Míry v $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$[1]

Jedním ze základních pojmů ve statistice je *náhodná veličina*. Obecně je to jakékoliv měřitelné (tj. „pěkné“) zobrazení z pravděpodobnostního prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ do měřitelného prostoru $(E, \mathcal{E})$. Nás budou zajímat případy $E = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, a $\mathcal{E} = \mathcal{B}^n$, tj. borelovské množiny na $\mathbb{R}^n$. Náhodná veličina (resp. náhodný vektor) X *indukuje* pravděpodobnostní míru P_X na $(E, \mathcal{E})$ způsobem

$$\mathsf{P}_X(B) = \mathsf{P}\Big(\{\omega : X(\omega) \in B\}\Big) \quad \text{pro každou } B \in \mathcal{E},$$

stručně píšeme $\mathsf{P}_X(B) = \mathsf{P}(X \in B)$. Míře P_X se říká *rozdělení* náhodné veličiny X. Připomeňte si, že toto rozdělení je jednoznačně určeno distribuční funkcí F veličiny X. Nechť je h měřitelná funkce z $(E, \mathcal{E})$ do $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Je nezbytné umět spočítat střední hodnotu veličiny $h(X)$, tj. integrál $\mathsf{E}\, h(X) = \int_\Omega h(X(\omega))\,\mathrm{d}\mathsf{P}(\omega)$. Z *věty o přenosu integrace* dostaneme

$$\int_\Omega h[X(\omega)]\,\mathrm{d}\mathsf{P}(\omega) = \int_E h(x)\,\mathrm{d}\mathsf{P}_X(x).$$

Tím jsme vše převedli na výpočet integrálu podle nějaké míry v $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$. Jak se ale takový integrál počítá? Umíme to?

Radon-Nikodymova věta nám říká, že je-li míra P_X absolutně spojitá vzhledem k míře μ, tj. pro všechny $B \in \mathcal{E}$ platí implikace

$$\mu(B) = 0 \Rightarrow \mathsf{P}[X \in B] = 0,$$

pak existuje nezáporná funkce $f(x)$ taková, že pro každou měřitelnou funkci h z $(E, \mathcal{E})$ do $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ platí

$$\int_E h(x)\,\mathrm{d}P_X(x) = \int_E h(x) f(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Zejména pak

$$\mathsf{P}[X \in B] = \int_B f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \quad \text{a} \quad \mathsf{E}\, h(X) = \int_E h(x) f(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Funkce f se nazývá Radon-Nikodymova derivace nebo také *hustota* míry P_X vzhledem k μ.

➡ **Stačí nám tedy najít takovou míru μ, vzhledem ke které je P_X absolutně spojitá a podle které umíme počítat integrály, a určit hustotu f míry P_X vzhledem k μ.**

Máme k dispozici několik kandidátů.

1 Lebesgueova míra λ_n na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$

Nechť $a_1, \ldots, a_n$ a $b_1, \ldots, b_n$ jsou reálná čísla taková, že $a_i < b_i$, $i = 1, \ldots, n$. Nechť je množina $B \in \mathcal{B}^n$ tvaru

$$B = \bigtimes_{i=1}^{n} (a_i, b_i),$$

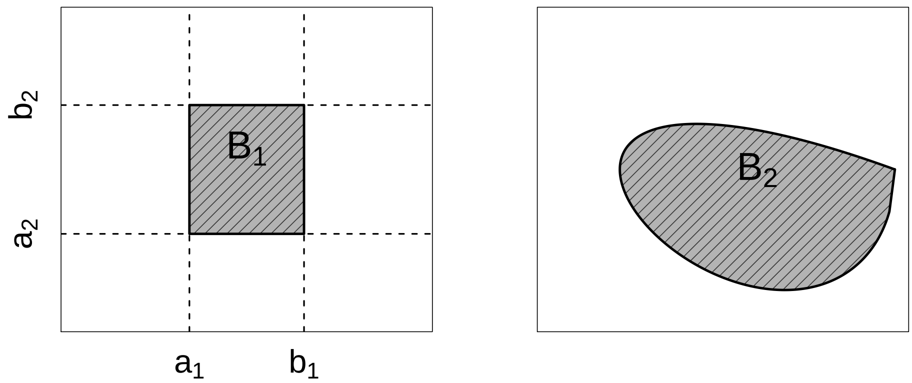
[1]Kvůli zjednodušení vyjadřování nejsou některé formulace v následujícím textu úplně matematicky precizní. Všude, kde to není zdůrazněno, uvažujme jen měřitelné funkce, integrály z nich existují apod.

