MATEMATICKÁ ANALÝZA 3 (NMMA201), ZIMNÍ SEMESTR 2023–2024
POPIS PŘEDMĚTU A INFORMACE K ZÁPOČTU A KE ZKOUŠCE

LUBOŠ PICK

Popis předmětu

Jde o třetí část čtyřsemestrálního základního kursu matematické analýzy. Věnuje se základům teorie metrických prostorů a základům diferenciálního počtu funkcí více proměnných. Kurs se skládá z přednášek, cvičení a prosemináře a je hodnocen zápočtem a zkouškou.

Přednáška se koná pro větší množství (desítky až stovky) studentů najednou, přičemž přednášející u tabule vykládá především teoretické poznatky a ilustrativní příklady. Otázky v průběhu přednášky a diskuse po ní jsou vítány, jiná forma studentské aktivity (pobyt u tabule atd.) se nepředpokládá. Z látky přednášené na přednášce je potřeba složit zkoušku.

Cvičení se koná pro menší množství (15-25) studentů najednou, typicky pro jeden kroužek. Na cvičeních se počítají příklady určené k procvičení dané tématiky. S aktivní účastí studentů (někdy i u tabule) se počítá. Náplň a formu cvičení určuje cvičící. Z početních technik prováděných na cvičeních je potřeba složit zápočet.

Proseminář je určen pro malé množství (typicky 15-25) studentů, kteří mají zájem o získání hlubších teoretických poznatků z matematické analýzy nad rámec povinné látky. Na prosemináři často referují probíranou látku studenti. Proseminář je hodnocen zápočtem. Zápočet bývá typicky udělován za smysluplný referát.

Zápočet

Podmínky udělení zápočtu: alespoň 50% účast na cvičeních a napsání tří písemek ze tří během semestru; na konci semestru bude možné si případně jednu neúspěšnou písemku opravit. Datum konání písemek bude oznámeno při výuce. Písemka je hodnocena jako *úspěšně napsaná*, pokud student získá alespoň 20 bodů z 30. Povoleny jsou pouze běžné psací potřeby. Čas k vypracování každé zápočtové písemky je 30 minut. Studentům mimořádného studia bude prominut požadavek 50% účasti, jinak platí stejné podmínky.

Termíny zápočtových písemek:

- 1. zápočtová písemka: 16.10. 2023 (soustavy ODR),
- 2. zápočtová písemka: 20.11. 2023 (funkce více proměnných - základy),
- 3. zápočtová písemka: 8.1. 2024 (funkce více proměnných - implicitní funkce a extrémy).
- opravná zápočtová písemka: pátek 12.1.2024 v 15:40 v K1.

Zkouška

Nutnou podmínkou účasti na zkoušce je udělení zápočtu.

Písemná část. Pro písemnou část zkoušky bude vypsáno právě pět termínů, a to

- ve čtvrtek 18.1. 2024 v 08:00 v posluchárnách K1, K2, K3,
- ve čtvrtek 25.1. 2024 v 08:00 v posluchárnách K1, K2, K3,
- ve čtvrtek 8.2. 2024 v 08:00 v posluchárnách K1, K2, K3,
- ve čtvrtek 15.2. 2024 v 08:00 v posluchárnách K1, K2, K3,
- v pátek 8.3. 2024 v 15:30 v posluchárnách K1, K2.

Date: 1. března 2024.

Mimo vypsané termíny nebude možné vykonat písemnou část zkoušky. V posluchárně K1 bude v době konání písemné části zkoušky vyvěšen zasedací pořádek. Před začátkem písemné části zkoušky bude provedena kontrola totožnosti studentů. Každý student se musí prokázat platným dokladem s fotografií. Písemná část zkoušky bude obsahovat čtyři příklady z následujících partií matematické analýzy:

- soustavy ODR (15 bodů),
- derivace funkcí více proměnných (15 bodů),
- implicitní funkce (15 bodů),
- extrémy funkcí více proměnných (15 bodů).

Čas k vypracování písemné části je 150 minut. Povoleny jsou pouze běžné psací potřeby. Po skončení písemné části bude na tabuli v posluchárně K1 předvedeno vzorové řešení. Jestliže student získá z písemné části zkoušky 35 nebo více bodů, postoupí k ústní části zkoušky. Jestliže získá 34 nebo méně bodů, bude zkouška hodnocena známkou **neprospěl(a)**.

