Matematická analýza (předběžná verze)

6. března 2025

L. Pick, S. Hencl, J. Spurný a M. Zelený

Obsah

Předmluva

Tento text je velmi nedokonalou verzí budoucích skript. Některé jeho části budou ještě výrazně revidovány. Přesto snad může pomoci studentům MFF UK v prvním a druhém ročníku při přípravě na zkoušku.

KAPITOLA 1

Logika, množiny a základní číselné obory

1.1. Logika

1.1.1. Logika je věda o formální správnosti myšlení. Formálně logická správnost spočívá ve správnosti *vyvození* závěru z předpokladů. V tomto oddílu se budeme zabývat logikou výrokovou a predikátovou.

1.1.2. Výrok je tvrzení, o kterém má smysl říci, že je pravdivé (platí), nebo není pravdivé (neplatí). Pokud výrok platí, říkáme, že má **pravdivostní hodnotu** 1, pokud neplatí, říkáme, že má pravdivostní hodnotu 0. Pouze některé správně utvořené gramatické věty jsou výroky. Věty „Číslo 4 je sudé." a „Praha je hlavní město Kanady." jsou výroky, naproti tomu „Ahoj!" nebo „Kéž by už byl konec." nikoli. Tvrzení „Číslo π^π je iracionální." je výrok, i když zatím není známo, zda pravdivý či nepravdivý. Z výroků lze vytvářet nové složitější výroky pomocí logických operací. Se základními logickými operacemi se nyní seznámíme.

1.1.3. Negací výroku A rozumíme výrok „Není pravda, že platí A." K vyjádření negace výroku A můžeme také použít obrat „Neplatí A.", případně změnit příslušné sloveso ve výroku pomocí předpony „ne-". Negaci výroku A značíme $\neg A$. Je-li výrok A pravdivý, pak je výrok $\neg A$ nepravdivý. Je-li výrok A nepravdivý, pak je výrok $\neg A$ pravdivý.

1.1.4. Konjunkcí výroků A a B nazveme výrok „Platí A a zároveň platí B." Dále používáme také obraty „Platí A a platí B.", „Platí A i B." Konjunkci výroků A a B značíme $A \wedge B$, někdy také $A \,\&\, B$. Pokud jsou pravdivé oba výroky A a B, pak je konjunkce $A \wedge B$ pravdivá. Pokud je alespoň jeden z výroků A a B nepravdivý, pak je konjunkce $A \wedge B$ nepravdivá.

1.1.5. Disjunkcí výroků A a B nazveme výrok „Platí A nebo platí B." Disjunkci výroků A a B značíme $A \vee B$. Pokud je alespoň jeden z výroků A a B pravdivý, pak je disjunkce $A \vee B$ pravdivá. Pokud jsou oba výroky A a B nepravdivé, pak je disjunkce $A \vee B$ nepravdivá. Poznamenejme, že disjunkce není vylučující, to znamená, že je pravdivá i v případě, kdy platí oba výroky A a B zároveň. Takto používáme spojku „nebo" v matematice na rozdíl od přirozeného jazyka, kde může mít i význam vylučovací.

1.1.6. Implikací nazýváme výrok „Jestliže platí (výrok) A, potom platí (výrok) B." Takové spojení výroků A a B značíme $A \Rightarrow B$. Pokud A neplatí nebo oba výroky A i B platí, pak jde o pravdivý výrok. Pokud A platí a B neplatí, pak jde o výrok nepravdivý. Výroku A říkáme **předpoklad** a výroku B **závěr**. Pro vyjádření implikace používáme také následující obraty.

- Jestliže platí výrok A, pak platí výrok B.
- Výrok A implikuje výrok B.
- Z výroku A plyne výrok B.
- Předpokládejme, že platí výrok A, potom platí výrok B.
- Nechť platí výrok A. Potom platí výrok B.
- Výrok A je postačující podmínkou pro platnost výroku B.
- Výrok B je nutnou podmínkou pro platnost výroku A.

Je-li předpoklad A nepravdivý, pak implikace $A \Rightarrow B$ platí vždy bez ohledu na platnost závěru B. Jinými slovy, z nepravdivého výroku plyne jakýkoliv jiný výrok. Tato skutečnost může někdy působit potíže, které vyplývají z rozdílného používání obratu „Jestliže platí A, pak platí B." v logice a v přirozeném jazyce. V běžné řeči používáme tento obrat zpravidla tehdy, existuje-li nějaká věcná souvislost mezi předpokladem A a závěrem B, zatímco v logice používáme tento obrat i ke spojení výroků, kde taková souvislost nemusí existovat, například „Jestliže je medvěd ryba, pak jsou Athény v Egyptě." Pravdivost takového výroku v logice závisí pouze na pravdivostních hodnotách předpokladu a závěru. Ačkoli pravdivost takových výroků může působit nezvykle, je formálně logické pojetí implikace v matematice velmi užitečné. Podrobnější vysvětlení lze nalézt například v [**23**, II.8].

1.1.7. Ekvivalencí výroků A a B nazýváme výrok „Výrok A platí právě tehdy, když platí výrok B." Ekvivalenci výroků A a B značíme $A \Leftrightarrow B$. Pokud A a B mají stejnou pravdivostní hodnotu, pak je $A \Leftrightarrow B$ pravdivý výrok. Pokud nemají A a B stejnou pravdivostní hodnotu, pak je $A \Leftrightarrow B$ nepravdivý výrok. Ekvivalenci vyjadřujeme také pomocí následujících obratů.

- Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.
- Výrok A je ekvivalentní výroku B.
- Výrok A je nutnou a postačující podmínkou pro platnost výroku B.

1.1.8. Následující tabulky uvádějí pravdivostní hodnoty výše definovaných logických operací v závislosti na pravdivosti výroků A a B.

A	$\neg A$
0	1
1	0

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

1.1.9. Pro zjednodušení zápisu bude mít mezi logickými operacemi negace přednost před ostatními operacemi. Například zápis $\neg A \Rightarrow B$ znamená $(\neg A) \Rightarrow B$.

1.1.10. Věta (vlastnosti negace, konjunkce a disjunkce)**.** Nechť A, B a C jsou výroky. Potom jsou následující výroky vždy pravdivé bez ohledu na pravdivost výroků A, B, C.

(a) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
(b) $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$
(c) $\big((A \wedge B) \wedge C\big) \Leftrightarrow \big(A \wedge (B \wedge C)\big)$
(d) $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$
(e) $\big((A \vee B) \vee C\big) \Leftrightarrow \big(A \vee (B \vee C)\big)$
(f) $\big(A \vee (B \wedge C)\big) \Leftrightarrow \big((A \vee B) \wedge (A \vee C)\big)$
(g) $\big(A \wedge (B \vee C)\big) \Leftrightarrow \big((A \wedge B) \vee (A \wedge C)\big)$

Důkaz. (a) Předpokládejme nejprve, že výrok A je nepravdivý. Potom je výrok $\neg A$ pravdivý a výrok $\neg(\neg A)$ je nepravdivý. Výroky A a $\neg(\neg A)$ mají stejnou pravdivostní hodnotu, takže je výrok $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$ pravdivý.

Nyní předpokládejme, že výrok A je pravdivý. Potom je výrok $\neg A$ nepravdivý a výrok $\neg(\neg A)$ je pravdivý. Výroky A a $\neg(\neg A)$ mají stejnou pravdivostní hodnotu, takže je výrok $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$ opět pravdivý. Tím je důkaz proveden. Předchozí úvahu lze přehledněji zapsat pomocí následující tabulky.

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$	$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
0	1	0	1
1	0	1	1

(b) Každý z výroků A a B může být pravdivý nebo nepravdivý. Použijeme-li stejný postup jako v předchozím případě, je třeba projít celkem čtyři případy. Tyto případy spolu s pravdivostními hodnotami příslušných výroků jsou zachyceny v následující tabulce.

A	B	$A \wedge B$	$B \wedge A$	$(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$
0	0	0	0	1
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Poslední sloupec pravdivostních hodnot obsahuje pouze pravdivostní hodnotu 1, takže uvažovaná ekvivalence je vždy pravdivá.

(c) Podobně jako v předchozím případě sestavíme příslušnou tabulku. Zde je již celkem osm možností pravdivostních hodnot pro trojici výroků A, B a C.

A	B	C	$A \wedge B$	$B \wedge C$	$(A \wedge B) \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Poslední dva sloupce pravdivostních hodnot jsou shodné, takže dokazovaná ekvivalence je vždy pravdivá.

Případy (d)–(g) lze odvodit zcela obdobně a příslušné tabulky zde již uvádět nebudeme. ■

1.1.11. Tvrzení (b) a (c) Věty 1.1.10 ukazují, že pokud chceme postupně spojit výroky $A_1, \dots, A_n$ pomocí konjunkce, pak nezáleží na pořadí, v jakém uvažované výroky spojíme. Například výroky

$$A_1 \wedge \big((A_2 \wedge A_3) \wedge A_4\big), \qquad \big((A_4 \wedge A_3) \wedge A_1\big) \wedge A_2$$

jsou ekvivalentní. V takových případech pak používáme jednodušší zápis $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$. Tvrzení (d) a (e) Věty 1.1.10 umožňují zavedení obdobného zápisu $A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ pro disjunkci. V případě konjunkce dokonce někdy vynecháváme symbol $\wedge$ a výroky pouze oddělujeme čárkami. Například výrok „Platí výroky A_1, A_2, A_3." znamená „Platí výrok $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$."

1.1.12. Věta (negace konjunkce, disjunkce, implikace a ekvivalence)**.** Nechť A a B jsou výroky. Potom jsou následující výroky vždy pravdivé bez ohledu na pravdivost výroků A a B.

(a) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
(b) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
(c) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$
(d) $\neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow \neg B)$

Důkaz. Pomocí tabulky pravdivostních hodnot ukažme například platnost (d). Pravdivost výroků (a)–(c) lze dokázat obdobně.

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$\neg(A \Leftrightarrow B)$	$A \Leftrightarrow \neg B$
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	0

Poslední dva sloupce jsou shodné, a tedy výrok $\neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow \neg B)$ je vždy pravdivý. ■

1.1.13. Věta (vztah implikace a ekvivalence)**.** Nechť A a B jsou výroky. Potom jsou výroky $A \Leftrightarrow B$ a $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ ekvivalentní, tj. výrok

$$\big(A \Leftrightarrow B\big) \Leftrightarrow \big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)\big) \tag{1.1}$$

je vždy pravdivý bez ohledu na pravdivost výroků A a B.

Důkaz. Opět použijeme tabulku pravdivostních hodnot.

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Poslední dva sloupce jsou shodné, a výrok (1.1) je tedy vždy pravdivý. ∎

1.1.14. Věta. Nechť A, B a C jsou výroky. Potom jsou následující výroky vždy pravdivé bez ohledu na pravdivost výroků A, B, C.

(a) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
(b) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
(c) $\big((A \vee B) \Rightarrow C\big) \Leftrightarrow \big((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)\big)$

Důkaz. Tvrzení plynou z následujících tabulek pravdivostních hodnot.

(a)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

(b)

A	B	$\neg A$	$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1

(c)

A	B	C	$A \vee B$	$(A \vee B) \Rightarrow C$	$A \Rightarrow C$	$B \Rightarrow C$	$(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

Sloupec pravdivostních hodnot odpovídající výroku $(A \vee B) \Rightarrow C$ je shodný s posledním sloupcem, a proto je výrok v bodě (c) vždy pravdivý. ■

1.1.15. Tvrzení „Číslo x je liché.“, kde x je proměnná, je gramatickou větou, nicméně není výrokem, protože jej nelze potvrdit ani vyvrátit. Z uvedeného tvrzení se stane výrok, pokud proměnnou x nahradíme konkrétním číslem, například „Číslo 7 je liché.“ Právě uvedený příklad motivuje následující definici.

1.1.16. Definice. **Výroková forma** V je výraz, který má konečný počet proměnných, přičemž když za tyto proměnné dosadíme prvky z daných množin, obdržíme výrok. Takovou výrokovou formu s n proměnnými, které označíme $x_1, \ldots, x_n$, a s příslušnými množinami $M_1, M_2, \ldots, M_n$ značíme

$$V(x_1, \ldots, x_n), \quad x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \ldots, x_n \in M_n.$$

1.1.17. Pojem množiny v předchozí definici používáme v intuitivním smyslu. Pro naše úvahy nám zatím postačí toto (ne zcela přesné) vymezení: *Množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů, které nazýváme prvky, do jediného celku.* Je-li a prvkem množiny A, pak píšeme $a \in A$. Pokud a není prvkem A, píšeme $a \notin A$. Jestliže každý prvek množiny A je i prvkem množiny B, potom říkáme, že A je podmnožinou B a píšeme $A \subset B$. Prázdnou množinou nazveme množinu, která neobsahuje žádný prvek. Zpřesňující výklad je uveden v Oddílu 1.3 a Dodatku A.

1.1.18. Nechť výroková forma V má tvar „x je hlavní město České republiky“, kde za x dosazujeme prvky z množiny všech českých měst. Pak V(Praha) je pravdivý výrok, ale výrok V(Plzeň) neplatí.

1.1.19. Predikátem v logice rozumíme vlastnost, kterou nějakému předmětu přisuzujeme, nebo mu ji upíráme. V 1.1.18 je predikátem „být hlavním městem České republiky“. Predikátová logika se věnuje studiu predikátů a vyšetřování vlastností kvantifikace. Pojmem kvantifikace se nyní budeme zabývat.

1.1.20. Definice. Nechť $V(x)$, $x \in M$, je výroková forma a $P \subset M$.

(a) Výrok „Pro každé $x \in P$ platí $V(x)$.“ symbolicky zapisujeme ve tvaru

$$\forall x \in P : V(x).$$

Symbol $\forall$ nazýváme **obecným kvantifikátorem**.

(b) Výrok „Existuje $x \in P$ takové, že platí $V(x)$." zapisujeme ve tvaru

$$\exists x \in P : V(x).$$

Symbol $\exists$ nazýváme **existenčním kvantifikátorem**.

1.1.21. Poznámka. Z typografického hlediska vznikly symboly $\forall$ a $\exists$ otočením písmen A a E. Písmeno A vychází z německého slova *allgemein*, a písmeno E patrně z francouzského slova *exister*.

1.1.22 (kvantifikace přes prázdnou množinu)**.** Nechť $V(x)$, $x \in M$, je výroková forma. Jestliže P je prázdná množina, potom výrok

$$\forall x \in P : V(x)$$

považujeme za pravdivý. Na druhé straně výrok

$$\exists x \in P : V(x)$$

je zřejmě nepravdivý.

1.1.23. Pokud má výroková forma více proměnných, můžeme z ní pomocí kvantifikátorů vytvořit nové výrokové formy s menším počtem proměnných nebo dokonce výroky. Mějme výrokovou formu $V(x, y)$, $x \in M_1$, $y \in M_2$. Nyní můžeme vytvořit nové výrokové formy s jednou proměnnou například takto:

$$\begin{aligned} &\forall x \in M_1 : V(x, y), \qquad && \exists x \in M_1 : V(x, y), \\ &\forall y \in M_2 : V(x, y), && \exists y \in M_2 : V(x, y). \end{aligned}$$

V prvním řádku jde o výrokové formy s proměnnou y a ve druhém s proměnnou x. Z těchto forem lze utvořit výroky použitím dalšího kvantifikátoru, například

$$\forall x \in M_1 : \big(\forall y \in M_2 : V(x, y)\big), \qquad \exists y \in M_2 : \big(\exists x \in M_1 : V(x, y)\big).$$

Výroky uvedeného typu zapisujeme zpravidla jednodušeji následujícím způsobem:

$$\forall x \in M_1\ \forall y \in M_2 : V(x, y), \qquad \exists y \in M_2\ \exists x \in M_1 : V(x, y).$$

Obdobně můžeme pomocí kvantifikátorů vytvářet výrokové formy a výroky z výrokové formy s více než dvěma proměnnými.

1.1.24 (intuitivní pojetí matematické logiky)**.** V našem textu se přidržíme intuitivního významu kvantifikátorů, tj. využijeme toho, jak v běžné řeči rozumíme obratům „pro každé x" a „existuje x". Nebudeme tedy usilovat o čistě formální pojetí matematické logiky, neboť takový přístup by pro svou náročnost nebyl přiměřený našemu textu. Proto některé vlastnosti kvantifikátorů z tohoto oddílu nebudeme dokazovat, nicméně by tyto vlastnosti měly být intuitivně zřejmé. V knize [**21**] je možné se seznámit s precizní výstavbou matematické logiky a jejími hlubokými výsledky. Kniha však předpokládá obeznámenost s vyšší matematikou.

1.1.25. Výrok „Existuje právě jedno $x \in P$ takové, že platí $V(x)$." zapisujeme ve tvaru

$$\exists! x \in P : V(x).$$

Uvedený výrok lze vyjádřit pomocí dříve zavedených symbolů takto

$$\Big(\exists x \in M: V(x)\Big) \wedge \Big(\forall y, z \in M: \big((V(y) \wedge V(z)) \Rightarrow y = z\big)\Big)$$

První člen konjunkce vyjadřuje, že existuje prvek $x \in M$, takový, že $V(x)$ platí. Druhý člen zachycuje jednoznačnost.

1.1.26 (zúžení výrokové formy)**.** Uveďme nejprve dvě následující vlastnosti. Nechť $V(x), x \in M_1$, je výroková forma a $M_2 \subset M_1$. Potom platí:

(a) $\big(\forall x \in M_1: V(x)\big) \Rightarrow \big(\forall x \in M_2: V(x)\big)$,
(b) $\big(\exists x \in M_2: V(x)\big) \Rightarrow \big(\exists x \in M_1: V(x)\big)$.

Výrok (a) říká, že pokud výrok $V(x)$ platí pro každý prvek x množiny M_1, pak platí i pro každý prvek x z množiny M_2. Výrok (b) tvrdí, že pokud v množině M_2 existuje prvek x takový, že $V(x)$ platí, pak takový prvek nalezneme i v množině M_1.

1.1.27 (pořadí kvantifikátorů)**.** Uveďme dále tři základní vlastnosti týkající se pořadí kvantifikátorů, které budeme často používat. Nechť $V(x, y), x \in M_1, y \in M_2$ je výroková forma. Potom platí:

- $\big(\forall x \in M_1\ \forall y \in M_2: V(x, y)\big) \Leftrightarrow \big(\forall y \in M_2\ \forall x \in M_1: V(x, y)\big)$,
- $\big(\exists x \in M_1\ \exists y \in M_2: V(x, y)\big) \Leftrightarrow \big(\exists y \in M_2\ \exists x \in M_1: V(x, y)\big)$,
- $\big(\exists x \in M_1\ \forall y \in M_2: V(x, y)\big) \Rightarrow \big(\forall y \in M_2\ \exists x \in M_1: V(x, y)\big)$.

První dvě vlastnosti říkají, že pořadí kvantifikátorů *stejného typu* lze zaměňovat, aniž by se změnila pravdivostní hodnota výroku. V poslední ze tří výše uvedených formulí je však pouze implikace, nikoli ekvivalence. Pořadí obecného kvantifikátoru a existenčního kvantifikátoru totiž obecně zaměnit nelze, jak ukazuje následující příklad.

Nechť $A(m, d), m \in M, d \in D$, značí výrokovou formu

„Muž m je otcem dítěte d.“, $\quad m \in M, d \in D$,

kde M je množina všech mužů a D je množina všech dětí. Výroky

$$\forall d \in D\ \exists m \in M: A(m, d), \qquad \exists m \in M\ \forall d \in D: A(m, d)$$

se liší pouze pořadím kvantifikátorů. První výrok říká, že každé dítě má svého otce. Druhý výrok tvrdí, že existuje muž, který je otcem všech dětí. Pravdivostní hodnoty těchto výroků se tedy liší.

1.1.28. Označení. Nechť $V(x, y)$ je výroková forma, kde za proměnné x a y bereme prvky množiny A. V takovém případě vzhledem k záměnnosti kvantifikátorů stejného typu používáme často místo zápisu

$$\forall x \in A\ \forall y \in A: V(x, y)$$

zápis

$$\forall x, y \in A: V(x, y).$$

Podobně místo

$$\exists x \in A\ \exists y \in A: V(x, y)$$

píšeme zkráceně

$$\exists x, y \in A\colon V(x, y).$$

Tuto konvenci budeme zřejmým způsobem používat i ve formulích, které obsahují více než dva kvantifikátory.

1.1.29. Označení. Nechť V a P jsou výrokové formy s proměnnou $x \in M$. Zápis

$$\forall x \in M, P(x)\colon V(x), \tag{1.2}$$

označuje výrok

$$\forall x \in M : \big(P(x) \Rightarrow V(x)\big).$$

Výrok (1.2) čteme: „Pro každé x z M splňující P platí $V(x)$.“ Zápis

$$\exists x \in M, P(x)\colon V(x) \tag{1.3}$$

označuje výrok

$$\exists x \in M : \big(P(x) \wedge V(x)\big).$$

Výrok (1.3) čteme: „Existuje x z M splňující P, pro které platí $V(x)$.“ Obdobný zápis používáme i v případě, že V je výroková forma o více než jedné proměnné. Výše uvedená úmluva zjednodušuje a zpřehledňuje zápis formulí.

1.1.30 (negace výroků s kvantifikátory)**.** Nechť V a P jsou výrokové formy proměnné $x \in M$. Negaci výroku

$$\forall x \in M : V(x)$$

lze zapsat ve tvaru

$$\exists x \in M : \neg V(x),$$

přičemž $\neg V$ značí výrokovou formu, která po dosazení za proměnnou x určuje výrok $\neg\big(V(x)\big)$. Podobně negaci výroku

$$\exists x \in M : V(x)$$

lze zapsat ve tvaru

$$\forall x \in M : \neg V(x).$$

Negovat výrok

$$\forall x \in M, P(x)\colon V(x),$$

znamená negovat výrok

$$\forall x \in M : \big(P(x) \Rightarrow V(x)\big).$$

Po provedení negace dostaneme

$$\exists x \in M : \neg\big(P(x) \Rightarrow V(x)\big),$$

takže podle Věty 1.1.12(c)

$$\exists x \in M : \big(P(x) \wedge \neg V(x)\big).$$

Poslední formuli lze přepsat ve tvaru

$$\exists x \in M, P(x)\colon \neg V(x).$$

Podobně lze odvodit, že negace výroku

$$\exists x \in M, P(x) \colon V(x)$$

má tvar

$$\forall x \in M, P(x) \colon \neg V(x).$$

Pokud negujeme výrok, který obsahuje více kvantifikátorů, postupujeme tak, že ve formuli zaměníme obecné kvantifikátory za existenční, existenční za obecné a negujeme výrokovou formu. Správnost postupu vyplývá z předchozího výkladu.

1.1.31. Negaci výroku

$$\forall x \in M_1\ \exists y \in M_2\ \forall z \in M_3 \colon V(x, y, z)$$

lze zapsat ve tvaru

$$\exists x \in M_1\ \forall y \in M_2\ \exists z \in M_3 \colon \neg V(x, y, z).$$

S výrokovými formami a kvantifikátory se budeme v tomto textu setkávat neustále. Úlohy k procvičení jsou uvedeny v Oddílu 1.8.

1.2. Základní metody důkazů

1.2.1 (základní číselné obory intuitivně)**.** Množinu všech **přirozených** čísel, tj. množinu všech čísel $1, 2, 3, \dots$, budeme značit $\mathbb{N}$, množinu všech **celých** čísel $\mathbb{Z}$, množinu všech **racionálních** čísel, tj. množinu čísel tvaru $\frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$, budeme značit $\mathbb{Q}$ a množinu všech **reálných** čísel $\mathbb{R}$. **Iracionálním** číslem rozumíme každé reálné číslo, které není racionální. Čísla z uvedených množin můžeme porovnávat mezi sebou podle velikosti, sčítat, odčítat, násobit a s jistými omezeními dělit. Pro rovnost reálných čísel budeme používat standardní symbol $=$ a pro nerovnosti symboly $\leq$, $\geq$, $<$, $>$. Pro uvedené operace pak symboly $+$ (plus), $-$ (minus), $\cdot$ (krát) a – (zlomková čára). Budeme předpokládat znalost základních vlastností těchto množin na úrovni středoškolské matematiky, tj. zejména znalost vlastností početních operací. Předpokládáme znalost termínů kladné (respektive nekladné, záporné, nezáporné) reálné číslo. Také použijeme tvrzení, že množina přirozených čísel je rovna množině všech celých čísel, která jsou větší než 0, a číslo 1 je nejmenší přirozené číslo, tj. pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $n \geq 1$. O množinách $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ zde hovoříme zejména proto, abychom je mohli používat v ilustračních příkladech tohoto oddílu. Více o nich řekneme v Oddílu 1.5 a jejich přesnému zavedení se budeme věnovat v Dodatku B.

1.2.2 (výstavba matematiky)**.** V matematice vycházíme z několika základních tvrzení, která nedokazujeme. Taková tvrzení nazýváme **axiomy**. Jako příklad uveďme axiom, který říká, že existuje alespoň jedna množina. Všechna další tvrzení jsou potom v **důkazech** odvozována z axiomů a tvrzení již dokázaných. Matematické tvrzení, které považujeme za důležité nebo zajímavé samo o sobě, většinou nazýváme **větou**. K označení tvrzení, které má pomocný charakter, tj. potřebujeme jej pouze k důkazu jiných tvrzení, používáme zpravidla slovo **lemma**.[1] **Definice** vymezují nové pojmy, věty a lemmata hovoří o vlastnostech těchto pojmů a vztazích mezi nimi. Matematická teorie je tak tvořena axiomy, definicemi, větami, lemmaty a důkazy. Podrobnější výklad o axiomech i samotném jazyce matematiky je uveden v Dodatku A.

Nejčastěji bývá matematická věta formulována ve tvaru implikace, tj. pokud platí předpoklad A, pak platí závěr B. Důkazem je pak posloupnost správných úvah vedoucích od předpokladů věty k jejímu závěru. Mezi základní typy důkazů patří:

- přímý důkaz,
- nepřímý důkaz,
- důkaz sporem,
- důkaz rozborem případů,
- důkaz matematickou indukcí.

Tyto postupy nyní stručně vysvětlíme a výklad doplníme příklady. Uveďme ještě, že u složitějších důkazů je často nutné použít i několika z výše uvedených postupů a vzájemně je kombinovat.

1.2.3 (přímý důkaz)**.** Mějme matematickou větu ve tvaru implikace $A \Rightarrow B$ pro jisté výroky A a B. Při přímém důkazu postupujeme takto: Předpokládáme, že výrok A platí. Odtud odvodíme platnost jistého výroku C_1, pomocí C_1 dokážeme pravdivost jistého výroku C_2, z něho pak dokážeme C_3 a tak dále, až z předpokladu platnosti výroku C_n dokážeme výrok B. Odvodili jsme tedy následující řetěz implikací

$$A \Rightarrow C_1,\ C_1 \Rightarrow C_2,\ C_2 \Rightarrow C_3, \dots, C_{n-1} \Rightarrow C_n,\ C_n \Rightarrow B,$$

ze kterého již plyne platnost implikace $A \Rightarrow B$. Chceme-li dokázat nějakou větu přímým důkazem, je na nás, abychom nalezli vhodné střední členy $C_1, \dots, C_n$, které nám umožní z předpokladu odvodit závěr. Jak je hledat v konkrétním případě, na to bohužel žádný návod či dokonce algoritmus neexistuje. Matematika je tvůrčí činnost a bez určité míry důvtipu žádnou novou větu dokázat nelze.

1.2.4 (nepřímý důkaz)**.** Tento typ důkazu je založen na ekvivalenci výroků $A \Rightarrow B$ a $\neg B \Rightarrow \neg A$ (vizte Větu 1.1.14(a)). Platí-li druhý výrok, pak platí i první. Stačí tedy nalézt jakýkoli důkaz druhého výroku.

1.2.5 (důkaz sporem)**.** Tato metoda je založena na ekvivalenci výroků $A \Rightarrow B$ a $\neg(A \wedge \neg B)$, která plyne z Vět 1.1.14(b), 1.1.12(a) a 1.1.10(a). Při tomto způsobu dokazování předpokládáme platnost výroku $A \wedge \neg B$. Pokud se nám z něho podaří odvodit výrok C, který je nepravdivý, pak nemůže být pravdivý ani výrok $A \wedge \neg B$. Z pravdivého výroku totiž nevyplývá výrok nepravdivý. Platí tedy $\neg(A \wedge \neg B)$, neboli $A \Rightarrow B$.

1.2.6 (důkaz rozborem případů)**.** Máme dokázat tvrzení tvaru $A \Rightarrow B$. Pokud dokážeme výrok A zapsat jako disjunkci výroků C a D, neboli ve tvaru $C \vee D$, pak

[1] Slovo lemma je středního rodu.

podle Věty 1.1.14(c) stačí dokázat tvrzení $C \Rightarrow B$ a $D \Rightarrow B$. V tomto důkazu tedy nejprve dokazujeme závěr B za předpokladu, že platí C. Pak dokazujeme B za předpokladu, že platí D. Při aplikaci této metody je tedy třeba zapsat předpoklad věty ve tvaru $C \vee D$ tak, abychom pak mohli snáze odvodit $C \Rightarrow B$ a $D \Rightarrow B$. Ani zde není k dispozici žádný algoritmus, jak taková C a D nalézt.

1.2.7 (důkaz matematickou indukcí)**.** Důkaz matematickou indukcí lze použít k důkazu výroku tvaru

$$\forall n \in \mathbb{N} : V(n), \tag{1.4}$$

kde $V(n)$, $n \in \mathbb{N}$, je výroková forma. Takový důkaz sestává ze dvou kroků:

(a) dokážeme výrok $V(1)$,
(b) dokážeme výrok

$$\forall n \in \mathbb{N} : \big(V(n) \Rightarrow V(n+1)\big),$$

neboli předpokládáme platnost $V(n)$ (tzv. *indukční předpoklad*) a odvodíme platnost $V(n+1)$.

Princip matematické indukce pak říká, že z (a) a (b) plyne výrok (1.4). Korektnost principu matematické indukce podstatně souvisí s konstrukcí množiny přirozených čísel, které se budeme věnovat v Dodatku B.

1.2.8 (varianta důkazu matematickou indukcí)**.** Uvažujme výrok

$$\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0 : V(n), \tag{1.5}$$

kde $n_0 \in \mathbb{Z}$ a $V(n)$, $n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0$, je výroková forma. Rozdíl mezi (1.4) a (1.5) spočívá v jiném oboru kvantifikace. Zde opět platí princip matematické indukce (vizte opět Dodatek B), podle kterého dokazujeme (1.5) takto:

(a) dokážeme výrok $V(n_0)$,
(b) dokážeme výrok

$$\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0 : \big(V(n) \Rightarrow V(n+1)\big).$$

1.2.9 (důkaz úplnou matematickou indukcí)**.** Nechť $V(n), n \in \mathbb{N}$, je výroková forma. Výrok

$$\forall n \in \mathbb{N} : V(n) \tag{1.6}$$

je někdy možné dokázat pomocí úplné matematické indukce, která sestává z ověření následujících tvrzení:

(a) platí $V(1)$,
(b) pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\big(\forall j \in \mathbb{N}, j \leq n : V(j)\big) \Rightarrow V(n+1).$$

Krok (b) úplné matematické indukce se liší od druhého kroku matematické indukce popsané v paragrafu 1.2.7 v tom, že místo abychom předpokládali pouze platnost $V(n)$, předpokládáme, že platí výroky $V(1), V(2), \ldots, V(n)$.

Předpokládejme, že platí (a) a (b). Ukážeme, že pak platí (1.6). Definujme výrokovou formu $W(n), n \in \mathbb{N}$, následujícím způsobem: Výrok $W(n)$ říká, že pro každé $j \in \mathbb{N}, j \leq n$, platí $V(j)$. Matematickou indukcí dokážeme tvrzení

$$\forall n \in \mathbb{N}: W(n). \tag{1.7}$$

Výrok $W(1)$ platí podle (a). Nyní předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $W(n)$. Potom podle (b) platí $V(n+1)$. Platí-li $W(n)$ a $V(n+1)$, pak platí $W(n+1)$. Podle principu matematické indukce platí (1.7). Z výroku (1.7) pak okamžitě plyne (1.6).

Další varianty důkazu matematickou indukcí jsou uvedeny v příkladové části této kapitoly (Oddíl 1.8).

1.2.10 (pravidlo generalizace)**.** Při důkazu výroku

$$\forall x \in M: V(x)$$

často postupujeme následujícím způsobem. Zvolíme $x \in M$ pevné, ale libovolné, tj. o x předpokládáme pouze to, že je prvkem M, a nic dalšího. Postupnými dedukcemi ukážeme platnost výroku $V(x)$ pro toto x. Tím je pak důkaz proveden.

Použití výše uvedených důkazových metod přiblížíme v následujících příkladech.

1.2.11. Příklad. Dokažte, že pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ platí $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \geq ab$.

Řešení. Provedeme přímý důkaz tvrzení. Vezměme libovolná čísla $a, b \in \mathbb{R}$. Potom platí $(a-b)^2 \geq 0$. Upravíme-li tuto nerovnost, dostaneme $a^2-2ab+b^2 \geq 0$. Odtud již snadno plyne dokazovaná nerovnost $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \geq ab$. ♣

1.2.12. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že potom existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $n = 2k$, nebo $n = 2k-1$, přičemž oba případy nemohou nastat zároveň. (V prvním případě říkáme, že n je **sudé**, a ve druhém, že je **liché**.)

Řešení. K důkazu první části tvrzení použijeme matematickou indukci. Pro $n = 1$ položme $k = 1$. Potom máme $1 = 2 \cdot 1 - 1$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbb{N}$, a chceme tvrzení dokázat i pro číslo $n + 1$. Podle indukčního předpokladu existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $n = 2k$, nebo $n = 2k - 1$. V prvním případě platí $n + 1 = 2k + 1 = 2(k + 1) - 1$, ve druhém $n + 1 = 2k$. V prvním případě je tedy hledaným číslem $k + 1$ a ve druhém k.

Pokud by číslo $n \in \mathbb{N}$ bylo zároveň liché i sudé, pak by existovala $k, l \in \mathbb{N}$ taková, že $n = 2k = 2l - 1$. Potom $2(l-k) = 1$, a tedy $l-k = \frac{1}{2}$. Číslo $l-k$ je celé, na rozdíl od čísla $\frac{1}{2}$, což je spor. Metodou důkazu sporem jsme odvodili i druhou část tvrzení. Tím je tvrzení příkladu dokázáno. ♣

1.2.13. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $m \in \mathbb{N}$ je liché. Dokažte, že potom m^n je liché číslo.

Řešení. Tvrzení dokážeme matematickou indukcí. Pro $n = 1$ je číslo $m^1 = m$ liché podle předpokladu. Předpokládejme platnost tvrzení pro přirozené číslo n, tj.

předpokládejme, že číslo m^n je liché. Pak existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $m^n = 2k - 1$. Existuje také $l \in \mathbb{N}$ takové, že $m = 2l - 1$. Potom platí

$$m^{n+1} = m^n \cdot m = (2k-1) \cdot (2l-1) = 2(2kl - k - l + 1) - 1.$$

Dále platí $2kl - k - l + 1 = k(l-1) + l(k-1) + 1 \geq 1$, a tedy $2kl - k - l + 1 \in \mathbb{N}$. Odtud plyne, že číslo m^{n+1} je liché. ♣

1.2.14. Připomeňme, že číslo $d \in \mathbb{Z}$ nazýváme **dělitelem** čísla $n \in \mathbb{Z}$, pokud existuje $k \in \mathbb{Z}$ splňující $n = kd$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je zřejmě 1 i n dělitelem n. Řekneme, že $n \in \mathbb{N}$ je **prvočíslo**, pokud $n > 1$ a jeho jediní kladní dělitelé jsou 1 a n. Například čísla $2, 3, 5, 7, 11$ jsou prvočísla.

Každé $n \in \mathbb{N}, n > 1$, lze zapsat právě jedním způsobem ve tvaru $n = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$, kde

- $k \in \mathbb{N}, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$,
- $p_1, \dots, p_k$ jsou prvočísla,
- $p_1 < \cdots < p_k$.

Uvedený zápis nazýváme **prvočíselným rozkladem** čísla n.

1.2.15. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že potom existuje právě jedna dvojice $k, l \in \mathbb{N}$ taková, že $n = 2^{k-1}(2l-1)$.

Řešení. Pomocí úplné matematické indukce nejprve dokážeme existenci příslušných $k, l \in \mathbb{N}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak ukážeme i jednoznačnost k a l.

Existence. Pro $n = 1$ položíme $k = 1$ a $l = 1$ a máme $n = 1 = 2^{1-1}(2 \cdot 1 - 1)$. Předpokládejme, že každé $j \in \mathbb{N}, j \leq n$, lze vyjádřit ve tvaru $2^{k-1}(2l-1)$ pro vhodná $k, l \in \mathbb{N}$. Chceme ukázat, že i pro číslo $n+1$ lze nalézt příslušná $k, l \in \mathbb{N}$. Pokud je $n+1$ číslo liché, pak podle definice existuje $l \in \mathbb{N}$ takové, že $n+1 = 2l-1$ (vizte Příklad 1.2.12). Položíme $k = 1$ a tvrzení je dokázáno. Pokud je číslo $n+1$ sudé, pak opět podle definice existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $n+1 = 2m$. Poněvadž $m \leq n$, existují podle indukčního předpokladu čísla $k', l' \in \mathbb{N}$ taková, že $m = 2^{k'-1}(2l'-1)$. Potom stačí položit $k = k'+1$ a $l = l'$.

Jednoznačnost. Předpokládejme, že $n = 2^{k-1}(2l-1) = 2^{k'-1}(2l'-1)$ pro $k, l, k', l' \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že $k' > k$, pak platí $2l - 1 = 2^{k'-k}(2l'-1)$. Číslo na levé straně rovnosti je liché, zatímco číslo na pravé straně je sudé, což je spor. Podobně vede ke sporu předpoklad $k < k'$. Musí tedy platit $k = k'$. Potom dostáváme $2l-1 = 2l'-1$. Odtud již snadno plyne $l = l'$. Tím je důkaz jednoznačnosti proveden. ♣

1.2.16. Příklad. Nechť $m \in \mathbb{N}$. Dokažte, že je-li m^2 sudé, potom je i m sudé.

Řešení. Provedeme nepřímý důkaz. Předpokládejme, že neplatí, že m je sudé. Číslo m je tedy liché a podle Příkladu 1.2.13 platí, že m^2 je liché. Číslo m^2 tedy není sudé. Tím je tvrzení dokázáno metodou nepřímého důkazu. ♣

1.2.17. Příklad (Hippasus[2])**.** Dokažte, že číslo $\sqrt{2}$, které je definováno jako kladné řešení rovnice $y^2 = 2$ v oboru reálných čísel, není racionální. Existenci a jednoznačnost takového řešení dokážeme později (vizte 5.3.1).

