Příklady na procvičení z NSTP097

Náhodné veličiny a vektory II

IV.

1 Hustota náhodného vektoru $(X, Y)^\mathsf{T}$ je

$$f(x,y) = \begin{cases} 2, & \text{je-li } 1 < x < y < 2, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Najděte sdruženou distribuční funkci a marginální hustoty. Rozhodněte, zda X a Y jsou nezávislé.

2 Nechť $(X,\, Y)^\mathsf{T}$ je náhodný vektor s rovnoměrným rozdělením na jednotkovém kruhu, tj. $f(x,y) = c$ pro $x^2 + y^2 \leq 1$ a $f(x,y) = 0$ jinak. Určete konstantu c, marginální hustoty f_X,f_X a střední hodnoty $\mathrm{E}\,X$, $\mathrm{E}\,Y$. Spočítejte kovarianci $\operatorname{cov}(X,\, Y)$ a rozhodněte, zda jsou X a Y nezávislé.

3 Uvažme funkci $F(x,\, y) = \max\{x,\, y\}$ pro $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Doplňme F na $\mathbb{R}^2$ tak, aby splňovala základní vlastnost distribuční funkce ($0 \leq F(x,\, y) \leq 1$). To lze udělat např. takto:

$$F(x,\, y) = \min\Big[\max\big\{\max(x,\, y),\ 0\big\},\ 1\Big], \qquad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}.$$

Nyní tedy máme funkci $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \langle 0,\, 1\rangle$. Zjistěte, zda je F distribuční funkcí nějakého náhodného vektoru.

4 Nechť $\boldsymbol{Z} = (X,\, Y)^\mathsf{T}$ je náhodný vektor s rovnoměrným rozdělením na množině $M = \big\{(x,\, y) : x \geq 0,\ 0 \leq y \leq 1,\ y \leq x \leq y + 1\big\}$. Určete $\operatorname{var} \boldsymbol{Z}$.

5 Házíme třikrát mincí. Označme X počet líců v prvních dvou hodech a Y počet rubů v posledních dvou hodech.

(i) Určete sdružené rozdělení vektoru $(X, Y)^\mathsf{T}$.
(ii) Určete marginální rozdělení veličin X a Y. Jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé?
(iii) Spočtěte $\mathrm{E}\,X$, $\mathrm{E}\,Y$, $\operatorname{var} X$ a $\operatorname{var} Y$.
(iv) Spočtěte kovarianci $\operatorname{cov}(X, Y)$ a korelační koeficient ρ_{XY}. Jaký je vztah mezi nezávislostí dvou veličin a jejich kovariancí/korelací?

6 Házeme dvěma hracími kostkami. Nechť X je počet bodů na první kostce a Y je minimum z bodů na obou kostkách. Najděte rozdělení náhodného vektoru $(X, Y)^\mathsf{T}$, dále $\mathrm{E}\,X$, $\mathrm{E}\,Y$ a korelační matici vektoru $(X, Y)^\mathsf{T}$.

7 Chystáte oslavu narozenin ve své oblíbené restauraci a zvete všechny své příbuzné (budete za ně platit). Množství peněz, které všichni Vaši hosté dohromady projí a propijí (v tisíci Kč), jsou náhodné veličiny X a Y. Ze zkušenosti víte, že vektor $(X,Y)^\mathsf{T}$ má spojité rozdělení charakterizované sdruženou hustotu

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x+y) & \text{pro } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(i) Určete konstantu $c > 0$.
(ii) Jaké je rozdělení částky, kterou zaplatíte jen za nápoje? Jaké je rozdělení obnosu, který padne jen na jídlo? Jsou tyto dvě veličiny nezávislé?
(iii) Spočtěte kovarianci $\operatorname{cov}(X,Y)$ a korelační koeficient ρ_{XY}. Interpretujte.
(iv) Jaká je pravděpodobnost, že za pití zaplatíte více než dvojnásobek toho co za jídlo?
(v) Určete distribuční funkci $F(x,y)$.