Odevzdané písemky budou opraveny v den konání písemné části zkoušky. Studentům, kteří úspěšně složí písemnou část zkoušky, bude elektronickou poštou zaslán čas ústní části zkoušky (bude použita oficiální elektronická adresa, která je uvedena v systému SIS). Tento čas bude pro všechny studenty závazný. Studentům, jejichž písemná část zkoušky bude hodnocena známkou neprospěl(a), bude do systému SIS zapsána známka 4.

Ústní část. Ústní část zkoušky se bude u prvních čtyř termínů konat následující pracovní den po konání písemné části zkoušky od 08:00 v posluchárně K2. V případě pátého termínu se bude konat v pondělí 11.3. 2024 od 11:20 v posluchárně K9. Ústní část zkoušky bude obsahovat sedm otázek uspořádaných a přibližně hodnocených podle následujícího klíče:

- klíčový pojem z prvního ročníku (0 bodů),
- klíčový pojem (0 bodů),
- jedna definice a znění dvou vět (5+5+5 bodů),
- formulace a důkazy dvou vět (celkem 45 bodů).

K úspěšnému složení ústní části je třeba napsat správně definici klíčového pojmu a získat minimálně 35 bodů. Po celou dobu ústní zkoušky platí, že student musí bezpečně ovládat veškeré klíčové pojmy. Bude-li zkouška po ústní části hodnocena známkou neprospěl(a), je student povinen znovu složit obě části zkoušky.

Celkové hodnocení zkoušky

K celkovému hodnocení známkou **výborně** je třeba, aby student ovládal všechny klíčové pojmy, dále aby s porozuměním ovládal definice a věty, znal důkazy všech vět a byl schopen aplikovat dosažené vědomosti na více či méně jednoduchých teoretických příkladech. Orientačně známka "výborně" odpovídá přibližně bodovému rozmezí 105–120.

K celkovému hodnocení známkou **velmi dobře** je třeba, aby student ovládal všechny klíčové pojmy, dále aby s porozuměním ovládal definice a věty, znal důkazy lehčích vět a byl schopen aplikovat dosažené vědomosti v jednoduchých teoretických příkladech. Může mít menší mezery v obtížnějších partiích. Orientačně známka "velmi dobře" odpovídá přibližně bodovému rozmezí 85–104.

K celkovému hodnocení známkou **dobře** je třeba, aby student ovládal všechny klíčové pojmy, dále aby s porozuměním ovládal definice a jednoduché věty a znal důkazy lehčích vět. Orientačně známka "dobře" odpovídá přibližně bodovému rozmezí 70–84.

Hodnocení známkou **neprospěl(a)** bude uplatněno, jestliže se během zkoušky prokáže, že student nezná některý z klíčových pojmů, neovládá věty nebo definice nebo není schopen dokázat ani nejjednodušší tvrzení. Orientačně hodnocení "neprospěl(a)" odpovídá přibližně bodovému rozmezí 0–69.

Vzorové zadání písemné části zkoušky

Příklad 1. Nechť x, y jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Nalezněte všechna maximální řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 2x + 5y + 3t, \\ y' &= -x + 4y + 5t. \quad \text{(15 bodů)} \end{aligned}$$

Příklad 2. Nechť $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení definované předpisem

$$F(x, y, z) = (|xy| + \sin xy, \operatorname{arctg}(x + y + 2z)).$$

(a) Dokažte, že v bodě $(1, 1, -1)$ existuje derivace funkce F a spočtěte její representující matici.
(b) Spočtěte $\frac{\partial F_1}{\partial x}(0, 0, 0)$, pokud existuje. (15 bodů)

Příklad 3. Ukažte, že vztahy

$$\begin{aligned} u &= \sin x + xy + e^z, \\ v &= \cos y + xe^{-y}, \\ w &= x^2 + 2y - \cos(xz) \end{aligned}$$

definují na okolí bodu $[u, v, w] = [1 + \sin 1, 2, 0]$ hladké funkce $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$, pro které platí $x(1 + \sin 1, 2, 0) = 1$, $y(1 + \sin 1, 2, 0) = 0$, $z(1 + \sin 1, 2, 0) = 0$. Rozhodněte, zda má funkce $x(u, v, w)$ totální diferenciál v bodě $[1 + \sin 1, 2, 0]$, a pokud ano, spočtěte jej. (15 bodů)

