

Klasická pravděpodobnost, kombinatorika

6. 10. 2011

- Házíme čtyřmi hracími kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že
 - padnou čtyři různá čísla,
 - padnou pouze lichá čísla,
 - součet čísel na všech kostkách dohromady bude roven 6
 - součet čísel bude větší než 5?
- S jakou pravděpodobností padne alespoň jedna šestka, házíme-li
 - dvěma kostkami,
 - n kostkami.
- Uvažujme n různých dopisů a n různých obálek (již s nadepsanou adresou). Zmatená sekretářka umístí dopisy do obálek zcela náhodně.
 - Jaká je pravděpodobnost, že je alespoň jeden dopis ve správné obálce?
 - S jakou pravděpodobností není žádný dopis ve správné obálce? Spočítejte limitu této pravděpodobnosti pro $n \rightarrow \infty$.
- Maxwellovo-Boltzmannovo schéma.**

Mějme r **rozlišitelných** předmětů a n přihrádek. Předměty náhodně rozmístíme do přihrádek, přičemž všechna rozmístění jsou stejně pravděpodobná. Určete

 - pravděpodobnost, že daná přihrádka obsahuje právě k předmětů,
(*Návod: Uvažujte uspořádané r -tice z čísel $1 \dots n$ zaznamenávající, v které přihrádce daný předmět je.*)
 - limitu této pravděpodobnosti pro $n \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$ tak, že $r/n \rightarrow \lambda > 0$,
 - pravděpodobnost, že žádná přihrádka není prázdná.
(*Návod: Je jednodušší spočítat pravděpodobnost jevu opačného.*)
- Boseovo-Einsteinovo schéma.**

Mějme r **nerozlišitelných** předmětů a n přihrádek. Předměty náhodně rozmístíme do přihrádek, přičemž všechna rozmístění jsou stejně pravděpodobná. Určete

 - pravděpodobnost, že daná přihrádka obsahuje právě k předmětů,
(*Návod: Uvažujte vhodné „grafické“ znázornění.*)
 - limitu této pravděpodobnosti pro $n \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$ tak, že $r/n \rightarrow \lambda > 0$,
 - pravděpodobnost, že žádná přihrádka není prázdná.
(*Návod: Počítejte přímo pravděpodobnost tohoto jevu a opět použijte vhodné „grafické“ znázornění.*)

Geometrická pravděpodobnost

- Na úsečce délky l jsou náhodně umístěny dva body, které tuto úsečku rozdělí na tři části. S jakou pravděpodobností je možné z takto vzniklých tří úseček sestavit trojúhelník?

Opakování z přednášky

Klasická definice pravděpodobnosti:

- Ω je množina všech možných výsledků náhodného pokusu
- $\omega \in \Omega$ elementární jev
- $A \subset \Omega$ náhodný jev
- Nechť Ω obsahuje **konečný** počet prvků, tj. $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, a nechť všechny elementární jevy ω_i jsou **stejně pravděpodobné**. Pak pravděpodobnost náhodného jevu A definujeme jako

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{n},$$

kde $|A|$ = počet prvků množiny A .

Vlastnosti:

- $0 \leq P(A) \leq 1$,
- $P(A^c) = 1 - P(A)$,
- jestliže $A \subset B$, pak $P(A) \leq P(B)$ a $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$,
- $P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B^c)$,
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
- $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$.