MATEMATICKÁ ANALÝZA 2 (NMMA102), LETNÍ SEMESTR 2022–2023 POPIS PŘEDMĚTU A INFORMACE K ZÁPOČTU A KE ZKOUŠCE

LUBOŠ PICK

Popis předmětu

Jde o druhou část čtyřsemestrálního základního kursu matematické analýzy. Věnuje se teorii číselných řad, integrálu a obyčejných diferenciálních rovnic. Kurs se skládá z přednášek, cvičení a prosemináře a je hodnocen zápočtem a zkouškou.

Přednáška se koná pro větší množství (desítky až stovky) studentů najednou, přičemž přednášející u tabule vykládá především teoretické poznatky a ilustrativní příklady. Otázky v průběhu přednášky a diskuse po ní jsou vítány, jiná forma studentské aktivity (pobyt u tabule atd.) se nepředpokládá. Z látky přednášené na přednášce je potřeba složit zkoušku.

Cvičení se koná pro menší množství (15-25) studentů najednou, typicky pro jeden kroužek. Na cvičeních se počítají příklady určené k procvičení dané tématiky. S aktivní účastí studentů (někdy i u tabule) se počítá. Náplň a formu cvičení určuje cvičící. Z početních technik prováděných na cvičeních je potřeba složit zápočet.

Proseminář je určen pro malé množství (typicky 15-25) studentů, kteří mají zájem o získání hlubších teoretických poznatků z matematické analýzy nad rámec povinné látky. Na prosemináři často referují probíranou látku studenti. Proseminář je hodnocen zápočtem. Zápočet bývá typicky udělován za smysluplný referát.

Zápočet

Podmínky udělení zápočtu: alespoň 50% účast na cvičeních a napsání tří písemek ze tří během semestru; na konci semestru bude možné si případně jednu neúspěšnou písemku opravit. Každá z písemek bude obsahovat tři příklady. Datum konání písemek bude oznámeno při výuce. Písemka je hodnocena jako *úspěšně napsaná*, pokud student získá alespoň 20 bodů z 30. Povoleny jsou pouze běžné psací potřeby. Čas k vypracování každé zápočtové písemky je 30 minut. Studentům mimořádného studia bude prominut požadavek 50% účasti, jinak platí stejné podmínky.

Termíny zápočtových písemek:

- 1. zápočtová písemka: první cvičení v týdnu od 13.3. 2023 (Taylorův polynom, konvergence číselných řad),
- 2. zápočtová písemka: první cvičení v týdnu od 24.4. 2023 (primitivní funkce a určitý integrál),
- 3. zápočtová písemka: první cvičení v týdnu od 15.5. 2023 (konvergence integrálu a obyčejné diferenciální rovnice).
- opravná zápočtová písemka: pátek 19.5.2023 v 16:30 v K1.

Zkouška

Nutnou podmínkou účasti na zkoušce je udělení zápočtu.

Date: 19. května 2023.

Písemná část. Pro písemnou část zkoušky bude vypsáno právě pět termínů. , a to

- ve středu 24.5. 2023 v 08:00 v posluchárnách K1, K2, K3 a K11,
- ve středu 7.6. 2023 v 08:00 v posluchárnách K1, K2, K3 a K11,
- ve středu 14.6. 2023 v 08:00 v posluchárnách K1, K2, K3 a K11,
- ve středu 21.6. 2023 v 08:00 v posluchárnách K1, K2, K3 a K11,
- ve středu 6.9. 2023 v 08:00 v posluchárnách K1, K2, K3 a K11.

Mimo vypsané termíny nebude možné vykonat písemnou část zkoušky. V posluchárně K1 bude v době konání písemné části zkoušky vyvěšen zasedací pořádek. Před začátkem písemné části zkoušky bude provedena kontrola totožnosti studentů. Každý student se musí prokázat platným dokladem s fotografií. Písemná část zkoušky bude obsahovat pět příkladů z následujících partií matematické analýzy:

- Taylorův polynom (12 bodů),
- číselné řady (12 bodů),
- primitivní funkce nebo určitý integrál (12 bodů),
- konvergence Newtonova integrálu (12 bodů),
- obyčejné diferenciální rovnice (12 bodů).

Čas k vypracování písemné části je 150 minut. Povoleny jsou pouze běžné psací potřeby. Po skončení písemné části bude na tabuli v posluchárně K1 předvedeno vzorové řešení. Jestliže student získá z písemné části zkoušky 35 nebo více bodů, postoupí k ústní části zkoušky. Jestliže získá 34 nebo méně bodů, bude zkouška hodnocena známkou **neprospěl(a)**.

Odevzdané písemky budou opraveny v den konání písemné části zkoušky. Studentům, kteří úspěšně složí písemnou část zkoušky, bude elektronickou poštou zaslán čas ústní části zkoušky (bude použita oficiální elektronická adresa, která je uvedena v systému SIS). Tento čas bude pro všechny studenty závazný. Studentům, jejichž písemná část zkoušky bude hodnocena známkou neprospěl(a), bude do systému SIS zapsána známka 4.