Příklad 4. Nalezněte maximum a minimum funkce

$$f(x, y, z) = x^2 + y + z$$

na množině

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 \le z,\ x^2 + y^2 \le -z + 1\}. \quad \text{(15 bodů)}$$

Vzor zadání ústní části zkoušky

Otázka 1. Napište definici klíčového pojmu z prvního ročníku: *supremum, infimum.*

Otázka 2. Napište definici klíčového pojmu: *otevřená koule v metrickém prostoru, vnitřní bod, vnitřek.*

Otázka 3. Napište definici pojmu: *lipschitzovské zobrazení.*

Otázka 4. Napište znění věty: *totální diferenciál a parciální derivace* (Věta 10.1).

Otázka 5. Napište znění věty: *vlastnosti uzávěru* (Věta 10.11).

Otázka 6. Zformulujte a dokažte větu: *o lokálním difeomorfismu* (Věta 11.30).

Otázka 7. Zformulujte a dokažte větu: *charakterisace Baireových prostorů* (Věta 12.13).

Seznam klíčových pojmů z prvního ročníku.

- supremum, infimum
- posloupnost, limita posloupnosti, limes superior, limes inferior
- konvergentní posloupnost, divergentní posloupnost, vybraná posloupnost
- limita funkce, derivace funkce
- řada, součet řady, konvergentní, divergentní, absolutně konvergentní, neabsolutně konvergentní řada
- primitivní funkce, Newtonův integrál, Riemannův integrál

Seznam klíčových pojmů.

- metrický prostor, metrika, metrický podprostor, zděděná metrika
- otevřená koule v metrickém prostoru, vnitřní bod, vnitřek
- normovaný lineární prostor, norma
- otevřená a uzavřená množina, vnitřní bod, vnitřek, uzávěr
- konvergence a limita posloupnosti v metrickém prostoru, konvergentní posloupnost
- kompaktní metrický prostor, cauchyovská posloupnost, úplný metrický prostor, Baireův prostor, Banachův prostor
- derivace podle vektoru, parciální derivace, gradient, totální diferenciál, derivace zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$
- zobrazení třídy $\mathcal{C}^k$, k-lineární zobrazení, norma k-lineárního zobrazení

Seznam požadovaných definic.

- metriky v $\mathbb{R}^n$, metriky v $C[a,b]$, diskrétní metrika
- prostory ℓ^∞, c a c_0
- hraniční bod, hranice
- vzdálenost bodu od množiny, průměr, omezená množina
- spojitost zobrazení na metrickém prostoru, homeomorfismus, spojitost vzhledem k množině, stejnoměrná spojitost
- hromadný bod, derivace množiny, izolovaný bod
- Jacobiho matice, jakobián, Hessova matice
- konvexní množina
- lipschitzovské zobrazení
- derivace k-tého řádu, druhý diferenciál, diferenciál k-tého řádu
- difeomorfismus, regulární zobrazení
- hustá, řídká množina, množina první a druhé kategorie, residuální množina
- omezené lineární zobrazení
- kontrakce, neexpansivní zobrazení, pevný bod

Seznam požadovaných vět (není-li stanoveno jinak, jsou požadovány důkazy).

Metrické prostory I.

- vztah mezi normou a metrikou (Věta 10.1)
- vlastnosti konvergence (Věta 10.2)
- limita vybrané posloupnosti (Věta 10.3)
- vlastnosti uzavřených množin (Věta 10.4)
- otevřenost otevřené koule (Věta 10.5)
- vztah otevřených a uzavřených množin (Věta 10.6)
- vlastnosti otevřených množin (Věta 10.7)
- otevřené a uzavřené množiny v diskrétním prostoru (Věta 10.8)
- vlastnosti hranice (Věta 10.9)
- charakterisace uzavřenosti (Věta 10.10)
- vlastnosti uzávěru (Věta 10.11)
- konečnost a kompaktnost (Věta 10.12)
- kompaktnost intervalu (Věta 10.13)
- nutná podmínka kompaktnosti (Věta 10.14)
- kompaktnost v diskrétním prostoru (Věta 10.15)
- kompaktnost a uzavřenost (Věta 10.16)
- kompaktnost a omezenost (Věta 10.17)
- uzavřená podmnožina kompaktu (Věta 10.18)
- kompaktnost v $\mathbb{R}^n$ (Věta 10.19)
- charakterisace spojitosti (Věta 10.20)
- Heineova věta pro spojitost v bodě (Věta 10.21)
- Heineova věta pro spojitost (Věta 10.22 - bez důkazu)

