

## Transformace náhodných veličin a vektorů

V.

---

- 1 Nechť  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , kde  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma^2 > 0$  jsou parametry. Nechť

$$Y = d + \exp(X)$$

- (i) Určete hustotu náhodné veličiny  $Y$ .  
(ii) Určete střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny  $Y$ .

- 2 Nechť  $X \sim R(-\pi/2, \pi/2)$ . Najděte distribuční funkci a hustotu veličiny  $Y = \sin(X)$ . Určete střední hodnotu a medián  $Y$ .

- 3 Nechť  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ . Určete rozdělení veličiny  $Y = X/\lambda$ . Určete rozdělení veličiny  $Y = X^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

- 4 Nechť  $X$  má beta rozdělení  $B(a, b)$ , kde  $a > 0$ ,  $b > 0$ . Nechť  $Y = \log\left(\frac{X}{1-X}\right)$ . Určete hustotu náhodné veličiny  $Y$ .

- 5 Nechť  $X$  má gama rozdělení  $\Gamma(\lambda, n)$ , kde  $n \in \mathbb{N}$  a  $\lambda > 0$  jsou parametry. Nechť  $Y = 2\lambda X$ .  
(i) Určete hustotu náhodné veličiny  $Y$ .  
(ii) Určete střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny  $Y$ .

- 6 Určete rozdělení objemu a povrchu krychle s náhodnou délkou hrany s rovnoměrným rozdělením na  $(0, 1)$ . Určete střední hodnoty těchto veličin.

- 7 Veličina  $X$  má Cauchyovo rozdělení s hustotou

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Spočítejte její střední hodnotu a ukažte, že  $Y = 1/X$  má opět Cauchyovo rozdělení.

- 8 Nechť  $X, Y$  jsou nezávislé rovnoměrně rozdělené na  $\langle 0, \pi/2 \rangle$ . Určete rozdělení náhodné veličiny  $Z = \cos(X - Y)$ .

- 9 Složky náhodného vektoru  $(X, Y)^T$  jsou nezávislé a mají rozdělení

$$\begin{aligned} P[X = n] &= cnq^n, \quad n = 0, 1, \dots, \\ P[Y = n] &= \frac{1}{2^{n+1}}, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Najděte rozdělení veličiny  $Z = X + Y$ .

**10** Nechť  $X$  a  $Y$  jsou nezávislé a nabývají celé kladné hodnoty  $k$  s pravděpodobností  $2^{-k}$ . Najděte distribuční funkci jejich součtu.

**11** Náhodný vektor  $(X, Y)^T$  má sdruženou hustotu

$$f(x, y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda y}, & \text{když } 0 \leq x \leq y, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Jsou  $Y$  a  $X/(X - Y)$  nezávislé?

**12** Najděte rozdělení součtu veličin  $U_1, U_2$ , jestliže tyto jsou nezávislé a

(i)  $U_1 \sim R(0, 1), U_2 \sim R(0, 1)$ ,

(ii)  $U_1 \sim R(0, 1), U_2 \sim R(0, 2)$ .

**13** Pro  $U_1, U_2$  nezávislé s rovnoměrným rozdělením na  $(0, 1)$  určete rozdělení jejich součinu a podílu.

**14** Nechť jsou  $X, Y$  nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením  $R(1, 2)$ . Určete rozdělení veličiny  $Z = \frac{X}{Y}$ .

**15** Buď  $(X, Y)^T$  náhodný vektor s rovnoměrným rozdělením na množině  $(0, 1)^2$ . Určete rozdělení náhodného vektoru  $(\exp(X + Y), \exp(X - Y))$ .