MATEMATICKÁ ANALÝZA 4 (NMMA202), LETNÍ SEMESTR 2023–2024
POPIS PŘEDMĚTU A INFORMACE K ZÁPOČTU A KE ZKOUŠCE

LUBOŠ PICK

Popis předmětu

Jde o poslední část čtyřsemestrálního základního kursu matematické analýzy. Věnuje se stejnoměrné konvergenci posloupností a řad funkcí, teorii mocninných řad, absolutně spojitým funkcím, funkcím s omezenou variací, klasickému pojetí Fourierových řad a pokročilým partiím teorie metrických prostorů s důrazem na separabilní, totálně omezené a souvislé prostory. Kurs se skládá z přednášek, cvičení a proseminář a je hodnocen zápočtem a zkouškou.

Přednáška se koná pro větší množství (desítky až stovky) studentů najednou, přičemž přednášející u tabule vykládá především teoretické poznatky a ilustrativní příklady. Otázky v průběhu přednášky a diskuse po ní jsou vítány, jiná forma studentské aktivity (pobyt u tabule atd.) se nepředpokládá. Z látky přednášené na přednášce je potřeba složit zkoušku.

Cvičení se koná pro menší množství (15-25) studentů najednou, typicky pro jeden kroužek. Na cvičeních se počítají příklady určené k procvičení dané tématiky. S aktivní účastí studentů (někdy i u tabule) se počítá. Náplň a formu cvičení určuje cvičící. Za zvládnutí početních technik prováděných na cvičeních je potřeba získat zápočet.

Proseminář je určen pro malé množství (typicky 15-25) studentů, kteří mají zájem o získání hlubších teoretických poznatků z matematické analýzy nad rámec povinné látky. Na prosemináři často referují probíranou látku studenti. Proseminář je hodnocen zápočtem. Zápočet bývá typicky udělován za smysluplný referát.

Zápočet

Podmínky udělení zápočtu: alespoň 50% účast na cvičeních a úspěšné napsání tří písemek během semestru; na konci semestru bude možné si případně jednu neúspěšnou písemku opravit. Písemka je hodnocena jako *úspěšně napsaná*, pokud student získá alespoň 20 bodů z 30. Povoleny jsou pouze běžné psací potřeby. Čas k vypracování každé zápočtové písemky je 30 minut. Studentům mimořádného studia je prominuta účast na cvičení, ostatní podmínky zůstávají v platnosti.

Termíny zápočtových písemek:

- 1. zápočtová písemka: v týdnu od 11.3. 2024 (stejnoměrná konvergence),
- 2. zápočtová písemka: v týdnu od 15.4. 2024 (mocninné řady),
- 3. zápočtová písemka: v týdnu od 6.5. 2024 (Fourierovy řady).
- opravná zápočtová písemka: pátek 24.5. 2024.

Zkouška

Nutnou podmínkou účasti na zkoušce je udělení zápočtu.

Písemná část. Pro písemnou část zkoušky bude vypsáno právě pět termínů, a to

- ve čtvrtek 30.5. 2024 v 08:00 v posluchárnách K1, K2,
- v pondělí 3.6. 2024 ve 12:20 v posluchárně N1,
- ve čtvrtek 20.6. 2024 v 08:00 v posluchárnách K1, K2,
- ve čtvrtek 27.6. 2024 v 08:00 v posluchárnách K1, K2,
- v úterý 10.9. 2024 v 08:00 v posluchárnách K1, K2.

Date: 15. března 2024.

Mimo vypsané termíny nebude možné vykonat písemnou část zkoušky. V době konání písemné části zkoušky bude vyvěšen zasedací pořádek. Před začátkem písemné části zkoušky bude provedena kontrola totožnosti studentů. Každý student se musí prokázat platným dokladem s fotografií. Písemná část zkoušky obsahuje čtyři příklady z následujících partií matematické analýzy:

- stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí (15 bodů),
- stejnoměrná konvergence řad funkcí (15 bodů),
- mocninné řady (15 bodů),
- Fourierovy řady (15 bodů).

Čas k vypracování písemné části je 150 minut. Povoleny jsou pouze běžné psací potřeby. Po skončení písemné části bude na tabuli v posluchárně K1 předvedeno vzorové řešení. Jestliže student získá z písemné části zkoušky 35 nebo více bodů, postoupí k ústní části zkoušky. Jestliže získá 34 nebo méně bodů, bude zkouška hodnocena známkou **neprospěl(a)**.

Odevzdané písemky budou opraveny v den konání písemné části zkoušky. Studentům, kteří úspěšně složí písemnou část zkoušky, bude elektronickou poštou zaslán čas ústní části zkoušky (bude použita adresa uvedená v SIS). Tento čas bude pro všechny studenty závazný. Studentům, jejichž písemná část zkoušky bude hodnocena známkou **neprospěl(a)**, bude do systému SIS zapsána známka 4.

