Cvičení z NSTP129

# Výsledky příkladů

Poslední změna: 9. října 2011

## Cvičení 1: Klasická pravděpodobnost

1. 4 kostky:
   (a) $5/18$
   (b) $1/16$
   (c) $10/6^4$
   (d) $1-5/6^4$
2. a) $11/36$, b) $1-(5/6)^n$
3. sekretářka:
   (a) $1-1/2+1/3!-\cdots+(-1)^n 1/n! = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}1/k! = 1-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k/k!$
   (b) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k/k! \to \mathrm{e}^{-1} = 1/\mathrm{e}$ pro $n\to\infty$
4. Maxwell-Boltzman
   (a) $\mathsf{P}(A_k) = \binom{r}{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{r-k}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k$ pro $k=0,1,\dots,r$ a $\mathsf{P}(A_k)=0$ pro $k>r$
   (b) $\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}/k!$ pro $k=0,1,2,\dots$
   (c) $\mathsf{P}(C) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}\left(\frac{n-k}{n}\right)^r$ pro $r\ge n$ a $\mathsf{P}(C)=0$ pro $r<n$
5. Bose-Einstein
   (a) $\mathsf{P}(A_k) = \dfrac{\binom{n+r-k-2}{r-k}}{\binom{n+r-1}{r}} = \dfrac{r!(n+r-2-k)!(n-1)}{(r-k)!(n+r-1)!}$ pro $k=0,1,\dots,r$ a $\mathsf{P}(A_k)=0$ pro $k>r$
   (b) $\dfrac{\lambda^k}{(1+\lambda)^{k+1}}$ pro $k=0,1,\dots$
   (c) $\mathsf{P}(C) = \dfrac{(r-1)!r!}{(n+r-1)!(r-n)!}$ pro $r\ge n$ a $\mathsf{P}(C)=0$ pro $r<n$
6. $1/4$

## Cvičení 2: Nezávislost, podmíněná pravděpodobnost, úplná pravděpodobnost, Bayesův vzorec

1. 2 kostky: a) $2/5$, b) jsou závislé, c) $6/11$
2. 2 kostky: Jevy $A,B,C$ jsou po dvou nezávislé. Nejsou nezávislé, protože $\mathsf{P}(A\cap B\cap C)\neq \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)\mathsf{P}(C)$
3. $3/4$, jsou nezávislé

4. tenistka: a) $2/25 = 0.08$, b) $8/23 = 0.3478261$
5. dlouhé vlasy: a)0.31 b) $24/31 = 0.7741935$
6. $2/5$
7. tři truhly: $2/3$
8. Dvojčata: $\dfrac{2p}{1+p-q}$
9. HUMOR: $5/11$
10. profesor: $\dfrac{3^3}{4^4-3^4} = \dfrac{27}{175}$

## Cvičení 3: Úplná pravděpodobnost, Bayesův vzorec

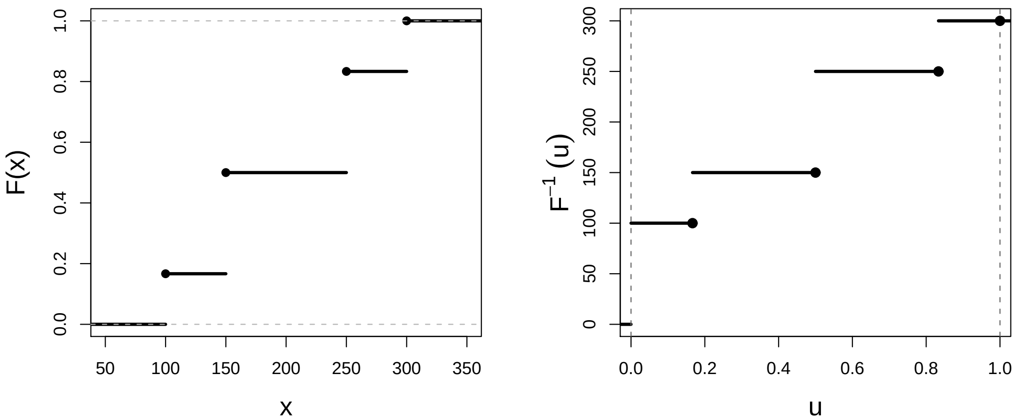
1. test: (a) 0.77, (b) $10^{-5}$, (c) 0.999
2. samička:
   (a) $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ pro $k = 0, 1, \ldots, n$
   (b) $\dfrac{(\lambda p)^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-p\lambda}$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots$
   (c) $\dfrac{[\lambda(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!}\,\mathrm{e}^{-\lambda(1-p)}$ pro $n = k, k+1, k+2, \ldots$
3. mince: $\dfrac{1}{(\mathrm{e}-1)(k+1)!}$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots$
4. K $\to$ F $\to$ C
   (a) $\left(\dfrac{5}{6}\right)^{3k-1}\dfrac{1}{6}$ pro $k = 1, 2, \ldots$
   (b) $\dfrac{91}{216}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{3k-2}$ pro $k = 1, 2, \ldots$ a $1/6$ pro $k = 0$
   (c) Karel 36/91, Franta 30/91, Cyril 25/91
   (d) $\mathsf{P}(k \text{ kol} \mid \text{vyhrál Franta}) = \dfrac{91}{216}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{3k-3}$
5. bílá kulička 5/12