Řešení. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že $\sqrt{2}$ je racionální číslo. Potom podle definice racionálního čísla existují $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$ taková, že $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Poněvadž $\sqrt{2}$ je kladné číslo, musí být $p > 0$, a tedy $p \in \mathbb{N}$. Navíc můžeme předpokládat, že nejvýše jedno z čísel p a q je sudé. Podle Příkladu 1.2.15 lze totiž nalézt čísla k_1, l_1, k_2, l_2 z množiny $\mathbb{N}$ taková, že $p = 2^{k_1-1}(2l_1-1)$ a $q = 2^{k_2-1}(2l_2-1)$. Pak stačí místo dvojice p a q uvažovat dvojici $2l_1 - 1$ a $2^{k_2-k_1}(2l_2 - 1)$, pokud $k_2 \geq k_1$, nebo $2^{k_1-k_2}(2l_1 - 1)$ a $2l_2 - 1$, pokud $k_2 < k_1$.

Z rovnosti $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ plyne, že $2q^2 = p^2$, a tedy číslo p^2 je sudé. Podle Příkladu 1.2.16 dostáváme, že i p je sudé, a tedy existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $p = 2k$. Dosazením za p do rovnosti $2q^2 = p^2$ dostáváme, že $2q^2 = 4k^2$, a tedy $q^2 = 2k^2$. Odtud plyne, že q^2 je sudé. Podle Příkladu 1.2.16 je číslo q sudé. Obě čísla p a q jsou tedy sudá, což je spor s předpokladem, že nejvýše jedno z čísel p a q je sudé. Číslo $\sqrt{2}$ tedy není racionální. ♣

1.2.18. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že potom je číslo $n(n + 1)$ sudé.

Řešení. Provedeme důkaz rozborem případů. Mějme $n \in \mathbb{N}$. Pak platí, že n je sudé, nebo n je liché. Pokud je n sudé, pak je i číslo $n(n + 1)$ sudé. Pokud je číslo n liché, pak je číslo $n + 1$ sudé, a proto je i číslo $n(n + 1)$ sudé. Tím je důkaz proveden. ♣

1.2.19 (konstruktivní a nekonstruktivní důkaz)**.** Při důkazu výroku

$$\exists x \in M : V(x)$$

máme dvě možnosti. Buď přímo nalezneme nějaké $x \in M$, pro které platí $V(x)$, nebo takové $x \in M$ nenalezneme, ale dokážeme, že alespoň jedno musí existovat. Tyto postupy nazýváme po řadě **konstruktivním důkazem** a **nekonstruktivním důkazem**. Nekonstruktivní důkaz také někdy nazýváme **existenčním důkazem**.

1.2.20. Příklad. Ukažte, že existují iracionální čísla a, b taková, že a^b je číslo racionální.

Řešení (konstruktivní důkaz). Položme $a = \sqrt{2}$ a $b = \log_2 9$, kde $\log_2$ označuje logaritmus o základu 2. Přesnou definici výrazu a^b a logaritmů uvedeme v Kapitole 5.3. Potom platí

$$a^b = \sqrt{2}^{\log_2 9} = 2^{\frac{1}{2}\log_2(3^2)} = 2^{\log_2 3} = 3.$$

Číslo $\sqrt{2}$ je iracionální podle Příkladu 1.2.17. Stačí tedy odvodit, že číslo $\log_2 9$ je iracionální. Použijeme metodu důkazu sporem. Předpokládejme, že $\log_2 9 = \frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$. Poněvadž je číslo $\log_2 9$ kladné, musí být p přirozené. Potom $9 = 2^{\log_2 9} = 2^{\frac{p}{q}}$, a tedy $9^q = 2^p$. Číslo 2^p je sudé a podle Příkladu 1.2.13 je číslo 9^q liché, což je spor. ♣

[2]Hippasus (5. stol. př. n. l.)

Řešení (nekonstruktivní důkaz). Využijeme opět iracionalitu čísla $\sqrt{2}$. Pokud by číslo $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ bylo racionální, pak bychom byli s důkazem hotovi. Pokud by tomu tak nebylo, pak by čísla $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ a $\sqrt{2}$ byla iracionální, přitom ale číslo

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2$$

je racionální. Tím je tvrzení dokázáno, neboť alespoň jedna dvojice čísel

$$a = \sqrt{2},\ b = \sqrt{2} \qquad \text{nebo} \qquad a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}},\ b = \sqrt{2}$$

splňuje zadání úlohy. Výše uvedený postup však neříká, zda je řešením první nebo druhá dvojice čísel.

Poznamenejme ještě, že lze ukázat, že číslo $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ je iracionální. Důkaz je však velmi obtížný ([**9**, **20**]). ♣

1.2.21 (důkazy nerovností)**.** Máme-li dokázat nerovnost $A \le B$ mezi reálnými čísly A a B, často postupujeme tak, že nalezneme reálné číslo C splňující $A \le C$ a $C \le B$. Odtud pak již plyne nerovnost $A \le B$. Při hledání čísla C jde o to, aby důkazy nerovností $A \le C$ a $C \le B$ byly snazší než důkaz nerovnosti $A \le B$. Číslu C někdy říkáme *horní odhad* čísla A a také *dolní odhad* čísla B. Samotnou nerovnost $A \le C$ nebo $C \le B$ také někdy nazýváme *odhadem*.

1.2.22. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}, n \ge 3$. Dokažte, že platí $2n^2 \ge (n+1)^2$.

Řešení. Uvažujme výraz $n^2 + 3n$. Potom platí $2n^2 = n^2 + n \cdot n \ge n^2 + 3n$, protože $n \ge 3$. Platí také $n^2 + 3n \ge n^2 + 2n + 1$, protože $n \ge 1$. Dohromady tedy máme $2n^2 \ge n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$, což jsme měli dokázat. ♣

1.3. Množiny

1.3.1. Nebudeme se zde zabývat otázkou, co je obecně množina. Tento problém, jenž se nachází na pomezí matematiky a filosofie, je totiž velmi nesnadný a překračuje rámec tohoto textu. Zopakujme zatím pouze formulaci z paragrafu 1.1.17, která říká, že množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů, které nazýváme **prvky**, do jediného celku. Doplňující informace jsou uvedeny v Dodatku A. Pro systematický výklad teorie množin doporučujeme knihu [**3**].

Nyní zopakujeme pojmy z paragrafu 1.1.17 a přidáme několik dalších.

1.3.2. Množina je určena svými prvky. Skutečnost, že prvek a **patří** do množiny A, značíme $a \in A$, a skutečnost, že a do A **nepatří**, zapíšeme jako $a \notin A$.

Množinu je možné definovat výčtem prvků, například píšeme $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, nebo pomocí vlastnosti, kterou musejí splňovat její prvky, tj. píšeme $\{x;\ V(x)\}$, případně $\{x \in M;\ V(x)\}$, kde M je množina a $V(x)$, $x \in M$ je výroková forma. Příkladem je zápis $\{x \in \mathbb{N};\ x < 6\}$.

Prázdnou množinou nazýváme množinu, která neobsahuje žádný prvek. Označujeme ji symbolem $\emptyset$. Množinu, která není prázdná, nazýváme **neprázdnou**.

1.3.3. Řekneme, že množina A je **částí** množiny B nebo množina A je **podmnožinou** množiny B, jestliže každý prvek množiny A je rovněž prvkem množiny B. Tuto skutečnost značíme $A \subset B$ (někdy také píšeme $B \supset A$) a tomuto vztahu mezi množinami říkáme **inkluze**. Prázdná množina je podmnožinou každé množiny.

Množiny A a B jsou si **rovny** ($A = B$), jestliže mají stejné prvky, neboli platí současně $A \subset B$ a $B \subset A$. Není těžké odvodit, že pro libovolné množiny A, B, C platí

- $A = A$,
- jestliže $A = B$, potom $B = A$,
- jestliže $A = B$ a $B = C$, potom $A = C$.

Pokud si množiny A a B nejsou rovny, píšeme $A \neq B$. Řekneme, že množina A je **vlastní částí** množiny B nebo A je **vlastní podmnožinou** množiny B, jestliže $A \subset B$ a $A \neq B$.

Nechť X je množina. Množinu všech podmnožin X značíme $\mathcal{P}(X)$ a nazýváme ji **potenční množinou** množiny X. Z jazykových důvodů budeme často používat slovní spojení „systém (pod)množin“ místo „množina (pod)množin“.

1.3.4. Označení. (a) Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $A_1, \dots, A_n$ jsou množiny. Potom zápis $A_1 \subset \dots \subset A_n$ znamená, že platí inkluze $A_1 \subset A_2$, $A_2 \subset A_3, \dots, A_{n-1} \subset A_n$. Obdobné značení používáme i pro symbol $\supset$.

(b) Nechť X je množina a $n \in \mathbb{N}$. Místo zápisu $x_1 \in X, x_2 \in X, \dots, x_n \in X$ budeme často používat stručnější zápis $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$.

Nyní zavedeme operace, které ze dvou (nebo více) množin utvoří další množinu.

1.3.5. Sjednocením množin A a B nazveme množinu vytvořenou všemi prvky, které patří alespoň do jedné z množin A či B. Sjednocení množin A a B značíme symbolem $A \cup B$.

Je-li $\mathcal{A}$ systém množin, pak jeho **sjednocení** $\bigcup \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a, pro které existuje $A \in \mathcal{A}$ takové, že $a \in A$.

1.3.6. Průnikem množin A a B nazveme množinu všech prvků, které náležejí současně do A i do B. Průnik množin A a B značíme symbolem $A \cap B$. Mají-li množiny A a B prázdný průnik, řekneme o nich, že jsou **disjunktní**.

Je-li $\mathcal{A}$ neprázdný systém množin, pak jeho **průnik** $\bigcap \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a, které pro každé $A \in \mathcal{A}$ splňují $a \in A$. Řekneme, že systém $\mathcal{A}$ je **disjunktní**, jestliže pro každé $A, B \in \mathcal{A}$ splňující $A \neq B$ platí $A \cap B = \emptyset$.

1.3.7. Příklad. Nechť $\mathcal{A} = \big\{\{1, 2, 3\}, \{3, 4, 7\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\big\}$. Určete $\bigcup \mathcal{A}$ a $\bigcap \mathcal{A}$.

Řešení. Přímo z definice dostáváme $\bigcup \mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ a $\bigcap \mathcal{A} = \{3\}$. ♣

1.3.8. Rozdílem množin A a B nazveme množinu prvků, které patří do množiny A a nepatří do množiny B. Rozdíl množin A a B značíme $A \setminus B$.

1.3.9. Nechť $m \in \mathbb{N}$ a $A_1, \dots, A_m$ jsou množiny. **Kartézským součinem** $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m$ nazveme množinu všech uspořádaných m-tic $[a_1, a_2, \dots, a_m]$, kde $a_i \in A_i$ pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$. Někdy místo symbolu $[a_1, a_2, \dots, a_m]$ používáme symbol $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ a také někdy místo $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m$ píšeme $\prod_{i=1}^{m} A_i$. Přesnou definici pojmu uspořádaná n-tice lze nalézt v Dodatku A. Je-li A množina a $n \in \mathbb{N}$, pak místo $\underbrace{A \times \dots \times A}_{n\text{-krát}}$ píšeme A^n.

1.3.10. V operaci kartézského součinu není obecně možné zaměňovat pořadí množin. Pokud například $A = \{0\}$, $B = \{1\}$, pak $A \times B = \{[0, 1]\}$, $B \times A = \{[1, 0]\}$, takže $A \times B \neq B \times A$.

1.3.11. Věta (de Morganova[3] pravidla)**.** Nechť X je množina a $\mathcal{A}$ je neprázdný systém množin. Pak platí

$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} = \bigcap \{X \setminus A;\ A \in \mathcal{A}\}$$

a dále

$$X \setminus \bigcap \mathcal{A} = \bigcup \{X \setminus A;\ A \in \mathcal{A}\}.$$

Důkaz. Provedeme důkaz prvního z uvedených tvrzení. Máme dokázat dvě inkluze, a sice

$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} \subset \bigcap \{X \setminus A;\ A \in \mathcal{A}\}$$

a zároveň

$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} \supset \bigcap \{X \setminus A;\ A \in \mathcal{A}\}.$$

Je-li $x \in X \setminus \bigcup \mathcal{A}$, znamená to, že x patří do X, ale nepatří do sjednocení $\bigcup \mathcal{A}$. Tedy $x \notin A$ pro každou množinu $A \in \mathcal{A}$. To ale znamená, že pro každé $A \in \mathcal{A}$ je $x \in X \setminus A$, a tudíž $x \in \bigcap \{X \setminus A;\ A \in \mathcal{A}\}$. Tím je první inkluze dokázána.

Nechť $x \in X \setminus A$ pro každou množinu $A \in \mathcal{A}$. Tedy $x \in X$, ale $x \notin A$ pro každou $A \in \mathcal{A}$. Takže $x \notin \bigcup \mathcal{A}$. Tudíž $x \in X \setminus \bigcup \mathcal{A}$, čímž je završen důkaz druhé inkluze.

Druhé de Morganovo pravidlo lze dokázat obdobně. ■

1.4. Relace uspořádání a zobrazení

Relace uspořádání.

1.4.1. Definice. Binární relací rozumíme libovolnou množinu uspořádaných dvojic. Pokud R je binární relace a $[a, b] \in R$, pak říkáme, že prvek a je v relaci R s prvkem b. Často v tomto případě používáme zápis $a\, R\, b$.

Pokud binární relace R splňuje $R \subset A \times B$, pak říkáme, že R je **binární relací mezi prvky množin** A **a** B. Pokud $A = B$, pak říkáme, že R je **binární relací na** A.

[3] Augustus de Morgan (1806–1871)

1.4.2. Označení. Můžeme definovat i relace mezi více něž dvěma prvky, ale v našem textu je nepoužijeme, a proto budeme místo slovního spojení „binární relace" používat jen termín „relace".

Existuje mnoho příkladů matematických objektů, které jsou relacemi. V tuto chvíli pro nás budou důležité dva speciální typy relací, totiž uspořádání a zobrazení. Následující definice nám pomůže zavést první z nich.

1.4.3. Definice. Nechť R je relace na množině A. Řekneme, že R je na A

- **reflexivní**, jestliže platí
$$\forall x \in A\colon [x, x] \in R,$$
- **symetrická**, jestliže platí
$$\forall x, y \in A\colon [x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \in R,$$
- **tranzitivní**, jestliže platí
$$\forall x, y, z \in A\colon \big([x, y] \in R \wedge [y, z] \in R\big) \Rightarrow [x, z] \in R,$$
- **antisymetrická**, jestliže platí
$$\forall x, y \in A\colon [x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \notin R,$$
- **slabě antisymetrická**, jestliže platí
$$\forall x, y \in A\colon \big([x, y] \in R \wedge [y, x] \in R\big) \Rightarrow x = y.$$

1.4.4. Definice. Nechť R je relace na množině A. Řekneme, že R je na A

- **uspořádání** (někdy také **částečné uspořádání** či **neostré uspořádání**), jestliže je reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní,
- **ostré uspořádání**, jestliže je antisymetrická a tranzitivní,
- **lineární uspořádání**, jestliže jde o uspořádání a pro každé $x, y \in A$ platí $[x, y] \in R$ nebo $[y, x] \in R$.

1.4.5. (a) Právě definovaný pojem uspořádání je velmi abstraktní a používá se pro porovnávání velmi rozmanitých objektů mezi sebou. Uspořádání reálných čísel $\leq$ je jenom jedním z mnoha příkladů uspořádání. Podobně ostrá nerovnost mezi reálnými čísly je ostrým uspořádáním ve smyslu naší definice.

(b) Je-li uspořádání R na množině X lineární, pak je možné libovolné dva prvky mezi sebou porovnat pomocí uspořádání R. Uspořádání reálných čísel je příkladem lineárního uspořádání.

Nechť X je množina. Pak relace
$$R = \big\{[A, B] \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X);\ A \subset B\big\}$$
je uspořádání na potenční množině $\mathcal{P}(X)$. Pokud má X alespoň dva prvky, pak toto uspořádání není lineární. Jestliže totiž existují $x, y \in X$, $x \neq y$, pak neplatí ani $\{x\} \subset \{y\}$ ani $\{y\} \subset \{x\}$.

1.4.6. Příklad. Na množině $\mathbb{N}^2$ definujeme **lexikografické uspořádání** $\leq_{\text{lex}}$ následujícím způsobem

$$[n_1, n_2] \leq_{\text{lex}} [m_1, m_2] \Leftrightarrow \big(n_1 < m_1 \vee (n_1 = m_1 \wedge n_2 \leq m_2)\big).$$

Ukažte, že $\leq_{\text{lex}}$ je opravdu uspořádání na $\mathbb{N}^2$.

Řešení. Reflexivita. Pro libovolné $[n_1, n_2] \in \mathbb{N}^2$ platí $[n_1, n_2] \leq_{\text{lex}} [n_1, n_2]$, neboť $n_1 = n_1$ a $n_2 \leq n_2$.

Slabá antisymetrie. Pokud $[n_1, n_2] \leq_{\text{lex}} [m_1, m_2]$ a zároveň $[m_1, m_2] \leq_{\text{lex}} [n_1, n_2]$, pak nemůže platit $n_1 < m_1$ ani $m_1 < n_1$. Musí tedy platit $n_1 = m_1$. Pak ovšem platí $n_2 \leq m_2$ a $m_2 \leq n_2$, a proto $n_2 = m_2$. Dokázali jsme tedy, že $[n_1, n_2] = [m_1, m_2]$.

Tranzitivita. Nechť $[n_1, n_2], [m_1, m_2], [k_1, k_2] \in \mathbb{N}^2$ splňují $[n_1, n_2] \leq_{\text{lex}} [m_1, m_2]$ a $[m_1, m_2] \leq_{\text{lex}} [k_1, k_2]$. Z prvního vztahu plyne $n_1 \leq m_1$ a z druhého $m_1 \leq k_1$. Dostáváme tedy $n_1 \leq k_1$. Pokud platí dokonce $n_1 < k_1$, pak $[n_1, n_2] \leq_{\text{lex}} [k_1, k_2]$. Pokud $n_1 = k_1$, pak platí také $n_1 = m_1$. Musí tedy platit $n_2 \leq m_2$ a $m_2 \leq k_2$. Odtud plyne nerovnost $n_2 \leq k_2$. Tím je dokázán vztah $[n_1, n_2] \leq_{\text{lex}} [k_1, k_2]$. ♣

Nyní uvedeme několik základních pojmů, které souvisí s relací uspořádání.

1.4.7. Definice. Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $A \subset X$. Řekneme, že prvek $x \in X$ je

- **horní závorou** množiny A, jestliže pro každé $a \in A$ platí $a \leq x$,
- **dolní závorou** množiny A, jestliže pro každé $a \in A$ platí $x \leq a$.

Množina A je

- **shora omezená**, jestliže existuje prvek $x \in X$, který je horní závorou množiny A,
- **zdola omezená**, jestliže existuje prvek $x \in X$, který je dolní závorou množiny A,
- **omezená**, jestliže je omezená shora i zdola.

1.4.8. Definice. Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $A \subset X$. Řekneme, že prvek $G \in X$ je **supremem množiny** A, jestliže platí:

(a) G je horní závorou množiny A,
(b) je-li prvek $G' \in X$ horní závorou množiny A, potom $G \leq G'$.

Řekneme, že prvek $g \in X$ je **infimem množiny** A, jestliže platí

(a) g je dolní závorou množiny A,
(b) je-li prvek $g' \in X$ dolní závorou množiny A, potom $g' \leq g$.

1.4.9. V předchozích dvou definicích jsme použili symbol $\leq$, který se používá zejména pro označení uspořádání na reálných číslech. Zde jej pro názornost používáme k označení libovolné relace uspořádání.

1.4.10. Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $A \subset X$. Podle předchozí definice je supremum množiny A její nejmenší horní závorou a infimum je její největší dolní závorou. Supremum a infimum množiny A nemusejí existovat, pokud však existují, jsou určena jednoznačně.

Odvoďme toto pozorování například pro infimum, v případě suprema je možné postupovat obdobně. Nechť g_1 a g_2 jsou infima množiny $A \subset X$ vzhledem k uspořádání $\leq$ na množině X. Potom g_1 i g_2 jsou dolní závory množiny A. Podle vlastnosti (b) z definice infima platí $g_1 \leq g_2$ a také $g_2 \leq g_1$. Ze slabé antisymetrie relace uspořádání pak plyne $g_1 = g_2$.

Pokud supremum množiny A (vzhledem k uspořádání $\leq$) existuje, značíme jej $\sup A$. Pokud existuje infimum množiny A, značíme jej $\inf A$.

Supremum a infimum budeme používat zejména při studiu podmnožin reálných čísel, pro ilustraci však uveďme následující příklad, který využívá lexikografického uspořádání dvojic přirozených čísel.

1.4.11. Příklad. Nechť $\leq_{\text{lex}}$ je lexikografické uspořádání na množině $\mathbb{N}^2$ (vizte Příklad 1.4.6). Dokažte, že supremum množiny $A = \{[1, n] \in \mathbb{N}^2;\ n \in \mathbb{N}\}$ je rovno prvku $[2, 1]$.

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ podle definice platí $[1, n] \leq_{\text{lex}} [2, 1]$, čímž je ověřena podmínka (a) z definice suprema. Uvažujme prvek $[a, b] \in \mathbb{N}^2$, který je horní závorou množiny A. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí buď $1 < a$, nebo $1 = a$ a $n \leq b$. Druhá možnost však nemůže platit pro každé n, neboť přirozené číslo $b + 1$ nesplňuje nerovnost $b + 1 \leq b$. Platí tedy $1 < a$, neboli $2 \leq a$. Pak ovšem opět podle definice uspořádání $\leq_{\text{lex}}$ dostáváme $[2, 1] \leq_{\text{lex}} [a, b]$. Tím je ověřena i podmínka (b) z definice suprema. ♣

1.4.12. Věta. Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X, $A \subset X$ je neprázdná množina a nechť existuje infimum a supremum množiny A. Potom platí $\inf A \leq \sup A$.

Důkaz. Množina A je neprázdná, takže můžeme nalézt prvek $a \in A$. Potom platí $\inf A \leq a$, neboť $\inf A$ je dolní závorou A. Dále platí $a \leq \sup A$, neboť $\sup A$ je horní závorou A. Odtud díky tranzitivitě uspořádání dostáváme nerovnost $\inf A \leq \sup A$. ■

K právě zavedeným pojmům suprema a infima se vrátíme v Oddílu 1.5, kde budou uvedeny další ilustrační příklady.

Relace zobrazení.

1.4.13. Definice. Binární relaci F nazýváme **zobrazením**, pokud splňuje

$$\forall [x_1, y_1] \in F\ \forall [x_2, y_2] \in F : x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2.$$

Řekneme, že zobrazení F je **zobrazení z množiny** A **do množiny** B, jestliže platí $F \subset A \times B$.

1.4.14. Je-li F zobrazení z množiny A do množiny B, pak podle definice pro každé $x \in A$ existuje nejvýše jedno $y \in B$ takové, že $[x, y] \in F$. Pokud pro dané $x \in A$ takové y existuje, pak je tedy určeno jednoznačně a značíme je $F(x)$. Někdy píšeme jen Fx.

1.4.15. Definice. Nechť F je zobrazení.

- **Definičním oborem** zobrazení F nazýváme množinu

$$\mathcal{D}(F) = \{x;\ \exists y\colon [x, y] \in F\}.$$

- **Oborem hodnot** zobrazení F nazýváme množinu

$$\mathcal{H}(F) = \{y;\ \exists x\colon [x, y] \in F\}.$$

1.4.16. (a) Nechť F je zobrazení. Všimněme si, že definiční obor F je množina všech x, pro které je definován prvek $F(x)$, a obor hodnot je množina všech y, pro která existuje x takové, že prvek $F(x)$ je definován a platí $F(x) = y$.

(b) Je-li F zobrazení z množiny A do množiny B, pak je F také zobrazení z množiny C do množiny D, pokud $F \subset C \times D$, neboli $\mathcal{D}(F) \subset C$ a $\mathcal{H}(F) \subset D$.

Například zobrazení F, které každému kladnému číslu $x \in \mathbb{R}$ přiřazuje reálné číslo $\frac{1}{x}$, je zobrazením z množiny kladných reálných čísel do množiny kladných reálných čísel, ale také zobrazením z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$.

1.4.17 (zobrazení jako přiřazení)**.** Zobrazení jsme definovali pomocí pojmu relace. Při tomto přístupu ztotožňujeme pojem zobrazení a pojem grafu zobrazení. V matematické analýze však často chápeme zobrazení F z množiny A do množiny B jako *přiřazení*, tj. prvkům x z jisté podmnožiny A je přiřazen jednoznačně určený prvek $F(x)$ z množiny B. V takovém případě pak zobrazení a jeho graf chápeme jako dva různé objekty, které si však vzájemně jednoznačně odpovídají, přičemž **grafem** zobrazení F nazýváme množinu

$$\operatorname{graf}(F) = \big\{[x, y] \in A \times B;\ x \in \mathcal{D}(F) \wedge y = F(x)\big\}.$$

1.4.18. Označení. Nechť A a B jsou množiny a F je zobrazení. Pak symbol $F\colon A \to B$ znamená, že F je zobrazení z množiny A do množiny B a $\mathcal{D}(F) = A$. Takové zobrazení F nazýváme také **zobrazením množiny** A **do množiny** B.

Narozdíl od zobrazení z množiny A do množiny B, kde definiční obor je pouze podmnožinou množiny A, je zobrazení množiny A do množiny B definováno právě ve všech bodech množiny A.

1.4.19. Zobrazení $F\colon A \to B$ často definujeme tak, že pro každé $x \in A$ určíme prvek $F(x) \in B$. V takovém případě někdy používáme zápis $x \mapsto F(x)$, $x \in A$. Je třeba si uvědomit, že dva různé předpisy mohou definovat stejné zobrazení. Tak je tomu například u následujících dvou předpisů:

$$\begin{aligned} x &\mapsto (x+1)^2, && x \in \mathbb{R},\\ x &\mapsto x^2 + 2x + 1, && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

1.4.20. Definice. Nechť A, B jsou množiny a f je zobrazení.

- **Obrazem množiny** A při zobrazení f rozumíme množinu

$$\{y \in \mathcal{H}(f);\ \exists x \in \mathcal{D}(f) \cap A\colon f(x) = y\},$$

kterou značíme $f(A)$.

- **Vzorem množiny** B při zobrazení f rozumíme množinu
$$\{x \in \mathcal{D}(f);\ f(x) \in B\},$$
kterou značíme $f^{-1}(B)$.

1.4.21. Nechť X je množina a $A \subset X$. **Charakteristickou funkcí** množiny A nazýváme funkci $\chi_A\colon X \to \mathbb{R}$, definovanou předpisem
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } x \in A, \\ 0, & \text{pokud } x \in X \setminus A. \end{cases}$$
Pro právě uvedenou funkci platí $\chi_A^{-1}(\{1\}) = A$ a $\chi_A^{-1}(\{0\}) = X \setminus A$. Charakteristická funkce je v řadě situací užitečným nástrojem.

1.4.22. Definice. Řekneme, že zobrazení f

- je **prosté**, jestliže platí
$$\forall x, y \in \mathcal{D}(f)\colon f(x) = f(y) \Rightarrow x = y,$$
- je **na množinu** B, jestliže platí $\mathcal{H}(f) = B$,
- je **bijekcí množiny** A **na množinu** B, jestliže $\mathcal{D}(f) = A$ a jde o prosté zobrazení na B.

1.4.23 (alternativní terminologie)**.** Prostému zobrazení také říkáme **injekce** nebo **injektivní** zobrazení. Zobrazení, které je zobrazením na množinu B, nazýváme i **surjekcí na** B a o bijekci množiny A na množinu B hovoříme někdy jako o **vzájemně jednoznačném zobrazení množiny** A **na množinu** B.

1.4.24. Nechť $f\colon A \to B$ je prosté zobrazení. Potom přímo z definic dostáváme, že f je bijekce množiny A na množinu $f(A)$.

1.4.25. Definice. Nechť f je zobrazení a C je množina. Pak zobrazení definované předpisem $x \mapsto f(x)$, $x \in C \cap \mathcal{D}(f)$, nazýváme **restrikcí** nebo **zúžením** zobrazení f na množinu C a značíme jej $f|_C$.

1.4.26. Definice. Nechť f a g jsou zobrazení. Pak zobrazení $g \circ f$ je definováno předpisem $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$ pro všechna $x \in \mathcal{D}(f)$ taková, že $f(x) \in \mathcal{D}(g)$. Zobrazení $g \circ f$ nazýváme **složeným zobrazením** (**složením zobrazení**) f a g, přičemž g nazýváme **vnějším** zobrazením a f nazýváme **vnitřním** zobrazením.

1.4.27. Definice. Nechť $f\colon A \to B$ je prosté zobrazení. Pak zobrazení $f^{-1}\colon f(A) \to A$ definované pro $y \in f(A)$ předpisem $f^{-1}(y) = x$, kde $x \in A$ je jednoznačně určeno vztahem $y = f(x)$, nazýváme **inverzním zobrazením** k zobrazení f.

1.4.28. K zobrazení, které není prosté, nelze definovat inverzní zobrazení. Příkladem je funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem $f(x) = x^2$ pro $x \in \mathbb{R}$.

1.4.29 (sjednocení a průnik indexovaného systému)**.** Nechť X a I jsou množiny a pro každé $\alpha \in I$ je definována množina $A_\alpha \subset X$. Máme tedy dáno zobrazení $\alpha \mapsto A_\alpha$ množiny I do potenční množiny $\mathcal{P}(X)$. Takové zobrazení nazýváme **indexovaným systémem množin** a značíme ho symbolem $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$.

Uvažujme systém $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(X);\ \exists \alpha \in I : A = A_\alpha\}$. Pak množinu $\bigcup \mathcal{A}$ označujeme také symbolem $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Pokud je navíc I neprázdná množina, pak množinu $\bigcap \mathcal{A}$ označujeme $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$.

Se zobrazeními z následující definice budeme často pracovat.

1.4.30. Definice. Nechť A je neprázdná množina.

(a) **Konečnou posloupností** prvků A rozumíme každé zobrazení množiny $\{1, \dots, n\}$, kde $n \in \mathbb{N}$, do množiny A. Pokud $k \mapsto a_k$, $k \in \{1, \dots, n\}$, je takové zobrazení, pak tuto posloupnost značíme $\{a_k\}_{k=1}^n$. Prvek a_k nazýváme k**-tým členem** této posloupnosti.

(b) **Nekonečnou posloupností** prvků A rozumíme každé zobrazení $n \mapsto a_n$, $n \in \mathbb{N}$, množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ do množiny A. Takovou posloupnost obvykle značíme $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, případně jen $\{a_n\}$. Prvek a_n nazýváme n**-tým členem** této posloupnosti.

1.4.31 (rekurentně zadaná posloupnost)**.** Nechť A je neprázdná množina a $k \in \mathbb{N}$. Jsou-li dány členy $a_1, a_2, \dots, a_k \in A$ a předpis, podle kterého je možné pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > k$, určit hodnotu $a_n \in A$ na základě hodnot $a_1, \dots, a_{n-1}$, pak je možné definovat posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^\infty$. Takovému zadání posloupnosti říkáme *rekurentní*. Existence a jednoznačnost takto zadané posloupnosti je ověřena ve Větě B.1.44.

Nejčastější způsob zadání rekurentní posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ vypadá následovně. Je dána neprázdná množina A a zobrazení $g\colon A \to A$. Prvek $a_1 \in A$ je dán a $a_n = g(a_{n-1})$ pro $n \in \mathbb{N}, n > 1$.

Příkladem takové posloupnosti je posloupnost definována předpisem $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n$, neboť stačí položit $A = \mathbb{R}$ a $g(x) = 2x,\ x \in \mathbb{R}$.

1.4.32. V paragrafu 1.2.2 jsme si přiblížili význam termínu axiom. Na tomto místě je vhodné uvést jeden z axiomů teorie množin pro jeho vztah k pojmu zobrazení. Jde o **axiom výběru** a zde je jeho formulace:

Pro každý indexovaný systém neprázdných množin $(C_b)_{b \in I}$ existuje zobrazení $\varphi\colon I \to \bigcup_{b \in I} C_b$ takové, že pro každé $b \in I$ platí $\varphi(b) \in C_b$.

Axiom výběru říká, že existuje zobrazení φ, které pro každé $b \in I$ vybere hodnotu $\varphi(b)$ z neprázdné množiny C_b. Výrok působí samozřejmě, některé jeho důsledky však již tak samozřejmé nejsou. Další vysvětlení je uvedeno v Dodatku A. Axiom výběru budeme často používat bez výslovného upozornění podobně jako další axiomy teorie množin.

1.4.33 (konstrukce posloupnosti pomocí axiomu výběru)**.** Nechť A je neprázdná množina. Posloupnost prvků množiny A je možné konstruovat také takto. Prvek a_1 zvolíme z jisté neprázdné podmnožiny A_1 množiny A. Máme-li zkonstruovány prvky $a_1, \dots, a_n$, určíme v závislosti na těchto prvcích neprázdnou množinu $A_{n+1} \subset A$ a z ní vybereme prvek a_{n+1}. Množiny $A_n, n \in \mathbb{N}$, ze kterých vybíráme členy naší posloupnosti, závisí na konkrétním cíli, pro který posloupnost konstruujeme. Tímto způsobem skutečně obdržíme posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^\infty$. Není to ale tak jednoduché, protože přesné odůvodnění existence posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ vyžaduje použití axiomu výběru. Více naleznete v Dodatku A.

1.5. Množina reálných čísel

Vlastnost existence suprema.

1.5.1. Číselné obory přirozených, celých, racionálních a reálných čísel mají pro další výklad zásadní význam. Jejich *přesná* konstrukce však není snadná, a proto ji provedeme až v Dodatku B. V dalším výkladu vystačíme se středoškolskými pojmy, které doplníme o vlastnost existence suprema. V Definicích 1.4.7 a 1.4.8 jsme zavedli pojem horní závory, dolní závory, omezenosti množiny a pojmy suprema a infima pro obecné uspořádání. Nyní tyto pojmy použijeme pro množinu reálných čísel s uvedeným uspořádáním $\leq$. Vlastnost **existence suprema** reálných čísel lze pak formulovat následovně.

$$\text{Každá neprázdná shora omezená podmnožina } \mathbb{R} \text{ má supremum.} \tag{1.8}$$

Množina reálných čísel spolu s jejím uspořádáním a s operacemi sčítání a násobení je zkonstruována tak, že právě uvedenou vlastnost má. Vlastnost suprema je důležitá, neboť některé hlubší věty o reálných číslech bychom bez ní nemohli dokázat.

Vlastnosti početních operací a uspořádání. V tomto textu předpokládáme znalost základních pravidel pro práci s uspořádáním reálných čísel a s operacemi sčítání a násobení. V dalším si však některé výsledky připomeneme a také zavedeme značení, které budeme používat.

1.5.2. Označení. (a) Nechť $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$, a pro každé $i \in \{m, \dots, n\}$ je $a_i \in \mathbb{R}$. Potom symbolem $\sum_{i=m}^{n} a_i$ značíme součet všech reálných čísel $a_m, \dots, a_n$, tedy

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Je-li $m > n$, pak klademe

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = 0.$$

(b) Nechť $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$, a pro každé $i \in \{m, \dots, n\}$ je $a_i \in \mathbb{R}$. Potom symbolem $\prod_{i=m}^{n} a_i$ značíme součin všech reálných čísel $a_m, \dots, a_n$, tedy

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdots a_{n-1} \cdot a_n.$$

Je-li $m > n$, pak klademe

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = 1.$$

Připomeňme ještě, že pokud $a \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$, pak symbol a^n značí součin

$$\underbrace{a \cdot a \cdots a \cdot a}_{n \text{ krát}}.$$

Pokud $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, a $n \in \mathbb{N}$, pak symbol a^{-n} značí součin

$$\underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdots a^{-1} \cdot a^{-1}}_{n \text{ krát}}.$$

Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme symbol a^0 jako 1. Zde nedefinujeme novou početní operaci, ale pouze užitečnou zkratku, která zjednodušuje zápis některých výrazů. Toto je třeba mít na paměti zejména v případě, kdy $a = 0$.

(c) Pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definujeme symbol $n!$, čteme n **faktoriál**, takto: $0! = 1$ a $n! = n \cdot (n-1)!$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pokud $n \in \mathbb{N}$, pak je číslo $n!$ součinem čísel $1, \dots, n$.

(d) Pro $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k \leq n$, definujeme **kombinační číslo** $\binom{n}{k}$, čteme n **nad** k, předpisem

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

(e) Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Potom zápis $a_1 \leq \cdots \leq a_n$ znamená, že platí nerovnosti $a_1 \leq a_2, a_2 \leq a_3, \dots, a_{n-1} \leq a_n$. Obdobné značení používáme i pro další typy nerovností.

(f) V dalším výkladu budeme používat i zápisy $x > y$ a $x \geq y$, které po řadě znamenají totéž co $y < x$ a $y \leq x$.

1.5.3. Přesně vzato jsou definice součtu a součinu konečně mnoha reálných čísel induktivní. Máme-li definován součet (součin) n reálných čísel, můžeme definovat součet (součin) $n + 1$ reálných čísel. Z těchto definic by měly také vycházet důkazy běžných pravidel pro počítání s konečnými součty a součiny, jako je například vzorec

$$\sum_{n=n_1}^{n_3} a_n = \sum_{n=n_1}^{n_2} a_n + \sum_{n=n_2+1}^{n_3} a_n,$$

kde $n_1 \leq n_2 \leq n_3$ jsou přirozená čísla a $a_{n_1}, \dots, a_{n_3}$ jsou reálná čísla. Zde však volíme výše uvedený neformální výklad, neboť jeho přesnost je pro náš text dostačující.

Uveďme následující pozorování, která jsou užitečná při práci se součty reálných čísel.

1.5.4 (posun sčítacího indexu)**.** Nechť $m, n, p \in \mathbb{Z}, m \leq n$, a pro každé $i \in \{m, \dots, n\}$ je $a_i \in \mathbb{R}$. Potom platí

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m+p}^{n+p} a_{i-p},$$

neboť v obou součtech sčítáme reálná čísla $a_m, \dots, a_n$.