Ústní část. Ústní část zkoušky se bude konat následující pracovní den po konání písemné části zkoušky od 08:00 v posluchárně K2. Ústní část zkoušky bude obsahovat šest otázek uspořádaných a přibližně hodnocených podle následujícího klíče:

- definice klíčového pojmu (0 bodů),
- dvě definice a znění jedné věty (5+5+5 body),
- formulace a důkazy dvou vět (celkem 45 bodů).

K úspěšnému složení ústní části je třeba napsat správně definici klíčového pojmu a získat minimálně 35 bodů. Po celou dobu ústní zkoušky platí, že student musí bezpečně ovládat veškeré klíčové pojmy. Bude-li zkouška po ústní části hodnocena známkou neprospěl(a), je student povinen znovu složit obě části zkoušky.

Celkové hodnocení zkoušky

K celkovému hodnocení známkou **výborně** je třeba, aby student ovládal všechny klíčové pojmy, dále aby s porozuměním ovládal definice a věty, znal důkazy všech vět a byl schopen aplikovat dosažené vědomosti na více či méně jednoduchých teoretických příkladech. Orientačně známka “výborně” odpovídá přibližně bodovému rozmezí 105–120.

K celkovému hodnocení známkou **velmi dobře** je třeba, aby student ovládal všechny klíčové pojmy, dále aby s porozuměním ovládal definice a věty, znal důkazy lehčích vět a byl schopen aplikovat dosažené vědomosti v jednoduchých teoretických příkladech. Může mít menší mezery v obtížnějších partiích. Orientačně známka “velmi dobře” odpovídá přibližně bodovému rozmezí 85–104.

K celkovému hodnocení známkou **dobře** je třeba, aby student ovládal všechny klíčové pojmy, dále aby s porozuměním ovládal definice a jednoduché věty a znal důkazy lehčích vět. Orientačně známka “dobře” odpovídá přibližně bodovému rozmezí 70–84.

Hodnocení známkou **neprospěl(a)** bude uplatněno, jestliže se během zkoušky prokáže, že student nezná některý z klíčových pojmů, neovládá věty nebo definice nebo není schopen dokázat ani nejjednodušší tvrzení. Orientačně hodnocení “neprospěl(a)” odpovídá přibližně bodovému rozmezí 0–69.

Vzorové zadání písemné části zkoušky

Příklad 1. Určete koeficienty $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby limita

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(ax) - \arcsin(bx) + x^3}{x^5}$$

existovala vlastní. Pro tyto hodnoty a, b limitu vypočítejte. (12 bodů)

Příklad 2. Vyšetřete pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje a pro která $x \in \mathbb{R}$ absolutně konverguje číselná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} (\sin x)^n. \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad 3. Spočtěte primitivní funkci

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{1 + \sin x}\, dx$$

na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. (12 bodů)

Příklad 4. Vyšetřete konvergenci integrálu

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[5]{x} + 2\sin(x-1)}{x^{\frac{4}{5}} \sqrt{x+1}}. \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad 5. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{2}{x}\sqrt{-y}$$

splňující počáteční podmínku

$$y(1) = -4,$$

určete jejich definiční obory, jednostranné limity v krajních bodech jejich definičních oborů a určete, zda jsou tato řešení na svém definičním oboru monotónní nebo ryze monotónní. **(12 bodů)**

Vzor zadání ústní části zkoušky

Otázka 1. Napište definici klíčového pojmu: lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty, k ní příslušná homogenní rovnice, fundamentální systém.

Otázka 2. Napište definici pojmu: dělení intervalu, norma dělení, zjemnění.

Otázka 3. Napište definici pojmu: stejnoměrně spojitá funkce.

Otázka 4. Napište znění věty: Darbouxova věta (Věta 7.5).

Otázka 5. Zformulujte a dokažte větu: Mertensova věta (Věta 6.15).

Otázka 6. Zformulujte a dokažte větu: integrální kritérium konvergence řad (Věta 8.36).

Seznam klíčových pojmů.

- řada, součet řady
- konvergentní, divergentní, absolutně konvergentní, neabsolutně konvergentní řada
- Taylorova řada
- primitivní funkce, Newtonův integrál, konvergentní a divergentní Newtonův integrál
- horní a dolní Riemannovy součty, horní a dolní Riemannův integrál, Riemannův integrál
- stejnoměrně spojitá funkce
- diferenciální rovnice, řešení diferenciální rovnice, maximální řešení diferenciální rovnice
- diferenciální rovnice se separovanými proměnnými, lineární diferenciální rovnice, homogenní diferenciální rovnice
- lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty, k ní příslušná homogenní rovnice, fundamentální systém

Seznam požadovaných definic.

- geometrická řada
- harmonická řada
- přerovnání řady
- Cauchyův součin řad
- Darbouxova vlastnost
- dělení intervalu, norma dělení, zjemnění
- norma vektoru v $\mathbb{R}^n$
- křivka, délka křivky
- otevřená množina v $\mathbb{R}^n$
- λ-matice, řádkové úpravy

Seznam požadovaných vět (není-li stanoveno jinak, jsou požadovány důkazy).