## Cvičení 4: Náhodná veličina — diskrétní rozdělení

1. (a) rozdělení $X$: $\mathsf{P}(X = 100) = 1/6$, $\mathsf{P}(X = 150) = 1/3$, $\mathsf{P}(X = 250) = 1/3$, $\mathsf{P}(X = 300) = 1/6$; $\mathsf{E}X = 200$;

(b) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 100, \\ 1/6, & x \in [100, 150), \\ 1/2, & x \in [150, 250), \\ 5/6, & x \in [250, 300), \\ 1, & x \geq 300. \end{cases}$

(c) $F^{-1}(u) = \begin{cases} 100, & u \in (0, 1/6], \\ 150, & u \in (1/6, 1/2], \\ 250, & u \in (1/21, 5/6], \\ 300, & u \in (5/6, 1). \end{cases}$




(d) rozdělení $Y$: $\mathsf{P}(Y = 0) = 1/6$, $\mathsf{P}(Y = 10) = 1/3$, $\mathsf{P}(Y = 30) = 1/3$, $\mathsf{P}(Y = 40) = 1/6$; střední hodnota $\mathsf{E}Y = 20$;

(e) $\mathsf{Var}\, Y = 200$,

(f) $\mathsf{P}(Y > 21) = 1/2$.

2. test:

   (a) $\mathsf{P}(X = k) = \binom{n}{k}(1/4)^k(3/4)^{n-k}$ pro $k = 0, \ldots, n$, binomické rozdělení s parametry $n$ a $1/4$, tj. $\mathsf{Bi}(n, 1/4)$

   (b) $\mathsf{E}X = n/4$,

   (c) $\mathsf{Var}\, X = 3n/16$,

   (d) výpočet $\mathsf{E}X$ a $\mathsf{Var}\, X$ buď přímo z definice nebo pomocí vytvořující funkce. Pro binomického rozdělení $\mathsf{Bi}(n, p)$ je $P(t) = [pt + 1 - p]^n$,

   (e) $\mathsf{P}(X \geq 1) = 1 - \mathsf{P}(X = 0) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$

3. policejní ústředna:

   (a) Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda$,

   (b) $\mathsf{E}X = \lambda$, vytvořující funkce $P(t) = \exp\{-\lambda + \lambda t\}$

4. loterie:

   (a) geometrické rozdělení $\mathsf{P}(X = k) = (1 - p)^k p$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots$, $\mathsf{E}X = (1 - p)/p$

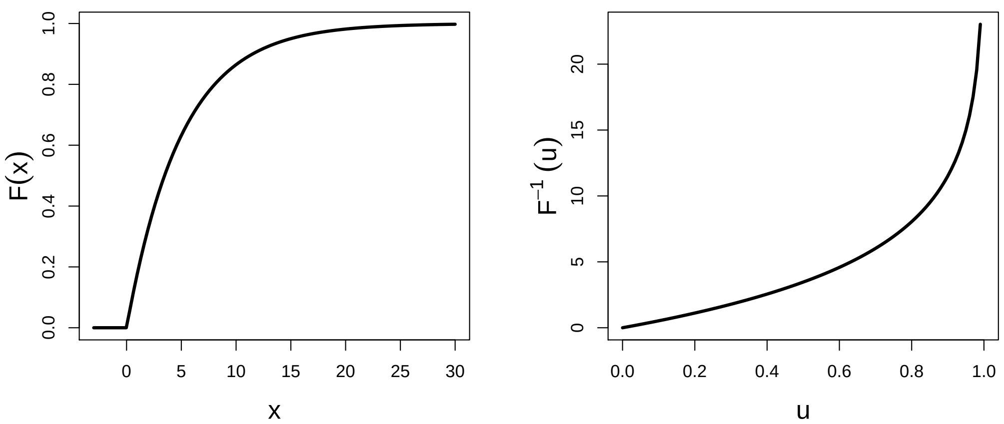
(b) aby se nám hra vyplatila (očekávaný zisk je kladný), musí být výherní alespoň jeden los z tisíce;
pro $p = 1/100$ je očekávaný zisk 90 000 Kč.

