

## Transformace náhodných veličin a vektorů II

### VI.

---

**Upozornění:** Pro nahrazování neúčasti na cvičení si můžete vybrat i některé z příkladů 8–11, 13–15 pro cvičení 5 (pokud jste je již nepoužili jako nahrazovací příklady).

**1 \*** Necht'  $X_1, X_2 \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \Gamma(\lambda, n)$ , kde  $n \in \mathbb{N}$  a  $\lambda > 0$ . Necht'

$$Y_1 = \frac{X_1}{X_1 + X_2}, \quad Y_2 = \frac{X_2}{X_1 + X_2}.$$

- (i) Určete rozdělení náhodného vektoru  $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)^\top$ .
- (ii) Určete rozdělení náhodné veličiny  $Y_1$ .

**2 \*** Necht'  $(X, Y)^\top$  má rovnoměrné rozdělení na  $\langle 0, 1 \rangle^2$ . Necht'

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{X+Y} \\ e^{X-Y} \end{pmatrix}.$$

Určete rozdělení náhodného vektoru  $\mathbf{W}$ .

**3 \*** Mějme kouli o náhodném poloměru  $R \sim R(0, 1)$ . V náhodné vzdálenosti  $L$  od středu vedeme kouli řez, přičemž  $L \sim R(0, 1)$  a  $L$  a  $R$  jsou nezávislé. Necht'  $Z$  označuje poloměr řezu.

- (i) Určete rozdělení náhodné veličiny  $Z$ .
- (ii) Určete střední poloměr řezu.

**Poznámka.** Popsaným problémem se zabýval S. D. Wicksell (Wicksell, 1925, *Biometrika* **17**, 84–99).

**Připomenutí 1: Hyperbolické funkce** jsou pro  $x \in \mathbb{R}$  definovány následovně

$$\begin{aligned} \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, & \operatorname{tgh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \\ \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, & \operatorname{cotgh} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \neq 0. \end{aligned}$$

**Připomenutí 2: Hyperbolometrické funkce** jsou inverzními funkcemi k (monotonním) částem hyperbolických funkcí a mají následující tvar:

$$\begin{aligned} \operatorname{argsinh} x &= \log(x + \sqrt{x^2 + 1}), & x &\in \mathbb{R}, \\ \operatorname{argcosh} x &= \log(x + \sqrt{x^2 - 1}), & x &\geq 1, \\ \operatorname{argtgh} x &= \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}, & |x| &< 1, \\ \operatorname{argcotgh} x &= \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1}, & |x| &> 1. \end{aligned}$$

- 4 Najděte rozdělení součtu veličin  $X$  a  $Y$ , jestliže tyto jsou nezávislé a  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ ,  $Y \sim \text{R}(0, \theta)$ , Určete střední hodnotu a rozptyl  $X + Y$ .
- 5 Necht' jsou  $X, Y$  nezávislé náhodné veličiny s rozdělením  $X \sim \text{R}[0, 1]$  a  $Y \sim \text{R}[-1, 1]$ . Určete rozdělení veličiny  $Z = XY^2$ .
- 6 Necht' jsou  $X, Y$  nezávislé náhodné veličiny s rozdělením  $X \sim \text{R}[0, 2]$  a  $Y \sim \text{R}[1, 2]$ . Určete rozdělení veličiny  $Z = (1 - X)^2/Y$ .
- 7 Necht' jsou  $X, Y$  nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením  $X \sim \text{Exp}(1)$  a  $Y \sim \text{Exp}(1/2)$ . Určete rozdělení veličiny  $Z = \log(2X + Y)$ .