- spojitost složeného zobrazení(Věta 10.23)
- jednoznačnost limity (Věta 10.24)
- limita složeného zobrazení(Věta 10.25)
- spojitý obraz kompaktu (Věta 10.26)
- extrémy kompaktní množiny v $\mathbb{R}^n$ (Věta 10.27)
- extrémy spojité funkce na kompaktu (Věta 10.28)
- omezenost spojité funkce na kompaktu (Věta 10.29)
- spojitost a stejnoměrná spojitost na kompaktu (Věta 10.30)
- charakterisace kompaktních prostorů (Věta 10.31)

Funkce více proměnných.

- totální diferenciál a parciální derivace (Věta 11.1)
- totální diferenciál a spojitost (Věta 11.2)
- o cestičce v kostičce (Věta 11.3)
- postačující podmínka pro existenci totálního diferenciálu (Věta 11.4)
- geometrický význam gradientu (Věta 11.5)
- representace derivace (Věta 11.6)
- derivace a spojitost (Věta 11.7)
- postačující podmínka pro existenci derivace (Věta 11.8)
- spojitost lineárního zobrazení (Věta 11.9)
- norma lineárního zobrazení (Věta 11.10)
- omezenost lineárního zobrazení (Věta 11.11)
- derivace a lokální lipschitzovskost (Věta 11.12)
- derivace složeného zobrazení (Věta 11.13)
- řetízkové pravidlo (Věta 11.14)
- o přírůstku funkce (Věta 11.15)
- omezená derivace a lipschitzovskost (Věta 11.16)
- skládání zobrazení třídy $\mathcal{C}^k$ (Věta 11.17)
- záměnnost parciálních derivací (Věta 11.18 - bez důkazu)
- derivace vyššího řádu a totální diferenciál (Věta 11.19)
- symetrie derivace (Věta 11.20)
- postačující podmínka pro existenci derivace vyššího řádu (Věta 11.21)
- Lagrangeův tvar zbytku (Věta 11.22)
- Peanův tvar zbytku (Věta 11.23)
- o implicitně zadané funkci (Věta 11.24)
- o implicitně zadaných funkcích (Věta 11.25 - bez důkazu)
- nutná podmínka existence lokálního extrému (Věta 11.26)
- elipticita positivně definitní kvadratické formy (Věta 11.27)
- podmínky druhého řádu pro existenci lokálního extrému (Věta 11.28)
- Lagrangeova věta o multiplikátorech (Věta 11.29)
- o lokálním difeomorfismu (Věta 11.30)
- vztah difeomorfismu a regulárního zobrazení (Věta 11.31)

Metrické prostory II.

- konvergence a Bolzanova–Cauchyova podmínka (Věta 12.1)
- Bolzanova–Cauchyova podmínka pro diskrétní prostory (Věta 12.2)
- prostor spojitých funkcí se supremovou metrikou a úplnost (Věta 12.3)
- prostor spojitých funkcí s integrální metrikou a úplnost (Věta 12.4)
- kompaktnost a úplnost (Věta 12.5)
- úplnost a uzavřenost (Věta 12.6)
- Cantorova věta (Věta 12.7)
- charakterisace hustých množin (Věta 12.8)
- průnik hustých množin (Věta 12.9)
- charakterisace řídkých množin (Věta 12.10)

- vlastnosti řídkých množin (Věta 12.11)
- charakterisace prostorů druhé kategorie (Věta 12.12)
- charakterisace Baireových prostorů (Věta 12.13)
- Baireova věta (Věta 12.14)
- existence spojité funkce bez derivace (Věta 12.15)
- Banachova věta o kontrakci (Věta 12.16)
- o pevném bodu neexpansivního zobrazení (Věta 12.17)
- o pevném bodu zobrazení, jehož mocnina je kontrakce (Věta 12.18)
- charakterisace omezeného lineárního zobrazení (Věta 12.19)
- spojitost normy (Věta 12.20)
- normy na prostoru konečné dimenze (Věta 12.21)
- úplnost prostoru konečné dimenze (Věta 12.22)
- vnitřek podprostoru (Věta 12.23)
- dimense Banachova prostoru (Věta 12.24)
- úplnost Lebesgueových prostorů (Věta 12.25)