1.5.5 (teleskopická suma). Nechť $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$, a pro každé $i \in \{m, \dots, n\}$ je $a_i \in \mathbb{R}$. Potom platí

$$\sum_{i=m}^{n-1}(a_{i+1} - a_i) = a_n - a_m,$$

neboť

$$\begin{aligned}\sum_{i=m}^{n-1}(a_{i+1} - a_i) &= \sum_{i=m}^{n-1} a_{i+1} - \sum_{i=m}^{n-1} a_i = \sum_{i=m+1}^{n} a_i - \sum_{i=m}^{n-1} a_i \\ &= \Big(a_n + \sum_{i=m+1}^{n-1} a_i\Big) - \Big(a_m + \sum_{i=m+1}^{n-1} a_i\Big) = a_n - a_m.\end{aligned}$$

Méně formálně lze platnost dokazované rovnosti nahlédnout i tak, že uvažovanou sumu rozepíšeme po jednotlivých členech a všimneme si, že kromě členů a_n a $-a_m$ se v rozpisu vyskytuje vždy $-a_i$ a a_i, $i = m+1, \dots, n-1$.

1.5.6. Věta (binomická věta). Pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a pro každá $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \tag{1.9}$$

Důkaz. Tvrzení dokážeme matematickou indukcí. Pro $n = 0$ a libovolná $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}(a+b)^0 &= 1, \\ \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k &= \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1.\end{aligned}$$

Odtud dostáváme (1.9) pro $n = 0$.

Předpokládejme, že $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a, b \in \mathbb{R}$ a vztah (1.9) platí. Pak díky indukčnímu předpokladu a algebraickou úpravou dostaneme

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n \cdot (a+b) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\right) \cdot (a+b) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}.\end{aligned}$$

Podle pozorování v 1.5.4 obdržíme

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k,$$

a tedy

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k\\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k + b^{n+1}\\ &= \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)a^{n-k+1}b^k + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1}.\end{aligned}$$

Dokazované tvrzení nyní plyne z následujícího vztahu, který platí pro každé $n, k \in \mathbb{N}, k \leq n$:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n+1-k)!(k-1)!}\\ &= \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}\cdot\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1-k}\right)\\ &= \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}\cdot\frac{n+1}{(n+1-k)k} = \binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

■

Následující příklad obsahuje zobecnění známých vztahů $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$ a $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.

1.5.7. Příklad. Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$a^n - b^n = (a-b)\cdot\sum_{k=1}^{n}a^{n-k}b^{k-1}.$$

Řešení. Vztah odvodíme úpravou pravé strany:

$$\begin{aligned}(a-b)\cdot\sum_{k=1}^{n}a^{n-k}b^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n}a^{n+1-k}b^{k-1} - \sum_{k=1}^{n}a^{n-k}b^k\\ &= a^n + \sum_{k=2}^{n}a^{n+1-k}b^{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1}a^{n-k}b^k - b^n\\ &= a^n + \sum_{k=1}^{n-1}a^{n-k}b^k - \sum_{k=1}^{n-1}a^{n-k}b^k - b^n \qquad \text{(podle 1.5.4)}\\ &= a^n - b^n.\end{aligned}$$

♣

1.5.8. Příklad. Nechť $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ a $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dokažte, že potom platí

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Řešení. Použijeme Příklad 1.5.7 pro $a = 1$, $b = q$ a na místo čísla n dosadíme $n + 1$. Pak s pomocí 1.5.4 obdržíme

$$1 - q^{n+1} = (1 - q) \sum_{k=1}^{n+1} q^{k-1} = (1 - q) \sum_{k=0}^{n} q^k.$$

Odtud již snadno plyne dokazovaný vztah, neboť $1 - q \neq 0$, a tedy můžeme obě strany rovnosti vydělit číslem $1 - q$. ♣

Absolutní hodnota reálného čísla.

1.5.9. Definice. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ definujeme jeho **absolutní hodnotu** jako

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{pokud } x \geq 0, \\ -x, & \text{pokud } x < 0. \end{cases}$$

1.5.10. Není těžké si rozmyslet, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

(a) $|x| \geq 0$,
(b) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
(c) $|x| = |-x|$,
(d) $\big||x|\big| = |x|$,
(e) $\forall \lambda \in \mathbb{R}\colon\ |\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$.

Geometricky můžeme absolutní hodnotu čísla x interpretovat jako vzdálenost bodu x od počátku na reálné ose. Výraz $|x - y|$ pak nazveme **vzdáleností bodu** x **od bodu** y.

Následující nerovnost budeme při práci s absolutní hodnotou často používat. Její název pochází z jejího zobecnění pro komplexní čísla, které vyjadřuje nerovnost mezi součtem délek dvou stran trojúhelníka a délkou zbývající strany.

1.5.11. Věta (trojúhelníková nerovnost)**.** Pro každá $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$|a + b| \leq |a| + |b|. \tag{1.10}$$

Důkaz. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Z definice absolutní hodnoty vyplývá, že platí $a \leq |a|$ a $b \leq |b|$. Odtud dostáváme $a + b \leq |a| + |b|$. Opět z definice absolutní hodnoty snadno vyplývá, že platí $-a \leq |a|$ a také $-b \leq |b|$. Odtud dostáváme $-(a + b) \leq |a| + |b|$. Podle definice absolutní hodnoty platí $|a + b| = a + b$ nebo $|a + b| = -(a + b)$. V obou případech tedy dostáváme $|a + b| \leq |a| + |b|$, čímž je nerovnost (1.10) dokázána. ■

1.5.12. Důsledek. (a) Pro každá $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|. \tag{1.11}$$

(b) Pro každá $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y|\,. \tag{1.12}$$

Důkaz. (a) Nechť $x, y \in \mathbb{R}$. Položme v (1.10) nejprve $a = y$, $b = x - y$. Obdržíme $|x| = |y + x - y| \leq |y| + |x - y|$. Platí tedy $|x| - |y| \leq |x - y|$. V (1.10) dále položme $a = x$, $b = y - x$. Dostaneme $|y| = |x + y - x| \leq |x| + |y - x| = |x| + |x - y|$. Platí tedy $-(|x| - |y|) \leq |x - y|$. Z obdržených nerovností a definice absolutní hodnoty již plyne (1.11).

(b) V (1.10) položme $a = x - z$, $b = z - y$, a dostaneme požadovanou nerovnost. ∎

1.5.13. Poznámka. Někdy bývá trojúhelníkovou nerovností nazývána nerovnost (1.12).

1.5.14. Lemma. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, takové, že pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, platí $|a - b| < K\varepsilon$, potom $a = b$.

Důkaz. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že ačkoli jsou podmínky lemmatu pro reálná čísla a, b splněny, jsou čísla a a b různá. Předpokládejme nejprve, že $a > b$. Položme $\varepsilon = \frac{1}{2K}(a - b)$. Číslo ε je kladné, a proto podle předpokladu platí $0 < |a - b| < K\varepsilon = \frac{1}{2}(a - b)$. Odtud vyplývá $0 < a - b < \frac{1}{2}(a - b)$, což je spor. Pokud $a < b$, pak položíme $\varepsilon = \frac{1}{2K}(b - a)$ a spor obdržíme obdobně jako v předchozím případě. ∎

1.5.15. Lemma 1.5.14 je užitečným nástrojem jak dokázat rovnost dvou reálných čísel. Místo, abychom dokazovali rovnost dvou čísel přímo, dokážeme, že rozdíl uvažovaných čísel v absolutní hodnotě je menší než libovolné kladné reálné číslo.

Další vlastnosti suprema a infima.

1.5.16. Uspořádání $\leq$ na množině $\mathbb{R}$ je lineární, a proto je číslo $G \in \mathbb{R}$ supremem množiny $M \subset \mathbb{R}$ právě tehdy, když platí

(a) G je horní závorou množiny M,
(b) $\forall G' \in \mathbb{R}, G' < G\ \exists x \in M : G' < x$.

Pokud je totiž G supremem množiny M, pak je G horní závorou M, a tedy splňuje (a). Jestliže $G' \in \mathbb{R}, G' < G$, potom G' není horní závorou M. Odtud plyne, že existuje $x \in M$ takové, že neplatí $x \leq G'$. Máme tedy $x \neq G'$ a díky linearitě uspořádání $\leq$ platí $G' \leq x$. Dohromady tedy máme $G' < x$, čímž je ověřena podmínka (b).

Nyní předpokládejme, že $G \in \mathbb{R}$ splňuje podmínky (a) a (b). Potom je G horní závorou množiny M. Předpokládejme, že $G' \in \mathbb{R}$ je horní závorou M. Chceme ukázat, že platí $G \leq G'$. Předpokládejme, že tomu tak není. Potom díky linearitě uspořádání $\leq$ dostáváme $G' < G$. Podle vlastnosti (b) existuje $x \in M$ takové, že $G' < x$, což je ovšem spor s předpokladem, že G' je horní závorou množiny M.

Obdobně číslo $g \in \mathbb{R}$ je infimem množiny $M \subset \mathbb{R}$ právě tehdy, když platí

(c) g je dolní závorou M,
(d) $\forall g' \in \mathbb{R}, g < g'\ \exists x \in M : x < g'$.

1.5.17. Věta (existence infima)**.** Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je zdola omezená neprázdná množina. Potom existuje infimum množiny M a při označení $-M = \{x \in \mathbb{R};\ -x \in M\}$ platí $\inf M = -\sup(-M)$.

Důkaz. 5 Množina $-M$ je zřejmě neprázdná. Nechť $K \in \mathbb{R}$ je dolní závorou množiny M. Pro každé $x \in -M$ platí $-x \in M$, takže $K \leq -x$, tedy $x \leq -K$. Odtud plyne, že $-K$ je horní závorou množiny $-M$. Množina $-M$ je tedy shora omezená. Z (1.8) plyne existence suprema množiny $-M$, které označíme symbolem G. Dokážeme, že prvek $g = -G$ je infimem množiny M tak, že ověříme podmínky (c) a (d) z charakterizace infima v 1.5.16.

Pro každé $x \in M$ platí $-x \in -M$, tedy $-x \leq G$, takže $g \leq x$. Číslo g je proto dolní závorou množiny M. Tím jsme ověřili podmínku (c). Předpokládejme, že $g' \in \mathbb{R}$ a $g < g'$. Položme $G' = -g'$. Potom $G' < G$, a z vlastnosti (b) v 1.5.16 tedy vyplývá, že existuje $y \in -M$ takové, že $G' < y$, takže $-y < g'$. Protože $-y \in M$, ověřili jsme i podmínku (d) v 1.5.16. Tím je důkaz proveden. ■

1.5.18. Lemma. Nechť $A, B \subset \mathbb{R}$ jsou neprázdné množiny splňující

$$\forall a \in A\ \forall b \in B : a \leq b.$$

Pak existuje $\sup A$ a $\inf B$ a platí $\sup A \leq \inf B$.

Důkaz. Vezměme $a_0 \in A$ a $b_0 \in B$ libovolné. Podle předpokladu je a_0 dolní závorou B a b_0 horní závorou A. Díky neprázdnosti obou množin tedy existuje $\sup A$ a $\inf B$. Protože každé $b \in B$ je horní závorou A, platí pro každé $b \in B$ nerovnost $\sup A \leq b$. Tedy $\sup A$ je dolní závorou B, z čehož plyne $\sup A \leq \inf B$. ■

1.5.19. Definice. Nechť f je zobrazení do $\mathbb{R}$ a $M \subset \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že f je

- **shora omezená** na M, jestliže množina $f(M)$ je shora omezená,
- **zdola omezená** na M, jestliže množina $f(M)$ je zdola omezená,
- **omezená** na M, jestliže množina $f(M)$ je omezená,
- **konstantní** na M, jestliže pro všechna $x, y \in M$ platí $f(x) = f(y)$.

1.5.20. Věta. Nechť M je neprázdná množina a $f: M \to \mathbb{R}$ a $g: M \to \mathbb{R}$ jsou zobrazení.

(a) Jestliže f a g jsou shora omezená, potom

$$\sup(f + g)(M) \leq \sup f(M) + \sup g(M).$$

(b) Jestliže f a g jsou zdola omezená, potom

$$\inf(f + g)(M) \geq \inf f(M) + \inf g(M).$$

Důkaz. (a) Množiny $f(M)$ a $g(M)$ jsou neprázdné a shora omezené, a proto existují jejich suprema, která označíme po řadě A a B. Nechť $x \in M$. Potom z definice suprema plyne $f(x) \leq A$ a $g(x) \leq B$, a tedy také $f(x) + g(x) \leq A + B$. Protože $x \in M$ bylo zvoleno libovolně, je $A + B$ horní závorou množiny $(f + g)(M)$. Odtud plyne tvrzení (a).

(b) Tvrzení lze dokázat obdobně jako (a). ■

Maximum a minimum množiny.

1.5.21. Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$.

- Řekneme, že a je **největším prvkem** (**maximem**) množiny M, jestliže $a \in M$ a a je horní závorou množiny M.
- Řekneme, že b je **nejmenším prvkem** (**minimem**) množiny M, jestliže $b \in M$ a b je dolní závorou množiny M.

1.5.22. Pokud maximum a minimum množiny M existují, pak jsou určeny jednoznačně. Jsou-li totiž G_1, G_2 maxima množiny M, pak G_1 i G_2 jsou horní závory M. Platí tedy $G_1 \leq G_2$ a $G_2 \leq G_1$, a proto $G_1 = G_2$. Obdobně se dokáže jednoznačnost minima. Minimum a maximum množiny M značíme po řadě $\min M$ a $\max M$.

1.5.23. Věta. Nechť $M \subset \mathbb{R}$.

(a) Existuje-li maximum M, pak existuje i supremum M a $\sup M = \max M$.
(b) Existuje-li minimum M, pak existuje i infimum M a $\inf M = \min M$.

Důkaz. (a) Předpokládejme, že $G = \max M$. Pak je G horní závorou M, a tedy je splněna podmínka (a) z 1.5.16. Je-li nyní $G' < G$, pak G je prvek M větší než G', a tedy je splněna i podmínka (b) z 1.5.16. Proto je číslo G supremem množiny M.

(b) Tvrzení lze dokázat obdobně. ∎

1.5.24. Příklad. Nechť $x, y \in \mathbb{R}$ a $A = \{x, y\}$. Pak existuje maximum i minimum množiny A.

Řešení. Budeme postupovat rozborem případů. Z linearity uspořádání $\mathbb{R}$ platí $x \leq y$ nebo $y \leq x$. V prvním případě je zřejmě

$$\max\{x, y\} = y, \quad \min\{x, y\} = x,$$

v případě druhém platí

$$\max\{x, y\} = x, \quad \min\{x, y\} = y.$$

♣

1.5.25. Věta. Nechť $M \subset \mathbb{N}$ je neprázdná množina. Potom existuje minimum M.

Důkaz. Pomocné tvrzení. Nejprve matematickou indukcí pro každé $n \in \mathbb{N}$ dokážeme, že pokud je množina $M \cap \{1, \dots, n\}$ neprázdná, pak existuje její minimum. Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme platnost tvrzení pro n a neprázdnost množiny $M \cap \{1, \dots, n+1\}$. Pokud navíc $M \cap \{1, \dots, n\} \neq \emptyset$, pak podle indukčního předpokladu existuje $\min(M \cap \{1, \dots, n\})$ a platí

$$\min(M \cap \{1, \dots, n+1\}) = \min(M \cap \{1, \dots, n\}).$$

Pokud $M \cap \{1, \dots, n\} = \emptyset$, potom $M \cap \{1, \dots, n+1\} = \{n+1\}$ a

$$\min(M \cap \{1, \dots, n+1\}) = \{n+1\}.$$

Tím je pomocné tvrzení dokázáno.

Vlastní důkaz. Množina M je neprázdná, a proto existuje přirozené číslo $n \in M$. Potom podle pomocného tvrzení existuje $\min(M \cap \{1, \dots, n\})$ a protože zřejmě platí $\min M = \min(M \cap \{1, \dots, n\})$, je tím tvrzení dokázáno. ■

Intervaly reálných čísel.

1.5.26. Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Definujme množiny

$$
\begin{aligned}
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}, & [a,b] &= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\},\\
(a,b] &= \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}, & [a,b) &= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\},\\
(-\infty,b) &= \{x \in \mathbb{R};\ x < b\}, & (-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R};\ x \leq b\},\\
(a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R};\ a < x\}, & [a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x\},\\
(-\infty,\infty) &= \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Pak množiny (a, b), $(-\infty, b)$, (a, ∞) a $(-\infty, \infty)$ nazýváme **otevřenými intervaly**, množinu $[a, b]$ nazýváme **uzavřeným intervalem**. Interval, který je prázdný nebo obsahuje právě jeden bod, nazýváme **degenerovaný**, ostatní intervaly nazýváme **nedegenerované**. Význam pojmu **krajní** bod intervalu je zřejmý. Bod, který patří do intervalu I, ale není krajním bodem I, nazýváme **vnitřním** bodem intervalu I.

1.5.27. Prázdná množina je také interval, neboť $(a, a) = \emptyset$ pro každé $a \in \mathbb{R}$. Také každá jednoprvková podmnožina $\mathbb{R}$ je interval, neboť $[a, a] = \{a\}$ pro každé $a \in \mathbb{R}$.

Následující lemma udává užitečnou charakterizaci intervalu. Chceme-li ukázat, že jistá množina je interval, stačí ověřit podmínku (1.13), která říká, že množina s každými dvěma svými body x a y obsahuje i všechny body mezi x a y. Není tedy třeba hledat krajní body intervalu. Lemma použijeme například v důkazu Věty 4.3.6.

1.5.28. Lemma. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Množina M je interval právě tehdy, když platí

$$\forall x, y \in M\ \forall z \in \mathbb{R}\colon (x < z < y \Rightarrow z \in M). \tag{1.13}$$

Řada matematických vět má tvar ekvivalence. Jejich důkaz často vedeme tak, že dokážeme postupně dvě implikace. Pro zjednodušení a zpřehlednění zápisu budeme občas používat symboly $\Rightarrow$ a $\Leftarrow$, které uvedou příslušné části důkazu.

Důkaz Lemmatu 1.5.28. $\Rightarrow$ Předpokládejme, že $M = (a, b)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $a < b$. Pro ověření podmínky (1.13) vezměme $x, y \in M$ a $z \in \mathbb{R}$ takové, že $x < z < y$. Potom platí $a < x < z < y < b$, a tedy $z \in M$. Tím je podmínka (1.13) po uvedený typ intervalu ověřena. Pro ostatní typy intervalů je ověření obdobné.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že množina M splňuje (1.13). Pokud $M = \emptyset$, pak je M interval. Není-li M omezená zdola ani shora, pak $M = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Vezmeme-li totiž libovolné číslo $z \in \mathbb{R}$, pak k němu nalezneme $x \in M$, $x < z$, neboť M není zdola omezená, a také $y \in M$, $z < y$, protože M není shora omezená. Podle předpokladu tedy platí $z \in M$.

Je-li M omezená a neprázdná, pak klademe $G = \sup M$ a $g = \inf M$. Platí $(g, G) \subset M$. Je-li totiž $z \in (g, G)$, pak podle definice infima existuje takové $x \in M$, že $x < z$, podobně podle definice suprema existuje $y \in M$, $z < y$. Podle našeho předpokladu je tedy $z \in M$. Dále je $M \subset [g, G]$, neboť g je dolní závorou M a G je horní závorou M. Množina M je tedy interval s krajními body g a G, přičemž každý z nich může, ale nemusí, patřit do M.

V ostatních případech, kdy M je omezená pouze zdola a kdy M je omezená pouze shora, lze tvrzení dokázat obdobně. ■

Celá část reálného čísla.

1.5.29. Lemma. Nechť $n, m \in \mathbb{Z}$, $n < m$. Potom $n + 1 \leq m$.

Důkaz. Provedeme přímý důkaz. Jelikož $n < m$, je $m - n$ kladné celé číslo. Tedy $m - n$ je přirozené číslo, a proto $1 \leq m - n$. Tím je tvrzení dokázáno. ■

1.5.30. Věta (Archimédova[4] vlastnost reálných čísel)**.** Nechť $x \in \mathbb{R}$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ splňující $x < n$.

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $n \leq x$. Potom je množina $\mathbb{N}$ neprázdná a shora omezená. Existuje tedy číslo $G \in \mathbb{R}$, které je supremem množiny $\mathbb{N}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $n + 1$ opět přirozené číslo, a proto pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $n + 1 \leq G$. Odtud plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $n \leq G - 1$. Číslo $G - 1$ je tedy horní závorou množiny $\mathbb{N}$, což je ovšem ve sporu s definicí G, které je nejmenší horní závorou $\mathbb{N}$. ■

1.5.31. Věta (celá část)**.** Nechť $x \in \mathbb{R}$. Pak existuje právě jedno $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $k \leq x < k + 1$.

Důkaz. Existence. Označme $M = \{n \in \mathbb{Z};\ x \leq n\}$. Číslo x je dolní závorou množiny M, a proto je M zdola omezená. Podle Věty 1.5.30 je M neprázdná. Existuje tedy číslo $g \in \mathbb{R}$, které je infimem množiny M. Podle definice infima existuje $k \in M$ takové, že $k > g - 1$. Platí tedy $k \in \mathbb{Z}$ a $k \leq x$. Poněvadž $k + 1 > g$, platí $k + 1 \notin M$, a tedy $x < k + 1$. Číslo k má tedy požadované vlastnosti.

Jednoznačnost. Pro spor předpokládejme, že existují $k, j \in \mathbb{Z}$ taková, že $j \neq k$, $k \leq x < k + 1$ a $j \leq x < j + 1$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $j < k$. Potom $k \leq x$ a $x - 1 < j$, takže $0 < k - j < 1$. Protože $k - j \in \mathbb{Z}$ a $0 < k - j$, plyne z Lemmatu 1.5.29, že $1 \leq k - j$. To je spor s tím, že $k - j < 1$. ■

1.5.32. Definice. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom číslo $k \in \mathbb{Z}$ splňující $k \leq x < k+1$ nazýváme **celou částí** čísla x.

1.5.33. Podle Věty 1.5.31 existuje pro každé reálné číslo jednoznačně určená celá část, kterou značíme $[x]$. Nyní ukážeme zajímavé použití tohoto pojmu.

1.5.34. Věta (hustota $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom existuje $y \in \mathbb{Q}$ takové, že $a < y < b$.

---

[4] Archimédés ze Syrakus (287 př. n. l.–212 př. n. l.)

Důkaz. Podle Věty 1.5.30 existuje ke kladnému číslu $\frac{1}{b-a}$ číslo $n \in \mathbb{N}$ takové, že platí $\frac{1}{b-a} < n$. Je tedy $na + 1 < nb$. Položme $y = \frac{[na]+1}{n}$. Potom $y \in \mathbb{Q}$ a podle Věty 1.5.31 platí

$$a = \frac{na}{n} < \frac{[na] + 1}{n} \leq \frac{na + 1}{n} < \frac{nb}{n} = b,$$

takže $a < y < b$. ■

1.6. Konečné a spočetné množiny

Porovnávání mohutností množin. Pojem „počet prvků množiny“ je možné rozšířit i na případy, kdy je uvažovaná množina nekonečná. Potom místo tohoto pojmu používáme pojem „mohutnost množiny“. Jeho přesné zavedení však přesahuje rámec našeho textu a je možné jej nalézt například v knize [**3**]. V tomto oddílu pouze ukážeme jeden ze způsobů jak porovnávat množiny co do velikosti, který s pojmem mohutnosti pracuje implicitně. Podáme také přesnou definici konečných a nekonečných množin.

1.6.1. Definice. (a) Řekneme, že množina A **má stejnou mohutnost** jako množina B, jestliže existuje bijekce A na B. Značíme $A \approx B$.

(b) Řekneme, že množina A **má mohutnost menší nebo rovnou mohutnosti množiny** B, jestliže existuje prosté zobrazení A do B. Značíme $A \preceq B$.

(c) Řekneme, že množina A **má menší mohutnost než množina** B, jestliže existuje prosté zobrazení A do B a přitom A nemá stejnou mohutnost jako B. Značíme $A \prec B$.

1.6.2. Definice. Nechť A je množina. Zobrazení $\mathrm{Id}_A \colon A \to A$ definované předpisem $\mathrm{Id}_A(a) = a$, $a \in A$, nazýváme **identickým zobrazením**.

1.6.3. Věta. Nechť A, B, C jsou množiny. Potom platí

(a) $A \preceq A$,
(b) pokud $A \preceq B$ a $B \preceq C$, pak $A \preceq C$.

Důkaz. (a) Identické zobrazení Id_A je zřejmě prosté zobrazení množiny A do množiny A, a tedy $A \preceq A$.

(b) Podle předpokladu existují prostá zobrazení $f \colon A \to B$ a $g \colon B \to C$. Složené zobrazení $g \circ f$ je dobře definováno na množině A a má hodnoty v množině C. Pokud $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ pro nějaká $x, y \in A$, pak $f(x) = f(y)$, neboť g je prosté. Ze vztahu $f(x) = f(y)$ pak plyne $x = y$, neboť f je prosté. To znamená, že zobrazení $g \circ f$ je prosté, což dokazuje vztah $A \preceq C$. ■

1.6.4. Věta. Nechť A, B, C jsou množiny. Potom platí

(a) $A \approx A$,
(b) pokud $A \approx B$, pak $B \approx A$,

(c) pokud $A \approx B$ a $B \approx C$, pak $A \approx C$.

Důkaz. (a) Identické zobrazení Id_A je bijekce množiny A na množinu A, a proto $A \approx A$.

(b) Předpokládejme, že f je bijekce množiny A na množinu B. Zobrazení f je prosté, a proto existuje zobrazení f^{-1}. Definičním oborem zobrazení f^{-1} je množina B a obor hodnot f^{-1} je roven A. Zobrazení $f^{-1}: A \to B$ je tedy zobrazením na B. Pokud pro $x, y \in B$ platí $f^{-1}(x) = f^{-1}(y)$, potom $x = f(f^{-1}(x)) = f(f^{-1}(y)) = y$, a zobrazení f^{-1} je tedy prosté. Dostáváme tak, že zobrazení f^{-1} je bijekce, a proto má množina B stejnou mohutnost jako množina A, tj. $B \approx A$.

(c) Podle předpokladu existuje bijekce f množiny A na množinu B a bijekce g množiny B na množinu C. Složené zobrazení $g \circ f$ je dobře definováno na množině A a má hodnoty v množině C. Pokud $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$, pak $f(x) = f(y)$, neboť g je prosté. Ze vztahu $f(x) = f(y)$ pak plyne $x = y$, neboť f je prosté. To znamená, že zobrazení $g \circ f$ je prosté.

Předpokládejme, že $c \in C$. Pak existuje prvek $b \in B$ takový, že $g(b) = c$, neboť g je zobrazením na C. Pro prvek b existuje prvek $a \in A$ takový, že $f(a) = b$, neboť f je zobrazením na B. Potom platí $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$. Zobrazení $g \circ f$ je tedy zobrazením na C.

Zobrazení $g \circ f$ je tedy bijekce A na C. Tím je tvrzení dokázáno. ■

1.6.5. Věta (Cantor[5]-Bernstein[6]). Nechť X a Y jsou množiny splňující $X \preceq Y$ a $Y \preceq X$. Pak X a Y mají stejnou mohutnost.

K důkazu Cantorovy-Bernsteinovy věty použijeme následující lemma. Připomeňme, že symbol $\mathcal{P}(X)$ značí potenční množinu (vizte 1.3.3).

1.6.6. Lemma. Nechť X je množina a $H: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ je zobrazení splňující podmínku

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(X): A \subset B \Rightarrow H(A) \subset H(B). \tag{1.14}$$

Potom existuje $C \subset X$ takové, že $H(C) = C$.

Důkaz. Definujme $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{P}(X);\ A \subset H(A)\}$. Ukážeme, že $C = \bigcup \mathcal{C}$ je hledanou množinou. Zřejmě platí $C \subset X$. Pokud $A \in \mathcal{C}$, potom $A \subset C$ podle definice C. Díky (1.14) pak platí $H(A) \subset H(C)$. Dohromady tedy máme $A \subset H(A) \subset H(C)$. Z této úvahy a definice C dostáváme $C \subset H(C)$. Nyní znovu použijeme (1.14) pro dvojici množin C a $H(C)$ a dostaneme $H(C) \subset H\big(H(C)\big)$. To znamená, že $H(C) \in \mathcal{C}$, a tedy $H(C) \subset C$. Tím je rovnost $H(C) = C$ dokázána. ■

Důkaz Věty 1.6.5. Podle předpokladu věty existují prostá zobrazení $f: X \to Y$ a $g: Y \to X$. Definujme zobrazení $H: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ předpisem

$$H(A) = X \setminus g\big(Y \setminus f(A)\big).$$

[5] Georg Cantor (1845–1918)
[6] Felix Bernstein (1878–1956)

Pokud $U \subset V \subset X$, potom $f(U) \subset f(V)$, a tedy také $Y \setminus f(V) \subset Y \setminus f(U)$. Odtud již snadno odvodíme inkluzi $H(U) \subset H(V)$. Zobrazení H tedy splňuje předpoklady Lemmatu 1.6.6, s pomocí kterého nalezneme množinu $C \subset X$ splňující $H(C) = C$. Pak platí

$$C = H(C) = X \setminus g\big(Y \setminus f(C)\big).$$

Odtud plyne $X \setminus C = g\big(Y \setminus f(C)\big)$. Zobrazení $g|_{Y \setminus f(C)}$ je tedy prosté zobrazení množiny $Y \setminus f(C)$ na množinu $X \setminus C$. Potom $g^{-1}|_{X \setminus C}$ je prosté zobrazení $X \setminus C$ na $Y \setminus f(C)$. Poněvadž $f|_C$ je prosté zobrazení C na $f(C)$, je následující zobrazení $h\colon X \to Y$ hledanou bijekcí mezi množinami X a Y

$$h(a) = \begin{cases} f(a) & \text{pro } a \in C, \\ g^{-1}(a) & \text{pro } a \in X \setminus C. \end{cases}$$ ■

Z následující věty vyplývá, že pro každou množinu existuje množina, která je „větší" ve smyslu Definice 1.6.1.

1.6.7. Věta (Cantor)**.** Nechť X je množina. Pak $X \prec \mathcal{P}(X)$.

Důkaz. Zobrazení $\varphi\colon X \to \mathcal{P}(X)$ definované předpisem $\varphi(x) = \{x\}$, je prosté, takže platí $X \preceq \mathcal{P}(X)$.

Zbývá ukázat, že množiny X nemá stejnou mohutnost jako $\mathcal{P}(X)$. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že existuje bijekce $\varphi\colon X \to \mathcal{P}(X)$. Označme $A = \{x \in X;\ x \notin \varphi(x)\}$. Zobrazení φ je bijekce, a proto můžeme nalézt $a \in X$ takové, že $\varphi(a) = A$. Pokud $a \in A$, pak podle definice množiny A platí $a \notin \varphi(a)$, což je spor, neboť $\varphi(a) = A$. Pokud $a \notin A$, pak podle definice množiny A platí $a \in \varphi(a) = A$, což je opět spor. Tím je předpoklad existence bijekce φ přiveden ke sporu a tvrzení je dokázáno. ■

1.6.8. Lemma. Nechť A je množina a f je zobrazení. Potom $f(A) \preceq A$.

Důkaz. Položme $I = f(A)$ a $C_b = f^{-1}(\{b\}) \cap A$ pro $b \in I$. Pro každé $b \in I$ platí $C_b \neq \emptyset$. Podle axiomu výběru existuje zobrazení $\varphi\colon f(A) \to A$ takové, že pro každé $b \in f(A)$ platí $\varphi(b) \in f^{-1}(\{b\}) \cap A$. Zobrazení φ je prosté. Pokud totiž $\varphi(b) = \varphi(b')$, potom platí $b = f\big(\varphi(b)\big) = f\big(\varphi(b')\big) = b'$. Dostáváme tedy $f(A) \preceq A$. ■

Konečné množiny.

1.6.9. Definice. Řekneme, že množina A je **konečná**, pokud je buď prázdná, nebo existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že X má stejnou mohutnost jako množina $\{1, \dots, n\}$.

1.6.10. Lemma. Nechť $p, q \in \mathbb{N}$.

(a) Potom $\{1, \dots, p\} \preceq \{1, \dots, q\}$ právě tehdy, když $p \leq q$.
(b) Potom $\{1, \dots, p\} \approx \{1, \dots, q\}$ právě tehdy, když $p = q$.

Důkaz. (a) $\Rightarrow$ Pro spor předpokládejme, že $\{1, \dots, p\} \preceq \{1, \dots, q\}$ a $p > q$. Díky Větě 1.5.25 můžeme předpokládat, že p je nejmenší přirozené číslo, pro které existuje $q \in \mathbb{N}$ splňující $p > q$ a $\{1, \dots, p\} \preceq \{1, \dots, q\}$. Pak existuje prosté zobrazení $f : \{1, \dots, p\} \to \{1, \dots, q\}$. Potom musí být $p > q > 1$. Definujme zobrazení $g : \{1, \dots, q\} \setminus \{f(p)\} \to \{1, \dots, q-1\}$ předpisem

$$g(i) = \begin{cases} i & \text{pro } i < f(p), \\ i-1 & \text{pro } i > f(p). \end{cases}$$

Potom je zobrazení g prosté, a tedy také zobrazení $g \circ f|_{\{1,\dots,p-1\}}$ je prosté zobrazení množiny $\{1, \dots, p-1\}$ do $\{1, \dots, q-1\}$. Poněvadž $0 < q-1 < p-1$, dostáváme spor s minimalitou p.

$\Leftarrow$ Tato implikace je zřejmá.

(b) Tvrzení plyne snadno z (a). ∎

1.6.11. Pokud $X \approx \{1, \dots, n\}$ pro jisté $n \in \mathbb{N}$, pak je toto n určeno jednoznačně. Pokud totiž $X \approx \{1, \dots, n\}$ a $X \approx \{1, \dots, m\}$ pro $n, m \in \mathbb{N}$, potom podle Věty 1.6.4(b),(c) platí $\{1, \dots, n\} \approx \{1, \dots, m\}$. Z Lemmatu 1.6.10(b) pak plyne $n = m$. Toto pozorování je důležité pro korektnost následující definice.

1.6.12. Definice. Pokud je množina X prázdná, pak říkáme, že **počet prvků** množiny X je roven 0. Pokud $X \approx \{1, \dots, n\}$ pro jisté $n \in \mathbb{N}$, pak říkáme, že **počet prvků** množiny X je roven n. Počet prvků konečné množiny X značíme $|X|$.

1.6.13. Věta. Nechť X a Y jsou konečné množiny. Potom $X \approx Y$ právě tehdy, když $|X| = |Y|$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Množiny X a Y jsou buď obě prázdné, nebo obě neprázdné. V prvním případě $X = Y$ a počet prvků X a Y je roven 0. Ve druhém případě existují $m, n \in \mathbb{N}$ taková, že $X \approx \{1, \dots, m\}$ a $Y \approx \{1, \dots, n\}$. Potom podle Věty 1.6.4(b),(c) dostáváme $\{1, \dots, m\} \approx \{1, \dots, n\}$, a tedy podle Lemmatu 1.6.10(b) platí $m = n$, neboli $|X| = |Y|$.

$\Leftarrow$ Množiny jsou opět buď obě prázdné, nebo obě neprázdné. V prvním případě $X = Y$ a $X \approx Y$. Ve druhém případě existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $X \approx \{1, \dots, n\}$ a $Y \approx \{1, \dots, n\}$. Potom podle Věty 1.6.4(b),(c) dostáváme $X \approx Y$. ∎

1.6.14. Věta. Nechť $A \subset \mathbb{R}$ je konečná množina. Potom je množina A omezená. Je-li navíc A neprázdná, pak existuje její maximum a minimum.

Důkaz. Je-li A prázdná, pak je zřejmě omezená, neboť každé $x \in \mathbb{R}$ je zároveň horní i dolní závorou množiny A.

Nechť je A neprázdná. V tomto případě provedeme důkaz matematickou indukcí podle počtu jejích prvků. Je-li A jednoprvková, je tvrzení zřejmé. Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro každou množinu o n prvcích. Nechť A je množina o $n+1$ prvcích, tj. existuje bijekce φ množiny $\{1, \dots, n+1\}$ na množinu A. Položme $B = \{\varphi(1), \dots, \varphi(n)\}$. Pak $B \subset \mathbb{R}$ má n prvků, a tedy je podle indukčního předpokladu omezená a existuje její maximum G' a minimum g'. Položme

$$g = \min\{\varphi(n+1), g'\}, \quad G = \max\{\varphi(n+1), G'\}.$$

Čísla g a G jsou dobře definovaná podle Příkladu 1.5.24. Dále platí

$$\forall i \in \{1, \dots, n+1\}\colon g \le \varphi(i) \le G.$$

Tedy g je dolní závora množiny A a G je horní závora množiny A. Proto je množina A omezená. Protože $g', G' \in \varphi(\{1, \dots, n\}) \subset A$, je $g, G \in A$. Nalezli jsme tedy minimum i maximum množiny A. Podle principu matematické indukce tedy tvrzení platí pro všechny konečné podmnožiny $A \subset \mathbb{R}$. ■

1.6.15. Věta (vlastnosti konečných množin)**.**

(a) Nechť A je konečná množina a $B \subset A$. Potom B je konečná.
(b) Nechť $\mathcal{A}$ je konečná množina, jejímiž prvky jsou konečné množiny. Potom $\bigcup \mathcal{A}$ je konečná množina.
(c) Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $A_1, \dots, A_n$ jsou konečné množiny. Potom kartézský součin $A_1 \times \dots \times A_n$ je konečná množina.
(d) Nechť A je konečná množina a f je zobrazení. Potom je množina $f(A)$ konečná.

Důkaz. (a) Nejprve matematickou indukcí podle n dokážeme, že je-li $n \in \mathbb{N}$ a $A \subset \{1, \dots, n\}$, potom je množina A konečná. Je-li $n = 1$ a $A \subset \{1\}$, pak buď je A prázdná množina, nebo $A = \{1\}$. V obou případech přímo z definice plyne, že množina A je konečná.

Předpokládejme nyní, že každá podmnožina množiny $\{1, \dots, n\}$ je konečná. Nechť A je podmnožinou množiny $\{1, \dots, n+1\}$. Pokud $A \subset \{1, \dots, n\}$, pak je A konečná množina podle indukčního předpokladu. V opačném případě platí

$$A = \big(A \cap \{1, \dots, n\}\big) \cup \{n+1\}.$$

Pak je množina $B = A \cap \{1, \dots, n\}$ konečná. Je-li B prázdná, pak $A = \{n+1\}$ a existuje bijekce množiny $\{1\}$ na množinu A. Je-li B neprázdná, potom existují $k \in \mathbb{N}$ a bijekce $\varphi\colon \{1, \dots, k\} \to B$. Definujme $\psi\colon \{1, \dots, k+1\} \to A$ předpisem

$$\psi(i) = \begin{cases} \varphi(i) & \text{pro } i \in \{1, \dots, k\}, \\ n+1 & \text{pro } i = k+1. \end{cases}$$

Pak je ψ bijekce $\{1, \dots, k+1\}$ na A, a tedy A je konečná množina.

