Cvičení z NSTP129

Náhodná veličina — Diskrétní rozdělení

27. 10. 2011

1. V peněžence máte dvě papírové padesátikoruny, jednu stokorunovou a jednu dvousetkorunovou bankovku. Zloděj Vám z peněženky náhodně vybere dvě bankovky. Označme jako X náhodnou veličinu, která udává, o kolik peněz jste právě přišli.
   (a) Určete rozdělení X a spočtěte Vaši očekávanou ztrátu.
   (b) Nakreslete distribuční funkci veličiny X. Připomeňte obecné vlastnosti distribuční funkce.
   (c) Určete a nakreslete kvantilovou funkci veličiny X.
   (d) Zloděj následně zaplatí 100 Kč za špatné parkování a doma mu manželka zabaví čtyři pětiny z toho, co donese. Označme jako Y veličinu udávající částku, která zlodějovi po tom všem zůstane. Určete rozdělení a očekávanou hodnotu Y.
   (e) Určete rozptyl veličiny Y.
   (f) S jakou pravděpodobností si bude zloděj moci večer v hospodě koupit jedno pivo za 21 Kč?
2. Test obsahuje n otázek, ke každé z nich jsou uvedeny 4 možnosti a, b, c, d. U každé otázky je právě jedna odpověď správná. Předpokládejme, že student zaškrtává odpovědi zcela náhodně. Označme X počet správně zodpovězených otázek.
   (a) Odvoďte rozdělení veličiny X. Jak se toto rozdělení nazývá?
   (b) Jaký je střední (očekávaný) počet správně zpodpovězených otázek?
   (c) Jaký je rozptyl počtu správně zpodpovězených otázek?
   (d) Jaká je pravděpodobnost, že student zodpoví alespoň 1 otázku správně?
3. Veličina X určuje počet příchozích hovorů na policejní stanici za jednu hodinu. Lze předpokládat, že na stanici přijde právě k hovorů s pravděpodobností $\lambda^k e^{-\lambda}/k!$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots$, kde $\lambda > 0$.
   (a) Ověřte, že se jedná o pravděpodobností rozdělení. Jak se toto rozdělení nazývá?
   (b) Vypočítejte očekávaný počet příchozích hovorů za jednu hodinu. (Využijte momentovou vytvořující funkci).

Na rozmyšlení:

$\hookrightarrow$ *Jaký je vztah mezi rozděleními z příkladu 2 a 3? (Připomeňte si schémata z 1.cvičení.)*

$\hookrightarrow$ *Vraťte se k příkladu se samičkou z minulého cvičení: Jaký je očekávaný počet narozených jedinců, víme-li, že samička snesla právě n vajíček? Jaký je očekávaný počet narozených jedinců (bez znalosti počtu vajíček)? Jaká je střední hodnota počtu nakladených vajíček, jestliže se narodilo právě k jedinců?*

4. Uvažujme loterii, ve které je každý stírací los výherní s pravděpodobností p a nevýherní s pravděpodobností $1 - p$, kde $p \in (0, 1)$. Předpokládejme, že jsme se rozhodli kupovat losy, dokud nevyhrajeme (a pak už žádné další nekoupíme).
   (a) Určete rozdělení a očekávaný počet zakoupených nevýherních losů.

(b) Předpokládejme, že výhra v dané loterii je 100 000 Kč a jeden los stojí 100 Kč. Jaké musí být alespoň p, aby se nám celá naše strategie vyplatila? Spočítejte očekávaný zisk, je-li výherní vždy jeden los ze sta.

5. Viz příklad 4 z minulého cvičení (házení kostkou K→F→C). Jaký je očekávaný počet Cyrilových hodů kostkou?

6. Diskrétní náhodná veličina X nabývá pouze hodnot $1, 2, \ldots, n$, a to s pravděpodobnostmi $\mathsf{P}(X = k) = c \cdot k$ pro $k = 1, \ldots, n$. Určete konstantu $c > 0$ tak, aby se jednalo o pravděpodobnostní rozdělení, a střední hodnotu $\mathsf{E}X$.

Opakování z přednášky

Náhodná veličina X je měřitelné zobrazení (funkce) z prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$ do $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

- **Distribuční funkce** je funkce reálné proměnné $x \in \mathbb{R}$ definovaná jako $F(x) = \mathsf{P}(X \leq x)$. Distribuční funkce jednoznačně určuje rozdělení veličiny X!
- **Střední hodnota** veličiny X je definována jako $\mathsf{E}X = \int_\Omega X(\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{P}(\omega)$. Vyjadřuje „očekávanou hodnotu“ veličiny X.
- **Rozptyl** veličiny X je dán jako $\mathsf{Var}\,X = \mathsf{E}(X - \mathsf{E}X)^2 = \mathsf{E}X^2 - (\mathsf{E}X)^2$ (jestliže $\mathsf{E}X$ a $\mathsf{E}X^2$ existují). Rozptyl je vždy **nezáporné** číslo!
- Jestliže $a, b \in \mathbb{R}$ a X je náhodná veličina, pak platí
$$\mathsf{E}(a + bX) = a + b\mathsf{E}X, \quad \mathsf{Var}\,(a + bX) = b^2\mathsf{Var}\,X.$$
- **Kvantilová funkce** je definována jako
$$F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \ F(x) \geq u\} \quad \text{pro} \quad u \in (0,1).$$
Hodnoty kvantilové funkce se nazývají kvantily. Speciálně, $F^{-1}(1/2)$ se nazývá medián.

Diskrétní rozdělení: Nabývá-li náhodná veličina X s kladnou pravděpodobností **nejvýše spočetně** mnoha (tj. konečně nebo spočetně) hodnot $x_1, x_2, \ldots$, říkáme, že má **diskrétní rozdělení**.

- Rozdělení X je charakterizováno pravděpodobnostmi $p_k = \mathsf{P}(X = x_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ a platí $\sum_k p_k = 1$.
- **Distribuční funkce** je po částech konstantní, skokovitá se skoky o velikosti p_k v bodech x_k.
- **Střední hodnota** X se spočítá jako
$$\mathsf{E}X = \sum_k x_k \mathsf{P}(X = x_k) = \sum_k x_k p_k \quad \text{(existuje-li)}.$$
Střední hodnota náhodné veličiny $Y = h(X)$ se spočítá jako
$$\mathsf{E}Y = \mathsf{E}h(X) = \sum_k h(x_k)\mathsf{P}(X = x_k) = \sum_k h(x_k)p_k \quad \text{(existuje-li)},$$
nebo přímo z rozdělení Y jako $\mathsf{E}Y = \sum_y y\mathsf{P}(Y = y)$.
Rozptyl X spočteme tedy jako
$$\mathsf{Var}\,X = \mathsf{E}X^2 - (\mathsf{E}X)^2 = \sum_k x_k^2 \mathsf{P}(X = x_k) - \left(\sum_k x_k \mathsf{P}(X = x_k)\right)^2.$$
- Je-li X celočíselná náhodná veličina nabývající hodnot $0, 1, 2, \ldots$ s pravděpodobnostmi $p_0, p_1, p_2, \ldots$, pak definujeme **vytvořující funkci** P jako
$$P(t) = \mathsf{E}t^X = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \mathsf{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k p_k.$$
Potom platí
$$\mathsf{E}X = P'(1),$$
$$\mathsf{Var}\,X = P''(1) + P'(1) - (P'(1))^2,$$
(Případně bereme namísto $P'(1)$ limitu $P'(1-)$ apod).