5. Cyrilovy hody kostkou $150/91 \doteq 1.65$

6. $c = \dfrac{2}{n(n+1)}$, $\mathsf{E}X = \dfrac{2n+1}{3}$. Využijeme $\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$ a $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{(2n+1)n(n+1)}{6}$.

**Cvičení 5: Náhodná veličina — spojité rozdělení**

1. (a) $c = 1/5$, exponenciální rozdělení
   (b) $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x/5}$ pro $x \geq 0$ a $F(x) = 0$ pro $x < 0$,
   (c) $\mathsf{E}X = 5$
   (d) $\mathsf{Var}\, X = 25$
   (e) $\mathsf{P}(X = 15) = 0$, $\mathsf{P}(X > 15) = \mathrm{e}^{-3}$, $\mathsf{P}(5 < X < 20) = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-4}$
   (f) $F^{-1}(u) = -5 \log(1-u)$, medián $F^{-1}(1/2) = 5 \log 2$
   (g) hustota $f_Y(y) = (1/5)y^{-6/5}$ pro $y \geq 1$ a $f_Y(y) = 0$ jinak.




2. (b) $\mathsf{E}V = \pi a^3/3$, $\mathsf{Var}\, V = \pi^2 a^6/7$

3. (a) $\mathsf{P}(X^2 > 1/4) = 1/2$, $\mathsf{P}(X^2 > 1/4 | X > 0) = 1/2$, jevy jsou nezávislé
   (b) distribuční funkce

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \sqrt{y}, & 0 \leq y \leq 1, \\ 1, & y > 1, \end{cases}$$

   hustota $f_Y(y) = 1/[2\sqrt{y}]$ pro $y \in (0,1)$ a $f_Y(y) = 0$ jinak
   (c) $\mathsf{E}Y = 1/3$, $\mathsf{Var}\, Y = 4/45$

4. (a) nutně $a > 1$, potom $c = a - 1$,
   $\mathsf{E}X = (a-1)/(a-2)$ pro $a > 2$ a $\mathsf{E}X = \infty$ (tj. neexistuje) pro $a \in (1, 2]$
   (b) $a \in \mathbb{R}$ libovolné, $c = 1/\pi$, $\mathsf{E}X$ neexistuje (integrál je neurčitý výraz)

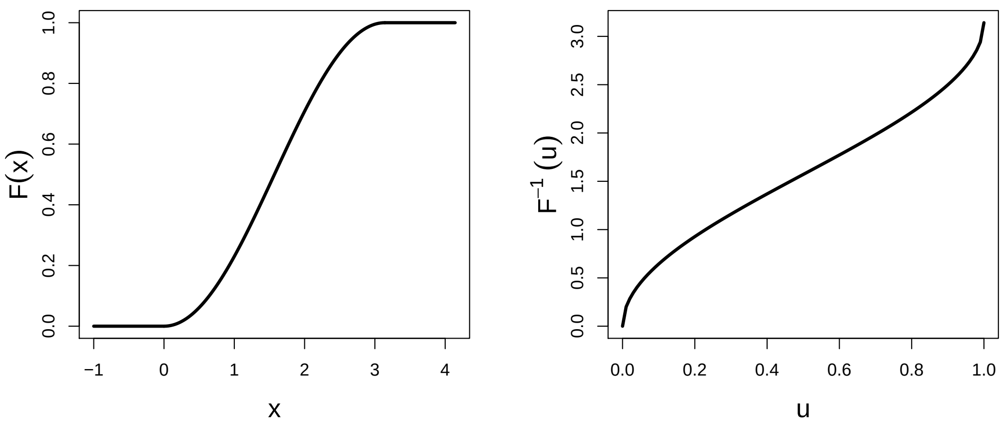
5. $Y$ má diskrétní rozdělení, $\mathsf{P}(Y=k)=\mathsf{P}(X\in[k,k+1))=\mathrm{e}^{-k/5}-\mathrm{e}^{-(k+1)/5}$ pro $k=0,1,2,\dots$

6. plyne po rozepsání pomocí distribuční funkce

7. (a) $c=1/2$,

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ (1-\cos x)/2=\sin^2(x/2), & 0\le x\le\pi,\\ 1, & x>\pi\end{cases}$$

(b) $\mathsf{E}X=\pi/2=$ medián $X$ (plyne ihned ze symetrie hustoty)
(c) $F^{-1}(u)=\arccos(1-2u)$, $u\in(0,1)$
(d) rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0,2)$




