Přehled pojmů a výsledků z teorie míry a integrálu

Měřitelný prostor

1 Definice (σ-algebra) Nechť $\mathcal{X} \neq \emptyset$. Systém $\mathcal{A}$ podmnožin $\mathcal{X}$ se nazývá σ-algebra právě když
- (i) $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- (ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$;
- (iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

2 Definice (Generování σ-algebry) Nechť $\mathcal{Q}$ jest množina podmnožin $\mathcal{X}$. Nejmenší σ-algebra podmnožin $\mathcal{X}$, která obsahuje $\mathcal{Q}$, se nazývá σ-algebra generovaná systémem $\mathcal{Q}$ a značí se $\sigma(\mathcal{Q})$.

3 Definice (Měřitelný prostor) Dvojice $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$, kde $\mathcal{X}$ je neprázdná množina a $\mathcal{A}$ je σ-algebra jejích podmnožin, se nazývá měřitelný prostor.

4 Příklad Nechť $\mathcal{X} = \mathbb{R}$. Uvažujme σ-algebru $\mathcal{B}_0$ generovanou otevřenými intervaly $\{(a,b) : a < b \in \mathbb{R}\}$. Tato σ-algebra se nazývá **borelovská σ-algebra**. Stejnou σ-algebru generují i uzavřené intervaly, polouzavřené intervaly, a intervaly typu $(-\infty, a)$, $a \in \mathbb{R}$.

5 Definice (Měřitelné zobrazení) Nechť $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ a $(\mathcal{Y}, \mathcal{B})$ jsou měřitelné prostory. Zobrazení $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ se nazývá měřitelné právě když $\forall B \in \mathcal{B}$ platí $\{x \in \mathcal{X} : f(x) \in B\} \in \mathcal{A}$, tj. vzory měřitelných množin jsou měřitelné. Měřitelné zobrazení značíme

$$f : (\mathcal{X}, \mathcal{A}) \to (\mathcal{Y}, \mathcal{B}).$$

Míra

6 Definice (Indikátor) Indikátor množiny $B \subset \mathcal{X}$ je funkce $\mathbb{I}_B : \mathcal{X} \to \{0,1\}$ definovaná takto:

$$\mathbb{I}_B(x) = \begin{cases} 1 & x \in B; \\ 0 & x \notin B. \end{cases}$$

Místo $\mathbb{I}_B(x)$ můžeme také psát $\mathbb{I}(x \in B)$.

7 Definice (Míra) Nechť $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. Funkce $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ se nazývá míra právě když
- (i) $\mu(A) \geq 0 \ \forall A \in \mathcal{A}$, $\mu(\emptyset) = 0$.
- (ii) $\forall A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ takové, že $A_i \cap A_j = \emptyset$, platí $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

8 Poznámka

[1] Michal Kulich, KPMS MFF UK, 29.9.2009

(i) μ se nazývá konečná míra právě když $\mu(\mathcal{X}) < \infty$.
(ii) μ se nazývá σ-konečná míra právě když existují množiny $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ takové, že $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \mathcal{X}$ a $\mu(A_i) < \infty \; \forall i$.

9 Příklady (Míry na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_0)$)

(i) **Lebesgueova míra** jest definována skrze $\lambda((a,b\rangle) = b - a \; \forall a < b \in \mathbb{R}$. (Stačí definovat na generátoru borelovské σ-algebry.)
(ii) **Lebesgue-Stieltjesova míra**. Nechť F je daná neklesající zprava spojitá reálná funkce taková, že $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ a $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$. Pak definujeme $\mu_F((a,b\rangle) = F(b) - F(a) \; \forall a < b \in \mathbb{R}$.
(iii) **Čítací míra**. Nechť $S = \{x_1, x_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ jest nejvýše spočetná množina reálných čísel. Definujeme

$$\mu_S(B) = \#\{i : x_i \in B\} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{I}_B(x_i)$$

pro $B \in \mathcal{B}_0$.

