MATEMATICKÁ ANALÝZA 1 (NMMA101), ZIMNÍ SEMESTR 2022–2023 POPIS PŘEDMĚTU A INFORMACE K ZÁPOČTU A KE ZKOUŠCE

LUBOŠ PICK

Popis předmětu

Jde o první část čtyřsemestrálního základního kursu matematické analýzy. Věnuje se zejména základům diferenciálního počtu. Kurs se skládá z přednášek, cvičení a prosemináře a je hodnocen zápočtem a zkouškou.

Přednáška se koná pro větší množství (desítky až stovky) studentů najednou, přičemž přednášející u tabule vykládá především teoretické poznatky a ilustrativní příklady. Otázky v průběhu přednášky a diskuse po ní jsou vítány, jiná forma studentské aktivity (pobyt u tabule atd.) se nepředpokládá. Z látky přednášené na přednášce je potřeba složit zkoušku.

Cvičení se koná pro menší množství (15-25) studentů najednou, typicky pro jeden kroužek. Na cvičeních se počítají příklady určené k procvičení dané tématiky. S aktivní účastí studentů (někdy i u tabule) se počítá. Náplň a formu cvičení určuje cvičící. Z početních technik prováděných na cvičeních je potřeba složit zápočet.

Proseminář je určen pro malé množství (typicky 15-25) studentů, kteří mají zájem o získání hlubších teoretických poznatků z matematické analýzy nad rámec povinné látky. Na prosemináři často referují probíranou látku studenti. Proseminář je hodnocen zápočtem. Zápočet bývá typicky udělován za smysluplný referát.

Zápočet

Podmínky udělení zápočtu: alespoň 50% účast na cvičeních a napsání tří písemek ze tří během semestru; na konci semestru bude možné si případně jednu neúspěšnou písemku opravit. Každá z písemek bude obsahovat tři příklady. Datum konání písemek bude oznámeno při výuce. Písemka je hodnocena jako *úspěšně napsaná*, pokud student získá alespoň 20 bodů z 30. Při písemce je možné používat literaturu, ale ne elektroniku. Čas k vypracování každé zápočtové písemky je 30 minut. Studentům mimořádného studia bude prominut požadavek 50% účasti, jinak platí stejné podmínky.

Termíny zápočtových písemek:

- 1. zápočtová písemka: druhé cvičení v týdnu od 17.10. 2022,
- 2. zápočtová písemka: první cvičení v týdnu od 7.11. 2022,
- 3. zápočtová písemka: první cvičení v týdnu od 19.12. 2022,
- opravná zápočtová písemka: pátek 6.1.2023 od 14:00 v M1.

Zkouška

Nutnou podmínkou účasti na zkoušce je udělení zápočtu.

Písemná část. Pro písemnou část zkoušky bude vypsáno právě pět termínů, a to

- ve čtvrtek 12.1. 2023 v 08:00 v posluchárnách K1, K2 a K3,
- ve čtvrtek 19.1. 2023 v 08:00 v posluchárnách K1, K2 a K3,
- ve čtvrtek 26.1. 2023 v 08:00 v posluchárnách K1, K2 a K3,
- ve čtvrtek 9.2. 2023 v 08:00 v posluchárnách K1, K2 a K3,
- ve středu 22.2. 2023 v 10:40 v posluchárně N1.

Date: 9. února 2023.

Mimo vypsané termíny nebude možné vykonat písemnou část zkoušky. V posluchárně K1 bude v době konání písemné části zkoušky vyvěšen zasedací pořádek. Před začátkem písemné části zkoušky bude provedena kontrola totožnosti studentů. Každý student se musí prokázat platným dokladem s fotografií. Písemná část zkoušky bude obsahovat čtyři příklady z následujících partií matematické analýzy:

- výpočet limity posloupnosti (15 bodů),
- výpočet limity funkce (15 bodů),
- výpočet derivace (15 bodů),
- vyšetření průběhu funkce (15 bodů).