Předpokládejme nyní, že A je konečná neprázdná množina a B je její neprázdná podmnožina. Pak existují $n \in \mathbb{N}$ a bijekce φ množiny A na množinu $\{1, \dots, n\}$. Potom je zobrazení $\varphi|_B$ bijekcí množiny B na množinu $\varphi(B)$. Podle první části důkazu je množina $\varphi(B)$ konečná, tj. existují $m \in \mathbb{N}$ a bijekce ω množiny $\varphi(B)$ na množinu $\{1, \dots, m\}$. Pak $\omega \circ \varphi|_B$ je bijekce množiny B na množinu $\{1, \dots, m\}$, takže množina B je konečná.

(b) Nejprve dokážeme, že sjednocení dvou konečných množin je konečná množina. Nechť tedy C a D jsou konečné množiny. Je-li alespoň jedna z nich prázdná, pak tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že jsou obě neprázdné. Potom existují $m, n \in \mathbb{N}$, bijekce α množiny C na množinu $\{1, \dots, n\}$ a bijekce β množiny D

na množinu $\{1, \ldots, m\}$. Definujme zobrazení $\gamma\colon D \setminus C \to \{n+1, \ldots, n+m\}$ předpisem $\gamma(x) = \beta(x) + n$, $x \in D \setminus C$. Pak zobrazení $\varphi\colon C \cup D \to \{1, \ldots, n+m\}$ definované předpisem

$$\varphi(x) = \begin{cases} \alpha(x), & \text{pokud } x \in C, \\ \gamma(x), & \text{pokud } x \in D \setminus C, \end{cases}$$

je prosté zobrazení množiny $C \cup D$ do množiny $\{1, \ldots, n+m\}$, neboť zobrazení $\alpha|_C$, $\gamma|_{D\setminus C}$ jsou prostá a

$$\alpha(C) \cap \gamma(D \setminus C) \subset \{1, \ldots, n\} \cap \{n+1, \ldots, n+m\} = \emptyset.$$

Platí $\varphi(C \cup D) \subset \{1, \ldots, n+m\}$, a množina $\varphi(C \cup D)$ je tedy konečná podle již dokázané části (a). Existuje tedy $p \in \mathbb{N}$ takové, že $\varphi(C \cup D) \approx \{1, \ldots, p\}$. Podle 1.4.24 platí $C \cup D \approx \varphi(C \cup D)$, a tedy $C \cup D \approx \{1, \ldots, p\}$. Množina $C \cup D$ je tedy konečná.

Pokud je množina $\mathcal{A}$ konečná, pak je buď prázdná nebo má n prvků, kde $n \in \mathbb{N}$. V prvním případě je její sjednocení prázdnou množinou, a je tedy konečné. Ve druhém případě dokážeme tvrzení matematickou indukcí. Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro $n \in \mathbb{N}$. Nechť tedy $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_{n+1}\}$, kde A_i, $i = 1, \ldots, n+1$, jsou dané konečné množiny. Potom podle indukčního předpokladu je $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ konečnou množinou. Pak je ale množina

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = \Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \cup A_{n+1}$$

konečná podle první části důkazu. Tím je podle principu matematické indukce tvrzení dokázáno.

(c) Podobně jako v (b) stačí dokázat, že kartézský součin dvou konečných neprázdných množin A a B je konečný. Mějme $m, n \in \mathbb{N}$, bijekci α množiny A na množinu $\{1, \ldots, n\}$ a bijekci β množiny B na množinu $\{1, \ldots, m\}$. Nechť φ je zobrazení z Lemmatu 1.6.19. Pak zobrazení ψ definované předpisem

$$\psi(a, b) = \varphi\big(\alpha(a), \beta(b)\big), \quad (a, b) \in A \times B,$$

je prosté zobrazení množiny $A \times B$ do konečné množiny $\{1, \ldots, (n+m)^2 + n\}$. Množina $\psi(A \times B)$ je tedy konečná podle již dokázané části (a). Odtud plyne i konečnost množiny $A \times B$, neboť $A \times B \approx \psi(A \times B)$.

(d) Pokud je množina $f(A)$ prázdná, potom tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že $f(A)$ je neprázdná. Díky Lemmatu 1.6.8 víme, že $f(A) \preceq A$, tj. existuje prosté zobrazení $\psi\colon f(A) \to A$. Potom je množina $\psi(f(A))$ podmnožinou konečné množiny A, a je tedy podle (a) konečná. Množina $\psi(f(A))$ je navíc neprázdná, takže existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\psi(f(A)) \approx \{1, \ldots, n\}$. Poněvadž platí $\psi(f(A)) \approx f(A)$, dostáváme podle Věty 1.6.4(b),(c) $f(A) \approx \{1, \ldots, n\}$, takže $f(A)$ je konečná. ■

Nekonečné množiny.

1.6.16. Definice. Řekneme, že množina A je

- **nekonečná**, pokud není konečná,
- **spočetná**, jestliže je konečná nebo má stejnou mohutnost jako $\mathbb{N}$,
- **nespočetná**, pokud není spočetná.

1.6.17. Příkladem nekonečné množiny je množina přirozených čísel, což bude ukázáno v následující větě. Potenční množina $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ je pak podle Věty 1.6.7 příkladem nespočetné množiny.

1.6.18. Věta. Množina $\mathbb{N}$ je nekonečná.

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že $\mathbb{N}$ je konečná. Množina $\mathbb{N}$ je neprázdná, musí tedy existovat $p \in \mathbb{N}$ a bijekce f množiny $\mathbb{N}$ na množinu $\{1, \dots, p\}$. Potom $f|_{\{1,\dots,p+1\}}: \{1, \dots, p+1\} \to \{1, \dots, p\}$ je prosté, takže $\{1, \dots, p+1\} \preceq \{1, \dots, p\}$. Podle Lemmatu 1.6.10(a) pak platí $p + 1 \leq p$, což je spor. ■

Následující lemma může být poněkud překvapivé, protože ukazuje, že množinu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je možné prostě zobrazit do $\mathbb{N}$.

1.6.19. Lemma. Zobrazení $\varphi: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definované předpisem

$$\varphi(n, m) = (n + m)^2 + n$$

je prosté.

Důkaz. Předpokládejme, že platí $\varphi(n, m) = \varphi(n', m')$ pro $(n, m), (n', m') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Potom máme

$$\begin{aligned}(n' + m' + 1)^2 > (n' + m')^2 + n' = \varphi(n', m') = \varphi(n, m)\\ = (n + m)^2 + n > (n + m)^2.\end{aligned}$$

Odtud plyne nerovnost $n' + m' + 1 > n + m$. Potom máme $n' + m' \geq n + m$. Obdobně odvodíme nerovnost $n' + m' \leq n + m$. Musí tedy platit $n' + m' = n + m$. Odtud a z rovnosti $\varphi(n, m) = \varphi(n', m')$ plyne $n = n'$, a tedy také $m = m'$. Zobrazení φ je tedy prosté. ■

1.6.20. Lemma. (a) Množina A je spočetná právě tehdy, když platí $A \preceq \mathbb{N}$.

(b) Nechť A je neprázdná množina. Potom je A spočetná právě tehdy, když existuje zobrazení $f: \mathbb{N} \to A$, které je zobrazením na A.

Důkaz. (a) $\Rightarrow$ Pokud je A spočetná, pak je buď konečná, nebo $A \approx \mathbb{N}$. V prvním případě je A buď prázdná nebo existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $A \approx \{1, \dots, n\}$. Zřejmě tedy platí $A \preceq \mathbb{N}$. Pokud $A \approx \mathbb{N}$, pak také zřejmě $A \preceq \mathbb{N}$.

$\Leftarrow$ Nechť $f: A \to \mathbb{N}$ je prosté zobrazení. Pokud je množina $f(A)$ konečná, pak je podle 1.4.24 a Věty 1.6.15(d) konečná i A, a proto je množina A spočetná.

Předpokládejme nyní, že množina $f(A)$ není konečná. Budeme rekurentně konstruovat posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Podle Věty 1.5.25 existuje $\min f(A)$.

Můžeme tedy položit $n_1 = \min f(A)$. Předpokládejme, že pro $k \in \mathbb{N}$ jsou již definována čísla $n_1, \ldots, n_k \in f(A)$. Kdyby platilo $f(A) \subset \{n_1, \ldots, n_k\}$, potom by podle Věty 1.6.15(a) byla množina $f(A)$ konečná, neboť množina $\{n_1, \ldots, n_k\}$ je konečná. Množina $f(A)$ je však nekonečná, a proto množina $f(A) \setminus \{n_1, \ldots, n_k\}$ musí být neprázdná. Díky Větě 1.5.25 můžeme definovat

$$n_{k+1} = \min\bigl(f(A) \setminus \{n_1, \ldots, n_k\}\bigr).$$

Tím je konstrukce posloupnosti provedena, vizte 1.4.31. Zobrazení $\varphi\colon k \mapsto n_k, k \in \mathbb{N}$, je podle konstrukce prosté.

Ukážeme, že platí $\varphi(\mathbb{N}) = f(A)$. Z konstrukce plyne $\varphi(\mathbb{N}) \subset f(A)$. Pro spor předpokládejme, že existuje $m \in f(A) \setminus \varphi(\mathbb{N})$. Potom platí $n_k < m$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Dostáváme tak $\varphi(\mathbb{N}) \subset \{1, 2, \ldots, m\}$. Odtud plyne, že $\varphi(\mathbb{N})$ je konečná. Podle 1.4.24 platí $\varphi(\mathbb{N}) \approx \mathbb{N}$, a tedy $\mathbb{N}$ je konečná podle Věty 1.6.15(d), což je spor s Větou 1.6.18.

Víme již, že platí $\varphi(\mathbb{N}) \approx \mathbb{N}$, a tedy $f(A) \approx \mathbb{N}$. Odtud dostáváme $A \approx \mathbb{N}$, neboť $A \approx f(A)$ podle 1.4.24. Množina A je tedy spočetná.

(b) $\Rightarrow$ Podle již dokázaného bodu (a) existuje prosté zobrazení $g\colon A \to \mathbb{N}$. Množina A je neprázdná, takže můžeme nalézt prvek $a \in A$. Zobrazení $f\colon \mathbb{N} \to A$ definujeme předpisem

$$f(n) = \begin{cases} g^{-1}(n), & \text{pokud } n \in \mathcal{H}(g), \\ a, & \text{pokud } n \in \mathbb{N} \setminus \mathcal{H}(g). \end{cases}$$

Potom zřejmě $f(\mathbb{N}) = A$.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že f je zobrazením množiny $\mathbb{N}$ na množinu A. Potom podle Lemmatu 1.6.8 platí $A \preceq \mathbb{N}$. Množina A je tedy spočetná podle již dokázané části (a). ■

1.6.21. Věta (vlastnosti spočetných množin)**.**

(a) Nechť A je spočetná množina a $B \subset A$. Potom je množina B spočetná.
(b) Nechť $\mathcal{A}$ je spočetná množina, jejímiž prvky jsou spočetné množiny. Potom je množina $\bigcup \mathcal{A}$ spočetná.
(c) Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $A_1, \ldots, A_n$ jsou spočetné množiny. Potom je množina $A_1 \times \cdots \times A_n$ spočetná.
(d) Nechť A je spočetná množina a f je zobrazení. Potom je množina $f(A)$ spočetná.

Důkaz. (a) Zobrazení $\mathrm{Id}_B\colon B \to A$ je prosté, a tedy platí $B \preceq A$. Poněvadž $A \preceq \mathbb{N}$ podle Lemmatu 1.6.20(a), dostáváme $B \preceq \mathbb{N}$ podle Věty 1.6.3(b) a množina B je tedy spočetná podle Lemmatu 1.6.20(a).

(b) Označme $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \setminus \{\emptyset\}$. Potom je systém $\tilde{\mathcal{A}}$ spočetný podle již dokázaného bodu (a), neboť $\tilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$. Dále zřejmě platí $\bigcup \tilde{\mathcal{A}} = \bigcup \mathcal{A}$. Pokud $\tilde{\mathcal{A}} = \emptyset$, potom je množina $\bigcup \mathcal{A}$ prázdná, a tedy spočetná. V opačném případě existuje podle Lemmatu 1.6.20(b) zobrazení $f\colon \mathbb{N} \to \tilde{\mathcal{A}}$, které je zobrazením na $\tilde{\mathcal{A}}$. Pro každé $A \in \tilde{\mathcal{A}}$

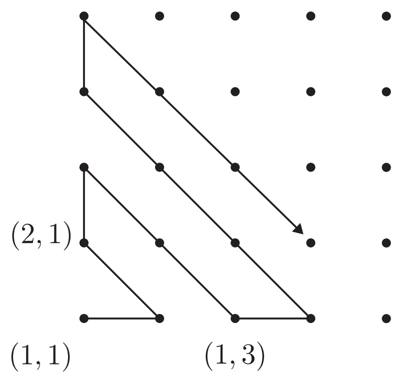
existuje opět podle Lemmatu 1.6.20(b) zobrazení $g_A\colon \mathbb{N} \to A$, které je zobrazením na A. Definujme zobrazení $\psi\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \bigcup \mathcal{A}$ předpisem $\psi(n,m) = g_{f(n)}(m)$. Zobrazení ψ je zobrazením na $\bigcup\mathcal{A}$. Pro každé $x \in \bigcup\mathcal{A}$ totiž existuje $A \in \tilde{\mathcal{A}}$ takové, že $x \in A$. Existují tedy $n,m \in \mathbb{N}$ taková, že $f(n) = A$ a $g_A(m) = x$. Potom $\psi(n,m) = g_{f(n)}(m) = g_A(m) = x$.

Podle Lemmat 1.6.19 a 1.6.20(a) je množina $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ spočetná, a tedy existuje zobrazení h množiny $\mathbb{N}$ na množinu $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ (Lemma 1.6.20(b)). Potom je zobrazení $\psi \circ h$ zobrazením množiny $\mathbb{N}$ na množinu $\bigcup\mathcal{A}$, což podle Lemmatu 1.6.20(b) dokazuje spočetnost množiny $\bigcup\mathcal{A}$.

(c) Podobně jako v důkazu bodů (b) a (c) Věty 1.6.15 stačí dokázat, že kartézský součin dvou spočetných množin A a B je spočetný. Kartézský součin $A \times B$ je roven sjednocení $\bigcup_{a\in A}\{a\}\times B$. Zřejmě platí $\{a\}\times B \approx B$. Množina $A\times B$ je tedy spočetným sjednocením spočetných množin a podle (b) je tedy spočetná.

(d) Podle Lemmatu 1.6.8 platí $f(A) \preceq A$. Protože $A \preceq \mathbb{N}$, dostáváme podle Věty 1.6.3(b) $f(A) \preceq \mathbb{N}$. Odtud plyne podle (a) spočetnost $f(A)$. ∎

1.6.22 (spočetnost $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$). V předchozím důkazu jsme mimo jiné ověřili, že množina $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ je spočetná. Spočetnost množiny podle definice vlastně znamená, že její prvky lze uspořádat do posloupnosti (konečné nebo nekonečné). Prvky množiny $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ lze tedy uspořádat do posloupnosti a následující obrázek neformálně ukazuje jednu z možností jak to učinit.



Obrázek 1.

1.6.23. Příklad. Dokažte, že množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ je spočetná.

Řešení. Množina $\mathbb{Z}$ je sjednocením množiny $\mathbb{N}$, množiny celých záporných čísel, a jednoprvkové množiny obsahující číslo 0. Množina $\mathbb{N}$ je zřejmě spočetná podle definice spočetnosti. Množina záporných celých čísel je také spočetná, neboť zobrazení $n \mapsto -n$ je bijekce této množiny na $\mathbb{N}$. Množina $\{0\}$ je jednoprvková, a tedy spočetná. Potom je množina $\mathbb{Z}$ spočetná podle Věty 1.6.21(b).

Množina $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ je tedy podle Věty 1.6.21(c) spočetná. Zobrazení $f : \mathbb{Z}\times\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ definované předpisem $f(p,q) = pq^{-1}$ zobrazuje $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ na $\mathbb{Q}$. Podle Věty 1.6.21(d) je množina $\mathbb{Q}$ spočetná. ♣

1.6.24. Množina všech reálných čísel $\mathbb{R}$ je nespočetná. Důkaz provedeme až v 3.8.28.

1.6.25. Příklad. Nechť $\mathcal{J}$ je disjunktní systém neprázdných otevřených intervalů v $\mathbb{R}$. Dokažte, že potom je systém $\mathcal{J}$ spočetný.

Řešení. Pro každé $J \in \mathcal{J}$ nalezneme podle Věty 1.5.34 racionální číslo $q_J \in J$. Pak je zobrazení definované předpisem $J \mapsto q_J$, $J \in \mathcal{J}$, prostým zobrazením množiny $\mathcal{J}$ do $\mathbb{Q}$. Platí tedy $\mathcal{J} \preceq \mathbb{Q}$. Poněvadž $\mathbb{Q}$ je spočetná, máme $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{N}$. Podle Věty 1.6.3(b) platí $\mathcal{J} \preceq \mathbb{N}$, takže podle Věty 1.6.20(a) je $\mathcal{J}$ spočetná. ♣

1.7. Vlastnosti elementárních funkcí

Reálná funkce jedné reálné proměnné (dále jen *funkce*) je zobrazení z množiny reálných čísel do množiny reálných čísel. V tomto oddílu uvedeme definice některých pojmů, které jsou důležité při zkoumání funkcí. Dále se seznámíme s *elementárními funkcemi*, tj. s polynomy, exponenciálou, logaritmem, odmocninami, obecnou mocninou, goniometrickými a cyklometrickými funkcemi. Uvedeme souhrny jejich základních vlastností, ze kterých lze odvodit všechna početní pravidla středoškolské matematiky. Tyto vlastnosti zde nebudeme odvozovat, ale v Kapitole 5.3 několik takových odvození ukážeme. Pak již není obtížné obdobně dokázat i zbývající zde uvedené vlastnosti.

1.7.1. Definice. Nechť f je funkce a $J \subset \mathcal{D}(f)$ je interval. Řekneme, že f je

- **rostoucí** na intervalu J, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$,
- **klesající** na intervalu J, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) > f(x_2)$,
- **neklesající** na intervalu J, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) \le f(x_2)$,
- **nerostoucí** na intervalu J, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) \ge f(x_2)$.

1.7.2. Upozorněme, že výrok „Funkce f je neklesající.“ není negací výroku „Funkce f je klesající.“ Existují totiž funkce, které nejsou klesající a přitom nejsou neklesající, například funkce $x \mapsto x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

1.7.3. Definice. **Monotónní funkcí** (respektive **ryze monotónní funkcí**) na intervalu J rozumíme funkci, která je neklesající nebo nerostoucí (respektive rostoucí nebo klesající) na J.

1.7.4. Definice. Řekneme, že funkce f je

- **lichá**, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $-x \in \mathcal{D}(f)$ a $f(-x) = -f(x)$,
- **sudá**, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $-x \in \mathcal{D}(f)$ a $f(-x) = f(x)$,
- **periodická** s periodou a, kde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $x + a \in \mathcal{D}(f)$, $x - a \in \mathcal{D}(f)$ a $f(x + a) = f(x)$.

1.7.5 (algebraické operace s funkcemi)**.** Nechť f a g jsou funkce s definičním oborem M a $c \in \mathbb{R}$. Pak definujeme funkce $f + g$, fg, cf s definičním oborem rovným M předpisy

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x),\\ (fg)(x) &= f(x)g(x),\\ (cf)(x) &= cf(x).\end{aligned}$$

Je-li $g(x) \neq 0$ pro každé $x \in M$, pak definujeme funkci f/g s definičním oborem rovným M předpisem

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

1.7.6. **Afinní** funkcí budeme rozumět každou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$f(x) = ax + b,$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$. Pokud je $b = 0$, říkáme, že f je **lineární**. Zde definujeme pojem lineární funkce jinak, než je obvyklé na střední škole, protože v pokročilejších matematických textech se užívá právě uvedené definice. Grafem afinní funkce je přímka, jejíž sklon je určen hodnotou a, kterou nazýváme **směrnice**.

Kvadratickou funkcí budeme rozumět každou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

Polynomiální funkcí (**polynomem**) budeme rozumět každou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{1.15}$$

kde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Čísla $a_0, \ldots, a_n$ se nazývají **koeficienty polynomu** f. **Nulovým polynomem** rozumíme konstantní nulovou funkci definovanou na $\mathbb{R}$. Afinní a kvadratické funkce tedy patří mezi polynomy.

1.7.7. Pro každý nenulový polynom P existují jednoznačně určená čísla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$, taková, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Pak říkáme, že **stupeň polynomu** P je roven n. Stupeň nulového polynomu definujeme jako -1. Stupeň polynomu P značíme $\operatorname{st} P$.

1.7.8. Reálným kořenem polynomu P rozumíme každé číslo $x \in \mathbb{R}$ splňující $P(x) = 0$. Nechť P je polynom tvaru (1.15), kde $a_n \neq 0$. Potom existuje nejvýše n reálných kořenů polynomu P.

Pro polynomy stupně 1 a 2 je možné určit hodnoty reálných kořenů pomocí následujících vzorců. Rovnice $ax + b = 0$, kde $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$, má právě jeden reálný kořen $-\frac{b}{a}$. Odvození je snadné.

Uvažujme rovnici

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1.16}$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Označme $D = b^2 - 4ac$. Číslo D nazýváme **diskriminantem** rovnice (1.16). Pokud $D > 0$, pak má rovnice právě dva reálné kořeny $\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ a $\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$. Pokud $D = 0$, pak má rovnice právě jeden reálný kořen $\frac{-b}{2a}$. Pokud $D < 0$, pak rovnice nemá reálné kořeny.

1.7.9 (dělení polynomů)**.** Nechť P a Q jsou dva polynomy, přičemž polynom Q není nulový. Pak existují jednoznačně určené polynomy R a Z takové, že $P = RQ + Z$ a $\operatorname{st} Z < \operatorname{st} Q$.

Polynomy R a Z hledáme pomocí následujícího algoritmu. Pokud $\operatorname{st} Q > \operatorname{st} P$, pak stačí položit R rovno nulovému polynomu a $Z = P$. Pokud $\operatorname{st} Q \leq \operatorname{st} P$, pak nalezneme takové $a_1 \in \mathbb{R}$ a $k_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, že $\operatorname{st}(P - a_1 x^{k_1} Q) < \operatorname{st} P$. Tento krok potom opakujeme, přičemž místo polynomu P uvažujeme polynom $P - a_1 x^{k_1} Q$, pokud nemá tento polynom stupeň menší než polynom Q. Tímto způsobem obdržíme $a_1, \dots, a_l \in \mathbb{R}$ a $k_1, \dots, k_l \in \mathbb{N}$ taková, že platí

$$\operatorname{st}\bigl(P - a_1 x^{k_1} Q - a_2 x^{k_2} Q - \cdots - a_l x^{k_l} Q\bigr) < \operatorname{st} Q.$$

Potom položíme $R(x) = a_1 x^{k_1} + \cdots + a_l x^{k_l}$ a $Z = P - RQ$.

1.7.10. Příklad. Vydělte polynom $P(x) = 2x^3 + 4x^2 - x + 2$ polynomem $Q(x) = x^2 + x + 2$.

Řešení. Budeme postupovat podle algoritmu uvedeného v 1.7.9. Polynom Q vynásobíme výrazem $2x$ a výsledek odečteme od P. Obdržíme

$$P_1(x) = P(x) - 2xQ(x) = 2x^3 + 4x^2 - x + 2 - 2x(x^2 + x + 2) = 2x^2 - 5x + 2.$$

Polynom Q vynásobíme výrazem 2 a výsledek odečteme od P_1. Obdržíme

$$P_2(x) = P_1(x) - 2Q(x) = 2x^2 - 5x + 2 - 2(x^2 + x + 2) = -7x - 2.$$

Potom máme

$$P(x) = (2x + 2)Q(x) - 7x - 2.$$

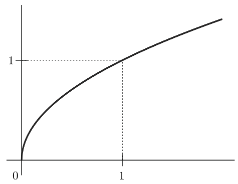
Tedy při značení z 1.7.9 máme $R(x) = 2x + 2$ a $Z(x) = -7x - 2$. ♣

1.7.11. Racionální funkcí rozumíme každou funkci tvaru P/Q, kde P, Q jsou polynomy, přičemž Q není nulový polynom. Definičním oborem takové funkce je množina $\{x \in \mathbb{R};\ Q(x) \neq 0\}$. Polynom Q není nulový, takže racionální funkce je definována v každém bodě $\mathbb{R}$ vyjma nejvýše konečně mnoha bodů (vizte 1.7.8).

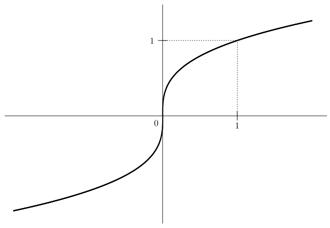
1.7.12. Nechť $k \in \mathbb{N}$. Potom k**-tou odmocninou** nazýváme inverzní funkci k funkci $x \mapsto x^k$, $x \in [0,\infty)$, je-li k sudé, a k $x \mapsto x^k$, $x \in \mathbb{R}$, je-li k liché. Značíme $x \mapsto \sqrt[k]{x}$. Definice je korektní, neboť v obou případech uvažujeme inverzní funkci k funkci, která je na svém definičním oboru rostoucí.

Funkce $x \mapsto \sqrt[k]{x}$ má tyto vlastnosti:

- $\mathcal{D}(\sqrt[k]{\ }) = [0,\infty)$ pro k sudé a $\mathcal{D}(\sqrt[k]{\ }) = \mathbb{R}$ pro k liché,
- $\mathcal{H}(\sqrt[k]{\ }) = [0,\infty)$ pro k sudé a $\mathcal{H}(\sqrt[k]{\ }) = \mathbb{R}$ pro k liché,
- $\sqrt[k]{\ }$ je rostoucí na svém definičním oboru.



Obrázek 2. Graf funkce druhá odmocnina



Obrázek 3. Graf funkce třetí odmocnina

1.7.13. **Exponenciální** funkce, kterou budeme značit exp, má definiční obor roven $\mathbb{R}$ a obor hodnot roven $(0,\infty)$. Tato funkce má následující vlastnosti:

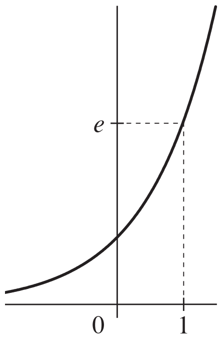
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)$,
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \exp(x) \geq 1 + x$.

Odtud lze odvodit další užitečné vlastnosti exponenciální funkce:

- exp je rostoucí funkce na $\mathbb{R}$,
- $\exp(0) = 1$,
- $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{Z}\colon\ \exp(nx) = (\exp(x))^n$,
- $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0\colon\ \exp(x) > 1$.

Hodnotu funkce exp v bodě 1 značíme symbolem e a nazýváme ji **Eulerovým číslem**.[7]

[7] Leonhard Euler (1707–1783)



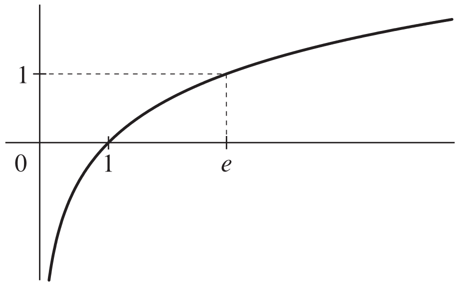
Obrázek 4. Graf exponenciální funkce

1.7.14. Logaritmická funkce, kterou budeme značit log, je funkce inverzní k funkci exponenciální. Její definiční obor je tedy roven $(0, \infty)$ a obor hodnot roven $\mathbb{R}$. Tato funkce má následující vlastnosti:

- $\forall x, y \in (0, \infty)\colon\ \log(xy) = \log(x) + \log(y)$,
- $\forall x \in (0, \infty)\colon\ \log(x) \leq x - 1$.

Odtud lze odvodit další užitečné vlastnosti logaritmické funkce:

- funkce log je rostoucí na intervalu $(0, \infty)$,
- $\log(1) = 0$,
- $\forall x \in (0, \infty)\ \forall n \in \mathbb{Z}\colon\ \log(x^n) = n \log x$,
- $\forall x \in (1, \infty)\colon\ \log(x) > 0$.



Obrázek 5. Graf funkce logaritmus

1.7.15. Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme **obecnou mocninu** a^x předpisem $a^x = \exp(x \log a)$. Pro $a \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{Z}$ jsme však symbol a^n již definovali v Označení 1.5.2(b). Pokud je $a > 0$, máme pro tento symbol dvě definice. Nová definice se však v tomto případě shoduje s předchozí definicí, neboť platí $\exp\big(n \log(a)\big) = \exp\big(\log(a^n)\big) = a^n$.

Funkce a^x je rostoucí na $\mathbb{R}$ pro $a \in (1, \infty)$ a klesající na $\mathbb{R}$ pro $a \in (0, 1)$. Pro každé $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$ platí

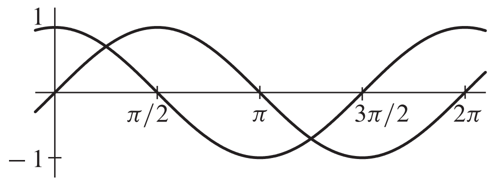
- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$,
- $(a^x)^y = a^{xy}$.

Oba vztahy snadno ověříme použitím základních vlastností exponenciální a logaritmické funkce. Platí

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= \exp\big((x + y) \log a\big) = \exp\big(x \log a + y \log a\big) \\ &= \exp\big(x \log a\big) \cdot \exp(y \log a) = a^x \cdot a^y, \\ (a^x)^y &= \exp\big(y \log(a^x)\big) = \exp\big(y \log(\exp(x \log a))\big) \\ &= \exp(yx \log a) = \exp(xy \log a) = a^{xy}. \end{aligned}$$

1.7.16 (vlastnosti čísla π a funkcí sinus a kosinus)**.** Funkce **sinus**, značíme sin, a **kosinus**, značíme cos, mají definiční obor roven $\mathbb{R}$ a obor hodnot roven intervalu $[-1, 1]$. Tyto funkce mají následující vlastnosti:

- funkce sin a cos jsou 2π-periodické,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$,
- sin je lichá funkce a cos je sudá funkce,
- číslo π je kladné, funkce sin je rostoucí na $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(0) = 0$ a $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.



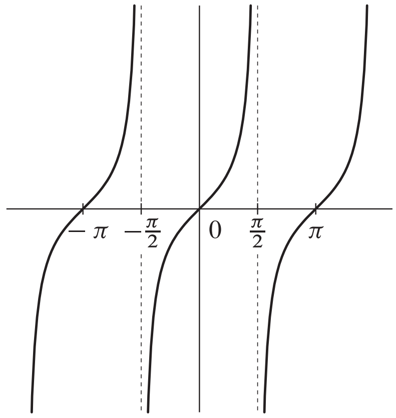
Obrázek 6. Grafy funkcí sinus a kosinus

1.7.17 (vlastnosti funkcí tangens a kotangens)**.** Funkce **tangens**, značíme tg, a **kotangens**, značíme cotg, definujeme předpisy

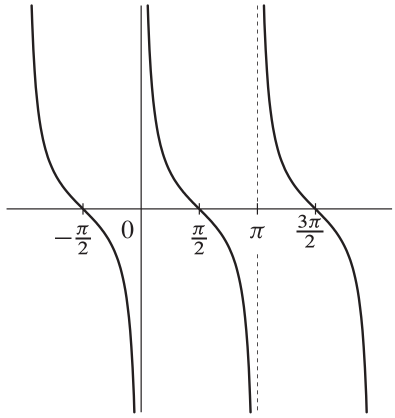
$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, & x &\in \mathbb{R} \setminus \left\{\tfrac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}, \\ \operatorname{cotg}(x) &= \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, & x &\in \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

- funkce tg a cotg jsou π-periodické,
- pro každé $x, y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ splňující $x + y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ platí

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg}(x) + \operatorname{tg}(y)}{1 - \operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y)}.$$



Obrázek 7. Graf funkce tangens



Obrázek 8. Graf funkce kotangens

1.7.18. Následující tabulka obsahuje funkční hodnoty goniometrických funkcí v některých význačných bodech.

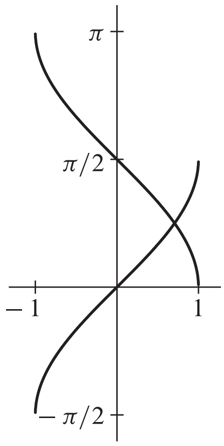
funkce	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-
cotg	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

1.7.19. Cyklometrické funkce **arkussinus** (arcsin), **arkuskosinus** (arccos), **arkustangens** (arctg) a **arkuskotangens** (arccotg) definujeme následujícím způsobem

$$\arcsin = \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}, \qquad \arccos = \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1},$$
$$\operatorname{arctg} = \left(\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1}, \qquad \operatorname{arccotg} = \left(\operatorname{cotg}|_{(0,\pi)}\right)^{-1}.$$

Definice cyklometrických funkcí jsou korektní, neboť uvažované restrikce goniometrických funkcí jsou prosté. Nyní uvedeme základní vlastnosti funkcí arkussinus a arkuskosinus:

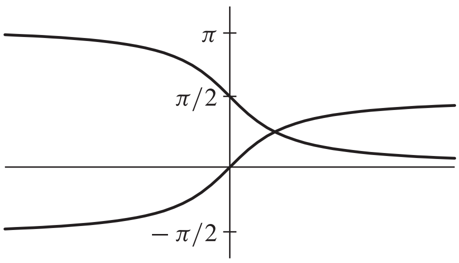
- $\mathcal{D}(\arcsin) = \mathcal{D}(\arccos) = [-1, 1]$,
- $\mathcal{H}(\arcsin) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\mathcal{H}(\arccos) = [0, \pi]$,
- funkce arcsin je lichá,
- $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $\arcsin(0) = 0$, $\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$, $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$,
- $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$, $\arccos(1) = 0$,
- $\forall x \in [-1, 1]\colon\ \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.



Obrázek 9. Grafy funkcí arkussinus a arkuskosinus

Zde jsou základní vlastnosti funkcí arkustanges a arkuskotangens:

- $\mathcal{D}(\operatorname{arctg}) = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(\operatorname{arccotg}) = \mathbb{R}$,
- $\mathcal{H}(\operatorname{arctg}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\mathcal{H}(\operatorname{arccotg}) = (0, \pi)$,
- arctg je rostoucí a lichá funkce na $\mathbb{R}$,
- $\operatorname{arctg}(0) = 0$, $\operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$
- arccotg je klesající funkce na $\mathbb{R}$,
- $\operatorname{arccotg}(0) = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arccotg}(1) = \frac{\pi}{4}$,
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$.



Obrázek 10. Grafy funkcí arkustangens a arkuskotangens

1.8. Teoretické a početní příklady

1.8.1. Příklad. Zformulujte negaci výroku

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N} : n < m. \tag{1.17}$$

pomocí postupu uvedeného v paragrafu 1.1.30. Dále rozhodněte, zda platí uvedený výrok nebo jeho negace.

Řešení. Opakovaně použijeme pravidla uvedená v paragrafu 1.1.30 k vyjádření negace uvedeného výroku.

$$\begin{aligned}
&\neg\big(\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N} : n < m\big)\\
&\exists n \in \mathbb{N} : \neg\big(\exists m \in \mathbb{N} : n < m\big)\\
&\exists n \in \mathbb{N}\, \forall m \in \mathbb{N} : \neg\big(n < m\big)\\
&\exists n \in \mathbb{N}\, \forall m \in \mathbb{N} : n \geq m
\end{aligned}$$

Poslední řádek plyne z faktu, že uspořádání $\leq$ reálných čísel, a tedy i přirozených čísel, je lineární, vizte Definici 1.4.4.

Zadané tvrzení je pravdivé, neboť k libovolnému danému přirozenému číslu n, můžeme číslo m zvolit jako $n + 1$. Číslo $n + 1$ je přirozené a je větší než n. Tím je pravdivost výroku (1.17) ověřena. ♣

1.8.2. Příklad. Zformulujte negaci výroku

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R} : (0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |x - 3| < \varepsilon) \tag{1.18}$$

pomocí postupu uvedeného v paragrafu 1.1.30. Dále rozhodněte, zda platí uvedený výrok, nebo jeho negace.

Řešení. Opakovaně použijeme pravidla uvedená v paragrafu 1.1.30 k vyjádření negace uvedeného výroku.

$$\begin{aligned}
&\neg\big(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R} : (0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |x - 3| < \varepsilon)\big)\\
&\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \neg\big(\exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R} : (0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |x - 3| < \varepsilon)\big)\\
&\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \neg\big(\forall x \in \mathbb{R} : (0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |x - 3| < \varepsilon)\big)\\
&\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \exists x \in \mathbb{R} : \neg\big(0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |x - 3| < \varepsilon\big)
\end{aligned}$$

Podle Věty 1.1.12(c) lze poslední výrok zapsat ve tvaru

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \exists x \in \mathbb{R} : (0 < |x - 1| < \delta \wedge |x - 3| \geq \varepsilon).$$

Položme $\varepsilon = 1$ a k libovolnému $\delta > 0$ definujme $x = 1 - \frac{\delta}{2}$. Platí $|x - 1| = \frac{\delta}{2}$, a tedy $0 < |x - 1| < \delta$. Navíc pro $|x - 3| = 2 + \frac{\delta}{2}$ platí $|x - 3| \geq 1 = \varepsilon$. Dokázali jsme tedy, že zadaný výrok (1.18) neplatí. ♣

1.8.3. Příklad. Nechť $V(x), x \in M$, je výroková forma. Napište negaci výroku

$$\exists! x \in M : V(x) \tag{1.19}$$

pomocí postupu uvedeného v paragrafu 1.1.30.

Řešení. Výrok (1.19) lze podle 1.1.25 zapsat ve tvaru

$$\Big(\exists x \in M : V(x)\Big) \wedge \Big(\forall y, z \in M : \big((V(y) \wedge V(z)) \Rightarrow y = z\big)\Big) \tag{1.20}$$

První výrok v předchozí konjunkci říká, že existuje alespoň jeden prvek $x \in M$ takový, že platí $V(x)$. Druhý výrok v konjunkci říká, že pokud existují prvky y a z takové, že platí $V(y)$ a $V(z)$, pak jsou si rovny. Podle 1.1.30 a Věty 1.1.12 lze zapsat negaci výroku (1.20) ve tvaru

$$\Big(\forall x \in M : \neg V(x)\Big) \vee \Big(\exists y, z \in M : \big(V(y) \wedge V(z) \wedge y \neq z\big)\Big).$$

Neformálně lze poslední výrok vyjádřit takto: buď pro žádné $x \in M$ neplatí $V(x)$, nebo existují dvě různá $y, z \in M$, pro která platí $V(y)$ a $V(z)$. ♣

1.8.4. Příklad. Nechť $A = \{x \in \mathbb{Q};\ x \geq 0 \wedge x^2 < 2\}$. Dokažte, že A je neprázdná shora omezená podmnožina $\mathbb{Q}$, která nemá *v množině* $\mathbb{Q}$ supremum.