tj. jde o nějaký n-rozměrný kvádr. Pak je Lebesgueova míra této množiny B dána jako

$$\lambda_n(B) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) = \prod_{i=1}^{n} \lambda((a_i, b_i)),$$

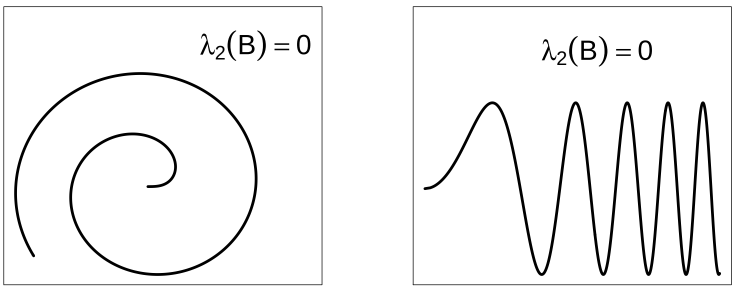
kde $\lambda = \lambda_1$ Lebesguoeva míra na přímce.

Pro $n = 2$, tj. rovinu $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2)$, je Lebesgueova míra množiny jednoduše její obsah. Míra množiny B_1 z obrázku 1 je rovna obsahu obdelníka, tj. $\lambda_2(B_1) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$. Spočítat míru množiny B_2 z obrázku 1 by bylo mnohem komplikovanější, ale tušíme, že bychom to uměli. Podobně, v $(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}^3, \lambda^3)$ je Lebesgueova míra množiny rovna jejímu objemu atd.



Obrázek 1: Lebesgueova míra v $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2)$

Připomeňte si, že každá množina, která leží v podprostoru menší dimenze, má Lebesgueovu míru nula. Např. přímka či jiná křivka má v $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2, \lambda_2)$ míru nula. Podobně, křivky a plochy mají míru nula v $(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}^3, \lambda_3)$.



Obrázek 2: Příklady množin, které mají v $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2, \lambda_2)$ míru nula

Nechť h je funkce z $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ do $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Integrál z této funkce podle λ_n počítáme jako

$$\int h(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\lambda_n(\mathbf{x}) = \int \dots \int h(x_1, \dots, x_n)\,\mathrm{d}\lambda(x_1) \dots \mathrm{d}\lambda(x_n) = \int \dots \int h(x_1, \dots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n.$$

Z Fubiniovy věty víme, že (za nějakých většinou splněných předpokladů) můžeme integrovat v jakém pořadí chceme. Pro $n = 2$ dostaneme

$$\int h(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\lambda_2(x_1, x_2) = \int \left[\int h(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1 \right] \mathrm{d}x_2 = \int \left[\int h(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_2 \right] \mathrm{d}x_1.$$

Pro výpočet použijeme pořadí integrování, které se nám zdá v naší situaci výhodnější.

Příklad 1. Integrujte

$$\iint_{x>0, y>0, x+y<1} \frac{xy}{1-x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

nejdříve podle proměnné x a pak podle y. Potom integrujte v opačném pořadí a porovnejte délku a náročnost výpočtu.

2 Čítací míra na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$

Nechť S je nejvýše spočetná množina bodů z $\mathbb{R}^n$ součinového tvaru

$$S = \bigtimes_{i=1}^{n} S_i, \qquad \text{kde } S_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots\}.$$

