Cvičení z NSTP129

Součty náhodných veličin

24. 11. 2011

1. Nechť $(X, Y)'$ je náhodný vektor, pro který $\mathsf{E}X = 1$, $\mathsf{E}Y = -1$, $\mathsf{Var}\, X = 1$, $\mathsf{Var}\, Y = 2$ a $\mathsf{Cov}\,(X, Y) = 1/2$. Určete střední hodnotu a rozptyl veličiny $Z = X - 2Y$.
2. Nechť X a Y jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny. Označme $Z = X + Y$. Určete rozdělení Z, střední hodnotu $\mathsf{E}Z$ a rozptyl $\mathsf{Var}\, Z$, jestliže
   (a) X, Y mají exponenciální rozdělení $\mathsf{Exp}(\lambda)$,
   (b) X, Y mají rovnoměrné rozdělení na $[0, 1]$,
   (c) X, Y mají normované normální rozdělení.
   V bodě (c) využijte vztah $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

Normální rozdělení

3. Nechť má náhodná veličina X normální rozdělení $\mathsf{N}(1, 4)$.
   (a) Pomocí tabulek určete $\mathsf{P}(X < 1)$, $\mathsf{P}(X > 5)$ a $\mathsf{P}(|X| < 2)$.
   (b) Určete nejmenší u, pro které X leží v intervalu $(1-u, 1+u)$ s pravděpodobností alespoň 0.95.
4. Nechť $X_1, X_2, \ldots$ jsou nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$.
   (a) Jaké je rozdělení $\overline{X}_n$?
   (b) Jaká je pravděpodobnost, že průměr $\overline{X}_n$ bude menší než střední hodnota μ?
   (c) Nechť $\mu = 1$ a $\sigma^2 = 4$. Jak velké n je třeba zvolit, abychom měli zaručeno, že průměr $\overline{X}_n$ bude kladné číslo s pravděpodobností alespoň 0.99?
5. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s normovaným normálním rozdělením $\mathbb{N}(0, 1)$. Označme $Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$. Spočtěte střední hodnotu $\mathsf{E}Z_n$ a rozptyl $\mathsf{Var}\, Z_n$. Jak se nazývá rozdělení veličiny Z_n? (Znáte z přednášky.)
   Návod: Pro výpočet rozptylu využijte toho, že $\mathsf{E}X^4 = 3$ *pro* $X \sim \mathsf{N}(0, 1)$.

Opakování z přednášky

Rozdělení součtu nezávislých náhodných veličin: Nechť X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny se spojitým rozdělením s hustotami f_X, f_Y. Pak má veličina $Z = X + Y$ rozdělení s hustotou

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z - x)\, \mathrm{d}x.$$

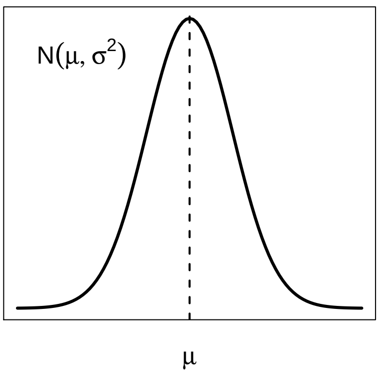
Další (možná) užitečné informace. Jestliže $X_1, \ldots, X_n$ jsou náhodné veličiny a $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, pak platí (za předpokladu existence daných momentů)

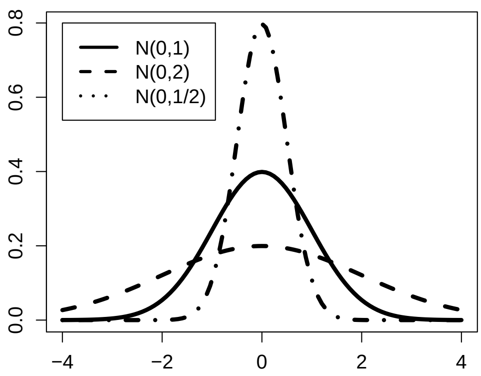
- $\mathsf{E}(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i \mathsf{E} X_i$
- $\mathsf{Var}\,(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \mathsf{Var}\, X + \sum\sum_{i \neq j} a_i a_j \mathsf{Cov}\,(X_i, X_j)$

Normální rozdělení. Normální rozdělení $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ má hustotu

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma^2 > 0$ jsou parametry. Je-li $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$, tj. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-x^2/2\}$, pak se toto rozdělení nazývá standardizované (normované) normální rozdělení a značí se $\mathsf{N}(0, 1)$.





- Je-li $X \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$, pak $\mathsf{E}X = \mu$ a $\mathsf{Var}\, X = \sigma^2$.
- Je-li $X \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ a $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, pak $aX + b$ má normální rozdělení $\mathsf{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$. Speciálně, $Y = (X - \mu)/\sigma$ má $\mathsf{N}(0, 1)$ rozdělení.
- Distribuční funkce rozdělení $\mathsf{N}(0, 1)$ se značí jako Φ, tj. $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-t^2/2\}\, dt$. Tento určitý integrál je možné spočítat jen **numericky**, a proto hodnoty funkce Φ nalezneme **v tabulkách**.
  Ze symetrie platí
  $$\Phi(x) + \Phi(-x) = 1 \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}.$$
- Jsou-li X, Y nezávislé normálně rozdělené a $a, b \in \mathbb{R}$, pak $aX + bY$ má normální rozdělení (s příslušnými parametry).