Řešení. Množina A je zřejmě neprázdná, neboť $0 \in A$. Pro každé $x \in A$ platí $x \leq 1 < 2$ nebo $x \leq x^2 < 2$. Číslo 2 je tedy horní závorou množiny A, a proto je A shora omezená. Označme $q = \sup A$. Vzhledem k tomu, že $0 \in A$, musí platit $q \geq 0$. Pro spor předpokládejme, že $q \in \mathbb{Q}$.

Pokud platí $q < \sqrt{2}$, pak díky Větě 1.5.34 nalezneme racionální číslo $q' \in (q, \sqrt{2})$. Pak $0 \leq q < q'$ a $(q')^2 < 2$, a tedy $q' \in A$. Potom ale q není horní závorou A, což je spor.

Pokud platí $q > \sqrt{2}$, pak opět díky Větě 1.5.34 existuje $q' \in \mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, q)$. Pak pro každé $p \in A$ platí $p \leq q'$, neboť v opačném případě bychom dostali z nerovností $2 \leq (q')^2 < p^2 < 2$ spor. Racionální číslo q' je tedy horní závorou množiny A, která je ostře menší než q, což je spor s faktem, že q je nejmenší horní závorou A.

Musí tedy platit $q = \sqrt{2}$, a tedy $q^2 = 2$. To je ale spor s Příkladem 1.2.17, a proto supremum množiny A v množině $\mathbb{Q}$ neexistuje. ♣

1.8.5. Příklad. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Řešení. Provedeme přímý důkaz. Vzorec plyne z binomické věty (Věta 1.5.6), neboť pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

♣

1.8.6. Příklad (součet aritmetické řady)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} (ai + b) = \tfrac{1}{2}\big((n+1)a + 2b\big)n. \tag{1.21}$$

Řešení. Pro $n = 1$ je levá strana rovna $\sum_{i=1}^{1}(ai + b) = a + b$ a pravá $\frac{1}{2}(2a + 2b) = a + b$. Pro $n = 1$ tedy tvrzení platí. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Předpokládejme platnost vztahu (1.21) pro toto n, tj.

$$\sum_{i=1}^{n}(ai + b) = \tfrac{1}{2}\big((n + 1)a + 2b\big)n.$$

Chceme dokázat, že platí

$$\sum_{i=1}^{n+1}(ai + b) = \tfrac{1}{2}\big((n + 2)a + 2b\big)(n + 1). \tag{1.22}$$

Levou stranu (1.22) můžeme rozepsat jako

$$\sum_{i=1}^{n+1}(ai + b) = \left(\sum_{i=1}^{n}(ai + b)\right) + \big(a(n + 1) + b\big).$$

Sumu v závorkách na pravé straně ale umíme sečíst podle indukčního předpokladu. Provedením algebraických úprav pak dostaneme

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1}(ai + b) &= \frac{1}{2}\big((n + 1)a + 2b\big)n+\big(a(n + 1) + b\big)\\ &= \frac{1}{2}\big((n + 2)a + 2b\big)(n + 1).\end{aligned}$$

Tím je důkaz proveden. ♣

1.8.7. Příklad. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $2^n \geq n$.

Řešení. Pro $n = 1$ je nerovnost splněna, neboť $2^1 = 2 \geq 1$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že pro toto n nerovnost platí, tj. platí $2^n \geq n$. Potom také platí

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2n = n + n \geq n + 1.$$

Tím je nerovnost ověřena pro $n+1$ a tvrzení je podle principu matematické indukce dokázáno. ♣

1.8.8. Příklad. Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, platí $2^n \geq n^2$.

Řešení. Použijeme princip matematické indukce popsaný v 1.2.8. Tvrzení pro $n = 4$ platí, neboť $2^4 = 16 \geq 16 = 4^2$. Nyní učiníme indukční předpoklad, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, platí $2^n \geq n^2$, a budeme se snažit dokázat $2^{n+1} \geq (n + 1)^2$. Z indukčního předpokladu a Příkladu 1.2.22 plyne

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2n^2 \geq (n + 1)^2.$$

Podle principu matematické indukce tedy tvrzení platí pro všechna $n \geq 4$. ♣

1.8.9 (další varianta důkazu matematickou indukcí)**.** Nechť $V(n), n \in \mathbb{N}$, je výroková forma. Existují případy, kdy je vhodné výrok

$$\forall n \in \mathbb{N}: V(n) \tag{1.23}$$

dokázat pomocí varianty matematické indukce, která spočívá v ověření následujících tvrzení:

(a) platí $V(1)$ a $V(2)$,
(b) pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $V(n) \Rightarrow V(n+2)$.

Dokážeme, že z (a) a (b) plyne (1.23). Matematickou indukcí ověřme platnost tvrzení

$$\forall n \in \mathbb{N}: V(2n-1). \tag{1.24}$$

Pro $n = 1$ tvrzení platí, neboť platí $V(1)$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že tvrzení (1.24) platí pro toto n, tj. platí $V(2n-1)$. Podle (b) dostáváme, že platí i výrok $V(2n+1)$. Tím je podle principu matematické indukce, který byl popsán v paragrafu 1.2.7, dokázán výrok (1.24).

Obdobně dokážeme tvrzení

$$\forall n \in \mathbb{N}: V(2n). \tag{1.25}$$

Nyní ověříme platnost (1.23). Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom podle Příkladu 1.2.12 existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $n = 2k-1$ nebo $n = 2k$. V prvním případě platí (1.23) podle (1.24) a ve druhém případě platí (1.23) podle (1.25). Tím je tvrzení (1.23) dokázáno.

Použití této varianty matematické indukce ilustruje následující příklad.

1.8.10. Příklad (Bernoulliova[8] nerovnost)**.** Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\forall x \in [-2, \infty): (1+x)^n \geq 1 + nx. \tag{1.26}$$

Řešení. Provedeme důkaz pomocí matematické indukce podle 1.8.9.

Ověření bodu (a). Pro $n = 1$ vztah (1.26) zřejmě platí. Pro $n = 2$ plyne (1.26) z následující nerovnosti

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 \geq 1 + 2x,$$

která platí po každé $x \in \mathbb{R}$. Tím je ověřen bod (a) v 1.8.9.

Ověření bodu (b). Předpokládejme, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí (1.26). Použitím zřejmé nerovnosti $(1+x)^2 \geq 0$, která platí pro každé $x \in \mathbb{R}$, dostáváme z indukčního předpokladu

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+2} &= (1+x)^n(1+x)^2 \geq (1+nx)(1+x)^2 \\ &= 1 + (n+2)x + (2+x)nx^2 + x^2.\end{aligned}$$

Protože $x^2 \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $2 + x \geq 0$ pro každé $x \in [-2, \infty)$, platí $(2+x)nx^2 + x^2 \geq 0$ pro každé $x \in [-2, \infty)$. Odtud dostáváme pro každé $x \in \mathbb{R}, x \geq -2$, nerovnost $(1+x)^{n+2} \geq 1 + (n+2)x$.

Tím je podle principu matematické indukce dokázána Bernoulliova nerovnost. ♣

[8]Jacob Bernoulli (1655–1705)

1.8.11. Příklad. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Řešení. Tvrzení dokážeme pomocí matematické indukce. Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro toto n. Podle Bernoulliovy nerovnosti (Příklad 1.8.10) platí

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \cdot \frac{1}{n+1} = 2,$$

a tedy $2(n+1)^{n+1} \leq (n+2)^{n+1}$. Použijeme-li indukční předpoklad a právě odvozenou nerovnost, obdržíme

$$\begin{aligned}(n+1)! = n! \cdot (n+1) &\leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \cdot (n+1) \\ &= \frac{2 \cdot (n+1)^{n+1}}{2^{n+1}} \leq \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1}.\end{aligned}$$

♣

1.8.12 (ještě jedna varianta důkazu matematickou indukcí)**.** Nechť $V(n), n \in \mathbb{N}$, je výroková forma. Existují případy, kdy je vhodné výrok

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon V(n) \tag{1.27}$$

dokázat pomocí varianty matematické indukce, která sestává z ověření následujících tvrzení:

(a) platí $V(1)$,
(b) pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $V(n) \Rightarrow V(2n)$,
(c) pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, platí $V(n) \Rightarrow V(n-1)$.

Dokážeme, že z (a)–(c) plyne (1.27). Nejprve pomocí matematické indukce popsané v 1.2.7 odvodíme platnost výroku

$$\forall m \in \mathbb{N}\colon V(2^m). \tag{1.28}$$

Z (a) a (b) plyne platnost $V(2)$. Nechť nyní $V(2^m)$ platí pro nějaké $m \in \mathbb{N}$. Pak $2^{m+1} = 2 \cdot 2^m$, a tedy $V(2^{m+1})$ platí podle (b). Tím je tvrzení (1.28) dokázáno.

Platnost tvrzení (1.27) dokážeme sporem. Předpokládejme, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $V(n_0)$ neplatí. Položme

$$B = \{j \in \mathbb{N};\ j \leq 2^{n_0} \text{ a } V(j) \text{ neplatí}\}.$$

Číslo 1 je dolní závorou množiny B a číslo 2^{n_0} je horní závorou množiny B. Množina B je podmnožinou $\mathbb{N}$, takže z její omezenosti plyne, že je konečná. Množina B je neprázdná, neboť podle našeho předpokladu $V(n_0)$ neplatí a díky Příkladu 1.8.7 máme $n_0 \leq 2^{n_0}$, takže $n_0 \in B$. Množina B má tedy maximum podle Věty 1.6.14. Označme $G = \max B$. Platí tudíž $G + 1 \notin B$. Poněvadž podle (1.28) platí $V(2^{n_0})$, a tedy $2^{n_0} \notin B$, dostáváme $G < 2^{n_0}$. Odtud plyne, že tvrzení $V(G+1)$ platí. Podle (c) tedy platí i $V(G)$, což je spor s $G \in B$. Tím je naše tvrzení dokázáno.

Použití právě uvedené varianty matematické indukce ukážeme v následujícím příkladu.

1.8.13. Příklad (nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem). Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a pro každá $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, \infty)$ platí nerovnost

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}. \tag{1.29}$$

Řešení. Postupně ověříme (a)–(c) z 1.8.12, přičemž $V(n)$, $n \in \mathbb{N}$, je tvrzení, které říká, že pro každé $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, \infty)$ platí nerovnost (1.29).

(a) Zřejmě platí $\frac{x_1}{1} \geq \sqrt[1]{x_1} = x_1$.

(b) Nejprve ověříme platnost nerovnosti (1.29) pro $n = 2$. Pro libovolné $A, B \in [0, \infty)$ platí podle Příkladu 1.2.11

$$\frac{A + B}{2} \geq \sqrt{AB}. \tag{1.30}$$

Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Nyní předpokládejme, že pro toto n platí $V(n)$. Budeme dokazovat tvrzení $V(2n)$. Mějme $x_1, x_2, \dots, x_{2n} \in [0, \infty)$. Použijeme indukční předpoklad nejprve pro n-tici $x_1, \dots, x_n$ a poté pro n-tici $x_{n+1}, \dots, x_{2n}$. Dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n}}{2n} &= \frac{1}{2}\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} + \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}}{n}\right) \\ &\geq \frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n}}\right). \end{aligned} \tag{1.31}$$

Nerovnost (1.30) použijeme pro nezáporná čísla

$$A = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \quad \text{a} \quad B = \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n}}.$$

Obdržíme nerovnost

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n}}\right) \geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \cdot \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n}}}.$$

Tento odhad spolu s (1.31) dává

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n}}{2n} &\geq \frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n}}\right) \\ &\geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \cdot \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n}}} \\ &= \sqrt[2n]{x_1 x_2 \cdots x_{2n}}. \end{aligned}$$

Tím je dokázáno tvrzení $V(2n)$, a tedy i bod (b).

(c) Zvolme $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Předpokládejme, že pro toto n platí $V(n)$. Budeme dokazovat tvrzení $V(n-1)$. Nechť $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ jsou libovolná nezáporná reálná čísla. Označme

$$D = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n - 1}.$$

Použijeme indukční předpoklad pro n-tici čísel $y_1, \dots, y_n$ definovanou předpisem

$$y_1 = x_1,\ y_2 = x_2,\ \dots,\ y_{n-1} = x_{n-1},\ y_n = D.$$

Z indukčního předpokladu pak plyne, že

$$\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} \geq \sqrt[n]{y_1 y_2 \cdots y_n}. \tag{1.32}$$

Dále platí

$$\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} = \frac{(n-1)D + D}{n} = D \qquad \text{a}$$

$$\sqrt[n]{y_1 y_2 \cdots y_n} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} \cdot \sqrt[n]{D}.$$

Pak můžeme přepsat (1.32) ve tvaru

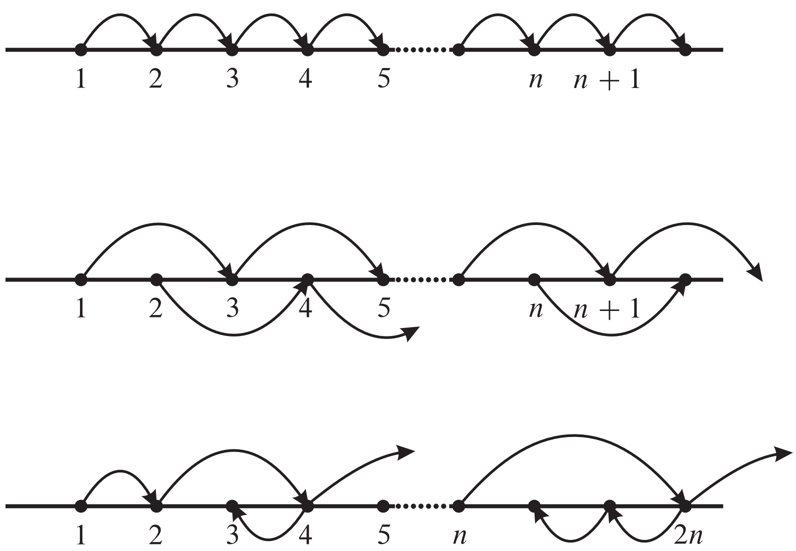
$$D \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}}\,\sqrt[n]{D}.$$

Odtud odvodíme

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1} = D \geq \left(\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}}\right)^{\frac{1}{1-\frac{1}{n}}} = \sqrt[n-1]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}},$$

čímž jsme dokázali tvrzení $V(n-1)$, a tedy i bod (c) varianty matematické indukce z 1.8.12. Tím je nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dokázána. ♣

1.8.14. Poznámka. Nechť $V(n), n \in \mathbb{N}$, je výroková forma. Následující obrázky neformálně zachycují, jak ve variantách matematické indukce z paragrafů 1.2.7, 1.8.9 a 1.8.12 dochází k ověřování platnosti výroků $V(n)$.



Obrázek 11.

1.8.15. Příklad. Ukažte, že každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, je dělitelné prvočíslem.

Řešení. Použijeme úplnou matematickou indukci (vizte 1.2.9). Číslo 2 je prvočíslo, a proto pro $n = 2$ tvrzení platí. Zvolme $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro každé $k \in \mathbb{N}$ splňující $2 \leq k \leq n$. Nechť D je množina všech $d \in \mathbb{N}, 2 \leq d \leq n$, která dělí $n + 1$. Pokud je D prázdná množina, pak je $n + 1$ prvočíslo, a indukční krok je v tomto případě hotov, neboť prvočíslo $n + 1$ dělí $n + 1$. Předpokládejme tedy, že $D \neq \emptyset$. Zvolme $d \in D$. Podle indukčního předpokladu existuje prvočíslo p, které dělí d. Protože d dělí $n + 1$, dělí p také $n + 1$ a tvrzení je dokázáno. ♣

1.8.16. Příklad (Eukleidés[9]). Ukažte, že množina všech prvočísel je nekonečná.

Řešení. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že existuje pouze konečně mnoho prvočísel. Nechť $p_1, p_2, \dots, p_k$ jsou všechna prvočísla. Položme $p = (p_1 p_2 \cdots p_k) + 1$. Tvrdíme, že p je prvočíslo. Pokud by tomu tak totiž nebylo, existovalo by $i \in \{1, \dots, k\}$ takové, že p_i dělí p (Příklad 1.8.15). Tedy $p = p_i n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Pak ale

$$1 = p - p_1 \cdots p_k = p_i n - p_1 \cdots p_k = p_i (n - p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_k),$$

takže p_i dělí 1, což je spor. Tedy p je prvočíslo, které je však větší než libovolné z prvočísel $p_1, \dots, p_k$. To je ale spor s naším předpokladem. ♣

1.8.17. Příklad (vlastnosti průniku). Nechť A, B, C a D jsou množiny. Dokažte, že potom platí:

(a) $\emptyset \cap A = \emptyset$,
(b) $A \cap A = A$,
(c) $A \cap B = B \cap A$,
(d) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
(e) $A \cap B \subset A$,
(f) jestliže $C \subset A$ a $C \subset B$, pak $C \subset (A \cap B)$,
(g) $A = A \cap B$ právě tehdy, když $A \subset B$.

Řešení. Tvrzení snadno plynou přímo z definic průniku a inkluze. Dokažme však alespoň tvrzení (g). Je-li $A \subset B$, pak z (f) máme $A \subset A \cap B$, protože $A \subset B$ i $A \subset A$. Obrácená inkluze plyne z (e). Tedy $A = A \cap B$.

K důkazu obrácené implikace předpokládejme platnost rovnosti $A = A \cap B$. Pak z (e) plyne $A = A \cap B \subset B$. ♣

1.8.18. Příklad (vlastnosti sjednocení). Nechť A, B, C a D jsou množiny. Dokažte, že potom platí:

(a) $\emptyset \cup A = A$,
(b) $A \cup A = A$,
(c) $A \cup B = B \cup A$,
(d) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
(e) $A \subset A \cup B$,
(f) jestliže $A \subset C$ a $B \subset C$, pak $(A \cup B) \subset C$,

[9] Eukleidés (asi 325 př. n. l.–asi 260 př. n. l.)

(g) $A = A \cup B$ právě tehdy, když $B \subset A$.

Řešení. Tvrzení plynou snadno z definic sjednocení a inkluze. ♣

1.8.19. Příklad (obraz množiny a množinové operace)**.** Nechť A, B jsou množiny a f je zobrazení. Dokažte, že platí:

(a) pokud $A \subset B$, pak $f(A) \subset f(B)$,
(b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
(c) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Ukažte, že inkluzi nelze obecně nahradit rovností.

Řešení. (a) Předpokládejme, že $y \in f(A)$. Potom existuje $x \in A$ takové, že $f(x) = y$. Pak platí také $x \in B$, a tedy $y = f(x) \in f(B)$. Tím je inkluze $f(A) \subset f(B)$ dokázána.

(b) Protože $A \subset A \cup B$, platí podle již dokázaného tvrzení (a), že $f(A) \subset f(A \cup B)$. Obdobně máme $f(B) \subset f(A \cup B)$. Tedy $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

Nyní dokážeme opačnou inkluzi. Je-li $y \in f(A \cup B)$, potom existuje $x \in A \cup B$ takové, že $f(x) = y$. Pak buď $x \in A$, a tedy $y = f(x) \in f(A)$, nebo $x \in B$, a pak $y = f(x) \in f(B)$. V obou případech, které se nemusí vylučovat, dostáváme $y \in f(A) \cup f(B)$. Tedy $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$. Dohromady tedy platí $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(c) Poněvadž platí $A \cap B \subset A$ a $A \cap B \subset B$, dostáváme podle tvrzení (a), že $f(A \cap B) \subset f(A)$ a $f(A \cap B) \subset f(B)$. Odtud pak plyne $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Dokážeme, že inkluzi nelze obecně nahradit rovností. Uvažujme množiny $X = Y = \{0, 1\}$, zobrazení $f : X \to Y$ definované předpisem $f(0) = f(1) = 0$ a množiny $A = \{0\}$, $B = \{1\}$. Pak $A \cap B = \emptyset$, a tedy $f(A \cap B) = \emptyset$, ale $f(A) = f(B) = \{0\}$, takže $f(A) \cap f(B) = \{0\}$. Tudíž $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$. ♣

1.8.20. Příklad (vzor množiny a množinové operace)**.** Nechť A, B jsou množiny a f je zobrazení. Dokažte, že platí:

(a) pokud $A \subset B$, pak $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$,
(b) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
(c) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$,
(d) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

Řešení. (a) Jestliže $x \in f^{-1}(A)$, potom $f(x) \in A$. Pak také $f(x) \in B$, a tedy $x \in f^{-1}(B)$.

(b) Podle bodu (a) platí $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(A \cup B)$ a $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B)$. Odtud plyne inkluze $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B)$.

Předpokládejme, že platí $x \in f^{-1}(A \cup B)$. Potom $f(x) \in A \cup B$. Platí tedy $f(x) \in A$ nebo $f(x) \in B$. V prvním případě platí $x \in f^{-1}(A)$ a ve druhém $x \in f^{-1}(B)$. Platí tedy $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

(c) a (d) Důkazy lze provést obdobně jako v předchozích případech. ♣

1.8.21. Příklad (další vlastnosti obrazu a vzoru)**.** Nechť f je zobrazení. Dokažte, že platí:

(a) pokud $A \subset \mathcal{D}(f)$, pak $A \subset f^{-1}(f(A))$,
(b) pokud $B \subset \mathcal{H}(f)$, pak $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$.
(c) f je prosté právě tehdy, když pro každou množinu $A \subset \mathcal{D}(f)$ platí $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$.

Řešení. (a) Nechť $A \subset \mathcal{D}(f)$. Jestliže $x \in A$, potom $x \in \mathcal{D}(f)$ a $f(x) \in f(A)$. Pak dostáváme $x \in f^{-1}(f(A))$.

(b) Nechť $B \subset \mathcal{H}(f)$. Pokud $y \in B$, pak existuje $x \in \mathcal{D}(f)$ takové, že $f(x) = y$. Potom $x \in f^{-1}(B)$, a tedy $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$. Předpokládejme nyní $y \in f(f^{-1}(B))$. Potom existuje $x \in f^{-1}(B)$ takové, že $f(x) = y$. Odtud plyne $y = f(x) \in B$, což dokazuje druhou inkluzi.

(c) Nechť $f: X \to X$ je prosté a $A \subset X$. Z (a) víme, že $A \subset f^{-1}(f(A))$. Mějme tedy $x \in f^{-1}(f(A))$. Pak existuje $x' \in A$ takové, že $f(x) = f(x')$. Protože zobrazení f je prosté, platí $x = x'$, a tedy $x \in A$.

Není-li f prosté, existují dva různé prvky $x, x' \in X$ takové, že $f(x) = f(x')$. Položme $A = \{x\}$. Pak $x' \in f^{-1}(f(A))$, a tedy $A \neq f^{-1}(f(A))$. ♣

1.8.22. Příklad. Nechť množiny A, B splňují $A \approx B$. Dokažte, že platí $\mathcal{P}(A) \approx \mathcal{P}(B)$.

Řešení. Podle předpokladu existuje bijekce φ množiny A na množinu B. Zobrazení $\Phi: \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ budeme definovat následujícím způsobem. Pro $X \in \mathcal{P}(A)$ definujeme prvek $\Phi(X)$ množiny $\mathcal{P}(B)$ jako množinu $\varphi(X)$. Ověříme, že Φ je bijekce.

Zobrazení Φ je prosté. Nechť $X_1, X_2 \in \mathcal{P}(A)$ a platí $\Phi(X_1) = \Phi(x_2)$. Potom podle definice Φ platí, že obrazy množin X_1 a X_2 při zobrazení φ se rovnají, tj., $\varphi(X_1) = \varphi(X_2)$. Vzhledem k tomu, že φ je bijekce platí díky Příkladu 1.8.21(c)

$$X_1 = \varphi^{-1}\big(\varphi(X_1)\big) = \varphi^{-1}\big(\varphi(X_2)\big) = X_2,$$

čímž je prostota Φ ověřena.

Zobrazení Φ je na $\mathcal{P}(B)$. Nechť $Y \in \mathcal{P}(B)$. Potom $\varphi^{-1}(Y) \in \mathcal{P}(A)$ a s použitím Příkladu 1.8.21(b) platí $\Phi\big(\varphi^{-1}(Y)\big) = \varphi\big(\varphi^{-1}(Y)\big) = Y$. Tím je tvrzení dokázáno. ♣

1.8.23. Příklad (hustota $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dokažte, že potom existuje $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ takové, že $a < z < b$.

Důkaz. Podle Věty 1.5.34 existuje racionální číslo $y \in (a, b)$. Podle téže věty aplikované na interval (y, b) nalezneme racionální číslo $y' \in (y, b)$. Položme $z = y + \frac{y'-y}{\sqrt{2}}$. Protože $\sqrt{2} > 1$, máme

$$a < y < z = y + \frac{y' - y}{\sqrt{2}} < y + (y' - y) = y' < b.$$

Kdyby bylo číslo z racionální, pak by také číslo $\sqrt{2} = \frac{y'-y}{z-y}$ bylo racionální, což by bylo ve sporu s Příkladem 1.2.17. Číslo z je tedy iracionální, a tím je tvrzení dokázáno. ■

1.8.24. Příklad. Určete supremum a infimum množiny $M = \left\{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

Řešení. Protože zřejmě $\max M = 1$, platí podle Věty 1.5.23(a) také $\sup M = 1$. Dále platí, že všechny prvky v M jsou kladné, a tak je 0 dolní závorou M. Dokážeme, že

$$\forall y \in \mathbb{R}, y > 0\ \exists x \in M : x < y.$$

Zvolme $y \in \mathbb{R}, y > 0$. Podle Věty 1.5.30 nalezneme $n \in \mathbb{N}$ splňující $n > \frac{1}{y}$. Pak $\frac{1}{n} \in M$ a $\frac{1}{n} < y$. Tím jsme pro číslo 0 ověřili podmínky (c) a (d) z 1.5.16, a platí tedy $\inf M = 0$. ♣

1.8.25. Příklad. Určete supremum a infimum množiny $M = [0, 1)$.

Řešení. Protože $\min M = 0$, platí podle Věty 1.5.23(b) také $\inf M = 0$.

Zřejmě je 1 horní závorou M. Dokážeme

$$\forall y \in \mathbb{R}, y < 1\ \exists x \in [0, 1) : y < x.$$

Zvolme $y \in \mathbb{R}$, $y < 1$. Položme $x = \max\{0, \frac{1}{2}(1 + y)\}$. Potom $x \in M$ a z nerovnosti $y < 1$ dále plyne $y < \frac{1}{2}(1 + y)$. Tedy $y < x$. Podle 1.5.16 je tedy $\sup M = 1$. ♣

1.8.26. Příklad. Určete supremum a infimum množiny $M = \left\{\frac{p}{p+q};\ p, q \in \mathbb{N}\right\}$.

Řešení. Pro $p, q \in \mathbb{N}$ platí $\frac{p}{p+q} \in (0, 1)$. Tedy 0 je dolní závora M a 1 je horní závora M.

Ověření $\inf M = 0$. Platnost podmínky (c) z 1.5.16 jsme již ověřili. Pro ověření druhé podmínky máme dokázat

$$\forall y \in \mathbb{R}, y > 0\ \exists p, q \in \mathbb{N} : y > \frac{p}{p+q}.$$

Zvolme $y \in \mathbb{R}, y > 0$. Položíme $p = 1$ a nalezneme pomocí Věty 1.5.30 $q \in \mathbb{N}$ splňující $q > \frac{1}{y} - 1$. Pak $\frac{p}{p+q} = \frac{1}{1+q} < y$. Odtud plyne $\inf M = 0$.

Ověření $\sup M = 1$. Podmínka (a) z 1.5.16 je splněna, neboť 1 je horní závorou M. Pro ověření podmínky (b) máme dokázat

$$\forall y \in \mathbb{R}, y < 1\ \exists p, q \in \mathbb{N} : y < \frac{p}{p+q}.$$

Položme $q = 1$ a zvolme $y \in \mathbb{R}, y < 1$. Podle Věty 1.5.30 nalezneme $p \in \mathbb{N}$ splňující $p > \frac{y}{1-y}$. Pak platí $\frac{p}{p+q} = \frac{p}{p+1} > y$. Ověřili jsme, že $\sup M = 1$. ♣

1.8.27. Příklad. Uvažujme funkci $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in (0, \infty)$.

(a) Dokažte, že funkce f je klesající na $(0, 1]$ a rostoucí na $[1, \infty)$.
(b) Dokažte, že funkce $g = f|_{(0,1]}$, $h = f|_{[1,\infty)}$ jsou prosté.
(c) Dokažte, že platí $\mathcal{H}(f) = \mathcal{H}(g) = \mathcal{H}(h) = [2, \infty)$. Nalezněte inverzní funkci k funkcím g a h.

(d) Nalezněte $f \circ f$ a $\mathcal{H}(f \circ f)$.

Řešení. (a) Zvolme $x, y \in (0, 1]$ taková, že $x < y$. Potom $1 < \frac{1}{xy}$, a tedy

$$y - x < \frac{y - x}{xy} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}.$$

Odtud plyne $f(y) < f(x)$. Funkce f je tedy klesající na intervalu $[0, 1)$.

Nyní zvolme $x, y \in [1, \infty)$ splňující $x < y$. Potom $1 > \frac{1}{xy}$ a obdobně jako výše odtud plyne, že f je rostoucí na $[1, \infty)$.

(b) Funkce g je klesající na $(0, 1]$ a funkce h rostoucí na $[1, \infty)$. Jsou tedy prosté.

(c) Z (a) plyne $\mathcal{H}(f) \subset [f(1), \infty) = [2, \infty)$, a tedy také $\mathcal{H}(g) \subset [2, \infty)$.

Zvolme $y \in [2, \infty)$. Položme

$$x = \frac{1}{2}\Big(y - \sqrt{y^2 - 4}\Big).$$

Potom $x \in (0, 1]$ a $g(x) = y$. Tedy $[2, \infty) \subset \mathcal{H}(g)$. Z výše uvedeného plyne $\mathcal{H}(g) = [2, \infty)$. Dále platí $g^{-1}(y) = \frac{1}{2}\Big(y - \sqrt{y^2 - 4}\Big)$, $y \in [2, \infty)$.

Nyní položme

$$x = \frac{1}{2}\Big(y + \sqrt{y^2 - 4}\Big).$$

Potom $x \in [1, \infty)$ a $h(x) = y$. Tedy $[2, \infty) \subset \mathcal{H}(h)$. Z výše uvedeného plyne $\mathcal{H}(h) = [2, \infty)$. Dále platí $h^{-1}(y) = \frac{1}{2}\Big(y + \sqrt{y^2 - 4}\Big)$, $y \in [2, \infty)$.

(d) Protože $\mathcal{H}(f) = [2, \infty) \subset (0, \infty)$, je $f \circ f$ dobře definované a pro každé $x \in (0, \infty)$ platí

$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) = f\big(f(x)\big) &= x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x + \frac{1}{x}} \\ &= \frac{x^2 + 1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1}.\end{aligned}$$

Dále platí podle (c) a (a)

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(f \circ f) = f\Big(f\big((0, \infty)\big)\Big) &= f\big([2, \infty)\big) \\ &\subset [f(2), \infty) = \big[\tfrac{5}{2}, \infty\big).\end{aligned}$$

Zvolme $z \in \big[\frac{5}{2}, \infty\big)$. Po dle (c) existuje $y \in [1, \infty)$ splňující $f(y) = z$. Protože je h rostoucí, platí $y \geq 2$. Opět podle (c) existuje $x \in [1, \infty)$ splňující $f(x) = y$. Tedy

$$(f \circ f)(x) = f\big(f(x)\big) = f(y) = z,$$

takže $\mathcal{H}(f \circ f) \supset \big[\frac{5}{2}, \infty\big)$. Platí tedy $\mathcal{H}(f \circ f) = \big[\frac{5}{2}, \infty\big)$. ♣

KAPITOLA 2

Limita posloupnosti

2.1. Nekonečné posloupnosti

V běžném životě se často setkáváme s posloupnostmi reálných čísel. Může jít například o posloupnost měření teploty vzduchu, o posloupnost makroekonomických dat a podobně. Takové posloupnosti sestávají z konečného počtu členů. Definice konečné posloupnosti reálných čísel vypadá následovně (srovnejte s Definicí 1.4.30(a)).

2.1.1. Definice. **Konečnou posloupností** reálných čísel rozumíme každé zobrazení množiny $\{1, \dots, k\}$, kde $k \in \mathbb{N}$, do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$. Pokud $n \mapsto a_n$, $n \in \{1, \dots, k\}$, je takové zobrazení, pak je značíme $\{a_n\}_{n=1}^k$. Číslo a_n, kde $n \in \{1, \dots, k\}$, nazýváme ***n*-tým členem** posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^k$.

V řadě modelů z různých vědních oborů se používají i posloupnosti, které mají nekonečný počet členů. Zde je formální definice (srovnejte s Definicí 1.4.30(b)).

2.1.2. Definice. **Nekonečnou posloupností** reálných čísel rozumíme každé zobrazení $n \mapsto a_n, n \in \mathbb{N}$, množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$. Takovou posloupnost obvykle značíme $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, případně jen $\{a_n\}$. Číslo a_n nazýváme ***n*-tým členem** této posloupnosti.

V této kapitole budeme posloupností rozumět vždy nekonečnou posloupnost reálných čísel.

2.1.3 (posloupnost versus množina členů)**.** Symbol $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ označuje posloupnost, tedy zobrazení definované na $\mathbb{N}$ s hodnotami v $\mathbb{R}$, zatímco symbol $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ značí množinu všech členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, jde tedy o podmnožinu $\mathbb{R}$. Známe-li $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, pak známe i $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, ale nikoli naopak. Zadání posloupnosti kromě informace o oboru hodnot totiž navíc udává pořadí prvků z tohoto oboru. Například posloupnosti $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$ a $\{b_n\} = \{(-1)^{n+1}\}$ jsou sice různé, ale mají stejné množiny členů, neboť $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\} = \{b_n;\ n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$.

Množina všech členů konstantní posloupnosti (vizte Definici 1.5.19) je jednoprvková. Dalšími jednoduchými příklady posloupností, s nimiž se ještě setkáme, jsou $\{n\}$ a $\{\frac{1}{n}\}$. Množinu všech členů posloupnosti tvoří v prvním případě množina $\mathbb{N}$, ve druhém případě množina $\{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$.

V následujících třech příkladech jsou posloupnosti zadány rekurentně (vizte 1.4.31).

2.1.4. Fibonacciova[1] posloupnost je dána následujícím způsobem: $a_1 = 1, a_2 = 1$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, platí $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$. Zde je prvních osm členů této posloupnosti: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21. Další informace o Fibonacciově posloupnosti lze nalézt například v knize [**5**].

2.1.5 (posloupnost všech prvočísel)**.** Položme $p_1 = 2$. Předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ již máme definován člen p_n. Podle Příkladu 1.8.16 je množina prvočísel nekonečná, a proto je množina $A_n = \{k \in \mathbb{N};\ k > p_n, k \text{ je prvočíslo}\}$ neprázdná. Podle Věty 1.5.25 má tato množina nejmenší prvek. Položme $p_{n+1} = \min A_n$. Tím jsme rekurentně definovali nekonečnou posloupnost $\{p_n\}$, kde p_n je n-té prvočíslo, tedy $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$, $p_6 = 13, \dots$ Určit n-tý člen této posloupnosti pro dané $n \in \mathbb{N}$ je obecně velice obtížné. Další informace o prvočíslech je možné nalézt například v knize [**7**].

Zadání posloupnosti může být někdy velice osobité, jak ukazuje následující příklad.

2.1.6. Posloupnost, označovaná v anglicky psané literatuře výrazem **look and say sequence**, jejíž začátek má tvar

$$1,\ 11,\ 21,\ 1211,\ 111221,\ \dots,$$

je zadána následujícím předpisem: $a_1 = 1$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ dostaneme hodnotu členu a_{n+1} „speciálním přečtením“ číslic v dekadickém zápisu členu a_n. Člen $a_1 = 1$ přečteme jako „jedna jednička“, což zapíšeme ve tvaru $a_2 = 11$. Člen a_2 přečteme jako „dvě jedničky“ a dostaneme $a_3 = 21$. Tímto způsobem postupujeme dále. Například člen a_6 získáme přečtením členu $a_5 = 111221$ ve formě „tři jedničky, dvě dvojky, jedna jednička“, takže $a_6 = 312211$. Posloupnost je tedy zadána rekurentně a přesná formulace její definice by vyžadovala ještě jisté úsilí. Další informace o této kuriózní posloupnosti lze nalézt například v článku [**6**].

Posloupnost chápeme jako zobrazení, neboť jde o zobrazení množiny přirozených čísel do množiny čísel reálných. Následující definice je tedy jenom opakováním Definice 1.5.19 pro posloupnost.

2.1.7. Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **shora omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,
- **zdola omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je zdola omezená,
- **omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je omezená.

2.1.8. Posloupnost $\{a_n\}$ je shora omezená právě tehdy, když existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq K$. Podobně posloupnost $\{a_n\}$ je zdola omezená právě tehdy, když existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq K$. Konečně omezenost posloupnosti $\{a_n\}$ je charakterizována v následujícím lemmatu.

[1] Leonardo Fibonacci (asi 1170–1250)

2.1.9. Lemma. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Pak $\{a_n\}$ je omezená právě tehdy, když existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| \le K$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Díky omezenosti množiny $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ nalezneme čísla $A, B \in \mathbb{R}$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $A \le a_n \le B$. Položme $K = \max\{|A|, |B|\}$. Pak zřejmě platí $-K \le a_n \le K$, a tedy $|a_n| \le K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

$\Leftarrow$ Nechť $K \in \mathbb{R}$ splňuje $|a_n| \le K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak $-K \le a_n \le K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy množina členů posloupnosti $\{a_n\}$ je omezená. ■

Následující definice je obdobou Definice 1.7.1 pro posloupnosti.

2.1.10. Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **rostoucí**, jestliže pro každá $n, m \in \mathbb{N}, n < m$, platí $a_n < a_m$,
- **klesající**, jestliže pro každá $n, m \in \mathbb{N}, n < m$, platí $a_n > a_m$,
- **neklesající**, jestliže pro každá $n, m \in \mathbb{N}, n < m$, platí $a_n \le a_m$,
- **nerostoucí**, jestliže pro každá $n, m \in \mathbb{N}, n < m$, platí $a_n \ge a_m$.

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je **monotónní**, jestliže je nerostoucí nebo neklesající. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je **ryze monotónní**, jestliže je rostoucí, nebo klesající.

2.1.11. Upozorněme, že výrok „Posloupnost $\{a_n\}$ je neklesající." není negací výroku „Posloupnost $\{a_n\}$ je klesající." Například posloupnost $\{(-1)^n\}$ není klesající, avšak není ani neklesající. Podobně je tomu s výroky „Posloupnost $\{a_n\}$ je nerostoucí." a „Posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí." Srovnejte s 1.7.2.