Jinými slovy S je jakási síť bodů v $\mathbb{R}^n$. Označme μ_S součinovou čítací míru na S. Je-li množina B tvaru $B = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n$, $B_i \in \mathcal{B}$, pak

$$\mu_S(B) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{I}_{B_i}(x_{ij}) = \prod_{i=1}^{n} \mu_{S_i}(B_i),$$

tj. pro každé $i = 1, \dots, n$ spočítáme, kolik bodů z S_i leží v B_i, a pak vše dohromady vynásobíme. Pro obecnou množinu $B \in \mathcal{B}^n$ můžeme psát

$$\mu_S(B) = \sum_{j_1=1}^{\infty} \sum_{j_2=1}^{\infty} \cdots \sum_{j_n=1}^{\infty} \mathbb{I}_B(x_{1j_1}, x_{2j_2}, \dots, x_{nj_n}),$$

tj. míra B je rovna počtu bodů v $B \cap S$. Integrál z měřitelné funkce h podle μ_S počítáme jako

$$\int h(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mu_S(\mathbf{x}) = \sum_{j_1=1}^{\infty} \sum_{j_2=1}^{\infty} \cdots \sum_{j_n=1}^{\infty} h(x_{1j_1}, x_{2j_2}, \dots, x_{nj_n}).$$

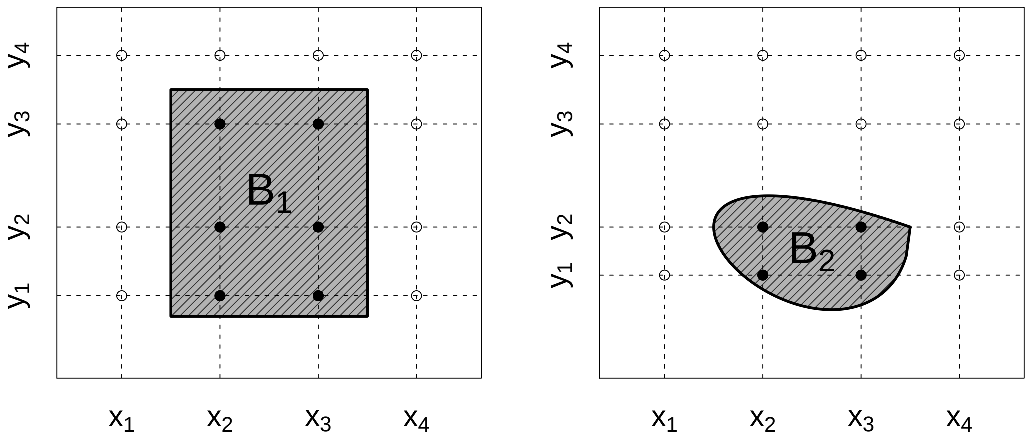
Podívejme se na $n = 2$. Nechť je μ_{S_1} čítací míra na množině S_1 a μ_{S_2} je čítací míra na množině S_2, kde

$$S_1 = \{x_1, x_2, \dots\} \text{ a } S_2 = \{y_1, y_2, \dots\},$$

a uvažujme míru $\mu_S = \mu_{S_1 \times S_2}$. Pak je míra μ_S obecné množiny $B \in \mathcal{B}^2$ rovna počtu bodů (x_i, y_j), které patří do B, viz obrázek 3. Integrál z funkce $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spočítáme jako

$$\int h(x, y)\,\mathrm{d}\mu_S(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} h(x_i, y_j).$$

Příklad 2. Nechť $S_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ a $S_2 = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ a uvažujme množiny B_1 a B_2 na obrázku 3. Pak máme $\mu_S(B_1) = 2 \cdot 3 = 6$ a pro B_2 dostaneme $\mu_S(B_2) = 4$.



Obrázek 3: Čítací míra μ_S v $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2)$

3 Obecné součinové míry

Nechť $\mu_1, \ldots, \mu_n$ jsou míry definované na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Součinovou míru $\mu = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ definujeme na množinách $B = B_1 \times \cdots \times B_n$, kde $B_i \in \mathcal{B}$, jako

$$\mu(B) = \prod_{i=1}^{n} \mu_i(B_i).$$

Míra μ „kvádrů“ B je tedy rovna součinu jednotlivých $\mu_i(B_i)$, odtud název součinová míra. Integrál z funkce $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ spočítáme jako

$$\int h(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mu_S(\mathbf{x}) = \int \ldots \int h(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}\mu_1(x_1) \ldots \mathrm{d}\mu_n(x_n).$$

Připomeňme si, že i tady platí Fubiniova věta.

Příkladem součinové míry je Lebesgueova míra v $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ nebo čítací míra μ_S v $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$, pokud je S součinového tvaru $S = S_1 \times \cdots \times S_n$. Můžeme ale uvažovat i „kombinaci“ obou, viz následující příklad.

