MATEMATICKÁ ANALÝZA 2 (NMMA102), LETNÍ SEMESTR 2024–2025
POPIS PŘEDMĚTU A INFORMACE K ZÁPOČTU A KE ZKOUŠCE

LUBOŠ PICK

Popis předmětu

Jde o druhou část čtyřsemestrálního základního kursu matematické analýzy. Věnuje se zejména teorii číselných řad, základům integrálního počtu, základům diferenciálního počtu více proměnných a základům teorie metrických prostorů. Kurs se skládá z přednášek, cvičení a prosemináře a je hodnocen zápočtem a zkouškou.

Přednáška se koná pro větší množství (desítky až stovky) studentů najednou, přičemž přednášející u tabule vykládá především teoretické poznatky a ilustrativní příklady. Otázky v průběhu přednášky a diskuse po ní jsou vítány, jiná forma studentské aktivity (pobyt u tabule atd.) se nepředpokládá. Z látky přednášené na přednášce je potřeba složit zkoušku.

Cvičení se koná pro menší množství (15-25) studentů najednou, typicky pro jeden kroužek. Na cvičeních se počítají příklady určené k procvičení dané tématiky. S aktivní účastí studentů (někdy i u tabule) se počítá. Náplň a formu cvičení určuje cvičící.

Proseminář je určen pro malé množství studentů, kteří mají zájem o získání hlubších teoretických poznatků z matematické analýzy nad rámec povinné látky. Na proseminář často referují probíranou látku studenti.

Zápočet

Podmínky udělení zápočtu: alespoň 50% účast na cvičeních a splnění dvou zápočtových písemek. Každá zápočtová písemka bude obsahovat tři početní příklady hodnocené po šesti bodech a bonusový teoretický příklad hodnocený třemi body. Ke splnění písemky je třeba získat nejméně devět bodů.

Povoleny jsou pouze běžné psací potřeby. Čas k vypracování každé zápočtové písemky je 60 minut.

Termíny zápočtových písemek:

- první zápočtová písemka: druhé cvičení v týdnu 24.-28.3. 2025,
- první opravná zápočtová písemka: středa 2.4. 2025 od 7:20 v K1,
- druhá zápočtová písemka: druhé cvičení v týdnu 12.-16.5. 2025,
- druhá opravná zápočtová písemka: středa 21.5. 2025 od 7:20 v K1.

Studenti, kteří nesplní požadavky na zápočet, mohou dostat možnost získat zápočet za vypracování doplňujících příkladů.

Zkouška

Zkouška se skládá z písemné a ústní části.

Date: 16. února 2025.

Písemná část. Pro písemnou část zkoušky je vypsáno právě pět termínů, a to

- středa 28.5. 2025 v 08:00 v posluchárnách K1, K2 a K3,
- pondělí 9.6. 2025 v 08:00 v posluchárnách K1, K2 a K3,
- středa 11.6. 2025 v 08:00 v posluchárnách K1, K2 a K3,
- středa 18.6. 2025 v 08:00 v posluchárnách K1, K2 a K3,
- středa 10.9. 2025 v 08:00 v posluchárnách K1, K2 a K3.

Mimo vypsané termíny nebude možné vykonat písemnou část zkoušky. V posluchárnách bude v době konání písemné části zkoušky vyvěšen závazný zasedací pořádek. Před začátkem písemné části zkoušky bude provedena kontrola totožnosti studentů. Každý student se musí prokázat platným dokladem s fotografií. Písemná část zkoušky bude obsahovat pět příkladů uspořádaných podle následujícího klíče:

- vyšetření konvergence číselné řady (10 bodů),
- výpočet primitivní funkce nebo určitého integrálu (10 bodů),
- vyšetření konvergence Newtonova integrálu (10 bodů),
- aplikace určitého integrálu (10 bodů),
- teoretický příklad (10 bodů).

Čas k vypracování písemné části je 150 minut. Povoleny jsou pouze běžné psací potřeby. Zadání a řešení písemné části bude po odevzdání písemek zveřejněno na stránce přednášejícího a v případě zájmu ze strany studentů též předvedeno v K1. Jestliže student získá z písemné části alespoň 25 bodů, postoupí k ústní části. Jestliže získá 24 nebo méně bodů, bude zkouška hodnocena známkou **neprospěl(a)**.

Odevzdané písemky budou opraveny v den konání písemné části. Studentům, kteří postoupí k ústní části, bude elektronickou poštou na adresu uvedenou v systému SIS zaslán závazný čas konání ústní části. Studentům, jejichž písemná část zkoušky bude hodnocena známkou neprospěl(a), bude tato známka zapsána do systému SIS.