Ústní část. Ústní část zkoušky se bude konat následující pracovní den po konání písemné části zkoušky od 08:00 v posluchárně K2 (v úterý 4.6. v K3). Ústní část zkoušky bude obsahovat sedm otázek uspořádaných a přibližně hodnocených podle následujícího klíče:

- klíčový pojem z prvních tří semestrů (0 bodů),
- klíčový pojem (0 bodů),
- jedna definice a znění dvou vět (5+5+5 bodů),
- formulace a důkazy dvou vět (celkem 45 bodů).

K úspěšnému složení ústní části je třeba napsat správně definici všech klíčových pojmů a získat minimálně 35 bodů. Po celou dobu ústní zkoušky platí, že student musí bezpečně ovládat veškeré klíčové pojmy. Bude-li zkouška po ústní části hodnocena známkou **neprospěl(a)**, je student povinen znovu složit obě části zkoušky.

Celkové hodnocení zkoušky

K celkovému hodnocení známkou **výborně** je třeba, aby student ovládal všechny klíčové pojmy, dále aby s porozuměním ovládal definice a věty, znal důkazy všech vět a byl schopen aplikovat dosažené vědomosti na jednoduché teoretické příklady. Orientačně známka "výborně" odpovídá bodovému rozmezí 105–120.

K celkovému hodnocení známkou **velmi dobře** je třeba, aby student ovládal všechny klíčové pojmy, dále aby s porozuměním ovládal definice a věty, znal důkazy lehčích vět a byl schopen aplikovat dosažené vědomosti v jednoduchých teoretických příkladech. Může mít menší mezery v obtížnějších partiích. Orientačně známka "velmi dobře" odpovídá bodovému rozmezí 85–104.

K celkovému hodnocení známkou **dobře** je třeba, aby student ovládal všechny klíčové pojmy, dále aby s porozuměním ovládal definice a jednoduché věty a znal důkazy lehčích vět. Orientačně známka "dobře" odpovídá bodovému rozmezí 70–84.

Hodnocení známkou **neprospěl(a)** bude uplatněno, jestliže se během zkoušky prokáže, že student nezná některý z klíčových pojmů, neovládá věty nebo definice nebo není schopen dokázat ani nejjednodušší tvrzení. Orientačně hodnocení "neprospěl(a)" odpovídá přibližně bodovému rozmezí 0–69.

Vzorové zadání písemné části zkoušky

Příklad 1. Uvažujte posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovanou předpisem

$$f_n(x) = \sqrt{n+1}\left(e^{\sqrt{\frac{1}{nx}}} - 1\right) \quad \text{pro } x \in (0,\infty) \text{ a } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Nalezněte funkci $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ splňující $f_n \to f$ na $(0,\infty)$.
(b) Rozhodněte, zda $f_n \rightrightarrows f$ na $(0,1]$.

(c) Rozhodněte, zda $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na $(0,1]$.
(d) Rozhodněte, zda $f_n \rightrightarrows f$ na $[1,\infty)$.
(e) Rozhodněte, zda $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na $[1,\infty)$.
(15 bodů)

Příklad 2. Nechť f je definována předpisem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin(x^n).$$

Určete definiční obor funkce f. Rozhodněte, zda na tomto definičním oboru řada konverguje stejnoměrně nebo lokálně stejnoměrně. Vyšetřete spojitost funkcí f a f' v jejich definičním oboru. (15 bodů)

Příklad 3. Nalezněte střed a poloměr konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n}(x+1)^n.$$

Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ řada konverguje a pro která $x \in \mathbb{R}$ řada konverguje absolutně. (15 bodů)

Příklad 4. Nalezněte 2π-periodickou funkci f, která je na intervalu $(0,\pi]$ dána předpisem

$$f(t) = e^{-2t}, \quad t \in (0,\pi],$$

a má *sinovou* Fourierovu řadu. Rozhodněte, zda řada konverguje bodově na $\mathbb{R}$, a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady sečtěte číselnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{4+(2k+1)^2}. \quad \text{(15 bodů)}$$

Vzor zadání ústní části zkoušky

Otázka 1. Napište definici klíčového pojmu z prvních tří semestrů: *konvergentní posloupnost, divergentní posloupnost, vybraná posloupnost.*

Otázka 2. Napište definici klíčového pojmu: *separabilní metrický prostor.*

Otázka 3. Napište definici pojmu: *kladná, záporná a totální variace, funkce s omezenou variací, absolutně spojitá funkce.*

Otázka 4. Napište znění věty: *Riemannovo–Lebesgueovo lemma* (Věta 16.5).

Otázka 5. Napište znění věty: *Mooreova–Osgoodova věta* (Věta 13.2).

Otázka 6. Zformulujte a dokažte větu: *kompaktnost a totální omezenost* (Věta 17.6).

Otázka 7. Zformulujte a dokažte větu: *Abelova věta* (Věta 14.4).

Seznam klíčových pojmů z prvních tří semestrů.

- supremum, infimum
- posloupnost, limita posloupnosti, limes superior, limes inferior
- konvergentní posloupnost, divergentní posloupnost, vybraná posloupnost
- limita funkce, derivace funkce
- řada, součet řady, konvergentní, divergentní, absolutně konvergentní, neabsolutně konvergentní řada
- primitivní funkce, Newtonův integrál, Riemannův integrál
- metrický prostor, metrika
- normovaný lineární prostor, norma
- otevřená a uzavřená množina, vnitřek a uzávěr množiny
- konvergence a limita posloupnosti v metrickém prostoru

- derivace podle vektoru, parciální derivace, gradient, totální diferenciál, derivace zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$
- norma lineárního zobrazení $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Seznam klíčových pojmů.