Příklad 3. Uvažujme $n = 2$, $\mu_1 = \lambda$ (tj. Lebesgueova míra) a $\mu_2 = \mu_S$, tj. čítací míra na množině $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Součinová míra $\mu = \lambda \otimes \mu_S$ je koncentrovaná na čtyřech přímkách $y = x_1$, $y = x_2$, $y = x_3$, $y = x_4$.

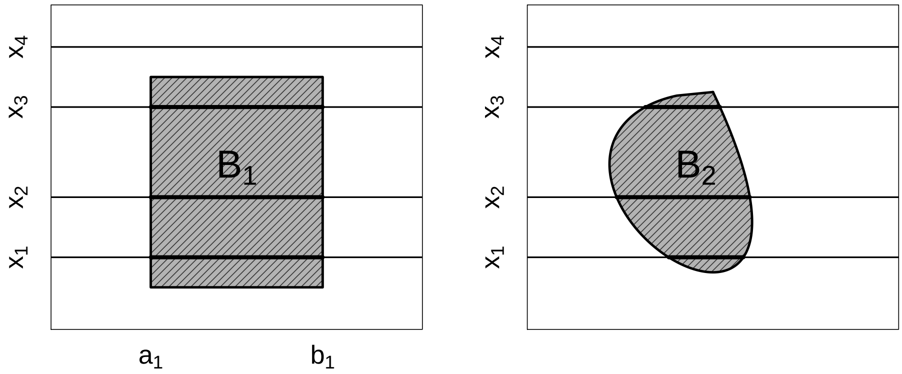
Nechť $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$ a vezměme obdelník

$$B = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2).$$

Pak

$$\mu\left[(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)\right] = (b_1 - a_1) \cdot \sum_{j=1}^{4} \mathbb{I}_{(a_2, b_2)}(x_j).$$

Pro konkrétní množinu B_1 z obrázku 4 dostaneme $\mu(B) = 3(b_1 - a_1)$. Míra obecnější množiny B_2 z obrázku 4 je rovna součtu délek průsečíků přímek $y = x_1$, $y = x_2$, $y = x_3$ s touto množinou.



Obrázek 4: Množiny B_1 a B_2

Integrál z funkce h spočítáme jako

$$\int h(u_1,u_2)\,\mathrm{d}\mu(u_1,u_2) = \iint h(u_1,u_2)\,\mathrm{d}\lambda(u_1)\,\mathrm{d}\mu_S(u_2) = \int\left[\int h(u_1,u_2)\,\mathrm{d}u_1\right]\mathrm{d}\mu_S(u_2) = \sum_{j=1}^{4}\int h(u_1,x_j)\,\mathrm{d}u_1$$
$$= \int h(u,x_1)\,\mathrm{d}u + \int h(u,x_2)\,\mathrm{d}u + \int h(u,x_3)\,\mathrm{d}u + \int h(u,x_4)\,\mathrm{d}u.$$

4 Jiné než součinové míry

Příklad 4. Nechť je míra μ na $(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}^2)$ dána jako Lebesgueova míra λ_1 soustředěná na přímce $y = x$. Pak

$$\mu(B) = \lambda_1\big(B\cap\{(x,x):\ x\in\mathbb{R}\}\big).$$

Jednoduše řečeno, míra množiny je délka průsečíku této množiny s přímkou $y = x$, viz obrázek 5.

Podobně můžeme uvažovat míru μ koncentrovanou na jiné křivce a rozdělení zde může být komplikovanější než λ_1.

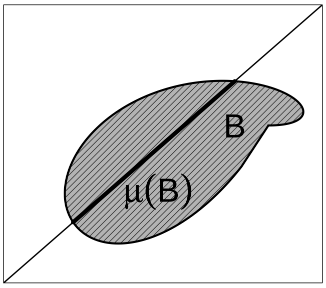
Příklad 5. Je-li Z jednorozměrná náhodná veličina se spojitým rozdělením, potom má vektor $\mathbf{X} = (Z, Z^2)^T$ rozdělení soustředěné na parabole $P = \{(x,y) : y = x^2, x\in\mathbb{R}\}$.

Rozmyslete si, jak by se počítala míra P_X obecné množiny $B\in\mathcal{B}^2$ pro nějaké konkrétní rozdělení Z. Uvažujte například rovnoměrné rozdělení na $(0,3)$ a množinu $B = \{(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1\}$.