Jestliže student třikrát neuspěje u písemné části zkoušky, postoupí k ústní části a bude mu počítáno nejlepší ze tří bodových hodnocení písemných částí.

Ústní část. Ústní část zkoušky se bude konat vždy následující den po konání písemné části od 08:00 v posluchárně K2. Bude obsahovat otázky uspořádané a orientačně hodnocené podle následujícího schématu:

- definice klíčového pojmu (0 bodů),
- definice pojmu (5 bodů),
- znění věty (5 bodů),
- formulace a důkaz lehké věty (celkem 5+10 bodů),
- formulace a důkaz těžké věty (celkem 5+20 bodů).

Seznam požadovaných vět je uveden níže. Není-li výslovně stanoveno jinak, je požadován důkaz. Těžké věty jsou vyznačeny barvou magenta.

K úspěšnému složení ústní části je třeba napsat správně definici klíčového pojmu a získat minimálně 25 bodů.

Studentovi může být nabídnuta doplňková otázka na implikace za nejvýše 10 bodů za účelem vylepšení známky.

Po celou dobu ústní zkoušky platí, že student musí bezpečně ovládat veškeré klíčové pojmy. Bude-li zkouška po ústní části hodnocena známkou neprospěl(a), je student povinen znovu složit obě části zkoušky.

Celkové hodnocení zkoušky

K celkovému hodnocení známkou **výborně** je třeba, aby student ovládal všechny klíčové pojmy, dále aby s porozuměním ovládal definice a věty, znal důkazy všech vět a byl schopen aplikovat dosažené vědomosti na více či méně jednoduchých teoretických příkladech. Orientačně známka "výborně" odpovídá bodovému rozmezí 85–100.

K celkovému hodnocení známkou **velmi dobře** je třeba, aby student ovládal všechny klíčové pojmy, dále aby s porozuměním ovládal definice a věty, znal důkazy lehčích vět a byl schopen aplikovat dosažené vědomosti v jednoduchých teoretických příkladech. Může mít menší mezery v obtížnějších partiích. Orientačně známka "velmi dobře" odpovídá bodovému rozmezí 70–84.

K celkovému hodnocení známkou **dobře** je třeba, aby student ovládal všechny klíčové pojmy, dále aby s porozuměním ovládal definice a jednoduché věty a znal důkazy lehčích vět. Orientačně známka "dobře" odpovídá bodovému rozmezí 50–69.

Hodnocení známkou **neprospěl(a)** bude uplatněno, jestliže se během zkoušky prokáže, že student nezná některý z klíčových pojmů, neovládá věty nebo definice nebo není schopen dokázat ani nejjednodušší tvrzení. Orientačně hodnocení "neprospěl(a)" odpovídá přibližně bodovému rozmezí 0–49.

Vzorové zadání písemné části zkoušky

Příklad 1. Vyšetřete pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje a pro která $x \in \mathbb{R}$ absolutně konverguje číselná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} (\operatorname{arctg} x)^n. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2. Spočtěte primitivní funkci

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{1 + \sin x}\, dx$$

na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. (10 bodů)

Příklad 3. Určete, pro které hodnoty $\alpha \in \mathbb{R}$ konverguje Newtonův integrál

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x+\sqrt{x}} (\operatorname{arccotg} x)^{\alpha}\, dx$$

a pro které hodnoty $\alpha \in \mathbb{R}$ diverguje. (10 bodů)

Příklad 4. Určete délku křivky $y = x^2$ pro $x \in [0, 4]$. (10 bodů)

Příklad 5. Nechť $f, g\colon (0,1) \to [0, \infty)$ jsou spojité funkce. Rozhodněte o platnosti následujících výroků. Řešení odůvodněte buď důkazem výroku nebo protipříkladem na jeho platnost.

(i) Jestliže $\int_0^1 f(x)\, dx$ a $\int_0^1 g(x)\, dx$ konvergují, potom $\int_0^1 \max\{f(x), g(x)\}\, dx$ konverguje.

(ii) Jestliže $\int_0^1 f(x)\, dx$ a $\int_0^1 g(x)\, dx$ divergují, potom $\int_0^1 \max\{f(x), g(x)\}\, dx$ diverguje.