2.1.12. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Potom $\{a_n\}$ je rostoucí právě tehdy, když pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < a_{n+1}$. Implikaci $\Leftarrow$ lze dokázat snadno matematickou indukcí, opačná implikace je zřejmá. Obdobná tvrzení platí i pro ostatní typy monotonie.

2.2. Vlastní limita posloupnosti

2.2.1 (motivace pojmu limita)**.** (a) Uvedeme dva jednoduché modely z oblasti bankovnictví. Klient banky si u ní uloží částku ve výši a korun českých s ročním úrokem p procent. Po uplynutí jednoho roku bude tedy zůstatek na účtu roven $(1+\tilde{p})a$, kde $\tilde{p} = \frac{p}{100}$. Na konci n-tého roku bude potom zůstatek a_n roven $(1+\tilde{p})^n a$. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tedy vyjadřuje vývoj stavu konta na konci jednotlivých let.

Ve druhém příkladě půjčí banka klientovi částku ve výši a korun českých s úrokem p procent na dobu jednoho roku. Po uplynutí lhůty musí tedy dlužník zaplatit částku $(1+\tilde{p})a$, kde opět $\tilde{p} = \frac{p}{100}$. Pokud by banka rozdělila rok na dvě půlroční úrokovací období, byla by dlužná částka na konci prvního půlroku rovna $(1+\frac{\tilde{p}}{2})a$ a na konci roku by musel klient zaplatit částku $(1+\frac{\tilde{p}}{2})^2 a$. Pokud by banka rozdělila rok na n stejně dlouhých úrokovacích období, musel by klient na konci roku zaplatit částku $b_n = \left(1+\frac{\tilde{p}}{n}\right)^n a$.

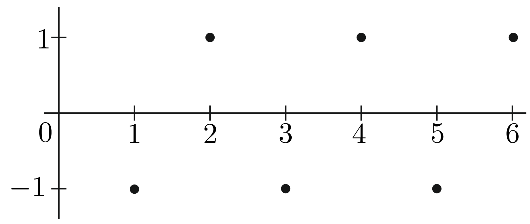
Budou hodnoty a_n a b_n s rostoucím n růst? Pokud ano, mohou růst „nade všechny meze" nebo se budou „blížit" k nějaké hodnotě? K zodpovězení těchto otázek použijeme výsledky, které odvodíme v této kapitole.

(b) Pomocí posloupnosti s nekonečným počtem členů můžeme také aproximovat hodnotu jistého čísla A, které je pro nás z nějakého důvodu zajímavé. Členy takové posloupnosti by měly s rostoucím n stále přesněji aproximovat hodnotu A. Takto postupoval Archimédés ([**2**]), když počítal délku obvodu kruhu přibližně pomocí obvodu pravidelného mnohoúhelníka. Čím měl mnohoúhelník více stran, tím byl jeho obvod lepším přiblížením skutečnému obvodu kruhu.

V uvedených příkladech, ke kterým se ještě později vrátíme (vizte 2.3.35 a **??**), jsme neformálně užili slov „blížit se" a „přibližovat se" o členech posloupnosti. V této kapitole dáme těmto obratům přesný matematický význam zavedením pojmu limita posloupnosti. Pojem limity má pro matematickou analýzu zásadní význam a v tomto textu se s ním budeme setkávat téměř neustále.

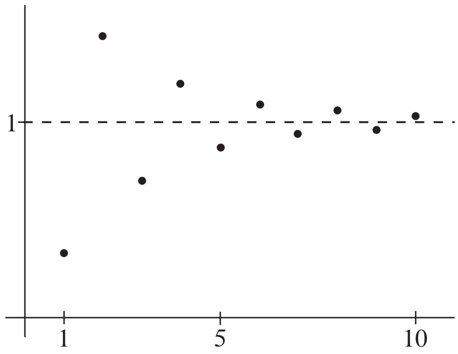
Definice limity.

2.2.2 (intuitivní pojem limity)**.** Uvažujme posloupnost $\{a_n\}$ definovanou předpisem $a_n = (-1)^n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Zdá se být zřejmé, že pro tuto posloupnost nelze nalézt nějaké reálné číslo, k němuž by se její členy „blížily" (vizte Obrázek 1).



Obrázek 1.

Nechť nyní $a_n = 1 + (-\frac{2}{3})^n$, $n \in \mathbb{N}$. Následující obrázek zachycuje chování prvních deseti členů této posloupnosti.



Obrázek 2.

V tomto případě se naopak zdá, že členy posloupnosti $\{a_n\}$ se s rostoucím n „blíží“ k číslu 1. Tento intuitivní náhled nyní vyjádříme pomocí matematicky přesných pojmů.

2.2.3. Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu rovnou** A, jestliže platí

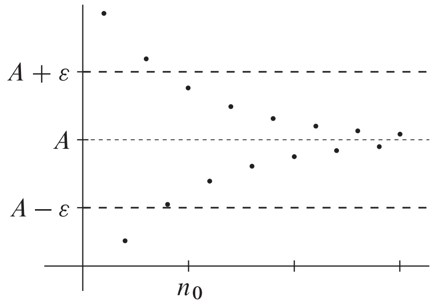
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \colon |a_n - A| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

2.2.4. Chceme-li tvrdit, že limitou posloupnosti $\{a_n\}$ je reálné číslo A, musíme ověřit podmínku (2.1). Pro libovolné zadané kladné číslo ε musíme nalézt přirozené číslo (index) n_0 takové, aby byla odchylka každého členu posloupnosti s indexem n větším nebo rovným tomuto n_0 od hodnoty A menší než ε, tedy $|a_n - A| < \varepsilon$. Jinými slovy, pro libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, hledáme takové $n_0 \in \mathbb{N}$, aby platil výrok

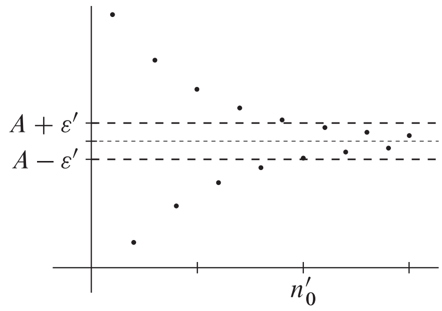
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon |a_n - A| < \varepsilon. \tag{2.2}$$

Nalezené n_0 bude obecně záviset na volbě ε. Vizte následující dva obrázky.

Na Obrázku 3 vidíme jednu z možných voleb čísla n_0 pro zadané ε. Na Obrázku 4 bylo zadáno ε' menší než ε. Pro toto nové zadání ovšem index n_0 již podmínku (2.2) nesplňuje, neboť existuje $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, pro které nerovnost $|a_n - A| < \varepsilon'$ neplatí. Proto musíme nalézt jiný index n_0' (větší než n_0), aby podmínka (2.2), kde ε je zaměněno za ε' a n_0 je zaměněno za n_0', byla splněna.



Obrázek 3.



Obrázek 4.

2.2.5 (formule jako hra). Na ověřování podmínky (2.1) je možné také nahlížet jako na hru, v níž se utkají dva hráči. První hráč (náš protivník) volí v prvním tahu hry kladné reálné číslo ε. Naším úkolem (v roli druhého hráče) je zvolit ve druhém tahu hry přirozené číslo n_0. Ve třetím (posledním) tahu hry volí první hráč přirozené číslo n splňující $n \geq n_0$. Pokud $|a_n - A| \geq \varepsilon$, vyhrává první hráč, v opačném případě vítězíme my. Pokud dokážeme vyhrát libovolnou takovou partii, je limitou posloupnosti $\{a_n\}$ číslo A. Všimněme si, že ve druhém tahu volíme n_0, aniž bychom věděli, které n zvolí náš protivník v tahu následujícím. Tato skutečnost odpovídá pořadí kvantifikátorů v podmínce (2.1).

2.2.6. Věta (jednoznačnost limity). Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost, která má limitu rovnou $A \in \mathbb{R}$ a zároveň má limitu rovnou $B \in \mathbb{R}$. Potom platí $A = B$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle definice limity existují přirozená čísla n_A, n_B taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_A$, je $|a_n - A| < \varepsilon$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_B$, je $|a_n - B| < \varepsilon$. Položme $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$. Potom platí $n_0 \geq n_A$ i $n_0 \geq n_B$, a tedy $\left|a_{n_0} - A\right| < \varepsilon$ i $\left|a_{n_0} - B\right| < \varepsilon$. Odtud a z trojúhelníkové nerovnosti (1.10) máme

$$\begin{aligned} |A - B| &= \left|A - a_{n_0} + a_{n_0} - B\right| \\ &\leq \left|A - a_{n_0}\right| + \left|a_{n_0} - B\right| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Protože $|A - B| < 2\varepsilon$ pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, je podle Lemmatu 1.5.14 $|A - B| = 0$, neboli $A = B$. ∎

2.2.7. Označení. Jestliže má posloupnost $\{a_n\}$ limitu rovnou nějakému reálnému číslu, pak je tato limita podle Věty 2.2.6 určena jednoznačně a označujeme ji symbolem $\lim_{n\to\infty} a_n$. Je-li limitou posloupnosti $\{a_n\}$ reálné číslo A, pak píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ nebo $a_n \overset{n\to\infty}{\to} A$. Nehrozí-li nedorozumění, píšeme někdy pouze $\lim a_n = A$ nebo $a_n \to A$.

2.2.8. K zavedení symbolu $\lim a_n$ potřebujeme tvrzení Věty 2.2.6. Kdyby totiž posloupnost měla více než jednu limitu, pak by nebylo jasné, co symbol $\lim a_n$ vlastně označuje a rovnost $\lim a_n = A$ by nedávala smysl.

2.2.9. Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že $\{a_n\}$ **konverguje** (je **konvergentní**), jestliže existuje $A \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim a_n = A$, neboli platí

$$\exists A \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon |a_n - A| < \varepsilon.$$

Je-li posloupnost konvergentní, říkáme též, že má **vlastní limitu**. Jestliže posloupnost nemá vlastní limitu, pak říkáme, že **diverguje** (je **divergentní**).

2.2.10. Příklad. Nechť $c \in \mathbb{R}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = c$. Dokažte, že $\lim a_n = c$.

Řešení. Zvolme libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Položme $n_0 = 1$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, máme $|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$, takže podle definice limity dostáváme $\lim a_n = c$. ♣

Následující příklad ukazuje, že hodnota limity konvergentní posloupnosti nemusí být prvkem množiny jejích členů.

2.2.11. Příklad. Dokažte, že $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Řešení. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Podle Archimédovy vlastnosti reálných čísel (Věta 1.5.30) nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ dále platí $\frac{1}{n} > 0$, a tedy $\frac{1}{n} > -\varepsilon$. Odtud plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $-\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon$, neboli $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$. To podle definice limity znamená, že $\lim \frac{1}{n} = 0$. ♣

2.2.12. Příklad. Dokažte, že $\lim \frac{n}{n+2} = 1$.

Řešení. Nejprve si uvědomíme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left|\frac{n}{n+2} - 1\right| = \left|\frac{n-(n+2)}{n+2}\right| = \left|\frac{-2}{n+2}\right| = \frac{2}{n+2}.$$

Zvolme libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $0 < \frac{2}{n_0+2} < \varepsilon$. Tuto vlastnost má jakékoli $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $n_0 > \frac{2}{\varepsilon} - 2$. Existence takového n_0 vyplývá z Archimédovy vlastnosti reálných čísel (Věta 1.5.30). Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, zřejmě platí $\frac{2}{n+2} \leq \frac{2}{n_0+2} < \varepsilon$. Pro tato $n \in \mathbb{N}$ dostáváme

$$\left|\frac{n}{n+2} - 1\right| = \frac{2}{n+2} \leq \frac{2}{n_0+2} < \varepsilon.$$

Podle definice limity tedy platí $\lim \frac{n}{n+2} = 1$. ♣

2.2.13. Negaci výroku „Posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní.“ lze podle 1.1.30 zapsat ve tvaru

$$\forall A \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon |a_n - A| \geq \varepsilon.$$

Máme-li dokázat, že zadaná posloupnost nemá vlastní limitu, pak musíme pro každé $A \in \mathbb{R}$ ukázat, že A není limitou této posloupnosti. Předpokládáme tedy, že A je libovolné reálné číslo a v závislosti na něm volíme vhodné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Tento postup předvedeme v následujících dvou příkladech.

2.2.14. Příklad. Dokažte, že posloupnost $\{n^4\}$ nemá vlastní limitu.

Řešení. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme pro spor, že $\lim n^4 = A \in \mathbb{R}$. Pro $\varepsilon = 1$ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že platí

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon |n^4 - A| < \varepsilon = 1. \tag{2.3}$$

S pomocí Archimédovy vlastnosti (Věta 1.5.30) nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n \geq \max\{|A| + 1, n_0\}$. Pak platí $n^4 \geq n \geq |A| + 1$, a tedy podle Důsledku 1.5.12(a) platí

$$|n^4 - A| \geq n^4 - |A| \geq |A| + 1 - |A| = 1 = \varepsilon,$$

což je spor s (2.3). ♣

2.2.15. Příklad. Dokažte, že posloupnost $\{(-1)^n\}$ nemá vlastní limitu.

Řešení. Nechť A je libovolné reálné číslo. Položme $\varepsilon = 1$. Je-li $A \geq 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$, pak volíme liché $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Potom platí

$$|(-1)^n - A| = |-1 - A| = 1 + A \geq 1 = \varepsilon.$$

Je-li $A < 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$, pak volíme sudé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Potom platí

$$|(-1)^n - A| = |1 - A| = 1 - A \geq 1 = \varepsilon.$$

Posloupnost $\{(-1)^n\}$ tedy nemá vlastní limitu.

Na rozdíl od Příkladu 2.2.14, kdy bylo možné za ε zvolit jakékoliv kladné číslo, nelze při řešení Příkladu 2.2.15 volit ε libovolně. Například volba $\varepsilon = 3$ by k řešení nevedla. Číslo ε zde musíme zvolit „dostatečně malé“. ♣

V Příkladu 2.2.12 jsme na základě definice ověřili, že číslo 1 je opravdu limitou posloupnosti $\left\{\frac{n}{n+2}\right\}$ ve smyslu Definice 2.2.3. V Příkladech 2.2.14 a 2.2.15 jsme užili této definice k důkazu neexistence vlastní limity příslušných posloupností. Definice sama nám ale nedává návod, jak limitu vypočítat. V další části této kapitoly odvodíme věty, které objasní základní vlastnosti limit a dále budou užitečné při výpočtech limit konkrétních posloupností.

2.2.16. Věta. Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$ a existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_n = b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$. Pak platí $\lim b_n = A$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_2 \in \mathbb{N}$ splňující

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_2\colon\ |a_n - A| < \varepsilon.$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|b_n - A| = |a_n - A| < \varepsilon$. Tedy $\lim b_n = A$. ■

2.2.17. Předcházející větu lze formulovat i následujícím způsobem. Změníme-li u dané konvergentní posloupnosti $\{a_n\}$ konečně mnoho členů, pak má nově vzniklá posloupnost $\{b_n\}$ stejnou limitu jako posloupnost $\{a_n\}$. Pokud je totiž množina $\{n \in \mathbb{N};\ a_n \neq b_n\}$ konečná, potom je omezená, a tedy existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí $a_n = b_n$.

Díky tomuto pozorování můžeme zesílit výsledek Příkladu 2.2.10. Nechť $c \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}$ je posloupnost a existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí $a_n = c$. Potom $\lim a_n = c$, jak vyplývá z Příkladu 2.2.10 a Věty 2.2.16.

Nyní zformulujeme několik podmínek ekvivalentních podmínce (2.1) v definici limity posloupnosti. Často je totiž snazší ověřit některou z těchto podmínek než podmínku původní.

2.2.18. Lemma. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost a $A \in \mathbb{R}$. Pak $\lim a_n = A$ právě tehdy, když existuje $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, takové, že platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon |a_n - A| < K\varepsilon. \tag{2.4}$$

Důkaz. $\Rightarrow$ Z definice limity plyne, že (2.4) platí pro $K = 1$.

$\Leftarrow$ Nechť $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, je číslo splňující (2.4). Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položme $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{K}$. Podle (2.4) k tomuto ε' existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - A| < K\varepsilon' = \varepsilon$. K zadanému $\varepsilon > 0$ jsme tedy našli $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, máme $|a_n - A| < \varepsilon$. Jinými slovy, platí $\lim a_n = A$. ■

2.2.19. Lemma. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost a $A \in \mathbb{R}$. Potom $\lim a_n = A$ právě tehdy, když existuje $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_0 > 0$, takové, že platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon |a_n - A| < \varepsilon. \tag{2.5}$$

Důkaz. $\Rightarrow$ Položme $\varepsilon_0 = 1$. Potom (2.5) plyne z definice limity a 1.1.26(a), kde klademe $M_1 = (0, \infty)$, $M_2 = (0, 1)$ a $V(\varepsilon)$ je výroková forma

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon |a_n - A| < \varepsilon.$$

$\Leftarrow$ Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položme $\varepsilon' = \min\{\varepsilon, \frac{\varepsilon_0}{2}\}$. Potom $\varepsilon' \in (0, \varepsilon_0)$, a tedy podle (2.5) k němu existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - A| < \varepsilon' \leq \varepsilon$. Tedy $\lim a_n = A$. ■

2.2.20. Z Lemmatu 2.2.19 plyne, že pro ověření existence vlastní limity posloupnosti stačí vyšetřit jen ε z intervalu $(0, \varepsilon_0)$, kde ε_0 je dáno. Stačí se tedy zabývat jen „malými hodnotami“ ε, což v dalším textu usnadní některé důkazy.

2.2.21. V definici limity posloupnosti (Definice 2.2.3) může být nerovnost $n \geq n_0$ ekvivalentně nahrazena nerovností $n > n_0$. Podobně nerovnost $|a_n - A| < \varepsilon$ může být ekvivalentně nahrazena nerovností $|a_n - A| \leq \varepsilon$. První z těchto tvrzení je snadné. Pro důkaz druhého tvrzení si nejprve uvědomíme, že z podmínky (2.1) triviálně plyne výrok

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon |a_n - A| \leq \varepsilon. \tag{2.6}$$

Jestliže naopak platí (2.6), potom

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon |a_n - A| < 2\varepsilon.$$

Odtud pomocí Lemmatu 2.2.18 vyplývá (2.1).

Následující dvě věty ukazují vztahy mezi limitami posloupností $\{a_n\}$ a $\{|a_n|\}$.

2.2.22. Věta. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost, $A \in \mathbb{R}$ a $\lim a_n = A$. Pak $\lim |a_n| = |A|$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon\ |a_n - A| < \varepsilon.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí podle Důsledku 1.5.12(a) odhad $\big||a_n| - |A|\big| \leq |a_n - A| < \varepsilon$. Celkem tedy máme

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon\ \big||a_n| - |A|\big| < \varepsilon.$$

To ale podle definice znamená, že $\lim |a_n| = |A|$. ■

2.2.23. Opačná implikace ve Větě 2.2.22 obecně neplatí. Například posloupnost $\{(-1)^n\}$ nemá vlastní limitu (vizte Příklad 2.2.15), ale $\lim |(-1)^n| = \lim 1 = 1$. Pokud ovšem $A = 0$, pak opačná implikace platí, jak ukazuje následující věta.

2.2.24. Věta. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Potom $\lim a_n = 0$ právě tehdy, když $\lim |a_n| = 0$.

Důkaz. Podle definice limity je $\lim a_n = 0$ právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon\ |a_n| < \varepsilon,$$

zatímco $\lim |a_n| = 0$ právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon\ \big||a_n|\big| < \varepsilon.$$

Protože $\big||a_n|\big| = |a_n|$, jsou oba výroky ekvivalentní. ■

Nyní se budeme věnovat vztahu mezi existencí vlastní limity a omezeností posloupnosti.

2.2.25. Věta. Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost. Potom je $\{a_n\}$ omezená.

Důkaz. Podle předpokladu existuje $A \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim a_n = A$. Položme $\varepsilon = 1$. Podle definice limity nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, je $|a_n - A| < 1$. Množina $\{|a_n|;\ n \in \mathbb{N}, n < n_0\}$ je konečná, a tedy je podle Věty 1.6.14 omezená. Nechť $M \in \mathbb{R}$ je její horní závora. Potom podle Věty 1.5.11 pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí

$$|a_n| \leq |a_n - A| + |A| < 1 + |A|,$$

a tedy

$$|a_n| \leq \begin{cases} M, & \text{pokud } n \in \mathbb{N}, 1 \leq n < n_0, \\ |A| + 1, & \text{pokud } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0. \end{cases}$$

Nyní položme $K = \max\{M, |A| + 1\}$. Pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| \leq K$, a $\{a_n\}$ je tedy omezená. ■

2.2.26. (a) Z Věty 2.2.25 vyplývá, že každá neomezená posloupnost je divergentní.

(b) Omezenost posloupnosti není postačující podmínkou pro její konvergenci. Například posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená, avšak není konvergentní.

Limita vybrané posloupnosti.

2.2.27. Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost a $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ nazýváme **vybranou posloupností** z posloupnosti $\{a_n\}$, případně **podposloupností** posloupnosti $\{a_n\}$.

2.2.28. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Následující posloupnosti jsou vybranými posloupnostmi z posloupnosti $\{a_n\}$:

- posloupnost $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ členů s „lichým indexem“ a posloupnost $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ členů se „sudým indexem“, kde příslušnými posloupnostmi $\{n_k\}$ jsou po řadě $\{2k-1\}$ a $\{2k\}$,
- posloupnost $\{a_{k+1}\}_{k=1}^{\infty}$, kde $n_k = k+1$, $k \in \mathbb{N}$,
- posloupnost $\{a_{k^2}\}_{k=1}^{\infty}$, kde $n_k = k^2$, $k \in \mathbb{N}$,
- posloupnost $\{a_{p_k}\}_{k=1}^{\infty}$, kde p_k je k-té prvočíslo, $k \in \mathbb{N}$.

Posloupnost $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ v Definici 2.2.27 určuje výběr těch členů posloupnosti $\{a_n\}$, které se objeví v podposloupnosti $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Posloupnost $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ musí být podle definice rostoucí. Například posloupnost $a_3, a_2, a_1, a_4, a_5, a_6, \ldots$ obecně neurčuje podposloupnost posloupnosti $\{a_n\}$.

2.2.29. Nechť $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$. Uvažujme podposloupnosti $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{a_{k^2}\}_{k=1}^{\infty}$. Posloupnost $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ je konstantní a splňuje $\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = -1$. Také posloupnost $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ je konstantní a splňuje $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = 1$. Konečně posloupnost $\{a_{k^2}\}_{k=1}^{\infty}$ splývá s původní posloupností, a tedy je divergentní.

Pro divergentní posloupnost $\{(-1)^n\}$ jsme nalezli dvě její konvergentní podposloupnosti s různými limitami a jednu její divergentní podposloupnost. Posloupnosti vybrané z divergentní posloupnosti mohou tedy konvergovat k různým limitám nebo mohou divergovat. Pro posloupnosti vybrané z konvergentní posloupnosti je situace jednodušší, jak ukazuje následující věta.

2.2.30. Věta (limita vybrané posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost, $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$ a $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Potom $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.

K důkazu věty budeme potřebovat následující lemma.

2.2.31. Lemma. Nechť $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $n_k \geq k$.

Důkaz. Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k. Protože $n_1 \in \mathbb{N}$, zřejmě máme $n_1 \geq 1$. Předpokládejme, že pro $k \in \mathbb{N}$ platí $n_k \geq k$. Potom platí $n_{k+1} > n_k \geq k$, neboť $\{n_k\}$ je rostoucí. Z Lemmatu 1.5.29 plyne, že $n_{k+1} \geq k+1$. Tím je tvrzení podle principu matematické indukce dokázáno. ■

Důkaz Věty 2.2.30. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n^* \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n^*\colon\ |a_n - A| < \varepsilon. \tag{2.7}$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}, k \geq n^*$, platí díky Lemmatu 2.2.31 nerovnost $n_k \geq k \geq n^*$, a tedy podle (2.7) dostaneme $\left|a_{n_k} - A\right| < \varepsilon$. Tím je věta dokázána. ■

2.2.32. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Jestliže existují dvě podposloupnosti posloupnosti $\{a_n\}$ mající různé vlastní limity, pak je $\{a_n\}$ divergentní. Kdyby totiž posloupnost $\{a_n\}$ měla vlastní limitu A, pak by obě podposloupnosti musely mít podle Věty 2.2.30 limitu A, což by byl spor.

2.2.33. Úvaha z předchozího odstavce nám umožňuje dokázat, že limita posloupnosti $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$ neexistuje, jiným způsobem, než to bylo provedeno v Příkladu 2.2.15. Podle 2.2.29 je totiž $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = 1$ a $\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = -1$. Nalezli jsme dvě podposloupnosti s různými limitami, a tedy $\lim(-1)^n$ neexistuje.

Aritmetika limit. V další části tohoto oddílu ukážeme, jak pojem limity souvisí s aritmetickými operacemi.

2.2.34. Věta (aritmetika limit). Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$ a $\lim b_n = B \in \mathbb{R}$. Potom platí:

(a) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,
(b) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,
(c) je-li $B \neq 0$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $b_n \neq 0$, pak $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.

Důkaz. (a) Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle definice limity existují přirozená čísla n_A, n_B taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_A$, je $|a_n - A| < \varepsilon$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_B$, je $|b_n - B| < \varepsilon$. Položíme-li $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí obě uvedené nerovnosti.

Z trojúhelníkové nerovnosti (Věta 1.5.11) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (A + B)| &= |(a_n - A) + (b_n - B)| \\ &\leq |a_n - A| + |b_n - B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Dokazované tvrzení tedy vyplývá z Lemmatu 2.2.18 pro $K = 2$.

(b) Před vlastním ověřením tvrzení podle definice limity provedeme několik přípravných úvah. Posloupnost $\{b_n\}$ je konvergentní, a je tedy podle Věty 2.2.25 omezená. Jinými slovy, existuje $L \in \mathbb{R}$, $L > 0$, takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|b_n| \leq L$. Úpravou výrazu $a_n b_n - AB$ a použitím trojúhelníkové nerovnosti (Věta 1.5.11) dostáváme pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &= |a_n b_n - b_n A + b_n A - AB| \\ &\leq |a_n b_n - b_n A| + |b_n A - AB| \\ &= |b_n||a_n - A| + |A||b_n - B| \\ &\leq L|a_n - A| + |b_n - B|. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Nyní zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Stejně jako v bodě (a) nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - A| < \varepsilon$ a $|b_n - B| < \varepsilon$. Tudíž pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí díky (2.8) $|a_n b_n - AB| < (L + |A|)\varepsilon$. Dokazované tvrzení tedy vyplývá z Lemmatu 2.2.18 pro $K = L + |A|$.

(c) Obdobnými úpravami jako v důkazech předchozích tvrzení dostáváme pro každé $n \in \mathbb{N}$ nerovnosti

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| &= \left|\frac{a_n B - b_n A}{b_n B}\right| = \left|\frac{a_n B - AB + AB - Ab_n}{b_n B}\right| \\ &\leq \left|\frac{a_n B - AB}{b_n B}\right| + \left|\frac{AB - Ab_n}{b_n B}\right| \\ &= \frac{1}{|b_n|}\,|a_n - A| + \frac{|A|}{|b_n|\,|B|}\,|b_n - B|.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Podle definice limity nalezneme ke kladnému číslu $\frac{1}{2}\,|B|$ takové $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$|B - b_n| < \tfrac{1}{2}\,|B|. \tag{2.10}$$

Podle Důsledku 1.5.12(a) a (2.10) pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$\big||B| - |b_n|\big| \leq |B - b_n| < \tfrac{1}{2}\,|B|. \tag{2.11}$$

Vzhledem k tomu, že navíc platí $|B| - |b_n| \leq \big||B| - |b_n|\big|$, dostáváme podle (2.11) pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, nerovnost $|B| - |b_n| < \frac{1}{2}\,|B|$, a tedy také

$$\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|B|}. \tag{2.12}$$

Položme

$$K = \max\left\{\frac{2}{|B|}, \frac{2\,|A|}{B^2}\right\}. \tag{2.13}$$

Pak podle (2.9), (2.12) a (2.13) máme pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| &\leq \frac{2}{|B|}\,|a_n - A| + \frac{2\,|A|}{B^2}\,|b_n - B| \\ &\leq K\big(|a_n - A| + |b_n - B|\big).\end{aligned} \tag{2.14}$$

Nyní zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí $|a_n - A| < \varepsilon$ a $|b_n - B| < \varepsilon$. Položme $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_2$, potom díky (2.14) máme

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| < 2K\varepsilon.$$

Dokazované tvrzení pak plyne z Lemmatu 2.2.18. ■

V dalším textu se budeme někdy odkazovat na dílčí tvrzení (a), (b), (c) Věty 2.2.34 po řadě jako na větu o limitě součtu, větu o limitě součinu a větu o limitě podílu.

2.2.35. Příklad. Dokažte, že platí $\lim \frac{1}{n^2} = 0$.

Řešení. Tvrzení vyplývá z Příkladu 2.2.11 a věty o limitě součinu (Věta 2.2.34(b)) pro posloupnosti $\{a_n\} = \{b_n\} = \{\frac{1}{n}\}$. ♣

2.2.36. Podstatným předpokladem věty o aritmetice limit (Věta 2.2.34) je konvergence posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$. Uvedeme několik příkladů.

- Nechť $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$ a $\{b_n\} = \{(-1)^n\}$. Pak jsou obě posloupnosti divergentní, ale $\lim a_n b_n = 1$.
- Nechť $\{a_n\} = \{n^2\}$ a $\{b_n\} = \{\frac{1}{n}\}$, a tedy $\{a_n b_n\} = \{n\}$. Pak $\{a_n\}$ a $\{a_n b_n\}$ divergují podle Věty 2.2.25 a $\{b_n\}$ konverguje podle Příkladu 2.2.11.
- Nechť $\{a_n\} = \{n\}$ a $\{b_n\} = \{\frac{1}{n^2}\}$. Pak $\{a_n\}$ diverguje, $\{b_n\}$ konverguje podle Příkladu 2.2.35 a $\{a_n b_n\} = \{\frac{1}{n}\}$ konverguje.

Situace vypadá obdobně i v případě ostatních aritmetických operací. Konstrukce příslušných příkladů není obtížná.

V dalším výkladu se nám budou hodit následující obecnější verze vět o limitě součtu a limitě součinu.

2.2.37. Věta. Nechť $l \in \mathbb{N}$ a pro každé $j \in \{1, \dots, l\}$ je $\{a_n^j\}_{n=1}^\infty$ posloupnost splňující $\lim_{n\to\infty} a_n^j = A_j \in \mathbb{R}$. Potom platí:

(a) $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^l a_n^j = \sum_{j=1}^l A_j$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^l a_n^j = \prod_{j=1}^l A_j$.

Důkaz. (a) Použijeme matematickou indukci. Pro $l = 1$ je tvrzení zřejmé. Předpokládejme nyní jeho platnost pro $l \in \mathbb{N}$. Mějme posloupnosti $\{a_n^1\}, \dots, \{a_n^{l+1}\}$ s limitami $A_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, l+1$. Podle indukčního předpokladu platí

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{l} a_n^j = \sum_{j=1}^{l} A_j. \tag{2.15}$$

Dále máme

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{l+1} a_n^j &= \lim_{n\to\infty} \Big(\big(\sum_{j=1}^{l} a_n^j\big) + a_n^{l+1} \Big) \\ &= \Big(\sum_{j=1}^{l} A_j \Big) + A_{l+1} = \sum_{j=1}^{l+1} A_j, \end{aligned}$$

přičemž druhá rovnost plyne z (2.15) a Věty 2.2.34(a).

(b) Tvrzení lze dokázat obdobně. ■

2.2.38. Příklad. Vypočítejte $\lim \frac{n^2+n}{2n^2+7}$.

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{n^2+n}{2n^2+7} = \frac{n^2+n}{2n^2+7} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{7}{n^2}}.$$

Podle Příkladu 2.2.10 je $\lim_{n\to\infty} 1 = 1$ a podle Příkladu 2.2.11 je $\lim \frac{1}{n} = 0$. Tedy $\lim\bigl(1 + \frac{1}{n}\bigr) = 1$. Podobně odvodíme $\lim\bigl(2 + \frac{7}{n^2}\bigr) = 2$. Podle věty o limitě podílu (Věta 2.2.34(c)) dostáváme

$$\lim \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{7}{n^2}} = \frac{\lim(1+\frac{1}{n})}{\lim(2+\frac{7}{n^2})} = \frac{1}{2}.$$

Při počítání limit posloupností obvykle zapisujeme výpočet stručněji. V našem příkladu by zkrácený zápis vypadal následovně:

$$\begin{aligned} \lim \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{7}{n^2}} &= \frac{\lim(1+\frac{1}{n})}{\lim(2+\frac{7}{n^2})} \qquad (2.16)\\ &= \frac{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim \frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty} 7 \cdot \lim \frac{1}{n^2}} \qquad (2.17)\\ &= \frac{1+0}{2+7\cdot 0} = \frac{1}{2}. \qquad (2.18) \end{aligned}$$

Napíšeme-li v průběhu výpočtu nejprve rovnost (2.16), musíme si být vědomi toho, že zatím nevíme, zda tato rovnost platí. Rovnost bude platit, pokud ukážeme, že obě limity ve zlomku na pravé straně existují vlastní a limita ve jmenovateli je nenulová. Podobně rovnost (2.17) bude platit, pokud ukážeme, že všechny limity jsou vlastní a výsledný výraz ve jmenovateli je nenulový. Hodnoty limit ve výrazu (2.17) však již známe a výpočet (2.18) ukazuje, že výraz ve jmenovateli je nenulový. Dostáváme tak platnost první rovnosti v (2.18), a díky tomu i platnost rovnosti (2.17). Odtud potom dostáváme platnost rovnosti (2.16), a tím korektnost celého řešení.

Při počítání limit musíme každý krok výpočtu zdůvodnit. Někdy jde jen o algebraickou úpravu počítaného výrazu, často pak používáme větu o aritmetice limit, případně již vypočítané limity. Bez zdůvodnění *není řešení úplné*. Později v pokročilejších částech skript již nebudeme podrobná zdůvodnění uvádět, což ale neznamená, že jsme je neprovedli. ♣

Následující výsledek obsahuje jednoduché, ale užitečné tvrzení o limitě posloupnosti definované jako součin omezené posloupnosti a posloupnosti s nulovou limitou.

2.2.39. Věta. Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, $\lim a_n = 0$ a $\{b_n\}$ je omezená. Potom $\lim a_n b_n = 0$.

Důkaz. Protože $\{b_n\}$ je omezená, existuje $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, splňující pro každé $n \in \mathbb{N}$ nerovnost $|b_n| \le K$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Protože $\lim a_n = 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$, platí $|a_n| = |a_n - 0| < \varepsilon$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$, tudíž platí

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = |a_n|\,|b_n| < K\varepsilon.$$

Tedy podle Lemmatu 2.2.18 platí $\lim a_n b_n = 0$. ■

2.2.40. Tvrzení Věty 2.2.39 neplyne z věty o limitě součinu (Věta 2.2.34(b)), protože posloupnost $\{b_n\}$ nemusí mít vlastní limitu.

2.2.41. Příklad. Dokažte, že $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Řešení. Tvrzení plyne z Věty 2.2.39, neboť posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená a platí $\lim \frac{1}{n} = 0$. ♣

Limita a uspořádání. V předchozích větách jsme uvedli několik důležitých souvislostí mezi pojmem limity a operacemi na množině reálných čísel. Nyní se zaměříme na vztah mezi limitou a uspořádáním reálných čísel.

2.2.42. Věta (limita a uspořádání)**.** Nechť $A, B \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti splňující $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$.

(a) Nechť $A < B$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n < b_n$.

(b) Nechť existuje $n^* \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n^*$, platí $a_n \geq b_n$. Potom $A \geq B$.

Důkaz. (a) Položme $\varepsilon = \frac{1}{2}(B-A)$. Pak podle definice limity existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_1$, platí $a_n < A + \varepsilon$. Dále opět podle definice limity existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_2$, platí $b_n > B - \varepsilon$. Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí

$$a_n < A + \varepsilon = \frac{A+B}{2} = B - \varepsilon < b_n,$$

čímž je tvrzení (a) dokázáno.

(b) Předpokládejme pro spor, že platí $A < B$. Potom podle tvrzení (a) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n < b_n$. Položme $m = \max\{n_0, n^*\}$. Pak dostáváme $a_m < b_m \leq a_m$, což je spor. ■

2.2.43. Věta 2.2.42 nám poskytuje možnost odhadnout shora nebo zdola hodnotu limity dané posloupnosti, o níž víme, že konverguje, ale jejíž limitu neznáme, pomocí jiné posloupnosti, jejíž limitu známe.

V tvrzení Věty 2.2.42(b) nelze nerovnosti $a_n \geq b_n$ a $A \geq B$ nahradit nerovnostmi $a_n > b_n$ a $A > B$. Položme například $\{a_n\} = \{\frac{1}{n}\}$ a $\{b_n\} = \{0\}$. Potom zřejmě platí $a_n > b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, máme však $\lim a_n = \lim b_n = 0$.

2.2.44. Věta (o dvou strážnících)**.** Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou posloupnosti splňující:

(a) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n \leq c_n \leq b_n$,

(b) $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou konvergentní a platí $\lim a_n = \lim b_n$.

Potom je $\{c_n\}$ konvergentní a platí $\lim c_n = \lim a_n$.

Důkaz. Označme $\lim a_n = A$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu podle předpokladu (b) nalezneme $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_1$, platí

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

a pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_2$, platí

$$A - \varepsilon < b_n < A + \varepsilon.$$

Položme $n_3 = \max\{n_0, n_1, n_2\}$. Odtud a z předpokladu (a) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_3$, platí

$$A - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < A + \varepsilon,$$

a tedy $|c_n - A| < \varepsilon$. Tím jsme ověřili, že platí $\lim c_n = A$. ■

Několik příkladů. V následujících příkladech použijeme právě odvozené výsledky a příklady samotné použijeme v dalších výpočtech.

2.2.45. Příklad. Spočtěte $\lim \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$.

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $1 < 1 + \frac{1}{n} < (1 + \frac{1}{n})^2$. Podle 1.7.12 tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnosti

$$1 \leq \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{1}{n}.$$

Vzhledem k tomu, že $\lim 1 = \lim(1 + \frac{1}{n}) = 1$, dostáváme podle věty o dvou strážnících (Věta 2.2.44) $\lim \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1$. ♣

2.2.46. Příklad. Nechť $A \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ a $\{a_n\}$ je posloupnost nezáporných reálných čísel splňující $\lim a_n = A$. Dokažte, že $A \geq 0$ a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{A}$.