Čas k vypracování písemné části je 120 minut. Povoleny jsou pouze běžné psací potřeby. Vzorové řešení bude předvedeno buď po skončení písemné části nebo později distanční formou, bude také zveřejněno. Jestliže student získá z písemné části zkoušky 35 nebo více bodů, postoupí k ústní části zkoušky. Jestliže získá 34 nebo méně bodů, bude zkouška hodnocena známkou **neprospěl(a)**.

Odevzdané písemky budou opraveny v den konání písemné části zkoušky. Studentům, kteří úspěšně složí písemnou část zkoušky, bude elektronickou poštou zaslán čas ústní části zkoušky (bude použita oficiální elektronická adresa, která je uvedena v systému SIS). Tento čas bude pro všechny studenty závazný. Studentům, jejichž písemná část zkoušky bude hodnocena známkou neprospěl(a), bude do systému SIS zapsána známka 4.

Ústní část. Ústní část zkoušky se bude konat následující pracovní den po konání písemné části zkoušky od 08:00 v posluchárně K2. Ústní část zkoušky bude obsahovat šest otázek uspořádaných a přibližně hodnocených podle následujícího klíče:

- definice klíčového pojmu (0 bodů),
- dvě definice a znění jedné věty (5+5+5 body),
- formulace a důkazy dvou vět (celkem 45 bodů).

K úspěšnému složení ústní části je třeba napsat správně definici klíčového pojmu a získat minimálně 35 bodů. Po celou dobu ústní zkoušky platí, že student musí bezpečně ovládat veškeré klíčové pojmy. Bude-li zkouška po ústní části hodnocena známkou neprospěl(a), je student povinen znovu složit obě části zkoušky.

Celkové hodnocení zkoušky

K celkovému hodnocení známkou **výborně** je třeba, aby student ovládal všechny klíčové pojmy, dále aby s porozuměním ovládal definice a věty, znal důkazy všech vět a byl schopen aplikovat dosažené vědomosti na více či méně jednoduchých teoretických příkladech. Orientačně známka "výborně" odpovídá přibližně bodovému rozmezí 105–120.

K celkovému hodnocení známkou **velmi dobře** je třeba, aby student ovládal všechny klíčové pojmy, dále aby s porozuměním ovládal definice a věty, znal důkazy lehčích vět a byl schopen aplikovat dosažené vědomosti v jednoduchých teoretických příkladech. Může mít menší mezery v obtížnějších partiích. Orientačně známka "velmi dobře" odpovídá přibližně bodovému rozmezí 85–104.

K celkovému hodnocení známkou **dobře** je třeba, aby student ovládal všechny klíčové pojmy, dále aby s porozuměním ovládal definice a jednoduché věty a znal důkazy lehčích vět. Orientačně známka "dobře" odpovídá přibližně bodovému rozmezí 70–84.

Hodnocení známkou **neprospěl(a)** bude uplatněno, jestliže se během zkoušky prokáže, že student nezná některý z klíčových pojmů, neovládá věty nebo definice nebo není schopen dokázat ani nejjednodušší tvrzení. Orientačně hodnocení "neprospěl(a)" odpovídá přibližně bodovému rozmezí 0–69.

Vzorové zadání písemné části zkoušky

Příklad 1. Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right). \qquad \text{(15 bodů)}$$

Příklad 2. Uvažujte funkci

$$f(x) = \begin{cases} (\sin x) \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sin x}\right), & x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}, \\ 0, & x \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}. \end{cases}$$

Spočtěte první derivaci i jednostranné první derivace funkce f ve všech bodech, kde existují. Určete body, kde tyto derivace neexistují. (15 bodů)

Příklad 3. Spočtěte limitu funkce

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\sqrt{1+x} - 3\sqrt[3]{1+x} + \cos x}{x^2}. \qquad (15 \text{ bodů})$$

Příklad 4. Uvažujte funkci f definovanou předpisem

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right), & x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}, \\ 0, & x \in \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}. \end{cases} \qquad (15 \text{ bodů})$$