- bodově, stejnoměrně a lokálně stejnoměrně konvergentní posloupnost a řada funkcí
- mocninná řada, střed a poloměr konvergence
- kladná, záporná a totální variace, funkce s omezenou variací, absolutně spojitá funkce
- separabilní metrický prostor
- totálně omezený metrický prostor
- souvislý a křivkově souvislý metrický prostor

Seznam požadovaných definic.

- stejnoměrně cauchyovská posloupnost a řada funkcí
- horní a dolní derivace
- trigonometrická řada, trigonometrický polynom, Fourierovy koeficienty, Fourierova řada, sinová řada, cosinová řada
- Dirichletovo jádro, Fejérovo jádro
- cesarovsky sčitatelná posloupnost
- báze otevřených množin
- obojetná množina, oddělené množiny, komponenta

Seznam požadovaných vět (není-li stanoveno jinak, jsou požadovány důkazy).

Stejnoměrná konvergence posloupností a řad funkcí.

- charakterisace stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí (Věta 13.1)
- Mooreova–Osgoodova věta (Věta 13.2)
- vztah stejnoměrné konvergence a spojitosti (Věta 13.3)
- charakterisace lokálně stejnoměrné konvergence na intervalu (Věta 13.4)
- Bolzanova–Cauchyova podmínka pro stejnoměrnou konvergenci (Věta 13.5)
- stejnoměrná konvergence derivací (Věta 13.6)
- záměna limity a Newtonova integrálu (Věta 13.7)
- Diniova věta (Věta 13.8)
- Weierstrassovo kritérium (Věta 13.9)
- záměna sumy a derivace (Věta 13.10)
- záměna sumy a Newtonova integrálu (Věta 13.11)

Mocninné řady.

- o poloměru konvergence mocninné řady (Věta 14.1)
- derivace mocninné řady (Věta 14.2)
- vztah mocninné řady a Taylorova polynomu (Věta 14.3)
- Abelova věta (Věta 14.4)
- o lokálně stejnoměrné konvergenci mocninné řady (Věta 14.5)

Absolutně spojité funkce a funkce s konečnou variací.

- Vitaliova věta (Věta 15.1)
- vlastnosti monotónní funkce (Věta 15.2)
- kladná, záporná a totální variace (Věta 15.3)
- omezená variace a monotonie (Věta 15.4)
- omezená variace a vlastní derivace (Věta 15.5)
- absolutní spojitost, stejnoměrná spojitost a konečná variace(Věta 15.6)
- absolutní spojitost a neurčitý integrál (Věta 15.7)
- derivace integrálu (Věta 15.8)
- absolutní spojitost a konstantnost skoro všude (Věta 15.9)
- absolutní spojitost a existence derivace skoro všude (Věta 15.10)
- integrace per partes pro absolutně spojité funkce (Věta 15.11)

Fourierovy řady.

- Fourierovy koeficienty (Věta 16.1)
- Fejérova věta (Věta 16.2)
- trigonometrická verze Weierstrassovy věty (Věta 16.3)
- konvergence v L^1-normě (Věta 16.4)
- Riemannovo–Lebesgueovo lemma (Věta 16.5)
- o lokalizaci (Věta 16.6)
- Fourierovy koeficienty určují funkci (Věta 16.7)
- Hardyova věta (Věta 16.8)
- omezená variace a Fourierovy koeficienty (Věta 16.9)
- Jordanovo–Dirichletovo kritérium (Věta 16.10)
- Diniovo kritérium (Věta 16.11)
- důsledky Diniova kritéria (Věta 16.12)

Metrické prostory III.

- charakterisace separabilních prostorů (Věta 17.1)
- nutná podmínka separability (Věta 17.2)
- prostory ℓ^∞, c_0 a separabilita (Věta 17.3)
- totální omezenost a omezenost (Věta 17.4)
- totální omezenost a separabilita (Věta 17.5)
- kompaktnost a totální omezenost (Věta 17.6)
- kompaktnost, totální omezenost a úplnost (Věta 17.7)
- kompaktnost a otevřená pokrytí (Věta 17.8)
- charakterisace souvislých prostorů (Věta 17.9)
- spojitý obraz souvislého prostoru (Věta 17.10)
- souvislost uzávěru (Věta 17.11)
- souvislost sjednocení (Věta 17.12)
- normalita metrických prostorů (Věta 17.13)
- charakterisace souvislých množin (Věta 17.14)
- charakterisace komponent (Věta 17.15)
- souvislé podmnožiny $\mathbb{R}$ (Věta 17.16)
- souvislost souvislosti s křivkovou souvislostí (Věta 17.17)
- souvislost v NLP (Věta 17.18)
- struktura otevřených podmnožin $\mathbb{R}$ (Věta 17.19)
- aplikace souvislosti (Věta 17.20)