(iii) Jestliže $\int_0^1 f(x)\, dx$ konverguje a $\int_0^1 g(x)\, dx$ diverguje, potom $\int_0^1 \max\{f(x), g(x)\}\, dx$ diverguje. (10 bodů)

Vzor zadání ústní části zkoušky

Otázka 1. Napište definici klíčového pojmu: *otevřená a uzavřená množina, vnitřní bod, vnitřek.*

Otázka 2. Napište definici pojmu: *lipschitzovské zobrazení.*

Otázka 3. Napište znění věty: *Darbouxova věta (Věta 7.5).*

Otázka 4. Zformulujte a dokažte lehkou větu: *absolutní a neabsolutní konvergence (Věta 6.12).*

Otázka 5. Zformulujte a dokažte těžkou větu: *druhá věta o střední hodnotě (Věta 8.32).*

Vzor zadání doplňkové otázky

Otázka. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Rozhodnětě, které implikace mezi následujícími výroky platí. Své rozhodnutí odůvodněte důkazem, nebo uveďte protipříklad.

(i) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
(ii) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konverguje.
(iii) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje.

Seznam požadovaných definic a vět

Seznam klíčových pojmů.

- řada, součet řady, n-tý člen řady, n-tý částečný součet řady
- konvergentní, divergentní, absolutně konvergentní, neabsolutně konvergentní řada
- Taylorova řada, MacLaurinova řada
- primitivní funkce, Newtonův integrál, existence, konvergence a divergence Newtonova integrálu
- horní a dolní Riemannovy součty, horní a dolní Riemannův integrál, Riemannův integrál, riemannovsky integrovateln8 funkce
- stejnoměrně spojitá funkce
- metrický prostor, metrika, metrický podprostor, zděděná metrika
- otevřená koule v metrickém prostoru, vnitřní bod, vnitřek
- normovaný lineární prostor, norma
- otevřená a uzavřená množina, vnitřní bod, vnitřek
- konvergence a limita posloupnosti v metrickém prostoru, konvergentní posloupnost
- kompaktní metrický prostor
- derivace podle vektoru, parciální derivace, gradient, totální diferenciál, derivace zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$
- Jacobiho matice, jakobián
- spojitost zobrazení metrického prostoru, homeomorfismus
- limita spojitost zobrazení metrického prostoru vzhledem k množině

Seznam požadovaných definic.

- geometrická řada, harmonická řada, přerovnání řady
- Cauchyův součin řad
- Darbouxova vlastnost
- dělení intervalu, norma dělení, zjemnění
- norma vektoru v $\mathbb{R}^n$
- křivka, délka křivky
- supremová metrika, integrální metrika, diskrétní metrika
- lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$
- tečná rovina, tečná nadrovina ke grafu funkce

Seznam požadovaných vět (není-li stanoveno jinak, jsou požadovány důkazy).

Řady reálných čísel.

- nutná podmínka konvergence (Věta 6.1)
- Bolzanova-Cauchyova podmínka (Věta 6.2)
- řady a aritmetické operace (Věta 6.3)
- konvergentní a divergentní řada (Věta 6.4)
- srovnávací kritérium (Věta 6.5)
- limitní srovnávací kritérium (Věta 6.6)
- Cauchyovo odmocninové kritérium (Věta 6.7)
- d'Alembertovo podílové kritérium (Věta 6.8)
- kondenzační kritérium (Věta 6.9)
- o konvergenci řady $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ (Věta 6.10)
- Leibnizova věta (Věta 6.11)
- absolutní a neabsolutní konvergence (Věta 6.12)
- přerovnání absolutně konvergentní řady (Věta 6.13)
- Riemannova věta (Věta 6.14) (bez důkazu)
- Mertensova věta (Věta 6.15)
- Abelova věta o Cauchyově součinu (6.16) (bez důkazu)
- Taylorovy řady elementárních funkcí (6.18) (bez důkazu)

Primitivní funkce.

- jednoznačnost primitivní funkce až na konstantu (Věta 7.1)
- vztah spojitosti a existence primitivní funkce (Věta 7.2)
- linearita primitivní funkce (Věta 7.3)
- integrace per partes (Věta 7.4)
- Darbouxova věta (Věta 7.5)
- první věta o substituci (Věta 7.6)
- druhá věta o substituci (Věta 7.7)
- věta o lepení (Věta 7.10)

Riemannův integrál.