Integrál dle míry

10 Definice (Jednoduchá funkce) Nechť $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. Jednoduchá funkce je měřitelná funkce $\mathcal{X} \to \mathbb{R}$, kterou lze vyjádřit ve tvaru

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbb{I}_{A_j}(x),$$

kde $n \geq 1$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ jsou vesměs různá čísla a $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ jsou po dvou disjunktní měřitelné množiny takové, že $\bigcup_{j=1}^{n} A_i = \mathcal{X}$.

11 Definice (Integrál dle míry) Nechť $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ je měřitelný prostor s mírou.

- Je-li $\varphi(x)$ jednoduchá funkce, definujeme

$$\int \varphi(x)\, d\mu(x) \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(A_j).$$

- Je-li $f(x)$ libovolná nezáporná měřitelná funkce, definujeme

$$\int f(x)\, d\mu(x) \stackrel{\text{df}}{=} \sup_{\varphi \in \Xi} \left\{ \int \varphi(x)\, d\mu(x) \right\},$$

kde $\Xi = \{\varphi \text{ jednoduchá} : 0 \leq \varphi(x) \leq f(x) \; \forall x \in \mathbb{R}\}$.

- Je-li $h(x)$ libovolná měřitelná funkce, definujeme

$$\int h(x)\, d\mu(x) \stackrel{\text{df}}{=} \int h^+(x)\, d\mu(x) - \int h^-(x)\, d\mu(x)$$

(je-li alespoň jeden integrál na pravé straně konečný), kde $h^+(x) = \max(h(x), 0)$ a $h^-(x) = -\min(h(x), 0)$.

12 Poznámka Integrál $\int_A h(x)\,d\mu(x)$, kde $A \in \mathcal{A}$, je definován jako $\int h(x)\mathbb{I}_A(x)\,d\mu(x)$.

13 Příklady

(i) **Lebesgueův integrál** je definován jako $\int_A f(x)\,d\lambda(x)$ a značí se též $\int_A f(x)\,dx$. Tento integrál je ekvivalentní Riemannovu a Newtonovu integrálu, pokud tyto existují.

(ii) **Lebesgue-Stieltjesův integrál** pro danou funkci F (předpoklady o F viz bod 9) definujeme jako $\int_A f(x)\,d\lambda_F(x)$. Tento integrál též značíme $\int_A f(x)\,dF(x)$. Je-li F diferencovatelná, počítáme $\int_A f(x)\,dF(x) = \int_A f(x)F'(x)\,dx$. Je-li F po částech konstantní se skoky v bodech $x_1 < x_2 < \cdots$, máme

$$\int_A f(x)\,dF(x) = \sum_{x_i \in A} f(x_i)\Delta F(x_i).$$

(iii) **Integrál dle čítací míry** pro danou posloupnost $S = \{x_1, x_2, \ldots\}$ je definován jako $\int_A f(x)\,d\mu_S(x)$. Platí: $\int_A f(x)\,d\mu_S(x) = \sum_{x_i \in S \cap A} f(x_i)$.

Radon-Nikodýmova derivace

14 Definice (Absolutní spojitost měr) Nechť μ a ν jsou σ-konečné míry na $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$. Míra μ jest absolutně spojitá vzhledem k ν právě když $\forall A \in \mathcal{A} \quad \nu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$.

15 Poznámka (Radon-Nikodýmova věta) Nechť μ a ν jsou σ-konečné míry na $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ a nechť μ jest absolutně spojitá vzhledem k ν. Pak existuje nezáporná měřitelná funkce $f : (\mathcal{X}, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_0)$ taková, že

$$\mu(A) = \int_A f(x)\,d\nu(x) \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Funkce f je určena jednoznačně až na množinu míry 0.

16 Poznámka (Radon-Nikodýmova derivace) Funkce f, jejíž existenci a jednoznačnost garantuje Radon-Nikodýmova věta, se nazývá Radon-Nikodýmova derivace a může se značit $\frac{d\mu}{d\nu}$. Pro každou měřitelnou funkci $\varphi : (\mathcal{X}, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_0)$ pak platí

$$\int_A \varphi(x)\,d\mu(x) = \int_A \varphi(x)f(x)\,d\nu(x) \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$