Řešení. Nezápornost čísla A plyne z Věty 2.2.42(b). Předpokládejme nejprve, že $A = 0$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n < \varepsilon^k$. Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, díky monotonii odmocniny (vizte 1.7.12) platí $0 \leq \sqrt[k]{a_n} < \varepsilon$. Dostáváme tedy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = 0 = \sqrt[k]{A}$.

Nyní předpokládejme, že $A > 0$. Pak podle Příkladu 1.5.7 pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} \left| \sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{A} \right| &= \left| \left(\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{A} \right) \cdot \frac{\sum_{j=1}^{k} (\sqrt[k]{a_n})^{k-j} \left(\sqrt[k]{A} \right)^{j-1}}{\sum_{j=1}^{k} (\sqrt[k]{a_n})^{k-j} \left(\sqrt[k]{A} \right)^{j-1}} \right| \\ &= \left| \frac{a_n - A}{\sum_{j=1}^{k} (\sqrt[k]{a_n})^{k-j} \left(\sqrt[k]{A} \right)^{j-1}} \right| \leq \frac{1}{\left(\sqrt[k]{A} \right)^{k-1}} \left| a_n - A \right|. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Poslední nerovnost platí díky snadnému odhadu

$$\sum_{j=1}^{k} (\sqrt[k]{a_n})^{k-j} \left(\sqrt[k]{A} \right)^{j-1} \geq \left(\sqrt[k]{A} \right)^{k-1},$$

jenž vyplývá z nezápornosti členů posloupnosti $\{a_n\}$ a nezápornosti A. Odtud a použitím rovnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[k]{A} \right)^{k-1}} |a_n - A| = 0$$

obdržíme podle Věty 2.2.44 $\lim_{n\to\infty} \left| \sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{A} \right| = 0$. Podle Věty 2.2.24 platí $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{A} \right) = 0$. Odtud díky větě o limitě součtu (Věta 2.2.34(a)) dostáváme $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{A}$. ♣

2.2.47. Příklad. Dokažte, že $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

Řešení. Vzhledem k tomu, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\sqrt[n]{n} \geq 1$, můžeme psát $\sqrt[n]{n} = 1+\theta_n$, kde $\theta_n \geq 0$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Potom podle binomické věty (Věta 1.5.6) platí

$$n = (1+\theta_n)^n \geq 1 + n\theta_n + \frac{n(n-1)}{2}\theta_n^2 \geq \frac{n(n-1)}{2}\theta_n^2.$$

Protože platí $n-1 \geq \frac{n}{2}$, dostáváme

$$n \geq \frac{n(n-1)}{2}\theta_n^2 \geq \frac{n^2}{4}\theta_n^2.$$

Odtud a z monotonie odmocniny (1.7.12) plyne $\frac{2}{\sqrt{n}} \geq \theta_n$. Uvedená nerovnost platí pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, a tedy podle Příkladu 2.2.11, Příkladu 2.2.46 pro $k = 2$ a z věty o limitě součinu (Věta 2.2.34(b)) dostaneme $\lim \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$, takže podle Věty 2.2.44 máme $\lim_{n\to\infty} \theta_n = 0$. Odtud plyne dokazované tvrzení. ♣

2.2.48. Příklad. Nechť $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$.

Řešení. Nechť nejprve $c \geq 1$. Pomocí Archimédovy vlastnosti (Věta 1.5.30) nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > c$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $1 \leq \sqrt[n]{c} \leq \sqrt[n]{n}$. Z věty o dvou strážnících (Věta 2.2.44) a Příkladu 2.2.47 plyne $\lim \sqrt[n]{c} = 1$.

Nechť nyní $c \in (0,1)$. Potom podle věty o limitě podílu (Věta 2.2.34(c)) a podle již dokázaného tvrzení platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{c}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{c}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

♣

2.3. Nevlastní limita posloupnosti

Definice nevlastní limity. Posloupnost $\{a_n\} = \{n\}$ je sice divergentní, má však následující vlastnost. Pro libovolné $K \in \mathbb{R}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n > K$. Vskutku, stačí pomocí Archimédovy vlastnosti (Věta 1.5.30) nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > K$. Obdobnou vlastnost má například posloupnost $\{b_n\} = \{-n^2\}$, přičemž nerovnost $a_n > K$ je nahrazena nerovností $b_n < K$. Obě vlastnosti můžeme chápat jako jisté typy limitního chování posloupnosti, i když jiné, než je konvergence k reálnému číslu, kterou jsme studovali v předcházejícím oddílu. Tyto typy limitního chování formálně zavedeme v následující definici.

2.3.1. Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu rovnou** ∞ (čteme plus nekonečno), jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n > K.$$

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu rovnou** $-\infty$ (čteme mínus nekonečno), jestliže
$$\forall K \in \mathbb{R}\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n < K.$$

Má-li posloupnost limitu rovnou plus nebo mínus nekonečnu, říkáme, že **má nevlastní limitu**. Jestliže má posloupnost limitu rovnou ∞, pak říkáme, že **diverguje** k ∞. Jestliže má posloupnost limitu rovnou $-\infty$, pak říkáme, že **diverguje** k $-\infty$.

2.3.2. Příklad. Dokažte, že $\lim \sqrt{n} = \infty$.

Řešení. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. Z Archimédovy vlastnosti reálných čísel (Věta 1.5.30) vyplývá existence $n_0 \in \mathbb{N}$ splňujícího $n_0 > K^2$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $\sqrt{n} \geq \sqrt{n_0} > |K| \geq K$, čímž je tvrzení dokázáno. ♣

Rozšířená množina reálných čísel.

2.3.3. Některé poznatky z předcházejícího oddílu rozšíříme i na nevlastní limity. K tomuto účelu přidáme k množině reálných čísel dva nové prvky ∞ a $-\infty$ a odpovídajícím způsobem rozšíříme aritmetické operace sčítání, odčítání, násobení, dělení a relaci uspořádání. Operace sčítání a odčítání nelze definovat pro *všechny* dvojice prvků z $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tak, aby tyto operace měly zároveň některé žádoucí vlastnosti (vizte Větu 2.3.5). Podobně je tomu s násobením a dělením. Aritmetické operace tedy budeme definovat jen pro některé dvojice prvků z $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Kritériem pro to, který výraz a jak definujeme, je platnost věty o aritmetice limit i pro nevlastní limity (vizte Větu 2.3.26).

2.3.4. Definice. **Rozšířenou množinou reálných čísel** budeme nazývat množinu $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ a budeme ji značit $\mathbb{R}^*$.

Operace sčítání. Sčítání rozšiřujeme takto:

- $\forall a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \colon \infty + a = a + \infty = \infty$,
- $\forall a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \colon -\infty + a = a + (-\infty) = -\infty$.

Operace odčítání. Operace odčítání dvou reálných čísel a, b je definována jako součet čísla a a čísla opačného k b, tj. $a - b = a + (-b)$. Pro rozšíření této operace postačí definovat čísla opačná k ∞ a $-\infty$ a použít předchozí rozšíření operace sčítání. Definujeme $-(\infty) = -\infty$ a $-(-\infty) = \infty$.

Operace násobení. Definujeme:

- $\forall a \in (0, \infty) \cup \{\infty\} \colon a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$,
- $\forall a \in (0, \infty) \cup \{\infty\} \colon a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty$,
- $\forall a \in \{-\infty\} \cup (-\infty, 0) \colon a \cdot \infty = \infty \cdot a = -\infty$,
- $\forall a \in \{-\infty\} \cup (-\infty, 0) \colon a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \infty$.

Operace dělení. Operace dělení dvou reálných čísel a, b je definována jako součin čísla a a inverzního prvku k b, tj. $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$. Pro rozšíření operace dělení postačí tedy definovat $\frac{1}{\infty} = 0$ a $\frac{1}{-\infty} = 0$.

Následující výrazy tedy nejsou definovány:

$$\infty + (-\infty), \quad -\infty + \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad 0 \cdot (-\infty), \quad (-\infty) \cdot 0.$$

Relace uspořádání. Definujeme:

- $\forall a \in \mathbb{R}^*\colon -\infty \leq a$,
- $\forall a \in \mathbb{R}^*\colon a \leq \infty$.

2.3.5. Věta. Nechť $x, y, z \in \mathbb{R}^*$. Pak platí následující rovnosti, pokud je alespoň jedna strana příslušné rovnosti definována:

(a) $x + y = y + x$,
(b) $(x + y) + z = x + (y + z)$,
(c) $xy = yx$,
(d) $(xy)z = x(yz)$.

Důkaz. Dokážeme tvrzení (b). Předpokládejme, že $\infty \in \{x, y, z\}$. Pak $-\infty \notin \{x, y, z\}$, jinak by výrazy na levé i pravé straně nebyly definovány. Dále je levá i pravá strana rovna ∞, takže rovnost platí. Podobně pokud $-\infty \in \{x, y, z\}$, pak $\infty \notin \{x, y, z\}$ a ověření rovnosti dokončíme obdobně. Zbývá možnost, kdy $x, y, z \in \mathbb{R}$. Pak jde o známou rovnost pro reálná čísla.

Ostatní tvrzení lze dokázat podobným rozborem případů. ■

2.3.6 (supremum a infimum v $\mathbb{R}^*$)**.** Relace $\leq$ na $\mathbb{R}^*$, jak jsme ji právě definovali, je zřejmě reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní, a proto je relace $\leq$ uspořádáním na množině $\mathbb{R}^*$ ve smyslu Definice 1.4.4. Navíc jde zřejmě o lineární uspořádání podle téže definice. Pojem suprema a infima máme tedy definován i v tomto případě podle Definice 1.4.8.

Pro neprázdnou a shora omezenou podmnožinu reálných čísel se pojem suprema v množině $\mathbb{R}$ shoduje s pojmem suprema v $\mathbb{R}^*$. Shora neomezená podmnožina $\mathbb{R}$ nemá v $\mathbb{R}$ supremum, v $\mathbb{R}^*$ je však tímto supremem ∞. Podobně zdola neomezená množina v $\mathbb{R}$ má infimum v $\mathbb{R}^*$ rovné $-\infty$. Konečně pro prázdnou množinu platí podle definice $\inf \emptyset = \infty$ a $\sup \emptyset = -\infty$, pokud uvažujeme supremum a infimum vzhledem k $\mathbb{R}^*$.

2.3.7. Úmluva. V následujícím textu budeme suprema a infima množin uvažovat vzhledem k množině $\mathbb{R}^*$. Pojmy omezenosti shora, omezenosti zdola, omezenosti podmnožin $\mathbb{R}$ však budeme uvažovat jako doposud vzhledem k množině $\mathbb{R}$.

2.3.8 (absolutní hodnota v $\mathbb{R}^*$)**.** Absolutní hodnotu rozšíříme na $\mathbb{R}^*$ tak, že klademe $|\infty| = \infty$ a $|-\infty| = \infty$.

Základní vlastnosti limit podruhé.

2.3.9. Definice 2.3.1 je doplněním Definice 2.2.3 o případy, kdy limitou je buď ∞, nebo $-\infty$. Víme tedy, co znamená, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu rovnou A, kde buď $A \in \mathbb{R}$, nebo $A = \infty$, nebo $A = -\infty$. Následující věta ukazuje, že věta o jednoznačnosti limity (Věta 2.2.6) zůstává v platnosti i pro takto rozšířenou definici.

2.3.10. Věta (jednoznačnost limity podruhé). Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost, která má limitu rovnou $A \in \mathbb{R}^*$ a zároveň má limitu rovnou $B \in \mathbb{R}^*$. Potom platí $A = B$.

Důkaz. Dokázali jsme již, že nejvýše jedno reálné číslo může být limitou posloupnosti $\{a_n\}$ (Věta 2.2.6). Zbývá dokázat, že nemůže nastat žádný z případů:

(a) $\{a_n\}$ je konvergentní a současně má limitu ∞,
(b) $\{a_n\}$ je konvergentní a současně má limitu $-\infty$,
(c) $\{a_n\}$ má limitu ∞ a současně $-\infty$.

Případ (a). Předpokládejme pro spor, že platí (a). Podle Věty 2.2.25 je $\{a_n\}$ omezená, a tedy je omezená shora. Tudíž existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n \le K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Protože ale současně má posloupnost $\{a_n\}$ limitu ∞, existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$, je $a_n > K$, což je spor.

Případy (b) *a* (c). Důkaz je obdobný. ■

2.3.11. Označení. Má-li posloupnost $\{a_n\}$ nevlastní limitu, označujeme hodnotu této limity opět symbolem $\lim a_n$. Píšeme tedy $\lim a_n = \infty$ nebo $\lim a_n = -\infty$. Ke korektnímu zavedení tohoto značení potřebujeme Větu 2.3.10 (pro srovnání vizte 2.2.8).

2.3.12. Pro každou posloupnost $\{a_n\}$ nastává právě jedna z následujících možností:

$$\lim a_n \begin{cases} \text{existuje} \begin{cases} \text{vlastní, tj. je rovna reálnému číslu,} \\ \text{nevlastní, tj. je rovna } \infty \text{, nebo } -\infty, \end{cases} \\ \text{neexistuje.} \end{cases}$$

2.3.13. Definice. Nechť $c \in \mathbb{R}$. Potom **okolím** bodu c rozumíme každou množinu tvaru $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. **Okolím** bodu ∞ rozumíme každou množinu tvaru $B(\infty, \varepsilon) = (\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. **Okolím** bodu $-\infty$ rozumíme každou množinu tvaru $B(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.

2.3.14. Lemma. Nechť $A, \tilde{A} \in \mathbb{R}^*$, $A \neq \tilde{A}$. Potom existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, takové, že $A \notin B(\tilde{A}, \varepsilon)$.

Důkaz. Rozlišíme následující případy.

Případ $\tilde{A} \in \mathbb{R}$. Je-li také $A \in \mathbb{R}$, pak položíme $\varepsilon = \frac{1}{2}|\tilde{A} - A|$. Potom zřejmě platí $A \notin B(\tilde{A}, \varepsilon)$. Je-li $A = \infty$ nebo $A = -\infty$, zvolíme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, libovolně a opět dostaneme $A \notin B(\tilde{A}, \varepsilon)$.

Případ $\tilde{A} = \infty$. Je-li $A \in \mathbb{R}$, položíme $\varepsilon = \frac{1}{|A|+1}$. Potom $A < |A| + 1 = \frac{1}{\varepsilon}$, a tedy $A \notin B(\tilde{A}, \varepsilon)$. Je-li $A = -\infty$, zvolíme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, libovolně a opět obdržíme $A \notin B(\tilde{A}, \varepsilon)$.

Případ $\tilde{A} = -\infty$. Tvrzení lze dokázat obdobně jako pro $\tilde{A} = \infty$. ■

Zavedení pojmu okolí (Definice 2.3.13) nám umožňuje ekvivalentně formulovat pojem limity posloupnosti (vlastní i nevlastní). To je obsahem následující věty.

2.3.15. Věta. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost a $A \in \mathbb{R}^*$. Pak $\lim a_n = A$ právě tehdy, když platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n \in B(A, \varepsilon). \tag{2.20}$$

Důkaz. Případ $A \in \mathbb{R}$. Potom je pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, výrok $a_n \in B(A, \varepsilon)$ ekvivalentní výroku $|a_n - A| < \varepsilon$. Takže v tomto případě je formule (2.20) shodná a formulí (2.1).

Případ $A = \infty$. Předpokládejme nejprve, že $\lim a_n = A$. Ověříme (2.20). Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položme $K = \frac{1}{\varepsilon}$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n > K$. To podle definice okolí bodu ∞ znamená, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n \in B(\infty, \varepsilon)$. Odtud plyne (2.20).

Nyní předpokládejme, že platí (2.20). Zvolme $K \in \mathbb{R}$. K němu nalezneme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, následujícím způsobem. Je-li $K \leq 0$, zvolíme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, libovolně. Je-li $K > 0$, položíme $\varepsilon = \frac{1}{K}$. V obou případech pak platí $\frac{1}{\varepsilon} \geq K$. K tomuto ε pak nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \in B(\infty, \varepsilon)$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n > \frac{1}{\varepsilon}$, a tedy $a_n > K$. Odtud plyne $\lim a_n = A$.

Případ $A = -\infty$. Důkaz lze provést obdobně jako v předchozím případě. ■

Ve zbývající části tohoto oddílu uvedeme obecnější varianty některých vět, které již známe z předcházejícího textu. Zatímco se však dříve uvedená tvrzení týkala pouze vlastních limit, zde budou věty formulovány i pro nevlastní limity. Nejprve uvedeme obdobu Věty 2.2.16.

2.3.16. Věta. Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^*$ a existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_n = b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_1$. Pak také $\lim b_n = A$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_2 \in \mathbb{N}$ splňující

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_2 \colon a_n \in B(A, \varepsilon).$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $b_n = a_n$, a tedy $b_n \in B(A, \varepsilon)$. Odtud vyplývá, že $\lim b_n = A$. ■

2.3.17. Z předchozí věty plyne následující zobecnění 2.2.17. Změníme-li u posloupnosti reálných čísel $\{a_n\}$ splňující $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^*$ konečně mnoho členů, pak má nově vzniklá posloupnost opět limitu A.

Následující výsledek je zobecněním Věty 2.2.22.

2.3.18. Věta. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost a $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^*$. Pak $\lim |a_n| = |A|$.

Důkaz. Je-li $A \in \mathbb{R}$, pak tvrzení plyne z Věty 2.2.22. Nechť $A = \infty$. Díky předpokladu $\lim a_n = A$ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \geq 0$, a tedy $|a_n| = a_n$. Tudíž podle Věty 2.3.16 platí $\lim |a_n| = \lim a_n$. Protože $\lim a_n = \infty$ a $|\infty| = \infty$, plyne odtud, že $\lim |a_n| = |A|$.

Konečně nechť $A = -\infty$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \in B(-\infty, \varepsilon)$, a tedy také $-a_n \in B(\infty, \varepsilon)$. Odtud plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $-a_n > 0$, a tedy $|a_n| = -a_n$. To znamená, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n| \in B(\infty, \varepsilon)$, tedy $\lim |a_n| = \infty$. Protože $|A| = \infty$, dokázali jsme, že $\lim |a_n| = |A|$. ■

Následující věta je jistou „jednostrannou“ obdobou Věty 2.2.25.

2.3.19. Věta. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost a $\lim a_n = \infty$. Pak je $\{a_n\}$ zdola omezená.

Důkaz. Položme $K = 1$. Podle Definice 2.3.1 k tomuto K nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n > 1$. Množina $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}, n < n_0\}$ je konečná, a tedy je podle Věty 1.6.14 omezená. Nechť $M \in \mathbb{R}$ je některá její dolní závora. Potom

$$a_n \geq \begin{cases} M, & \text{pokud } n \in \mathbb{N}, 1 \leq n < n_0, \\ 1, & \text{pokud } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0. \end{cases}$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tedy máme $a_n \geq \min\{M, 1\}$, takže posloupnost $\{a_n\}$ je zdola omezená. ■

2.3.20. Obdobně jako ve Větě 2.3.19 lze dokázat, že je-li $\{a_n\}$ posloupnost a $\lim a_n = -\infty$, potom je $\{a_n\}$ shora omezená.

Limita vybrané posloupnosti podruhé. Následující věta je zobecněním Věty 2.2.30, které zahrnuje i nevlastní limity.

2.3.21. Věta. Nechť $A \in \mathbb{R}^*$, $\{a_n\}$ je posloupnost splňující $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ a $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Potom $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n^* \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n^* \colon a_n \in B(A, \varepsilon). \tag{2.21}$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}, k \geq n^*$, platí díky Lemmatu 2.2.31 nerovnost $n_k \geq k \geq n^*$, a tedy podle (2.21) dostaneme, že pro každé $k \in \mathbb{N}, k \geq n^*$, platí $a_{n_k} \in B(A, \varepsilon)$. Tím je věta dokázána. ■

2.3.22. Tvrzení Věty 2.3.21 nelze obrátit. Jako příklad může opět posloužit posloupnost $\{(-1)^n\}$ a její podposloupnost $\{(-1)^{2k}\}_{k=1}^{\infty}$. Nicméně platí následující tvrzení, které v dalším textu ještě využijeme (například v Kapitole 3).

2.3.23. Věta. Nechť $l \in \mathbb{N}$ a $\{n_k^1\}_{k=1}^{\infty}, \{n_k^2\}_{k=1}^{\infty}, \ldots, \{n_k^l\}_{k=1}^{\infty}$ jsou rostoucí posloupnosti přirozených čísel takové, že

$$\left\{n_k^j;\ j \in \{1, \ldots, l\},\ k \in \mathbb{N}\right\} = \mathbb{N}. \tag{2.22}$$

Nechť $A \in \mathbb{R}^*$ a $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel taková, že pro každé $j \in \{1, \ldots, l\}$ platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k^j} = A$. Potom $\lim a_n = A$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu podle definice limity nalezneme $k_1, k_2, \dots, k_l \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\begin{aligned} &\forall k \in \mathbb{N},\ k \geq k_1 \colon a_{n_k^1} \in B(A, \varepsilon), \\ &\forall k \in \mathbb{N},\ k \geq k_2 \colon a_{n_k^2} \in B(A, \varepsilon), \\ &\qquad \vdots \\ &\forall k \in \mathbb{N},\ k \geq k_l \colon a_{n_k^l} \in B(A, \varepsilon). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Položme $n_0 = \max\{n_{k_1}^1, n_{k_2}^2, \dots, n_{k_l}^l\}$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Díky podmínce (2.22) existují $j \in \{1, \dots, l\}$ a $m \in \mathbb{N}$ taková, že $n = n_m^j$. Potom platí

$$n_m^j = n \geq n_0 \geq n_{k_j}^j.$$

Posloupnost $\{n_k^j\}_{k=1}^\infty$ je rostoucí, a proto $m \geq k_j$. Podle j-té podmínky v (2.23) dostaneme $a_n = a_{n_m^j} \in B(A, \varepsilon)$, čímž je tvrzení dokázáno. ■

2.3.24. Speciálním případem předchozí věty je následující tvrzení. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost splňující

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = A \in \mathbb{R}^*.$$

Potom $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

2.3.25. Ve Větě 2.3.23 je důležité, že počet posloupností $\{n_k^1\}_{k=1}^\infty$, $\{n_k^2\}_{k=1}^\infty$, …, $\{n_k^l\}_{k=1}^\infty$ je konečný. Pro nekonečný počet těchto posloupností tvrzení neplatí, jak ukazuje Příklad 2.5.10.

Aritmetika limit podruhé. Následující věta je zobecněním věty o aritmetice limit (Věta 2.2.34).

2.3.26. Věta (aritmetika limit)**.** Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim b_n = B \in \mathbb{R}^*$. Potom platí:

(a) $\lim (a_n + b_n) = A + B$, pokud je výraz na pravé straně definován,
(b) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, pokud je výraz na pravé straně definován,
(c) je-li $b_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, pokud je výraz na pravé straně definován.

Důkaz. Tuto větu lze dokázat obdobně jako Větu 2.2.34. Uvedeme pouze důkaz tvrzení (b), a to v případě, kdy $A \in \mathbb{R}$, $A < 0$, a $B = -\infty$.

Chceme tedy dokázat, že $\lim(a_n \cdot b_n) = \infty$. Nechť $K \in \mathbb{R}$. Položme $\varepsilon = -\frac{1}{2}A$. Potom $\varepsilon > 0$. Z předpokladu $\lim a_n = A$ a z definice limity vyplývá existence takového $n_1 \in \mathbb{N}$, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_1$, platí $a_n \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon) = (\frac{3}{2}A, \frac{1}{2}A)$. Podobně z předpokladu $\lim b_n = -\infty$ plyne existence takového $n_2 \in \mathbb{N}$, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_2$, platí $b_n < \min\{0, \frac{2K}{A}\}$. Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí

$$a_n \cdot b_n > \frac{1}{2}A \cdot b_n > K.$$

Tím je dokázáno, že $\lim(a_n \cdot b_n) = \infty$. ■

2.3.27. Víme-li pouze, že $\lim a_n = \infty$ a $\lim b_n = -\infty$, pak odtud nemůžeme vyvodit žádnou informaci o existenci nebo hodnotě $\lim(a_n + b_n)$. Nechť například $A \in \mathbb{R}$, $\{a_n\} = \{n\}$ a $\{b_n\} = \{-n + A\}$. Pak

$$\lim a_n = \infty, \quad \lim b_n = -\infty \quad \text{a} \quad \lim(a_n + b_n) = A.$$

Výraz $\infty - \infty$ nelze tedy definovat tak, aby platila věta o limitě součtu. Existence a případně i hodnota $\lim(a_n + b_n)$ závisí na jemnějším chování posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$. Předpoklad, že výrazy na pravých stranách jsou definovány, nelze tedy z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.26) vynechat.

2.3.28. Nechť $l \in \mathbb{N}$ a pro každé $j \in \{1, \dots, l\}$ je $\{a_n^j\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost splňující $\lim_{n\to\infty} a_n^j = A_j \in \mathbb{R}^*$. Potom platí:

(a) $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{l} a_n^j = \sum_{j=1}^{l} A_j$, pokud je výraz na pravé straně definován,

(b) $\lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{l} a_n^j = \prod_{j=1}^{l} A_j$, pokud je výraz na pravé straně definován.

Tvrzení lze dokázat obdobně jako Větu 2.2.37.

Podle odstavce 2.3.27 pro výpočet $\lim \frac{a_n}{b_n}$, kde $\lim b_n = 0$, nemůžeme bezprostředně použít větu o limitě podílu (Věta 2.3.26(c)), nicméně platí následující věta.

2.3.29. Věta. Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti splňující:

- pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $b_n \neq 0$,
- $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^*$ a $A > 0$,
- $\lim b_n = 0$,
- existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $b_n > 0$.

Potom $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

Důkaz. Posloupnost $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ je dobře definována, neboť $b_n \neq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Případ $A \in \mathbb{R}$, $A > 0$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. Položme $\varepsilon = \frac{1}{2}A$. K němu nalezneme $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_1 \colon a_n > A - \varepsilon = A - \tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}A.$$

Položme $L = \max\{1, K\}$. Nalezneme $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_2 \colon b_n < \frac{A}{2L}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \max\{n_0, n_1, n_2\}$, platí

$$\frac{a_n}{b_n} > \tfrac{1}{2}A \cdot \frac{1}{b_n} > \tfrac{1}{2}A \cdot \frac{1}{\frac{A}{2L}} = L \geq K.$$

Tím jsme ověřili, že $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

Případ $A = \infty$. Zvolme opět $K \in \mathbb{R}$ a položme $L = \max\{1, K\}$. Nalezneme $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_1 \colon a_n > 1,$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_2 \colon b_n < \frac{1}{L}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq \max\{n_0, n_1, n_2\}$, platí

$$\frac{a_n}{b_n} > 1 \cdot \frac{1}{b_n} > 1 \cdot L = L \geq K.$$

Tím je tvrzení dokázáno. ■

Limita a uspořádání podruhé. Následující větu je možno dokázat obdobně jako Větu 2.2.42.

2.3.30. Věta (limita a uspořádání)**.** Nechť $A, B \in \mathbb{R}^*$, $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti splňující $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$.

(a) Nechť $A < B$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n < b_n$.
(b) Nechť existuje $n^* \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n^*$, platí $a_n \geq b_n$. Potom $A \geq B$.

Pro nevlastní limity platí následující dvě varianty věty o dvou strážnících.

2.3.31. Věta. Nechť $\{a_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou posloupnosti splňující:

(a) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \leq c_n$,
(b) $\lim a_n = \infty$.

Potom platí $\lim c_n = \infty$.

Důkaz. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. K němu nalezneme $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí $a_n > K$. Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq \max\{n_0, n_1\}$, pak platí $c_n \geq a_n$, a tedy $c_n > K$. Tím je dokázáno, že $\lim c_n = \infty$. ■

Podle předchozí věty stačí nalézt pouze jednoho „strážníka“ k důkazu tvrzení $\lim c_n = \infty$. Následující věta je její zřejmou obdobou pro posloupnosti s limitou $-\infty$.

2.3.32. Věta. Nechť $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou posloupnosti splňující:

(a) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $b_n \geq c_n$,
(b) $\lim b_n = -\infty$.

Potom platí $\lim c_n = -\infty$.

2.3.33. Definice. Nechť $q \in \mathbb{R}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme **geometrickou posloupností**.

2.3.34. Příklad (limita geometrické posloupnosti)**.** Dokažte, že platí

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty, & \text{pokud } q \in (1,\infty), \\ 1, & \text{pokud } q = 1, \\ 0, & \text{pokud } q \in (-1,1), \\ \text{neexistuje}, & \text{pokud } q \in (-\infty,-1]. \end{cases}$$

Řešení. Případ $q \in (1,\infty)$. Můžeme psát $q = 1 + h$, kde $h > 0$. Odtud a z Bernoulliovy nerovnosti (Příklad 1.8.10) plyne $q^n = (1+h)^n \geq 1 + hn$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Zřejmě $\lim_{n\to\infty}(1+hn) = \infty$, a tedy podle Věty 2.3.31 máme $\lim q^n = \infty$.

Případ $q \in (0,1)$. Podle předchozího odstavce platí $\lim(q^{-1})^n = \infty$, neboť $q^{-1} \in (1,\infty)$. Aplikací Věty 2.3.26(c) dostaneme

$$\lim q^n = \lim \frac{1}{(q^{-1})^n} = 0.$$

Případ $q \in \{0,1,-1\}$. Pro $q = 0$ a $q = 1$ je tvrzení zřejmé. Pokud $q = -1$, pak $\{q^n\} = \{(-1)^n\}$. Neexistence $\lim(-1)^n$ jakožto prvku $\mathbb{R}$ byla ukázána v Příkladu 2.2.15, neexistence $\lim(-1)^n$ jakožto prvku $\mathbb{R}^*$, o kterou nyní jde, plyne z Věty 2.3.21.

Případ $q \in (-1,0)$. Pak $\lim|q^n| = \lim|q|^n = 0$, a tedy podle Věty 2.2.24 také $\lim q^n = 0$.

Případ $q \in (-\infty,-1)$. Pak $q^2 > 1$, a tedy máme $\lim q^{2n} = \lim(q^2)^n = \infty$. Potom platí podle věty o limitě součinu (Věta 2.3.26(b)) $\lim q^{2n+1} = \lim q(q^2)^n = -\infty$. Nalezli jsme dvě vybrané posloupnosti s různými limitami, a tedy limita původní posloupnosti neexistuje. ♣

2.3.35 (úroky)**.** Vraťme se nyní k posloupnosti $\{a_n\}$ z 2.2.1, která splňuje $a_n = (1+\tilde{p})^n a,\ n \in \mathbb{N}$. Jde o geometrickou posloupnost, jejíž limita je podle Příkladu 2.3.34 rovna ∞, neboť $1 + \tilde{p} > 1$.

Následující tvrzení dává do souvislosti pojmy limity a suprema množiny. Obdobné tvrzení platí i pro infimum.

2.3.36. Věta. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina a $G \in \mathbb{R}^*$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.

(i) Platí $G = \sup M$.

(ii) Prvek G je horní závorou M a existuje posloupnost $\{x_n\}$ bodů z M splňující $\lim x_n = G$.

Důkaz. (i)$\Rightarrow$(ii) Prvek G je zřejmě horní závorou M. Pokud $G = \infty$, pak M není shora omezená, a tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in M$ splňující $x_n > n$. Podle Věty 2.3.31 je pak $\lim x_n = \infty = G$.

V případě, že $G \in \mathbb{R}$, existuje podle definice suprema ke každému $n \in \mathbb{N}$ prvek $x_n \in M$ splňující $x_n > G - \frac{1}{n}$. Protože G je horní závorou M, platí $x_n \leq G$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Podle věty o dvou strážnících (Věta 2.2.44) tedy máme $\lim x_n = G$.

(ii)$\Rightarrow$(i) Zvolme $G' \in \mathbb{R}$, $G' < G$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ pro které $x_{n_0} > G'$. V případě $G = \infty$ to plyne přímo z definice, v případě $G \in \mathbb{R}$ stačí v definici vzít $\varepsilon = G - G'$. Našli jsme tedy prvek z množiny M, který je větší než G', čímž jsme ověřili podmínku (b) z 1.5.16. ■

2.3.37. Příklad. Nechť $k \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^*$ a $\{a_n\}$ je posloupnost nezáporných reálných čísel splňující $\lim a_n = A$. Dokažte, že potom $A \geq 0$ a platí

$$\lim \sqrt[k]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[k]{A}, & \text{pokud } A \in \mathbb{R}, \\ \infty, & \text{pokud } A = \infty. \end{cases}$$

Řešení. Pokud $A \in \mathbb{R}$, pak tvrzení vyplývá z Příkladu 2.2.46. Předpokládejme tedy, že $A = \infty$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n > |K|^k$. Potom podle monotonie odmocniny (vizte 1.7.12) pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, máme $\sqrt[k]{a_n} > |K| \geq K$. Odtud plyne $\lim \sqrt[k]{a_n} = \infty$. ♣

2.3.38. Příklad. Vypočtěte $\lim\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$.

Řešení. Podle Příkladu 2.3.2 a Příkladu 2.3.37 dostaneme $\lim \sqrt{n} = \infty$. Odtud a z věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.2.30) dále plyne, že $\lim \sqrt{n+1} = \infty$. To znamená, že pro výpočet zadané limity nemůžeme užít větu o aritmetice limit přímočarým způsobem. Upravíme proto nejprve zadaný výraz tak, aby bylo možné bezprostředně použít větu o aritmetice limit. Pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Pak podle věty o limitě podílu (Věta 2.3.26(c)) můžeme počítat

$$\lim\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

♣

2.3.39 (zobecněná posloupnost)**.** Na závěr tohoto oddílu ještě uvedeme následující možné rozšíření pojmu posloupnost. Posloupností reálných čísel budeme rozumět každé zobrazení množiny $A \subset \mathbb{Z}$ do $\mathbb{R}$, přičemž A je zdola omezená a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\{n \in \mathbb{N};\ n \geq n_0\} \subset A$. Obecnější definicí chceme postihnout zejména následující dva případy: jednak posloupnosti tvaru $n \mapsto a_n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (značíme $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$) a jednak posloupnosti, jejichž členy jsou definovány pro každé přirozené n vyjma konečné množiny, například posloupnost $\{\frac{1}{n-7}\}$, jejíž definiční obor je $\mathbb{N} \setminus \{7\}$. V těchto případech zůstávají v platnosti všechny poznatky o posloupnostech, které jsme dosud odvodili.

2.4. Hlubší věty o limitách

Limita monotónní posloupnosti. Uvedeme nejprve důležitou vlastnost monotónních posloupností.

2.4.1. Věta (limita monotónní posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}$ je monotónní posloupnost. Potom existuje $\lim a_n$. Je-li $\{a_n\}$ neklesající, pak $\lim a_n = \sup\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Je-li $\{a_n\}$ nerostoucí, pak $\lim a_n = \inf\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$.

Důkaz. Rozlišíme následující možnosti.

Posloupnost $\{a_n\}$ je neklesající a není shora omezená. Potom $\sup\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\} = \infty$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_0} > K$. Protože $\{a_n\}$ je neklesající, platí pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, nerovnosti $a_n \geq a_{n_0} > K$. Odtud vyplývá, že $\lim a_n = \infty$.

Posloupnost $\{a_n\}$ je neklesající a je shora omezená. Označme $A = \sup\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Pak platí $A \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle definice suprema nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_0} > A - \varepsilon$. Protože však $\{a_n\}$ je neklesající, je $A - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Nerovnost $a_n < A + \varepsilon$ platí dokonce pro každé $n \in \mathbb{N}$, neboť A je horní závorou množiny všech členů posloupnosti $\{a_n\}$. Ke zvolenému ε jsme tedy nalezli $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon.$$

To podle definice limity znamená, že $\lim a_n = A$.

Posloupnost $\{a_n\}$ je nerostoucí. V tomto případě lze tvrzení dokázat obdobně. Můžeme ale také postupovat následujícím způsobem. Snadno nahlédneme, že posloupnost $\{-a_n\}$ je neklesající. Podle již dokázané části věty je tedy $\lim(-a_n) = \sup\{-a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Podle Věty 1.5.17 odtud plyne, že $\lim(-a_n) = -\inf\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Konečně podle věty o limitě součinu (Věta 2.3.26(b)) dostáváme

$$\lim a_n = \lim(-1)(-a_n) = -\lim(-a_n) = \inf\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}.$$

■

2.4.2. Důsledek. Nechť posloupnost $\{a_n\}$ je neklesající shora omezená nebo nerostoucí zdola omezená. Potom je $\{a_n\}$ konvergentní.

Důkaz. Nechť $\{a_n\}$ je neklesající shora omezená posloupnost. Z Věty 2.4.1 vyplývá, že $\lim a_n = \sup\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Z omezenosti posloupnosti shora dále plyne, že $\sup\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$. Posloupnost $\{a_n\}$ je tedy konvergentní.

Je-li posloupnost $\{a_n\}$ nerostoucí a zdola omezená, pak lze důkaz provést obdobně. ■

Věta 2.4.1 umožňuje ověřit existenci limity posloupnosti, aniž by bylo nutné ji explicitně vypočítat. V některých případech je ale informace o existenci limity nezbytnou součástí jejího výpočtu. Tento jev ilustruje následující příklad.

2.4.3. Příklad. Nechť $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Spočtěte limitu posloupnosti $\{a_n\}$, která je zadána rekurentně: $a_1 = \sqrt{c}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} = \sqrt{a_n + c}$.

Řešení. Posloupnost $\{a_n\}$ je dobře definovaná. Člen a_1 je dobře definován a je kladný. Předpokládáme-li, že člen a_n je definován a je kladný, pak je definován i člen a_{n+1} a je kladný. Podle principu matematické indukce a 1.4.31 je tedy posloupnost $\{a_n\}$ dobře definovaná a její členy jsou nezáporné.

Posloupnost $\{a_n\}$ *je rostoucí.* Matematickou indukcí dokážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < a_{n+1}$, odkud podle 2.1.12 vyplyne dokazovaná vlastnost. Zřejmě platí $a_1 < a_2$. Předpokládejme, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < a_{n+1}$. Potom máme

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + c} < \sqrt{a_{n+1} + c} = a_{n+2}.$$

Odtud plyne tvrzení.

Posloupnost $\{a_n\}$ *je shora omezená.* Matematickou indukcí dokážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < \sqrt{c} + 1$. Zřejmě platí nerovnost $a_1 < \sqrt{c} + 1$. Předpokládejme, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < \sqrt{c} + 1$. Potom

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{a_n + c} < \sqrt{\sqrt{c} + 1 + c} < \sqrt{c + 2\sqrt{c} + 1} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{c} + 1\right)^2} = \sqrt{c} + 1. \end{aligned}$$

Z principu matematické indukce tedy plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n < \sqrt{c} + 1$, takže $\{a_n\}$ je shora omezená. Ověřili jsme, že posloupnost $\{a_n\}$ splňuje předpoklady Důsledku 2.4.2. Posloupnost $\{a_n\}$ má tedy vlastní limitu. Označme ji symbolem A.

