitola 4.3

Jsou představeny základní modely prostorových bodových procesů.

Věta 62 a věta 64 – v důkazech se využije známé pravidlo pro práci s podmíněnou střední hodnotou, když uvažujeme funkci dvou nezávislých objektů a podmiňujeme jedním z nich, viz Tvrzení 2.13 (ii) v pracovním textu k přednášce z Teorie pravděpodobnosti 2.

11. a 12. týden

Podkapitola 4.4

Zajímají nás konečné bodové procesy, jejichž rozdělení je možné popsat hustotou vzhledem ke vhodné referenční míře. Na reálné přímce obvykle uvažujeme hustoty vzhledem k

Lebesgueově nebo čítací míře. V případě bodových procesů se nabízí jako referenční míru vzít rozdělení Poissonova procesu.

Definice 79 – pokud by si chtěl někdo zkusit ověřit, že hustota Straussova procesu není integrovatelná pro $\gamma > 1$, tak zde je malý návod. Vezměme množinu A takovou, aby $\Lambda(A) > 0$ a každé dva body z A měly vzdálenost menší než R. Integrál z p nemůžeme zvětšit, když se omezíme jen na n-tice z A, pro ně má hustota p tvar $\alpha\beta^n\gamma^{n(n-1)/2}$. To při výpočtu integrálu vede na řadu $\alpha \mathrm{e}^{-\Lambda(\mathbb{R}^d)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\beta^n\gamma^{n(n-1)/2}\Lambda(A)^n$, která je pro $\gamma > 1$ divergentní.

Podkapitola 4.5

Existuje řada modelů pro nehomogenní bodové procesy. V této podkapitole jsou popsány tři z nich, stačí projít jen první (Second-order intensity reweighted stationary). Lokální škálování a transformaci nechávám jen pro zájemce.

13. a 14. týden

Kótované bodové procesy dostaneme tak, že každému bodu jednoduchého bodového procesu přiřadíme nějakou dodatečnou informaci (tzv. kótu).

Podkapitola 5.1

Pracujeme se speciální třídou bodových procesů na $\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}$ (ty jejichž projekce na první složku je bodový proces na $\mathbb{R}^d$). Základní definice se tak dají převzít přímo z případu bodových procesů na obecném prostoru. Některé pak využívají speciální tvar prostoru $\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}$, takže opět můžeme pracovat se stacionaritou a Palmovými rozděleními v počátku.

Podkapitola 5.2

Jsou zmíněny některé způsoby, jak přiřadit kóty jednotlivým bodům. Hlavní pozornost je věnována Poissonovu procesu.

Podkapitola 5.3

Popisné charakteristiky pro vícerozměrné bodové procesy zobecňují podobné charakteristiky pro bodové procesy.

Podkapitola 5.4

Popisné charakteristiky pro kótované bodové procesy s nezápornými kótami zobecňují podobné charakteristiky pro bodové procesy.