Cvičení z NSTP129

Nezávislost, podmíněná pravděpodobnost, úplná pravděpodobnost, Bayesův vzorec

13. 10. 2011

1. Házíme dvěma pravidelnými kostkami.
   (a) Jaká je pravděpodobnost, že padla šestka za podmínky, že celkový součet je 8?
   (b) Jsou jevy [padla šestka] a [celkový součet je 8] nezávislé?
   (c) Jaká je pravděpodobnost, že padla šestka na 1.kostce za podmínky, že padla šestka alespoň na jedné kostce?

2. Házíme dvěma pravidelnými kostkami — modrou a zelenou. Označme jevy A=[na modré kostce padlo sudé číslo], B =[na zelené kostce padlo liché číslo], C =[součet čísel je lichý]. Jsou náhodné jevy A,B,C po dvou nezávislé? Jsou jevy A,B,C nezávislé?

3. Vybereme náhodně dvě čísla z intervalu $(0, 1)$. Určete, jaká je pravděpodobnost, že je jejich rozdíl menší než $1/2$ za podmínky, že je jejich součet větší než 1. Co lze říci o nezávislosti těchto dvou jevů?

4. Tenistka má v prvním podání úspěšnost 60% a v druhém podání má úspěšnost 80%.
   (a) Jaká je pravděpodobnost dvojchyby?
   (b) S jakou pravděpodobností udělala tenistka v prvním podání chybu, když víme, že nedošlo k dvojchybě?

5. Ve třídě je 70% chlapců a 30% dívek. Dlouhé vlasy má 10% chlapců a 80% dívek.
   (a) Jaká je pravděpodobnost, že má náhodně vybraná osoba dlouhé vlasy?
   (b) Vybraná osoba má dlouhé vlasy. Jaká je pravděpodobnost, že je to dívka?

6. Házíme dvěma hracími kostkami najednou dokud nepadne součet 5 nebo součet 7 (na obou kostkách dohromady). S jakou pravděpodobností padne dříve součet 5 než součet 7?

7. Máme tři truhly se dvěma mincemi. V truhle A jsou dvě zlaté mince, v truhle B dvě stříbrné mince a v truhle C zlatá a stříbrná mince. Náhodně vybereme truhlu a z ní vytáhneme náhodně minci. Ta je zlatá. Jaká je pravděpodobnost, že i druhá mince v této truhle je zlatá?

8. U dvojčat je pravděpodobnost narození dvou chlapců rovna p a narození dvou děvčat rovna q, kde $0 < p + q < 1$. U dvojčat různého pohlaví je stejně pravděpodobné, že se jako první narodí dívka a že se jako první narodí chlapec. S jakou pravděpodobností se narodí dva chlapci, jestliže je prvorozené dítě z dvojčat chlapec?

9. Slovo „humor“ se v americké angličtině píše jako HUMOR a v britské angličtině jako HUMOUR. Na zahradní slavnosti byly 2/3 Američanů a 1/3 Britů. Náhodně vybraný člověk napsal slovo humor (svým způsobem) a z tohoto slova bylo náhodně vybráno jedno písmeno. S jakou pravděpodobností byl daný člověk Brit, jestliže bylo vybráno písmeno ”U”?

10. Roztržitý profesor zapomene v obchodě deštník s pravděpodobností $1/4$. Cestou ze školy navštívil čtyři obchody a domů přišel bez deštníku. Jaká je pravděpodobnost, že deštník zapomněl ve čtvrtém obchodě?

Připomenutí z přednášky

Nechť A, B jsou náhodné jevy, $\mathsf{P}(B) > 0$. **Podmíněnou pravděpodobnost** jevu A za podmínky B definujeme jako

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)}.$$

Nezávislost. Náhodné jevy A, B se nazývají nezávislé, jestliže platí

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B).$$

Náhodné jevy $A_1, \dots A_n$ jsou nezávislé, jestliže pro každé $r \leq n$ a každou $\{i_1, \dots, i_r\}$ podmnožinu $\{1, \dots, n\}$ platí

$$\mathsf{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}) = \mathsf{P}(A_{i_1}) \cdot \dots \mathsf{P}(A_{i_r}).$$

(Tj. součinovou podmínku musíme ověřit pro všechny dvojice, všechny trojice ... atd.)

Věta o úplné pravděpodobnosti:
Nechť $A, B_1, B_2, \dots$ jsou náhodné jevy takové, že $B_i \cap B_j = \emptyset$ pro všechna $i \neq j$, $\bigcup_i B_i = \Omega$ a $\mathsf{P}(B_i) > 0$ pro všechna $i = 1, 2, \dots$. Pak

$$\mathsf{P}(A) = \sum_i \mathsf{P}(A \cap B_i) = \sum_i \mathsf{P}(A|B_i)\mathsf{P}(B_i).$$

Bayesova věta:
Nechť $A, B_1, B_2, \dots$ jsou náhodné jevy takové, že $B_i \cap B_j = \emptyset$ pro všechna $i \neq j$, $\bigcup_i B_i = \Omega$, $\mathsf{P}(B_i) > 0$ pro všechna i a nechť $\mathsf{P}(A) > 0$. Pak

$$\mathsf{P}(B_i|A) = \frac{\mathsf{P}(B_i \cap A)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\mathsf{P}(A|B_i)\mathsf{P}(B_i)}{\sum_j \mathsf{P}(A|B_j)\mathsf{P}(B_j)}.$$

Věta o násobení pravděpodobností:
Jestliže náhodné jevy $A_1, \dots, A_n$ splňují $\mathsf{P}(\cap_{i=1}^n A_i) > 0$, pak

$$\mathsf{P}(\cap_{i=1}^n A_i) = \mathsf{P}(A_n| \cap_{i=1}^{n-1} A_i) \cdot \mathsf{P}(A_{n-1}| \cap_{i=1}^{n-2} A_i) \cdot \dots \cdot \mathsf{P}(A_2|A_1)\mathsf{P}(A_1).$$