MOD009 - cvičení 12

Příklad 1:

Ukažte, že exponenciální rozdělení je rozdělení bez paměti, tj. že pro náhodnou veličinu Y s exponenciálním rozdělením platí

$$P(Y > s + h | Y > s) = P(Y > h)$$

Příklad 2:

Ukažte, že součet k nezávislých náhodných veličin s exponenciálním rozdělením s parametrem λ – tj. hustotou $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$, má Erlangovo (Gamma) rozdělení s parametry λ a k, tj. s hustotou

$$g_k(x) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\lambda x}, \qquad x > 0.$$

Příklad 3:

Ověřte, že pro Poissonův proces $(N(t), t \geq 0)$ platí následující rovnosti:

$$\begin{aligned}
P(N(t+h) = k+1 \,|N(t) = k) \qquad &= \lambda h + o(h), \\
P(N(t+h) = k \,|N(t) = k) \qquad &= 1 - \lambda h + o(h), \\
P(N(t+h) > k+1 \,|N(t) = k) \qquad &= o(h),
\end{aligned}$$

kde pro funkci $o(h)$ platí $\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$.

Příklad 4: Simulování Poissonova procesu

Ověřte, že oba následující algoritmy opravdu generují Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$ na intervalu $[0, T]$.

Algoritmus 1: Generujme posloupnost nezávislých náhodných veličin $\xi_k, k = 1, 2, \ldots$ s exponenciálním rozdělením s parametrem λ. Definujme

$$N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} I\Big\{ (\sum_{j=1}^{k} \xi_j) \leq t \Big\}, \quad \text{pro } t \in [0, T].$$

Algoritmus 2:
Krok 1.: Generujme hodnotu náhodné veličiny S, která má Poissonovo rozdělení s parametrem λT - toto bude celkový počet událostí na intervalu $[0, T]$.
Krok 2: Vygenerujme celkem S nezávislých náhodných veličin s rovnoměrným rozdělením na intervalu $[0, T]$. Setřiďme je do neklesající posloupnosti a tuto neklesající posloupnost vezměme za časy událostí - Poissonovův proces je pak odpovídající čítací proces.