8 Dvojice součástek má dobu životnosti popsanou sdruženou hustotou

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\, e^{-x-y/2} & \text{pro } x > 0,\ y > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(i) Jaké je rozdělení dob životnosti jednotlivých součástek? Jsou tyto doby nezávislé?
(ii) S jakou pravděpodobností první součástka přežije druhou?

9 Nechť náhodný vektor $(X,Y)^\mathsf{T}$ má rovnoměrné rozdělení v rovnoběžníku s vrcholy $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(2,1)$.
(i) Určete sdruženou hustotu náhodných veličin X, Y.
(ii) Najděte marginální hustotu náhodných veličin X, Y. Jsou tyto veličiny nezávislé?
(iii) Najděte marginální distribuční funkci náhodných veličin X, Y.
(iv) Spočítejte, $\mathrm{E}\,X$, $\mathrm{E}\,Y$ a $\operatorname{cov}(X,Y)$
(v) Spočítejte, $\mathrm{P}\,[X > 2\,Y]$.

10 Nechť má náhodný vektor $\mathbf{Z} = (X,\ Y)^\mathsf{T}$ diskrétní rozdělení zadané tabulkou pravděpodobností

	$Y=-\pi$	$Y=-\pi/2$	$Y=0$	$Y=\pi/2$	$Y=\pi$
$X=-\pi$	0,1	0,05	0,1	0,05	0,1
$X=\pi$	0,2	0,05	0,05	0,1	0,2

Spočítejte $\mathrm{E}\left(\cos X \sin Y\right)$.

11 Nechť má náhodný vektor $\mathbf{Z} = (X,\ Y)^\mathsf{T}$ diskrétní rozdělení zadané tabulkou pravděpodobností

	$Y=-\mathrm{e}$	$Y=-1$	$Y=1$	$Y=\mathrm{e}$
$X=-\pi/2$	0,1	0,05	0,1	0,15
$X=\pi/2$	0,2	0,05	0,05	0,3

Spočítejte $\mathrm{E}\left(\sin X \log |Y|\right)$.

12 Nechť X má rovnoměrné rozdělení na $(-1, 1)$. Spočítejte korelační koeficient náhodných veličin X a X^2. Jsou tyto náhodné veličiny nezávislé?

13 Hustota náhodného vektoru $(X, Y)^\mathsf{T}$ je

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x-y) & \text{pro } 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ y \leq x, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete konstantu c, marginální hustoty, střední hodnoty $\mathrm{E}\,X$ a $\mathrm{E}\,Y$ a kovarianci $\operatorname{cov}(X, Y)$. Rozhodněte, zda jsou X a Y nezávislé.

14 Nechť má náhodný vektor $(X,\, Y)^\mathsf{T}$ rozdělení s hustotou

$$f(x,\, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \exp\Big(-\dfrac{y}{x}\Big), & 1 \leq x \leq 2,\ y > 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete $\mathrm{E}\,(Y \mid X)$.

15 V náhodném vektoru $(X, Y)^\mathsf{T}$ má veličina Y marginální rozdělení $\Gamma(a, p)$. Podmíněné rozdělení veličiny X za podmínky $Y = y$ je exponenciální s parametrem y. Spočítejte
 (i) sdruženou hustotu $f(x, y)$;
 (ii) marginální hustotu X.
 (iii) podmíněnou hustotu Y při známém X [pojmenujte toto rozdělení];
 (iv) $\mathrm{E}\,(Y \mid X)$.

16 Náhodná veličina N má Poissonovo rozdělení $\mathrm{Po}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Podmíněné rozdělení veličiny X za podmínky $N = n$ je Binomické $\mathrm{Bi}(n, p)$, kde $p \in (0, 1)$ je daná konstanta. Najděte rozdělení veličiny X.