**Cvičení 6: Náhodné vektory**

1. (a) marginální rozdělení $X$: $\mathsf{P}(X=1)=0.3$, $\mathsf{P}(X=2)=0.35$, $\mathsf{P}(X=3)=0.35$
marginální rozdělení $Y$: $\mathsf{P}(Y=1)=0.3$, $\mathsf{P}(Y=2)=0.4$, $\mathsf{P}(Y=3)=0.3$
veličiny jsou závislé
(b) $\mathsf{E}X=2.05$, $\mathsf{Var}\,X=0.6475$
(c) $\mathsf{Cov}\,(X,Y)=0.25$
Platí: $X,Y$ nezávislé (a ex. $\mathsf{E}X^2$, $\mathsf{E}Y^2$) $\Rightarrow \mathsf{Cov}\,(X,Y)=0$.
Neboli: $\mathsf{Cov}\,(X,Y)\neq 0 \Rightarrow X,Y$ závislé
Opačné tvrzení obecně neplatí.
(d) $\rho_{XY}=0.4011$

2. sdružené rozdělení:

| | | $Y$ | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 |
| | 0 | 0 | 1/8 | 1/8 |
| $X$ | 1 | 1/8 | 1/4 | 1/8 |
| | 2 | 1/8 | 1/8 | 0 |

veličiny jsou závislé a platí $\mathsf{Cov}\,(X,Y) = -1/4$

3. oslava:
   (a) $c = 1$
   (b) $f_X(x) = x + 1/2$ pro $x \in (0,1)$ a $f_X(x) = 0$ jinak; $f_Y(y) = y + 1/2$ pro $y \in (0,1)$ a $f_Y(y) = 0$ jinak.
   Veličiny $X$ a $Y$ jsou závislé
   (c) $\mathsf{Cov}\,(X,Y) = -1/144$

4. $c = 4$, $f_X(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{I}[x \geq 0]$, $f_Y(y) = 2y\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{I}[y \geq 0]$, $X$ a $Y$ jsou nezávislé

5. (a) $\mathsf{Cov}\,(X,Y) = 0$, veličiny $X$ a $Y$ jsou závislé
   (b) $\rho_{XZ} = 1$ (mimo jiné plyne okamžitě z tvrzení z přednášky)

6. škola:
   (a) $Z = X + Y$ má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda + \mu$,
   (b) rozdělení počtu dívek $X$ za podmínky $Z = n$ je binomické s parametry $n$ a $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

7. $X + Y$ má binomické rozdělení $\mathsf{Bi}(m+n,p)$

## Cvičení 7: Součty náhodných veličin, Normální rozdělení

1. $\mathsf{E}Z = 3$, $\mathsf{Var}\,Z = 7$

2. součet dvou nezávislých:
   (a) $\mathsf{E}Z = 2/\lambda$, $\mathsf{Var}\,Z = 2/\lambda^2$, hustota $Z$: $g(z) = \lambda^2 z\mathrm{e}^{-\lambda z}$, $z > 0$ a $g(z) = 0$ jinak.
   (b) $\mathsf{E}Z = 1$, $\mathsf{Var}\,Z = 1/6$, hustota $Z$:
   $$g(z) = \begin{cases} z & z \in (0,1), \\ 2 - z & z \in [1,2], \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$
   (c) $\mathsf{E}Z = 0$, $\mathsf{Var}\,Z = 2$, $Z$ má $\mathsf{N}(0,2)$ rozdělení, tj. hustotu $g(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\mathrm{e}^{-z^2/4}$, $z \in \mathbb{R}$

3. (a) $\mathsf{P}(X < 1) = 1/2$, $\mathsf{P}(X > 5) = 0.0228$, $\mathsf{P}(|X| < 2) = 0.624$
   (b) $u \geq 2\Phi^{-1}(0.975) \doteq 3.9$

4. (a) $\overline{X_n} \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2/n)$
   (b) $1/2$
   (c) $n \geq 22$

5. $\mathsf{E}Z = n$, $\mathsf{Var}\,Z = 2n$, rozdělení se nazývá $\chi^2$ s $n$ stupni volnosti

## Cvičení 8: Limitní věty

1. pomocí CLV 0.97725 (přesný výsledek pomocí binomického rozdělení je 0.97671)

2. alespoň 12 932 MB

3. (a) $n \geq 2000$, (b) $n \geq 385$
4. (a) 0.056, (b) 400 000 Kč
5. alespoň 329 chlebíčků
6. (a) $n \geq 6$, (b) $n \geq 54$
7. (a) $\mathsf{E}X = m + 1$, $\mathsf{Var}\, X = m + 1$, (b) plyne po rozepsání a dosazení
8. (a) 0.921 (b) Čebyševova nerovnost dává dolní mez 0.671, která je velmi „hrubá“