- Vyšetřete, pro která $x \in \mathbb{R}$ je hodnota $f(x)$ dobře definovaná (tuto množinu budeme značit symbolem $\mathcal{D}(f)$),
- určete, ve kterých bodech $x \in \mathcal{D}(f)$ je f spojitá, případně jednostranně spojitá,
- určete limity f v krajních bodech definičního oboru a vyšetřete, zda má funkce asymptoty,
- určete, ve kterých bodech $x \in \mathcal{D}(f)$ existuje $f'(x)$, případně jednostranné derivace, a určete jejich hodnotu,
- určete intervaly a typ monotonie funkce f,
- nalezněte všechny lokální a globální extrémy funkce f,
- určete obor hodnot funkce f,
- určete, ve kterých bodech $x \in \mathcal{D}(f)$ existuje $f''(x)$ a určete její hodnotu,
- určete intervaly konvexity a konkávnosti funkce f,
- nalezněte všechny inflexní body funkce f,
- rozhodněte, zda funkce f má asymptotu v ∞ a/nebo v $-\infty$ a pokud ano, určete ji,
- načrtněte graf funkce f.

Vzor zadání ústní části zkoušky

Otázka 1. Napište definici klíčového pojmu: Taylorův polynom.

Otázka 2. Napište definici pojmu: hromadná hodnota posloupnosti.

Otázka 3. Napište definici pojmu: limes superior.

Otázka 4. Napište znění věty: Heineova věta (Věta 3.4).

Otázka 5. Zformulujte a dokažte větu: vztah derivace a spojitosti (Věta 4.1).

Otázka 6. Zformulujte a dokažte větu: Bolzanova – Weierstrassova věta (Věta 2.21).

Seznam klíčových pojmů.

- prosté zobrazení, zobrazení na, bijekce, obraz množiny, vzor množiny
- supremum, infimum
- limita posloupnosti, limes superior, limes inferior
- konvergentní posloupnost, divergentní posloupnost, vybraná posloupnost
- okolí, jednostranné okolí, prstencové okolí
- limita funkce
- spojitost funkce v bodě, spojitost funkce na intervalu
- derivace funkce
- Taylorův polynom

Seznam požadovaných definic.

Úvod.

- výrok, negace, konjunkce, disjunkce, implikace, ekvivalence, výroková forma
- kartézský součin, binární relace, zobrazení, definiční obor, obor hodnot, restrikce, složené zobrazení, inverzní zobrazení
- zdola omezená množina, shora omezená množina, omezená množina, horní závora, dolní závora

Posloupnosti reálných čísel.

- shora omezená posloupnost, zdola omezená posloupnost, omezená posloupnost
- monotónní posloupnost, neklesající posloupnost, nerostoucí posloupnost, rostoucí posloupnost, klesající posloupnost, ryze monotónní posloupnost
- číslo e
- hromadná hodnota posloupnosti
- Bolzanova – Cauchyova podmínka pro posloupnosti

Limita funkce.

- rostoucí funkce, klesající funkce, nerostoucí funkce, neklesající funkce, monotónní funkce, ryze monotónní funkce
- sudá funkce, lichá funkce, periodická funkce
- funkce shora omezená, zdola omezená, omezená
- Dirichletova funkce, Riemannova funkce
- extrémy a lokální extrémy funkce

Derivace a elementární funkce.

- exponenciální funkce, logaritmus, mocnina a^b pro $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$
- goniometrické funkce, cyklometrické funkce
- n-tá derivace
- (ryze) konvexní funkce, (ryze) konkávní funkce, inflexní bod
- asymptota

Taylorův polynom.

- symbol o

Seznam požadovaných vět (není-li stanoveno jinak, jsou požadovány důkazy).

Úvod.

- de Morganova pravidla (Věta 1.1)
- Cantorova–Bernsteinova věta (Věta 1.2) bez důkazu
- Cantorova věta (Věta 1.3)
- vlastnosti spočetných množin (Věta 1.4) bez důkazu
- existence infima (Věta 1.6)
- existence celé části reálného čísla (Věta 1.7)
- Archimédova vlastnost reálných čísel (Věta 1.8)
- hustota $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$ (Věta 1.9)

Posloupnosti reálných čísel.