Řady reálných čísel.

- nutná podmínka konvergence (Věta 6.1)
- Bolzanova-Cauchyova podmínka (Věta 6.2) (bez důkazu)
- řady a aritmetické operace (Věta 6.3) (bez důkazu)
- konvergentní a divergentní řada (Věta 6.4)
- srovnávací kritérium (Věta 6.5)
- limitní srovnávací kritérium (Věta 6.6)
- Cauchyovo odmocninové kritérium (Věta 6.7)
- d'Alembertovo podílové kritérium (Věta 6.8)
- kondenzační kritérium (Věta 6.9)
- o konvergenci řady $\sum n^{-\alpha}$ (Věta 6.10)
- Leibnizova věta (Věta 6.11)
- absolutní a neabsolutní konvergence (Věta 6.12)
- přerovnání absolutně konvergentní řady (Věta 6.13)
- Riemannova věta (Věta 6.14) (bez důkazu)
- Mertensova věta (Věta 6.15)
- Abelova věta o Cauchyově součinu (6.16) (bez důkazu)

Primitivní funkce.

- jednoznačnost primitivní funkce až na konstantu (Věta 7.1)
- vztah spojitosti a existence primitivní funkce (Věta 7.2)
- linearita primitivní funkce (Věta 7.3)
- integrace per partes (Věta 7.4)
- Darbouxova věta (Věta 7.5)
- první věta o substituci (Věta 7.6)
- druhá věta o substituci (Věta 7.7)
- věta o lepení (Věta 7.10)

Riemannův integrál.

- vlastnosti dělení (Věta 8.1)
- mantinely Riemannova integrálu (Věta 8.2)
- aproximace Riemannova integrálu součty přes dělení s malou normou (Věta 8.3)
- aproximace Riemannova integrálu (Věta 8.4)
- postačující podmínka pro existenci Riemannova integrálu (Věta 8.5)
- kritérium existence Riemannova integrálu (Věta 8.6)
- spojitost a stejnoměrná spojitost (Věta 8.7)
- spojitost a riemannovská integrovatelnost (Věta 8.8)
- monotonie a riemannovská integrovatelnost (Věta 8.9)
- linearita Riemannova integrálu (Věta 8.10)
- Riemannův integrál a uspořádání (Věta 8.11)
- aditivita Riemannova integrálu (Věta 8.12)

- Riemannův integrál a absolutní hodnota (Věta 8.13)
- derivace funkce horní meze (Věta 8.14)
- Riemannův integrál spojité funkce (Věta 8.15)
- Riemannův integrál funkcí lišících se v konečně mnoha bodech (Věta 8.16)
- charakterizace riemannovské integrovatelnosti (Věta 8.17)
- linearita Newtonova integrálu (Věta 8.18)
- Newtonův integrál a uspořádání (Věta 8.19)
- aditivita Newtonova integrálu (Věta 8.20)
- Newtonův integrál a absolutní hodnota (Věta 8.21)
- per partes pro Newtonův integrál (Věta 8.22)
- substituce pro Newtonův integrál (Věta 8.23)
- Bolzanova-Cauchyova podmínka pro funkce (Věta 8.24)
- konvergence Newtonova integrálu omezené spojité funkce na omezeném intervalu (Věta 8.25)
- vztah Riemannova a Newtonova integrálu (Věta 8.26)
- srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu (Věta 8.27)
- limitní srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu (Věta 8.28)
- Newtonův integrál součinu funkcí (Věta 8.29)
- o nulové funkci (Věta 8.30)
- první věta o střední hodnotě (Věta 8.31)
- druhá věta o střední hodnotě (Věta 8.32)
- Cauchyova–Schwarzova–Buňakovského nerovnost (Věta 8.33)
- norma a integrál (Věta 8.34)
- délka křivky (Věta 8.35)
- integrální kritérium konvergence řad (Věta 8.36)
- integrální tvar zbytku (Věta 8.37)

Obyčejné diferenciální rovnice.

- lepení řešení (Věta 9.1)
- řešení rovnice se separovanými proměnnými (Věta 9.2)
- řešení lineární diferenciální rovnice prvního řádu (Věta 9.3)
- existence a jednoznačnost řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty (Věta 9.4) (bez důkazu)
- množina řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty (Věta 9.5)
- fundamentální systém řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty (Věta 9.6) (bez důkazu)
- partikulární řešení rovnice se speciální pravou stranou (Věta 9.7) (bez důkazu)
- regularita fundamentálního systému (Věta 9.8)
- Peanova věta (Věta 9.9) (bez důkazu)
- Picardova věta (Věta 9.10) (bez důkazu)
- řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic (Věta 9.11) (bez důkazu)
- řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty (Věta 9.12) (bez důkazu)
- úprava matice $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ (Věta 9.13) (bez důkazu)
- řešení soustavy vzniklé pomocí konečné posloupnosti řádkových úprav (Věta 9.14) (bez důkazu)