Příklad 6. Nechť $S = \{(0,0),(0,1),(1,0)\}$ a uvažujme čítací míru μ_S v $(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}^2)$. Tato míra není součinová, ale je absolutně spojitá vůči součinové míře $\mu_{\tilde{S}}$, kde $\tilde{S} = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$.

5 Existence hustoty

V následujícím se omezíme na případ $n = 2$, tj. $\mathbf{X}$ bude náhodný vektor se dvěma složkami $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$. Zajímá nás, zda má vektor $\mathbf{X}$ hustotu vzhledem k Lebesgueově míře λ_2, čítací míře μ_S v $(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}^2)$ nebo k součinové míře $\lambda\otimes\mu_{S_2}$ resp. $\mu_{S_1}\otimes\lambda$.



Obrázek 5: Míra λ na přímce $y = x$

5.1 Spojité rozdělení

$\mathbf{X}$ má hustotu vzhledem k $\lambda_2 = \lambda \otimes \lambda$ právě tehdy, když pro každou množinu $B \in \mathcal{B}^2$ platí

$$\lambda_2(B) = 0 \Rightarrow \mathsf{P}[\mathbf{X} \in B] = 0.$$

Pak existuje hustota $f(x_1, x_2)$ taková, že

$$\mathsf{P}[\mathbf{X} \in B] = \iint_{\{(x_1,x_2)\in B\}} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2.$$

V takovém případě říkáme, že $\mathbf{X}$ má spojité rozdělení. Střední hodnotu spočítáme jako

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\,\mathbf{X} &= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{x} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = \iint_{\mathbb{R}^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \\ &= \begin{pmatrix} \iint x_1 f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \\ \iint x_2 f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int x_1[\int f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_2]\,\mathrm{d}x_1 \\ \int x_2[\int f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1]\,\mathrm{d}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int x_1 f_1(x_1)\,\mathrm{d}x_1 \\ \int x_2 f_2(x_2)\,\mathrm{d}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathsf{E}\,X_1 \\ \mathsf{E}\,X_2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

kde f_1 značí marginální hustotu veličiny X_1 a f_2 hustotu X_2. Pro funkci $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ máme

$$\mathsf{E}\,h(\mathbf{X}) = \iint h(x_1, x_2) f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2.$$

5.2 Diskrétní rozdělení

Nechť

$$S_1 = \{s_1, s_2, \dots\}, \quad S_2 = \{t_1, t_2, \dots\} \quad \text{a} \quad S = S_1 \times S_2.$$

Náhodný vektor $\mathbf{X}$ má hustotu vzhledem k $\mu_S = \mu_{S_1} \otimes \mu_{S_2}$ právě tehdy, když pro každou množinu $B \in \mathcal{B}^2$ platí

$$B \cap (S_1 \times S_2) = \emptyset \Rightarrow \mathsf{P}[\mathbf{X} \in B] = 0,$$

neboli

$$\mathsf{P}[\mathbf{X} \in S_1 \times S_2] = 1.$$

Platí-li tato podmínka, pak existuje $f(x_1, x_2)$ taková, že

$$\mathsf{P}[\mathbf{X} \in B] = \iint_B f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\mu_{S_1}(x_1) d\mu_{S_2}(x_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} f(s_i, t_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij},$$

kde

$$p_{ij} = f(s_i, t_j) = \mathsf{P}[X_1 = s_i, X_2 = t_j].$$

Střední hodnotu $\mathsf{E}\,\mathbf{X}$ spočítáme jako

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\,\mathbf{X} &= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{x} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\mu_{S_1}(x_1) d\mu_{S_2}(x_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \begin{pmatrix} s_i \\ t_j \end{pmatrix} p_{ij} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{\infty} s_i \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} \\ \sum_{j=1}^{\infty} t_j \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{\infty} s_i p_i^1 \\ \sum_{j=1}^{\infty} t_j p_j^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathsf{E}\,X_1 \\ \mathsf{E}\,X_2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

kde p_i^1 jsou marginální pravděpodobnosti veličiny X_1 a p_j^2 marginální pravděpodobnosti X_2. Pro $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dostaneme

$$\mathsf{E}\,h(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} h(s_i, t_j) p_{ij}.$$

Příklad 7. Taháme n-krát s vracením z urny, ve které je k_1 bílých kuliček a k_2 černých kuliček. Nechť X_1 značí počet vytažených bílých kuliček a X_2 počet vytažených černých kuliček. Jakých hodnot může nabývat $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$? Určete (minimální) S_1 a S_2, aby byla P_X absolutně spojitá vzhledem k $\mu_{S_1 \times S_2}$, a určete hustotu P_X vzhledem k $\mu_{S_1 \times S_2}$.

