Waldovy aproximace

Tomáš Laube, Alexander Terkovič

Statistický seminář

11.3.2025

Lemma 2.1

Pro Waldův sekvenční test $S(b, a)$ platí

$$b \geq ln\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right),\ a \leq ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)$$

Označíme-li α' a β' pravděpodobností chyb 1. a 2. druhu odpovídající testu $S\left(ln\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right), ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)\right)$, platí

$$\alpha' < \frac{\alpha}{1-\beta},\ \beta' < \frac{\beta}{1-\alpha}, \quad \alpha' + \beta' \leq \alpha + \beta.$$

Věta 2.2

Nechť

$$P\left(\frac{f(X_1,\theta_1)}{f(X_1,\theta_0)} > 1;\theta\right) > 0,\ P\left(\frac{f(X_1,\theta_1)}{f(X_1,\theta_0)} < 1;\theta\right) > 0, \theta \in (\underline{\theta},\overline{\theta}).$$

Pak test $S(b,a), -\infty < b < 0 < a < \infty$, skončí s pravděpodobnosti 1, $E_\theta(N^k) < \infty$ pro lib. $k > 0$ a $\theta \in (\underline{\theta},\overline{\theta})$ a existuje číslo $t_0(\theta) > 0$ takové, že $E_\theta(e^{tN}) < \infty$ pro vš. $t \le t_0(\theta)$.

Věta 2.3

Nechť $S(b, a)$ a $S(b', a')$ jsou Waldovy testy pro úlohu $H_0 : \theta = \theta_0$ proti $H_1 : \theta = \theta_1$. Nechť $L(\theta), P(\theta)$ a $L'(\theta), P'(\theta)$ jsou odpovídající operační charakteristiky a síly testu splňující

$$P(\theta_0) > P'(\theta_0), L(\theta_1) > L'(\theta_1).$$

Pak platí $b' \leq b < a \leq a'$, kde aspoň jedna nerovnost $b' \leq b,\ a \leq a'$ je ostrá,

$$E_\theta(N) \leq E_\theta(N'), \quad \text{pro vš.} \theta \in (\underline{\theta}, \overline{\theta}),$$

kde N, N' jsou rozsahy výběru příslušné $S(b, a)$ resp. $S(b', a')$.

Opakování

Waldova fundamentální identita

Nechť X_n je posloupnost iid. n. veličin, že pro nějaké $t \in \mathbb{R}$ je $1 \leq \varphi(t) = Ee^{tX_1} < \infty$ a ex. $\alpha \in \mathbb{R}^+$, že s.j. platí $T > n \Rightarrow |\sum_{k=1}^{n} X_k| \leq \alpha$. Pak

$$E[e^{t\sum_{k=1}^{T} X_k}/\varphi(t)^T] = 1.$$

Lemma

Nechť $\varphi(t) < \infty, \forall t \in \mathbb{R}$, $P(X_1 < 0) > 0$ a $P(X_1 > 0) > 0$. Pak

- Je-li $EX_1 \neq 0$, pak ex. právě jedno t_0, že $\varphi(t_0) = 1$.
- Je-li $EX_1 = 0$, pak $\varphi(t) = 1$ implikuje $t = 0$

Věta o aproximaci

Nechť $E_\theta[exp\{tZ_1\}] < \infty$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall \theta \in \Theta, b < 0 < a$. Nechť platí předpoklady věty o konečném čase testu (V2.2). Pak ex. reálná funkce $h(\theta)$ definovaná na Θ, která je rovna 0 pouze v bodě θ^*, pro který platí $E_{\theta^*}(Z_1) = 0$. Dále platí

$$E_\theta[exp\{h(\theta)\sum_{i=1}^{N} Z_i\}] = 1$$

Aproximace operační charakteristiky

$$L_S(\theta) \cong \hat{L}_S(\theta) = \frac{1 - e^{h(\theta)a}}{e^{h(\theta)b} - e^{h(\theta)a}}, \qquad E_\theta(Z_1) \neq 0$$

$$L_S(\theta) \cong \hat{L}_S(\theta) = \frac{a}{a - b}, \qquad E_\theta(Z_1) = 0$$

Aproximace středního rozsahu výběru

$$E_{\theta,S}(N) \cong \hat{E}(N) = \frac{L_S(\theta)b + (1 - L_S(\theta))a}{E_\theta(Z_1)}, \qquad E_\theta(Z_1) \neq 0$$

$$E_{\theta,S}(N) \cong \hat{E}(N) = \frac{-ab}{E_\theta(Z_1^2)}, \qquad E_\theta(Z_1) = 0$$

Aproximace středního rozsahu výběru

$$E_{\theta_0,S}(N) \cong \frac{(1-\alpha)\log\frac{\beta}{1-\alpha} + \alpha\log\frac{1-\beta}{\alpha}}{E_{\theta_0}(Z_1)}$$

$$E_{\theta_1,S}(N) \cong \frac{\beta\log\frac{\beta}{1-\alpha} + (1-\beta)\log\frac{1-\beta}{\alpha}}{E_{\theta_1}(Z_1)}$$

Příklad

Nechť X_i je posloupnost iid náhodných veličin s rozdělením $N(\mu, \sigma^2)$. Uvažujme úlohu testování

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2$$

BÚNO nechť $0 < \sigma_0^2 < \sigma_1^2 < \infty$.
Sestrojte Waldův sekvenční test a odhadněte střední počet pozorování.

Děkujeme za pozornost