- lemma (o libovolně malých veličinách)
- jednoznačnost limity posloupnosti (Věta 2.1)
- charakterisace omezenosti posloupnosti (Věta 2.2)
- limita posloupnosti a absolutní hodnota (Věta 2.3)
- nulová limita posloupnosti a absolutní hodnota (Věta 2.4)
- vztah konvergence a omezenosti posloupnosti (Věta 2.6)
- limita vybrané posloupnosti (Věta 2.7)
- aritmetika vlastních limit (Věta 2.8)
- limita součinu členů omezené posloupnosti a posloupnosti s nulovou limitou (Věta 2.9)
- limita posloupnosti a uspořádání (Věta 2.10)

- o dvou strážnících (Věta 2.11)
- nevlastní limita posloupnosti a jednostranná omezenost (Věta 2.14)
- věta o andělovi (Věta 2.15) bez důkazu
- věta o ďáblovi (Věta 2.16) bez důkazu
- změna konečně mnoha členů posloupnosti (Věta 2.17) bez důkazu
- aritmetika limit (Věta 2.18) bez důkazu
- nevlastní limita podílu (Věta 2.19)
- limita monotónní posloupnosti (Věta 2.20)
- Bolzanova – Weierstrassova věta (Věta 2.21)
- o vztahu limity, limes inferior a limes superior (Věta 2.22)
- limes superior, limes inferior a hromadné hodnoty (Věta 2.23)
- Bolzanova – Cauchyova podmínka pro posloupnosti (Věta 2.24)
- Borelova věta (Věta 2.25)

Reálné funkce jedné reálné proměnné.

- jednoznačnost limity funkce (Věta 3.1) bez důkazu
- limita a jednostranné limity (Věta 3.2) bez důkazu
- limita složené funkce (Věta 3.3)
- Heineova věta (Věta 3.4)
- aritmetika limit funkcí (Věta 3.5) bez důkazu
- o srovnání (Věta 3.6) bez důkazu
- vlastní limita funkce a omezenost (Věta 3.7) bez důkazu
- nevlastní limita podílu pro funkce (Věta 3.8) bez důkazu
- limita monotónní funkce (Věta 3.9) bez důkazu
- závedení exponenciální funkce (Věta 3.10) bez důkazu
- závedení sinu a kosinu (Věta 3.11) bez důkazu
- Bolzanova věta o nabývání mezihodnot (Věta 3.12)
- zobrazení intervalu spojitou funkcí (Věta 3.13)
- nabývání extrémů (Věta 3.14)
- vztah spojitosti a omezenosti (Věta 3.15)
- spojitost inversní funkce (Věta 3.16)

Derivace a elementární funkce.

- vztah derivace a spojitosti (Věta 4.1)
- derivace a aritmetické operace (Věta 4.2)
- derivace složené funkce (Věta 4.3)
- derivace inversní funkce (Věta 4.4)
- nutná podmínka existence extrému (Věta 4.5)
- Rolleova věta (Věta 4.6)
- Lagrangeova věta (Věta 4.7)
- Cauchyova věta (Věta 4.8)
- vztah derivace a monotonie (Věta 4.9)
- l'Hospitalova pravidla (Věta 4.10) bez důkazu
- o limitě derivací (Věta 4.11)
- lemma (ekvivalentní podmínky pro konvexitu) bez důkazu
- konvexita a jednostranné derivace (Věta 4.12)
- konvexita a spojitost (Věta 4.13)
- druhá derivace a konvexita (Věta 4.14)
- nutná podmínka pro inflexi (Věta 4.15)
- postačující podmínka pro inflexi (Věta 4.16)
- tvar asymptoty (Věta 4.17)

Taylorův polynom.

- Peanův tvar zbytku (Věta 5.1)

- lemma o příliš dobré aproximaci polynomu
- jednoznačnost Taylorova polynomu (Věta 5.2)
- obecný tvar zbytku (Věta 5.3)
- Lagrangeův tvar zbytku (Věta 5.4)
- Cauchyův tvar zbytku (Věta 5.5)
- aritmetika malého *o* (Věta 5.6 - bez důkazu)
- malé *o* složené funkce (Věta 5.7 - bez důkazu)