

Transformace náhodných veličin a vektorů III

VII.

- 1 Nechť X a Y jsou nezávislé s geometrickým rozdělením s parametrem $p \in (0, 1)$. Určete $P[X = k | X + Y = s]$.
- 2 Nechť X a Y jsou nezávislé s Poissonovým rozdělením s parametry λ_1 a λ_2 . Jaké je rozdělení X za podmínky $X + Y = n$? (Tzn. určete $P[X = k | X + Y = n]$.)
- 3 Nechť X a Y jsou nezávislé s rovnoměrným rozdělením na $(0, 1)$. Určete

$$E(X + Y | X), \quad E(XY | X) \quad \text{a} \quad E(X | X + Y).$$

- 4 Nechť $(X, Y)^T$ je náhodný vektor.
 - (i) Určete $E(X + Y | X)$, jestliže X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny.
 - (ii) Určete $E(X + Y | X)$, jestliže X a Y nejsou nutně nezávislé.
 - (iii) Určete $E(X | X + Y)$, jestliže rozdělení $(X, Y)^T$ je zaměnitelné, tj. náhodné vektory $(X, Y)^T$ a $(Y, X)^T$ mají stejné rozdělení.

Poznámka. Výsledek se snažte vyjádřit co možná nejjednoduším způsobem při použití co možná nejmenšího počtu podmíněných středních hodnot.

- 5 Nechť má náhodný vektor $(X, Y)^T$ rovnoměrné rozdělení na množině $M = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x \leq y\}$. Určete $E(X | X - Y)$.
- 6 Náhodný vektor $(X, Y)^T$ má rovnoměrné rozdělení na množině $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$. Spočítejte
 - (i) podmíněnou hustotu součtu $X + Y$, je-li dán rozdíl $X - Y$;
 - (ii) podmíněný rozptyl součtu $X + Y$, je-li dán rozdíl $X - Y$;
 - (iii) nepodmíněný rozptyl $\text{var}(X + Y)$.
- 7 Nechť $(X, Y)^T$ má rovnoměrné rozdělení na množině $M = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Nechť

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{X^2 + Y^2} \\ \text{arccotg} \frac{X}{Y} \end{pmatrix}.$$

- (i) Určete rozdělení náhodného vektoru \mathbf{W} .
- (ii) Určete marginální rozdělení náhodných veličin U a V .
- (iii) Zjistěte, zda jsou náhodné veličiny U a V nezávislé.
- (iv) Jak by se změnily výsledky, jestliže bychom V definovali jako $V = \arctg \frac{X}{Y}$?

- 8 Necht' U_1 a U_2 jsou nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na $(0, 1)$. Uvažujte náhodný vektor $(Z, V)^T$, který vznikne transformací $Z = U_1 U_2$ a $V = U_2$.

Určete

- (i) množinu $A \in \mathbb{R}^2$, která je nosičem sdruženého rozdělení Z a V (zakreslete graficky);
- (ii) sdruženou hustotu Z a V ;
- (iii) marginální hustotu Z (načrtněte i graf);
- (iv) podmíněnou hustotu Z , je-li dáno $V = v$;
- (v) střední hodnotu Z :
 - z momentů U_1 a U_2 ;
 - z marginální hustoty Z ;
 - z podmíněné střední hodnoty Z , je-li dáno V .

- 9 Hustota náhodného vektoru $(X, Y)^T$ je

$$f(x, y) = cx^2y \mathbb{I}_{(-1,1)}(x) \mathbb{I}_{(0,1)}(y).$$

- (i) Určete c .
- (ii) Spočítejte marginální hustoty X a Y .
- (iii) Spočítejte $E X$, $E Y$, $\text{var } X$, $\text{var } Y$, $E X^2 Y^2$.
- (iv) Spočítejte hustotu náhodné veličiny $Z = X + Y$. Je to spojitá funkce? *Pozn.: Výslednou hustotu se nesnažte upravovat do kompaktního tvaru.*
- (v) Určete $E Z$ a $\text{var } Z$.

- 10 Necht' $Z = (X, Y)^T$ je náhodný vektor s hustotou

$$f(x, y) = cxy^3 \mathbb{I}_M(x, y), \quad \text{kde } M = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, y + x/2 \leq 1\},$$

a c je vhodná konstanta.

- (i) Určete hodnotu konstanty c .
- (ii) Spočítejte $\text{var } Z$.
- (iii) Určete, zda jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé.
- (iv) Spočítejte $E \left(\pi(1 + X) - \log \frac{Y}{1-Y} \mid Y \right)$.

- 11 Necht' jsou X a Y nezávislé náhodné veličiny, X s rovnoměrným rozdělením na intervalu $(0, 1)$, Y s rovnoměrným rozdělením na intervalu $(-1, 1)$. Necht'

$$Z = X + Y^2.$$

- (i) Určete rozdělení náhodné veličiny Z .
- (ii) Spočítejte $E Z$.
- (iii) Spočítejte $E(Z \mid X)$.

- 12 Necht' $Z = (X, Y)^T$ je náhodný vektor s hustotou

$$f(x, y) = cx^2y^2 \mathbb{I}_M(x, y), \quad \text{kde } M = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y/2 \leq 1\},$$

a c je vhodná konstanta.

- (i) Určete hodnotu konstanty c .

- (ii) Spočtěte $\text{var } \mathbf{Z}$.
- (iii) Určete, zda jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé.
- (iv) Spočtěte $E(2(\pi + Y) - \arcsin X \mid X)$.

13 Nechť jsou X a Y nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na intervalu $(0, 2)$.
Nechť

$$Z = (X - 1)^2 + Y.$$

- (i) Určete rozdělení náhodné veličiny Z .
- (ii) Spočtěte $E Z$.
- (iii) Spočtěte $E(Z \mid Y)$.

14 Nechť $\mathbf{Z} = (X, Y)^T$ je náhodný vektor s hustotou

$$f(x, y) = cy \mathbb{I}_M(x, y), \quad \text{kde } M = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq y + 1\},$$

a c je vhodný konstanta.

- (i) Určete hodnotu konstanty c .
- (ii) Spočtěte mimodiagonální prvky matice $\text{var } \mathbf{Z}$.
- (iii) Určete, zda jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé.
- (iv) Spočtěte $E\left(911X - \log\left(\frac{Y}{1-Y}\right) \mid Y\right)$.

15 Nechť jsou X a Y nezávislé náhodné veličiny X má hustotu $f_X(x) = \exp\{-x\} \mathbb{I}_{(0, \infty)}(x)$ a Y má hustotu $f_Y(y) = 2 \exp\{-2y\} \mathbb{I}_{(0, \infty)}(y)$. Nechť

$$Z = \exp\{X + 2Y\}.$$

- (i) Určete rozdělení náhodné veličiny Z .
- (ii) Spočtěte $E \log Z$.
- (iii) Spočtěte $E(\log^2 Z \mid X)$.