5.3 Hustoty náhodných vektorů s diskrétní a spojitou složkou

Uvažujme náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$, kde X_1 nabývá pouze hodnot z nejvýše spočetné množiny $S = \{s_1, s_2 \dots\}$ a X_2 může nabývat hodnot z intervalu (a, b), $-\infty \le a < b \le \infty$. Budeme počítat hustotu vektoru $\mathbf{X}$ vzhledem k míře

$$\mu = \mu_S \otimes \lambda.$$

Za našich předpokladů platí

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \mathsf{P}[\mathbf{X} \in A] = 0 \quad \text{pro všechna } A \in \mathcal{B}^2.$$

Míra P_X je tedy absolutně spojitá vzhledem k μ, a proto hustota existuje.

Připomeňme si, jak se spočítá míra $\mu(B)$ množiny $B \in \mathcal{B}^2$. Nechť $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$ a nechť $B = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$. Pak

$$\mu(B) = \mu_S[(a_1, b_1)] \cdot (b_2 - a_2) = (b_2 - a_2) \sum_{k: s_k \in (a_1, b_1)} 1 = (b_2 - a_2) \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{I}_{(a_1, b_1)}(s_k).$$

Jinak řečeno vezmeme délku intervalu (a_2, b_2) a vynásobíme ji počtem bodů z S, které padnou do (a_1, b_1), podobně jako na obrázku 4.

Hustota vektoru $\mathbf{X}$ vzhledem k míře μ je dána

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases} f_k(x_2) & \text{pro } k \text{ takové, že } x_1=s_k,\\ 0 & \text{pokud } x_1\notin S.\end{cases}$$

Pak pro $B=(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)$ máme

$$\mathsf{P}[\mathbf{X}\in B]=\int_B f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mu(\mathbf{x})=\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}\mu_S(x_1)\,\mathrm{d}\lambda(x_2)=\sum_{k:s_k\in(a_1,b_1)}\int_{a_2}^{b_2} f_k(x_2)\,\mathrm{d}x_2.$$

Vezmeme-li $a_i=-\infty$, $b_i=\infty$, pak $B=\mathbb{R}^2$ a

$$1=\mathsf{P}[\mathbf{X}\in\mathbb{R}^2]=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_k(x_2)\,\mathrm{d}x_2.$$

Je-li $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ měřitelná, pak

$$\mathsf{E}\,h(\mathbf{X})=\int h(\mathbf{x})f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mu(\mathbf{x})=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(s_k,x_2)f_k(x_2)\,\mathrm{d}x_2.$$

Marginální rozdělení veličiny X_1 spočítáme jako

$$\mathsf{P}[X_1=x_1]=f_1(x_1)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty} f_k(x_2)\,\mathrm{d}x_2 & \text{pro } k \text{ takové, že } x_1=s_k,\\ 0 & \text{pokud } x_1\notin S.\end{cases}$$

Marginální rozdělení veličiny X_2 je dáno jako

$$f_2(x_2)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}\mu_s(x_1)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_2).$$

Příklad 8. Uvažujme náhodný vektor $\mathbf{X}=(X_1,X_2)^T$, který pro danou osobu udává následující charakteristiky: X_1 značí nejvyšší dosažené vzdělání dané osoby (1=základní, 2=střední a 3=vysoké) a X_2 určuje měsíční příjem této osoby (průměrný příjem za poslední kalendářní rok v tis. Kč). Uvažujme součinovou míru