- vlastnosti dělení (Věta 8.1)
- mantinely Riemannova integrálu (Věta 8.2)
- aproximace Riemannova integrálu součty přes dělení s malou normou (Věta 8.3)
- aproximace Riemannova integrálu (Věta 8.4)
- postačující podmínka pro existenci Riemannova integrálu (Věta 8.5)
- kritérium existence Riemannova integrálu (Věta 8.6)
- spojitost a stejnoměrná spojitost (Věta 8.7)
- spojitost a riemannovská integrovatelnost (Věta 8.8)
- monotonie a riemannovská integrovatelnost (Věta 8.9)
- linearita Riemannova integrálu (Věta 8.10)
- Riemannův integrál a uspořádání (Věta 8.11)
- aditivita Riemannova integrálu (Věta 8.12)
- Riemannův integrál a absolutní hodnota (Věta 8.13)
- derivace funkce horní meze (Věta 8.14)
- Riemannův integrál spojité funkce (Věta 8.15)
- Riemannův integrál funkcí lišících se v konečně mnoha bodech (Věta 8.16)
- charakterizace riemannovské integrovatelnosti (Věta 8.17)
- linearita Newtonova integrálu (Věta 8.18)
- Newtonův integrál a uspořádání (Věta 8.19)
- aditivita Newtonova integrálu (Věta 8.20)
- Newtonův integrál a absolutní hodnota (Věta 8.21)
- per partes pro Newtonův integrál (Věta 8.22)
- substituce pro Newtonův integrál (Věta 8.23)
- Bolzanova-Cauchyova podmínka pro funkce (Věta 8.24)
- konvergence Newtonova integrálu omezené spojité funkce na omezeném intervalu (Věta 8.25)
- vztah Riemannova a Newtonova integrálu (Věta 8.26)
- srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu (Věta 8.27)
- limitní srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu (Věta 8.28)
- Newtonův integrál součinu funkcí (Věta 8.29)
- o nulové funkci (Věta 8.30)
- první věta o střední hodnotě (Věta 8.31)
- druhá věta o střední hodnotě (Věta 8.32)
- Cauchyova–Schwarzova–Buňakovského nerovnost (Věta 8.33)
- norma a integrál (Věta 8.34)
- délka křivky (Věta 8.35)
- integrální kritérium konvergence řad (Věta 8.36)
- integrální tvar zbytku (Věta 8.37)

Metrické prostory I.

- vlastnosti konvergence (Věta 9.1)
- limita vybrané posloupnosti (Věta 9.2)
- vlastnosti uzavřených množin (Věta 9.3)

- otevřenost otevřené koule (Věta 9.4)
- vztah otevřených a uzavřených množin (Věta 9.5)
- vlastnosti otevřených množin (Věta 9.6)
- otevřené a uzavřené množiny v diskrétním prostoru (Věta 9.7)

Funkce více proměnných.

- totální diferenciál a parciální derivace (Věta 10.1)
- totální diferenciál a spojitost (Věta 10.2)
- o cestičce v kostičce (Věta 10.3)
- postačující podmínka pro existenci totálního diferenciálu (Věta 10.4)
- geometrický význam gradientu (Věta 10.5)
- representace derivace (Věta 10.6)
- derivace a spojitost (Věta 10.7)
- postačující podmínka pro existenci derivace (Věta 10.8)
- spojitost lineárního zobrazení (Věta 10.9)
- norma lineárního zobrazení (Věta 10.10)
- omezenost lineárního zobrazení (Věta 10.11)
- derivace a lokální lipschitzovskost (Věta 10.12)
- derivace složeného zobrazení (Věta 10.13)
- řetízkové pravidlo (Věta 10.14)
- o přírůstku funkce (Věta 10.15)
- omezená derivace a lipschitzovskost (Věta 10.16)

Metrické prostory II.

- konečnost a kompaktnost (Věta 11.1)
- kompaktnost intervalu (Věta 11.2)
- nutná podmínka kompaktnosti (Věta 11.3)
- kompaktnost v diskrétním prostoru (Věta 11.4)
- kompaktnost a uzavřenost (Věta 11.5)
- kompaktnost a omezenost (Věta 11.6)
- uzavřená podmnožina kompaktu (Věta 11.7)
- kompaktnost v $\mathbb{R}^n$ (Věta 11.8)
- charakterisace spojitosti (Věta 11.9)
- Heineova věta pro spojitost v bodě (Věta 11.10)
- Heineova věta pro spojitost (Věta 11.11 - bez důkazu)
- spojitost složeného zobrazení(Věta 11.12)
- jednoznačnost limity (Věta 11.13)
- limita složeného zobrazení(Věta 11.14)
- spojitý obraz kompaktu (Věta 11.15)
- extrémy kompaktní množiny v $\mathbb{R}^n$ (Věta 11.16)
- extrémy spojité funkce na kompaktu (Věta 11.17)
- omezenost spojité funkce na kompaktu (Věta 11.18)