Cvičení z NSTP129

Náhodná veličina — Spojité rozdělení

3. 11. 2011

1. Doba mezi příjezdy autobusů (v minutách) se řídí rozdělením s hustotou
$$f(x) = \begin{cases} ce^{-x/5}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$
   (a) Určete konstantu $c > 0$, tak aby f byla hustota. Jak se toto rozdělení nazývá?
   (b) Určete distribuční funkci F a načrtněte ji. Připomeňte znovu základní vlastnosti distribuční funkce.
   (c) Jaká je střední doba mezi příjezdy autobusů?
   (d) Spočtěte rozptyl doby mezi příjezdy autobusů.
   (e) Jaká je pravděpodobnost, že interval mezi dvěma autobusy bude přesně 15 minut? Jaká je pravděpodobnost, že interval mezi dvěma autobusy bude delší než 15 minut? Jaká je pravděpodobnost, že doba mezi příjezdy dvou autobusů bude v intervalu $[5, 20]$ min?
   (f) Vyjádřete kvantilovou funkci F^{-1} a načrtněte ji. Určete medián daného rozdělení.
   (g) Nechť Y značí exponencialu doby mezi příjezdy autobusů. Určete rozdělení Y.
2. Poloměr koule má náhodnou délku R s rovnoměrným rozdělením na $[0, a]$, $a > 0$.
   (a) Připomeňte základní charakteristiky veličiny R (znáte z přednášky).
   (b) Určete střední hodnotu a rozptyl objemu koule.
3. Nechť má náhodná veličina X rovnoměrné rozdělení na intervalu $[-1, 1]$.
   (a) Jsou jevy $[X^2 > \frac{1}{4}]$ a $[X > 0]$ nezávislé? Určete jejich pravděpodobnosti.
   (b) Určete rozdělení (distribuční funkci a hustotu) veličiny $Y = X^2$.
   (c) Spočítejte střední hodnotu a rozptyl veličiny Y.
4. Uvažujme funkce
   (a) $f(x) = c\,x^{-a}$ pro $x > 1$ a $f(x) = 0$ jinak,
   (b) $g(x) = \dfrac{c}{1 + (x - a)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

   Pro které konstanty a, c je f (resp. g) hustota? Určete střední hodnotu odpovídající rozdělení s touto hustotou.
5. Náhodná veličina X má rozdělení z příkladu 1. Určete rozdělení náhodné veličiny $Y = [X]$, kde $[x]$ značí celou část čísla x.
6. Ověřte, že rozdělení z příkladu 1 je „bez paměti", tj. platí
$$\mathsf{P}(X > x + y | X > y) = \mathsf{P}(X > x), \quad \text{pro všechna } x, y > 0.$$
7. Veličina X má rozdělení s hustotou
$$f(x) = \begin{cases} c \cdot \sin x & \text{pro } 0 < x < \pi, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(a) Určete konstantu $c > 0$ a distribuční funkci F (načrtněte).
(b) Spočítejte střední hodnotu $\mathsf{E}X$.
(c) Vyjádřete kvantilovou funkci F^{-1} a určete medián.
(d) Jaké rozdělení má náhodná veličina $Y = 1 - \cos X$?

Opakování z přednášky

Nechť pro náhodnou veličinu X s distribuční funkcí F existuje funkce $f \geq 0$ taková, že

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pak říkáme, že X má **spojité rozdělení**. Funkce f se nazývá **hustota**.

Vlastnosti:

- Spojitá náhodná veličina nabývá **nespočetně mnoha** hodnot z nějakého podintervalu $\mathbb{R}$.
- **Rozdělení** veličiny X je charakterizováno hustotou f. Pro každou $B \in \mathcal{B}$ je pak $\mathsf{P}(X \in B) = \int_B f(x)\,\mathrm{d}x$. Speciálně:
  (a) $1 = \mathsf{P}(X \in \mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$,
  (b) distribuční funkci je spojitá a lze ji spočítat jako $F(x) = \mathsf{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$,
  (c) pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ je $\mathsf{P}(X = a) = \int_{\{a\}} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$,
  (d) je-li $a < b$, pak
  $$\mathsf{P}(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$
- Střední hodnota X se spočte jako
  $$\mathsf{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$$
  (existuje-li).
  Střední hodnota veličiny $Y = h(X)$ se spočte jako $\mathsf{E}h(X) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x)\,\mathrm{d}x$ (existuje-li).
- Kvantilová funkce $F^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}$ spojité veličiny X je inverzní funkce k distribuční funkci F. Medián veličiny X je taková hodnota $\hat{x}$, že $\mathsf{P}(X \leq \hat{x}) = \mathsf{P}(X \geq \hat{x}) = 1/2$, tj. spočteme jej jako $\hat{x} = F^{-1}(1/2)$.
- **Rozdělení funkce spojité náhodné veličiny**

  Nechť X je náhodná veličina s hustotou f a nechť t je ryze monotonní funkce, která má všude nenulovou derivaci. Označme $\tau = t^{-1}$. Pak má náhodná veličina $Y = t(X)$ hustotu
  $$g(y) = f(\tau(y)) \cdot |\tau'(y)|.$$