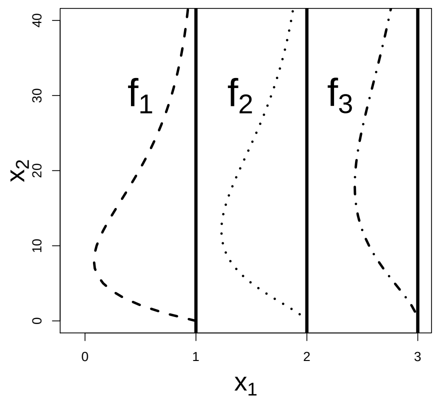
$$\mu=\mu_{\{1,2,3\}}\otimes\lambda.$$

Hustota vektoru $\mathbf{X}$ vzhledem k μ je dána jako

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases} f_{x_1}(x_2) & \text{pokud } x_1\in\{1,2,3\},\\ 0 & \text{jinak.}\end{cases}$$

Jinými slovy,

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases} f_1(x_2) & \text{pro } x_1=1,\\ f_2(x_2) & \text{pro } x_1=2,\\ f_3(x_2) & \text{pro } x_1=3,\\ 0 & \text{jinak.}\end{cases}$$



Obrázek 6: Hustota f vektoru $\mathbf{X}$ vzhledem k μ

Zde f_1 udává rozdělení příjmů osob se základním vzděláním, f_2 určuje rozdělení příjmů středoškoláků a f_3 popisuje příjmy vysokoškoláků. Příklad možných voleb f_1, f_2, f_3 je uveden na obrázku 6. *Pozor,* f_1, f_2, f_3 *nejsou samy o sobě hustotami, jelikož* $\int f_i(x)\,\mathrm{d}x \neq 1$.

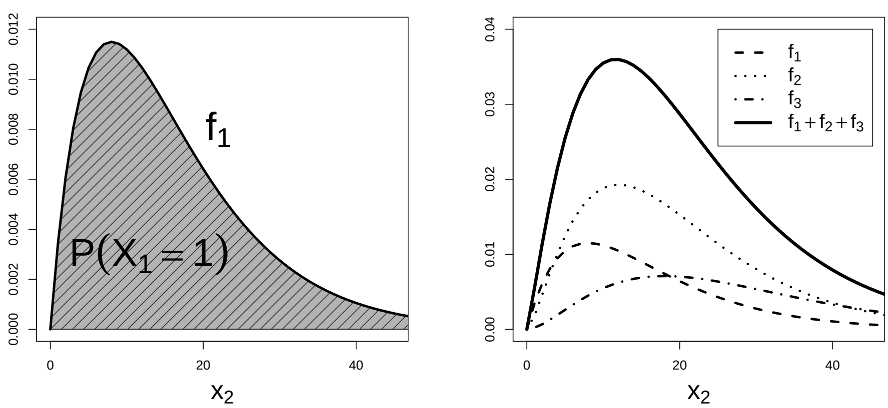
Marginální rozdělení X_1 dostaneme jako

$$\int f_i(x_2)\,\mathrm{d}x_2 = \mathsf{P}[X_1 = i], \quad i = 1, 2, 3.$$

Podobně,

$$f_1(x_2) + f_2(x_2) + f_3(x_2)$$

určuje rozdělení příjmů bez rozlišení vzdělání. Graficky viz obrázek 7.



Obrázek 7: Výpočet marginálních rozdělení

Příklad 9. Nechť $S = \{0,1\}$ a nechť má náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ hustotu $f(x_1, x_2)$ vzhledem k míře $\mu = \lambda \otimes \mu_S$, kde

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{2}{3}\exp\{-(1+x_2)x_1\} & \text{pro } x_2 \in \{0,1\} \text{ a } x_1 > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete marginální rozdělení X_1, X_2, střední hodnoty $\mathsf{E}\,X_1$, $\mathsf{E}\,X_2$ a kovarianci $\mathsf{cov}\,(X_1, X_2)$.

Příklad 10. Příklad náhodné veličiny X, která nemá ani spojité ani diskrétní rozdělení: Nechť má veličina Z rovnoměrné rozdělení na $[-1, 1]$ a nechť

$$X = \begin{cases} 0 & \text{pokud } Z \le 0, \\ Z & \text{pokud } Z > 0. \end{cases}$$

Veličina X může nabývat nespočetně mnoha hodnot z intervalu $(0, 1)$ a nemůže být tedy absolutně spojitá vzhledem k čítací míře. Zároveň $\mathsf{P}(X = 0) = 1/2$ a tedy P_X není absolutně spojitá vzhledem k Lebesgueově míře.