Výpočet limity. Z rekurentní definice posloupnosti plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + c$. Z věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.2.30) odvodíme, že také $\lim a_{n+1} = A$, a z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.26) dostaneme vztahy $\lim a_{n+1}^2 = A^2$ a $\lim(a_n + c) = A + c$. Číslo A tedy splňuje kvadratickou rovnici $A^2 = A + c$. Výpočtem zjistíme, že A je rovno buď $\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + 4c}\right)$ nebo $\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 + 4c}\right)$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq 0$. Dle Věty 2.2.42(b) pro $B = 0$ a $b_n = 0, n \in \mathbb{N}$, platí $A \geq 0$. Tedy neplatí $A = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 + 4c})$, protože výraz na pravé straně je záporné číslo. Odtud vyplývá, že $\lim a_n = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + 4c}\right)$. ♣

2.4.4. Důležitou součástí řešení předcházejícího příkladu bylo ověření existence limity posloupnosti $\{a_n\}$. Bez tohoto kroku by bylo řešení neúplné. Uvažujme posloupnost $\{b_n\}$ definovanou rekurentně předpisem

$$b_1 = -1, \quad b_{n+1} = -b_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Za předpokladu, že $\lim b_n$ existuje a je rovna prvku $A \in \mathbb{R}^*$, bychom podobně jako v řešení Příkladu 2.4.3 odvodili, že $A = -A$, a tedy $A = 0$. Limita posloupnosti $\{b_n\}$ ale není rovna 0, neboť $b_n = (-1)^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, jak lze snadno ověřit.

2.4.5. Příklad. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Dokažte, že platí:

- $\{a_n\}$ je omezená a rostoucí,
- $\{b_n\}$ je omezená a klesající,
- $\lim a_n = \lim b_n \in \mathbb{R}$.

Řešení. Posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom z Bernoulliovy nerovnosti (Příklad 1.8.10) plyne, že

$$\Big(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\Big)^n \geq 1 + n\frac{-1}{(n+1)^2} > 1 - \frac{1}{n+2}.$$

Odtud dostaneme

$$\Big(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\Big)^n > \frac{n+1}{n+2}.$$

Tedy

$$\Big(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\Big)^n < \frac{n+2}{n+1}.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tudíž platí

$$a_n = \Big(\frac{n+1}{n}\Big)^n < \Big(\frac{n+2}{n+1}\Big)^{n+1} = a_{n+1},$$

takže posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí.

Posloupnost $\{b_n\}$ je klesající. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom z Bernoulliovy nerovnosti (Příklad 1.8.10) plyne odhad

$$\Big(1 + \frac{1}{n(n+2)}\Big)^{n+2} > 1 + \frac{1}{n}.$$

Nerovnost lze přepsat ve tvaru

$$\Big(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\Big)^{n+2} > \frac{n+1}{n},$$

a tedy

$$\frac{n}{n+1}\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^{n+2} > \Big(\frac{n+2}{n+1}\Big)^{n+2},$$

jinými slovy,

$$b_n = \Big(\frac{n+1}{n}\Big)^{n+1} > \Big(\frac{n+2}{n+1}\Big)^{n+2} = b_{n+1}.$$

Odtud vyplývá, že posloupnost $\{b_n\}$ je klesající.

Omezenost posloupností. Z monotonie posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ a jejich definice dostaneme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$2 = a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1 = 4.$$

Odtud plyne omezenost obou posloupností.

Existence společné vlastní limity. Z Důsledku 2.4.2 plyne, že existují vlastní limity $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$. Podle věty o limitě a uspořádání (Věta 2.2.42) platí $A, B \in [2, 4]$. Podle věty o limitě podílu (Věta 2.3.26(c)) tedy dále platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{B}{A}.$$

Podle definice posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Tedy $A = B$. Tím je tvrzení dokázáno. ♣

2.4.6. Definice. Označíme

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Z Příkladu 2.4.5 vyplývá, že číslo e je dobře definováno. Nazýváme jej **Eulerovým číslem**.

2.4.7. Věta (Bolzano[2]–Weierstrass[3]). Nechť $\{a_n\}$ je omezená posloupnost. Potom existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, která je konvergentní.

Důkaz. Zkonstruujeme pomocné posloupnosti $\{\alpha_k\}$ a $\{\beta_k\}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí:

(a) $\alpha_k \le \beta_k$,
(b) $[\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}] = [\alpha_k, \frac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k)]$, nebo $[\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}] = [\frac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k), \beta_k]$,
(c) množina $\{j \in \mathbb{N};\ a_j \in [\alpha_k, \beta_k]\}$ je nekonečná.

Konstrukce pomocných posloupností. Posloupnost $\{a_n\}$ je omezená, a proto existují $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\alpha_1 \le a_n \le \beta_1$. Potom platí $\{j \in \mathbb{N};\ a_j \in [\alpha_1, \beta_1]\} = \mathbb{N}$, což je nekonečná množina.

Předpokládejme, že pro $k \in \mathbb{N}$ máme již zvolena čísla α_k a β_k a platí (c). Je-li množina

$$L = \left\{j \in \mathbb{N};\ a_j \in [\alpha_k, \tfrac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k)]\right\}$$

nekonečná, pak položíme $\alpha_{k+1} = \alpha_k$ a $\beta_{k+1} = \frac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k)$. Je-li množina L konečná, pak je množina

$$P = \left\{j \in \mathbb{N};\ a_j \in [\tfrac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k), \beta_k]\right\}$$

nekonečná. Podle (c) je totiž množina

$$L \cup P = \left\{j \in \mathbb{N};\ a_j \in [\alpha_k, \beta_k]\right\}$$

nekonečná. V tomto případě položíme $\alpha_{k+1} = \frac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k)$ a $\beta_{k+1} = \beta_k$. Uvedený postup zaručuje splnění podmínek (a)-(c) i pro $k+1$. Tím je konstrukce provedena (vizte 1.4.33).

Limita pomocných posloupností. Podle (a) a (b) je $\{\alpha_k\}$ neklesající a $\{\beta_k\}$ nerostoucí. Navíc opět podle (b) pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\beta_k - \alpha_k = 2^{-(k-1)}(\beta_1 - \alpha_1)$ a také $\alpha_1 \le \alpha_k \le \beta_k \le \beta_1$. Posloupnosti $\{\alpha_k\}$ a $\{\beta_k\}$ jsou tedy omezené. Tudíž existují

[2]Bernard Bolzano (1781–1848)
[3]Karl Weierstrass (1815–1897)

vlastní limity $\lim \alpha_k$ a $\lim \beta_k$, které po řadě označíme α a β. Z věty o aritmetice limit plyne, že $\lim(\beta_k - \alpha_k) = \beta - \alpha$. Platí také

$$\lim(\beta_k - \alpha_k) = \lim \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2^{k-1}} = 0,$$

takže $\alpha = \beta$.

Konstrukce vybrané posloupnosti. Položme $n_1 = 1$ a předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ máme zvolena přirozená čísla $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ taková, že pro všechna $j \in \mathbb{N}$, $j \leq k$, platí $a_{n_j} \in [\alpha_j, \beta_j]$. Podle výše uvedené konstrukce je množina $\{n \in \mathbb{N};\ a_n \in [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]\}$ nekonečná. Tudíž také množina $\{n \in \mathbb{N};\ n > n_k,\ a_n \in [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]\}$ je nekonečná. Tedy existuje $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ takové, že $n_{k+1} > n_k$ a $a_{n_{k+1}} \in [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]$. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\alpha_k \leq a_{n_k} \leq \beta_k$. Dle věty o dvou strážnících tedy platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha$. Protože $\alpha \in \mathbb{R}$, nalezli jsme konvergentní podposloupnost posloupnosti $\{a_n\}$. ■

Limes superior a limes inferior.

2.4.8. Nechť $\{a_n\}$ je shora omezená posloupnost. Položíme-li $b_n = \sup\{a_k;\ k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$, pak je $\{b_n\}$ nerostoucí posloupnost. Podle věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) tedy existuje $\lim b_n$. Nechť je posloupnost $\{a_n\}$ zdola omezená. Položíme-li $c_n = \inf\{a_k;\ k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$, pak je $\{c_n\}$ neklesající posloupnost, a tedy $\lim c_n$ opět existuje. Tyto úvahy ukazují, že následující definice je korektní, neboť v ní uvedené limity existují.

2.4.9. Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Pak definujeme

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{a_k;\ k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}, & \text{je-li } \{a_n\} \text{ shora omezená,} \\ \infty, & \text{není-li } \{a_n\} \text{ shora omezená.} \end{cases}$$

Tuto hodnotu nazýváme **limes superior** posloupnosti $\{a_n\}$. Obdobně definujeme **limes inferior** posloupnosti $\{a_n\}$ předpisem

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \inf\{a_k;\ k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}, & \text{je-li } \{a_n\} \text{ zdola omezená,} \\ -\infty, & \text{není-li } \{a_n\} \text{ zdola omezená.} \end{cases}$$

Pokud nemůže dojít k nedorozumění, budeme místo symbolů $\limsup_{n\to\infty} a_n$ a $\liminf_{n\to\infty} a_n$ psát pouze $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$.

2.4.10. Poznámka. V literatuře se často vyskytují symboly $\overline{\lim}\, a_n$ a $\underline{\lim}\, a_n$ označující $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$, v našem textu je ale nebudeme používat.

2.4.11. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Na rozdíl od limity posloupnosti, která nemusí existovat, hodnoty $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$ existují vždy a splňují $\limsup a_n \in \mathbb{R}^*$, $\liminf a_n \in \mathbb{R}^*$. Z definice limes inferior a limes superior plyne, že $\liminf a_n \leq \limsup a_n$. Hodnoty $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$ se nemusí rovnat, jak ukazuje následující příklad.

2.4.12. Příklad. Dokažte, že $\limsup(-1)^n = 1$ a $\liminf(-1)^n = -1$.

Řešení. Posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená, neboť pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|(-1)^n| = 1$. Odtud vyplývá, že

$$\limsup (-1)^n = \lim_{n\to\infty} \sup\{(-1)^k;\ k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}.$$

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ existuje sudé číslo $k \geq n$. To znamená, že

$$\sup\{(-1)^k;\ k \in \mathbb{N},\ k \geq n\} = 1,$$

a tedy

$$\limsup (-1)^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Obdobně lze dokázat, že $\liminf (-1)^n = -1$. ♣

2.4.13. Věta. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost a $A \in \mathbb{R}^*$. Potom $\lim a_n = A$ právě tehdy, když $\limsup a_n = \liminf a_n = A$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Rozlišíme následující případy.

Případ $A \in \mathbb{R}$. Posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní, a tedy podle Věty 2.2.25 omezená. Uvažujme posloupnosti $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ definované v 2.4.8. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - A| < \varepsilon$. Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n > A - \varepsilon$, z definice infima dostáváme nerovnost $c_{n_0} \geq A - \varepsilon$. Podobně lze odvodit nerovnost $b_{n_0} \leq A + \varepsilon$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$A - \varepsilon \leq c_{n_0} \leq c_n \leq b_n \leq b_{n_0} \leq A + \varepsilon.$$

Podle věty o limitě a uspořádání (Věta 2.2.42(b)) dostáváme

$$A - \varepsilon \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq A + \varepsilon.$$

Vzhledem k tomu, že ε bylo zvoleno libovolně, platí podle Lemmatu 1.5.14 $\limsup a_n = \liminf a_n = A$.

Případ $A = \infty$. Pak $\{a_n\}$ není shora omezená, ale je omezená zdola (Věta 2.3.19). Tedy podle definice dostáváme $\limsup a_n = \infty$ a $\liminf a_n = \lim c_n$. Nechť $K \in \mathbb{R}$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n > K$, a tedy také $c_n \geq K$. Odtud plyne $\lim c_n = \infty$, a tudíž $\liminf a_n = \infty$.

Případ $A = -\infty$. Postupujeme obdobně jako v předcházejícím případě.

$\Leftarrow$ *Případ* $A \in \mathbb{R}$. Potom je podle definice limes superior a limes inferior posloupnost $\{a_n\}$ omezená. Nechť posloupnosti $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou definovány stejně jako v 2.4.8. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $c_n \leq a_n \leq b_n$. Navíc z předpokladu vyplývá, že $\lim c_n = \lim b_n = A$. Pomocí věty o dvou strážnících (Věta 2.2.44) tedy dostáváme $\lim a_n = A$.

Případ $A = \infty$. Potom je podle Věty 2.3.19 posloupnost $\{a_n\}$ zdola omezená, takže je možné definovat posloupnost $\{c_n\}$ jako v 2.4.8. Je zřejmé, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $c_n \leq a_n$. Z definice limes inferior navíc víme, že $\liminf a_n = \lim c_n$, a tedy podle předpokladu platí $\lim c_n = \infty$. Podle Věty 2.3.31 tedy platí $\lim a_n = \infty$.

Případ $A = -\infty$. Tvrzení lze dokázat obdobně jako v případě $A = \infty$, přičemž místo Věty 2.3.31 je třeba použít Větu 2.3.32. ■

2.4.14. Věta. Nechť $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ jsou posloupnosti. Potom

(a) $\liminf x_n + \liminf y_n \leq \liminf(x_n + y_n)$, pokud je výraz na levé straně definován,

(b) $\limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$, pokud je výraz na pravé straně definován.

Důkaz. Dokážeme pouze tvrzení (b). Nejprve předpokládejme, že $\limsup x_n + \limsup y_n = \infty$. Potom je dokazovaná nerovnost zřejmá. Předpokládejme tedy, že $\limsup x_n + \limsup y_n < \infty$. Potom jsou $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ shora omezené, a tedy také posloupnost $\{x_n + y_n\}$ je shora omezená. Takže platí

$$\limsup(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_k + y_k;\ k \in \mathbb{N}, k \geq n\}. \tag{2.24}$$

Označme

$$z_n = \sup\{x_k;\ k \in \mathbb{N}, k \geq n\} + \sup\{y_k;\ k \in \mathbb{N}, k \geq n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Potom je posloupnost $\{z_n\}$ nerostoucí, a tedy podle věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) má limitu. Navíc z Věty 1.5.20(a) plyne pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\sup\{x_k + y_k;\ k \in \mathbb{N}, k \geq n\} \leq z_n.$$

Podle věty o limitě a uspořádání (Věta 2.3.30(b)) platí

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{x_k + y_k;\ k \in \mathbb{N}, k \geq n\} \leq \lim_{n\to\infty} z_n. \tag{2.25}$$

Z definice limes superior a věty o limitě součtu (Věta 2.3.26(a)) pak dostáváme

$$\lim z_n = \limsup x_n + \limsup y_n. \tag{2.26}$$

Konečně z (2.24), (2.25) a (2.26) plyne dokazované tvrzení.

Tvrzení (a) je možné dokázat obdobně. ■

2.4.15. Věta. Nechť $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ jsou posloupnosti. Předpokládejme, že platí

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon x_n \leq y_n.$$

Potom $\limsup x_n \leq \limsup y_n$ a $\liminf x_n \leq \liminf y_n$.

Důkaz. Odvodíme pouze první nerovnost, druhou lze dokázat obdobně. Pokud je posloupnost $\{y_n\}$ shora neomezená, pak $\limsup y_n = \infty$ a nerovnost zřejmě platí. Pokud je posloupnost $\{y_n\}$ shora omezená, pak je shora omezená i posloupnost $\{x_n\}$. Dokazovaná nerovnost potom plyne z nerovnosti

$$\sup\{x_k;\ k \in \mathbb{N}, k \geq n\} \leq \sup\{y_k;\ k \in \mathbb{N}, k \geq n\}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq n_0,$$

a z věty o limitě a uspořádání (Věta 2.3.30(b)). ■

2.4.16. Věta. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost.

(a) Pro každé $A \in \mathbb{R}$ splňující $A < \liminf a_n$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $A < a_n$.

(b) Pro každé $B \in \mathbb{R}$ splňující $B > \limsup a_n$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $B > a_n$.

Důkaz. (a) Předpokládejme, že $A \in \mathbb{R}$ a $A < \liminf a_n$. Potom $\liminf a_n > -\infty$, a tedy $\liminf a_n = \lim c_n$, kde $c_n = \inf\{a_k;\ k \in \mathbb{N}, k \geq n\}$. Podle Věty 2.3.30 nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $c_{n_0} > A$. Pak platí, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, máme $a_n > A$.

(b) Důkaz lze provést obdobně jako v (a). ∎

Hromadná hodnota.

2.4.17. Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Řekneme, že $A \in \mathbb{R}^*$ je **hromadná hodnota** posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ z posloupnosti $\{a_n\}$ taková, že platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Množinu všech hromadných hodnot posloupnosti $\{a_n\}$ značíme $H(\{a_n\})$.

2.4.18. Nechť $A \in \mathbb{R}^*$, $\{a_n\}$ je posloupnost a $\lim a_n = A$. Potom je limita každé podposloupnosti rovna A, a proto $H(\{a_n\}) = \{A\}$.

2.4.19. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost a $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je její podposloupnost. Potom platí $H(\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}) \subset H(\{a_n\})$, neboť vybraná posloupnost z podposloupnosti posloupnosti $\{a_n\}$ je také vybranou posloupností z posloupnosti $\{a_n\}$. Jsou-li totiž $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ rostoucí posloupnosti přirozených čísel, pak také $\{n_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel.

2.4.20. Příklad. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost a $m \in \mathbb{N}$. Dokažte, že

$$H(\{a_{n+m}\}_{n=1}^{\infty}) = H(\{a_n\}).$$

Řešení. Inkluze $\subset$. Posloupnost $\{a_{n+m}\}_{n=1}^{\infty}$ je podposloupností posloupnosti $\{a_n\}$, takže inkluze $H(\{a_{n+m}\}_{n=1}^{\infty}) \subset H(\{a_n\})$ plyne z 2.4.19.

Inkluze $\supset$. Nechť $A \in H(\{a_n\})$. Pak existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Posloupnost přirozených čísel $\{n_{j+m}\}_{j=1}^{\infty}$ je rostoucí, takže podle Věty 2.3.21 platí $\lim_{j\to\infty} a_{n_{j+m}} = A$. Položme $p_j = n_{j+m} - m$ pro $j \in \mathbb{N}$. Poněvadž podle Lemmatu 2.2.31 pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí $n_{j+m} \geq j + m > m$, je $\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ rostoucí posloupností přirozených čísel. Potom posloupnost $\{a_{p_j+m}\}_{j=1}^{\infty} = \{a_{n_{j+m}}\}_{j=1}^{\infty}$ konverguje k A a je vybranou posloupností z posloupnosti $\{a_{n+m}\}_{n=1}^{\infty}$. Platí tedy $A \in H(\{a_{n+m}\}_{n=1}^{\infty})$. ♣

2.4.21. Příklad. Dokažte, že $H(\{(-1)^n\}) = \{-1, 1\}$.

Řešení. Protože podposloupnosti $\{(-1)^{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{(-1)^{2k+1}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{(-1)^n\}$ splňují $\lim_{k\to\infty}(-1)^{2k} = 1$ a $\lim_{k\to\infty}(-1)^{2k+1} = -1$, dostáváme inkluzi $\{-1, 1\} \subset H(\{(-1)^n\})$.

Opačnou inkluzi dokážeme sporem. Předpokládejme pro spor, že existuje $A \in H(\{(-1)^n\}) \setminus \{-1, 1\}$. Potom existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $\lim_{k\to\infty}(-1)^{n_k} = A$. Díky Lemmatu 2.3.14 nalezneme $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_1 >$

0, takové, že $-1 \notin B(A, \varepsilon_1)$ a $\varepsilon_2 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_2 > 0$, takové, že $1 \notin B(A, \varepsilon_2)$. Položme $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Potom $B(A, \varepsilon) \cap \{-1, 1\} = \emptyset$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí buď $(-1)^{n_k} = 1$, nebo $(-1)^{n_k} = -1$, a tedy $(-1)^{n_k} \notin B(A, \varepsilon)$, což je ve sporu s tím, že $\lim_{k\to\infty}(-1)^{n_k} = A$. Odtud plyne $H(\{(-1)^n\}) \subset \{-1, 1\}$. Tím je tvrzení dokázáno. ♣

2.4.22. Příklad. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}$ je posloupnost taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a \le a_n \le b$, a $A \in H(\{a_n\})$. Dokažte, že potom $A \in [a, b]$.

Řešení. Nechť $\{n_k\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel taková, že $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Položme $b_k = a$ pro $k \in \mathbb{N}$. Potom $\lim_{k\to\infty} b_k = a$ a pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $a_{n_k} \ge b_k$. Podle Věty 2.2.42(b) platí $A \ge a$. Obdobně lze dokázat, že $A \le b$. ♣

2.4.23. Věta. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Potom $\limsup a_n, \liminf a_n \in H(\{a_n\})$ a pro každé $y \in H(\{a_n\})$ platí $\liminf a_n \le y \le \limsup a_n$.

Důkaz. Označme $\limsup a_n = A$. Rozlišíme několik případů.

Případ $A \in \mathbb{R}$. Pak $\{a_n\}$ je shora omezená. Položme $b_n = \sup\{a_k;\ k \in \mathbb{N},\ k \ge n\}$. Pak je posloupnost $\{b_n\}$ nerostoucí a $\lim b_n = A$. Induktivně sestrojíme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}$ takovou, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$|A - a_{n_k}| < \tfrac{2}{k}. \tag{2.27}$$

Protože $\lim b_n = A$, nalezneme $m_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $A \le b_{m_1} < A + 1$. Díky definici b_{m_1} nalezneme $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 \ge m_1$, splňující $b_{m_1} \ge a_{n_1} > b_{m_1} - 1$. Pak platí

$$|A - a_{n_1}| \le |A - b_{m_1}| + |b_{m_1} - a_{n_1}| < 1 + 1 = 2.$$

Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ již máme určeno n_k. Protože $\lim b_n = A$, nalezneme $m_k \in \mathbb{N}$, $m_k > n_k$, takové, že $b_{m_k} < A + \frac{1}{k+1}$. Díky definici b_{m_k} nalezneme $n_{k+1} \in \mathbb{N}$, $n_{k+1} \ge m_k$, takové, že $b_{m_k} \ge a_{n_{k+1}} > b_{m_k} - \frac{1}{k+1}$. Pak platí $n_{k+1} > n_k$ a

$$|A - a_{n_{k+1}}| \le |A - b_{m_k}| + |b_{m_k} - a_{n_{k+1}}| < \tfrac{1}{k+1} + \tfrac{1}{k+1} = \tfrac{2}{k+1}.$$

Tím je konstrukce posloupností provedena.

Potom díky (2.27) dostáváme $\lim a_{n_k} = A$. Odtud vyplývá, že $A \in H(\{a_n\})$.

Případ $A = \infty$. Potom není $\{a_n\}$ shora omezená. Existuje tedy $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_1} > 1$. Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ jsme již určili přirozené číslo n_k. Množina $\{a_j;\ j \in \mathbb{N}, j > n_k\}$ není shora omezená. Můžeme tedy nalézt $n_{k+1} \in \mathbb{N}$, $n_{k+1} > n_k$, takové, že $a_{n_{k+1}} > k + 1$. Podle Věty 2.3.31 platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \infty$, takže $\infty \in H(\{a_n\})$.

Případ $A = -\infty$. Podle 2.4.11 platí $\liminf a_n \le -\infty$, tedy $\liminf a_n = -\infty$. To podle Věty 2.4.13 znamená, že $\lim a_n = -\infty$. Tvrzení tedy plyne z 2.4.18.

Dokázali jsme, že $\limsup a_n \in H(\{a_n\})$. Obdobně lze dokázat, že $\liminf a_n \in H(\{a_n\})$.

Důkaz nerovnosti. Předpokládejme, že $y \in H(\{a_n\})$. Je-li $\limsup a_n = \infty$, pak zřejmě platí $y \leq \limsup a_n$. Je-li $\limsup a_n < \infty$, pak je posloupnost $\{a_n\}$ shora omezená a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq b_n$, kde $b_n = \sup\{a_k;\ k \in \mathbb{N}, k \geq n\}$. Nechť $\{n_k\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel splňující $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = y$. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $a_{n_k} \leq b_{n_k}$, a tedy dle věty o limitě a uspořádání (Věta 2.3.30(b)) platí $y \leq \limsup a_n$. Obdobně lze dokázat, že $y \geq \liminf a_n$. Tím je důkaz věty proveden. ■

2.4.24. Důsledek. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Potom je $H(\{a_n\})$ neprázdná.

Důkaz. Podle Věty 2.4.23 obsahuje množina $H(\{a_n\})$ prvek $\limsup a_n$, je tedy neprázdná. ■

Bolzanova–Cauchyova podmínka.

2.4.25. Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ splňuje **Bolzanovu–Cauchyovu[4] podmínku**, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, m \geq n_0 \colon |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Význam a důležitost Bolzanovy–Cauchyovy podmínky ukazuje následující věta.

2.4.26. Věta. Posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu právě tehdy, když splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku.

Důkaz. $\Rightarrow$ Označme $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle definice limity nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - A| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Potom pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$, $n \geq n_0$, platí

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - A| + |A - a_m| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Posloupnost $\{a_n\}$ tedy splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku.

$\Leftarrow$ Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Potom pro $m = n_0$ dostáváme pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, nerovnosti $a_{n_0} - \varepsilon < a_n < a_{n_0} + \varepsilon$. Množina $\{a_j;\ j \in \mathbb{N}, j \geq n_0\}$ je tedy omezená. Množina $\{a_j;\ j \in \mathbb{N}, j < n_0\}$ je konečná, a proto je také omezená. Odtud plyne, že $\{a_n\}$ je omezená, takže můžeme definovat posloupnosti $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jako v 2.4.8. Z definice těchto posloupností vyplývají pro každé $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$, odhady

$$a_{n_0} - \varepsilon \leq c_m \leq b_m \leq a_{n_0} + \varepsilon,$$

a tedy také

$$a_{n_0} - \varepsilon \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq a_{n_0} + \varepsilon.$$

Odtud dostáváme $\liminf a_n \in \mathbb{R}$, $\limsup a_n \in \mathbb{R}$ a

$$0 \leq \limsup a_n - \liminf a_n < 2\varepsilon,$$

[4] Augustin Louis Cauchy (1789–1857)

a tedy, protože ε bylo zvoleno libovolně, $\liminf a_n = \limsup a_n \in \mathbb{R}$. Označíme-li $A = \liminf a_n$, pak podle Věty 2.4.13 platí $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$, což jsme měli dokázat. ■

Borelova věta. Na závěr této kapitoly uveďme důležitou Borelovu větu, jejíž význam však bude zřejmý později.

2.4.27. Věta (Borel[5])**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$, a $\mathcal{S}$ je množina otevřených intervalů taková, že $[a, b] \subset \bigcup \mathcal{S}$. Potom existuje konečná množina $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ taková, že $[a, b] \subset \bigcup \mathcal{S}_0$.

Důkaz. Označme symbolem M množinu všech $x \in [a, b]$, pro které existuje konečná množina $\mathcal{S}_x \subset \mathcal{S}$ taková, že $[a, x] \subset \bigcup \mathcal{S}_x$. Naším cílem je ukázat, že $b \in M$.

Dle předpokladu existuje otevřený interval $I_a \in \mathcal{S}$ splňující $a \in I_a$. Položme $\mathcal{S}_a = \{I_a\}$. Potom je zřejmě $\mathcal{S}_a$ konečná množina a platí $[a, a] \subset \bigcup \mathcal{S}_a$. Tedy $a \in M$, a množina M je neprázdná. Navíc je zřejmě b horní závorou množiny M, a tedy M je shora omezená. Označme $y = \sup M$. Z výše uvedených faktů vyplývá, že $y \in [a, b]$. K důkazu věty stačí ukázat, že $y \in M$ a $y = b$.

Dokážeme, že $y \in M$. Dle předpokladu existuje otevřený interval $I_y \in \mathcal{S}$ splňující $y \in I_y$. Nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že $(y - \delta, y] \subset I_y$. Podle definice suprema nalezneme $z \in M \cap (y - \delta, y]$. Pak nalezneme konečnou množinu $\mathcal{S}_z \subset \mathcal{S}$ splňující $[a, z] \subset \bigcup \mathcal{S}_z$. Položme $\mathcal{S}_y = \mathcal{S}_z \cup \{I_y\}$. Potom je $\mathcal{S}_y$ konečná množina otevřených intervalů. Předpokládejme, že $x \in [a, y]$. Je-li $x \in [a, z]$, potom $x \in \bigcup \mathcal{S}_z$. Je-li $x \in (z, y]$, potom $x \in I_y$. V každém případě platí $x \in \bigcup \mathcal{S}_y$, takže $[a, y] \subset \bigcup \mathcal{S}_y$. Odtud vyplývá, že $y \in M$.

Zbývá dokázat, že $y = b$. Předpokládejme pro spor, že $y < b$. Potom nalezneme otevřený interval $I_y \in \mathcal{S}$ splňující $y \in I_y$. Pak nalezneme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, takové, že $y + \varepsilon < b$ a $[y, y + \varepsilon] \subset I_y$. Poněvadž $y \in M$, nalezneme konečný systém $\mathcal{S}_y \subset \mathcal{S}$ takový, že $[a, y] \subset \bigcup \mathcal{S}_y$. Systém $\tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{S}_y \cup \{I_y\}$ je konečný a platí

$$[a, y + \varepsilon] = [a, y] \cup [y, y + \varepsilon] \subset \Big(\bigcup \mathcal{S}_y\Big) \cup I_y = \bigcup \tilde{\mathcal{S}}.$$

Odtud plyne, že $y + \varepsilon \in M$, což je spor s definicí y. ■

2.5. Teoretické příklady k limitě posloupnosti

2.5.1. Příklad. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost a $A \in \mathbb{R}$. Dokažte, že $\lim a_n = A$ právě tehdy, když pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, je množina $\{n \in \mathbb{N};\ a_n \notin (A - \varepsilon, A + \varepsilon)\}$ konečná.

Řešení. $\Leftarrow$ Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Množina $\{n \in \mathbb{N};\ a_n \notin (A - \varepsilon, A + \varepsilon)\}$ je podle předpokladu konečná. Pokud je prázdná, položíme $n_0 = 1$. Pokud je neprázdná, existuje její maximum podle Věty 1.6.14 a můžeme položit

$$n_0 = \max\{n \in \mathbb{N};\ a_n \notin (A - \varepsilon, A + \varepsilon)\} + 1.$$

[5] Émile Borel (1871–1956)

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. Protože ε bylo zvoleno libovolně, dokázali jsme, že $\lim a_n = A$.

$\Rightarrow$ Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Z definice limity k tomuto ε existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - A| < \varepsilon$. Množina $\{n \in \mathbb{N};\ a_n \notin (A-\varepsilon, A+\varepsilon)\}$ je tudíž podmnožinou konečné množiny $\{n \in \mathbb{N};\ n < n_0\}$, a tedy je sama konečná. ♣

2.5.2. Příklad. Dokažte, že $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Řešení. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle Archimédovy vlastnosti (Věta 1.5.30) k němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$, a tedy $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$. Zároveň zřejmě pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $-\varepsilon < \frac{1}{\sqrt{n}}$. Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $\left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| < \varepsilon$. Podle definice limity odtud vyplývá, že $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. ♣

2.5.3. Příklad. Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, a $k \in \mathbb{N}$. Dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0.$$

Řešení. Případ $k = 1$. Označme $\psi = a - 1$. Potom $\psi > 0$, a tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí podle binomické věty (Věta 1.5.6)

$$a^n = (1+\psi)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \psi^k \geq \binom{n}{2} \psi^2 = \frac{n(n+1)\psi^2}{2}.$$

Tudíž pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí

$$0 < \frac{n}{a^n} \leq n \cdot \frac{2}{n(n+1)\psi^2} = \frac{2}{\psi^2(n+1)}.$$

Protože $\lim \frac{2}{\psi^2(n+1)} = 0$, plyne z věty o dvou strážnících (Věta 2.2.44), že $\lim \frac{n}{a^n} = 0$.

Obecný případ $k \in \mathbb{N}$. Označme $b = \sqrt[k]{a}$. Pak $b > 1$, a tedy dle již dokázané části tvrzení platí $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{b^n} = 0$. Podle věty o aritmetice limit (Věta 2.2.34(b)) dostáváme dokazovaný vztah

$$\lim \frac{n^k}{a^n} = \lim \left(\frac{n}{b^n}\right)^k = 0^k = 0.$$

♣

2.5.4. Příklad. Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Řešení. Podle Archimédovy vlastnosti (Věta 1.5.30) existuje $m \in \mathbb{N}$ splňující $m > a$. Pro každé $j \in \mathbb{N}$, $j \geq m$, potom platí $\frac{a}{j} < 1$. Pro každé $n \in \mathbb{N}, n > m$, dostáváme tedy odhad

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^m}{m!} \cdot \prod_{j=m+1}^{n} \frac{a}{j} \leq \frac{a^m}{m!} \cdot \frac{a}{n}.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ označíme

$$a_n = 0, \qquad b_n = \frac{a^m}{m!} \cdot \frac{a}{n} \qquad \text{a} \qquad c_n = \frac{a^n}{n!}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > m$, platí $a_n \leq c_n \leq b_n$ a navíc $\lim a_n = \lim b_n = 0$. Podle věty o dvou strážnících (Věta 2.2.44) tedy dostáváme dokazovaný vztah. ♣

2.5.5. Příklad. Dokažte, že

$$\lim \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, platí

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \prod_{j=2}^{n} \frac{j}{n} \leq \frac{1}{n} \cdot \prod_{j=2}^{n} 1 = \frac{1}{n}.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ označme

$$a_n = 0, \qquad b_n = \frac{1}{n} \qquad \text{a} \qquad c_n = \frac{n!}{n^n}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$ a navíc $\lim a_n = \lim b_n = 0$. Podle věty o dvou strážnících (Věta 2.2.44) tedy dostáváme dokazovaný vztah. ♣

2.5.6. Příklad. Ukažte, že požadujeme-li platnost tvrzení Věty 2.3.5(b) a vztahů $\infty + 0 = \infty$, $\infty + \infty = \infty$, pak nelze definovat $\infty - \infty = 0$.

Řešení. Kdyby platilo $\infty - \infty = 0$, potom

$$\infty = \infty + 0 = \infty + (\infty - \infty) = (\infty + \infty) - \infty = \infty - \infty = 0,$$

což je spor. ♣

2.5.7. Příklad. Dokažte, že

$$\lim \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, platí $1 \leq \frac{n}{2} \leq [\frac{n}{2}] + 1 \leq n$, a tedy také

$$\begin{aligned} n! &= \prod_{j=1}^{n} j \geq \prod_{j=[\frac{n}{2}]+1}^{n} j \geq \prod_{j=[\frac{n}{2}]+1}^{n} \frac{n}{2} \\ &= \left(\tfrac{n}{2}\right)^{n-[\frac{n}{2}]} \geq \left(\tfrac{n}{2}\right)^{n/2}. \end{aligned}$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ pak platí

$$\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt[n]{\left(\tfrac{n}{2}\right)^{n/2}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}n}.$$

Dále zřejmě platí $\lim \frac{1}{2}n = \infty$ a podle Příkladu 2.3.37 máme také $\lim \sqrt{\frac{1}{2}n} = \infty$. Z Věty 2.3.31 tudíž vyplývá, že $\lim \sqrt[n]{n!} = \infty$. ♣

2.5.8. Příklad. Dokažte, že
$$\lim \log n = \infty.$$

Řešení. Nechť $K \in \mathbb{R}$. Podle Archimédovy vlastnosti (Věta 1.5.30) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > e^K$. Logaritmus je rostoucí funkce, takže potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $\log n \geq \log n_0 > K$. Tím je tvrzení dokázáno. ♣

2.5.9. Příklad. Nechť $q, \alpha \in \mathbb{R}$. Dokažte, že posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní právě tehdy, když $q \geq 0$ nebo $\alpha = 0$.

Řešení. Je-li $\alpha = 0$, pak je posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^{\infty}$ konstantní, a tedy monotónní. Předpokládejme, že $\alpha > 0$. Je-li $q \in [0, 1]$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $q^{n+1} \leq q^n$, a tedy také $\alpha q^{n+1} \leq \alpha q^n$. Posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy v tomto případě nerostoucí. Je-li $q \in [1, \infty)$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $q^{n+1} \geq q^n$, a tedy také $\alpha q^{n+1} \geq \alpha q^n$ a posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy v tomto případě neklesající. Obdobně lze dokázat, že je-li $\alpha < 0$, pak je posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající pro každé $q \in [0, 1]$ a nerostoucí pro každé $q \in [1, \infty)$.

Předpokládejme, že $\alpha > 0$ a $q < 0$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ sudé platí $\alpha q^n > 0$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ liché platí $\alpha q^n < 0$. Odtud plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ sudé platí $\alpha q^n > \alpha q^{n+1}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ liché platí $\alpha q^n < \alpha q^{n+1}$. Posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^{\infty}$ tedy není monotónní. Obdobně lze dokázat, že posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^{\infty}$ není monotónní, je-li $\alpha < 0$ a $q < 0$. ♣

2.5.10. Příklad (srovnejte s 2.3.25)**.** Pro každé $j \in \mathbb{N}$ definujme posloupnost přirozených čísel $\{n_k^j\}_{k=1}^{\infty}$ předpisem
$$n_k^j = \begin{cases} k, & \text{pokud } k \leq j, \\ 2k, & \text{pokud } k > j. \end{cases}$$

Dokažte, že

- $\{n_k^j;\ j, k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$,
- pro každé $j \in \mathbb{N}$ je posloupnost $\{n_k^j\}_{k=1}^{\infty}$ rostoucí,
- pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí $\lim_{k\to\infty}(-1)^{n_k^j} = 1$,

přesto však $\lim(-1)^n$ neexistuje.

Řešení. Pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí $n_j^j = j$, a tedy $\{n_k^j;\ j, k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$.

Nechť $j \in \mathbb{N}$. Zvolme $k, k' \in \mathbb{N}, k < k'$. Pokud $k \leq j$, pak $n_k^j = k < k' \leq n_{k'}^j$. Pokud $j < k$, pak platí $j < k'$ a $n_k^j = 2k < 2k' = n_{k'}^j$. Tím je ověřeno, že posloupnost $\{n_k^j\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí.

Nechť $j \in \mathbb{N}$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k > j$, je číslo n_k^j sudé, a tedy $(-1)^{n_k^j} = 1$. Tudíž $\lim_{k\to\infty}(-1)^{n_k^j} = 1$.

Neexistence $\lim(-1)^n$ jakožto prvku $\mathbb{R}$ byla ukázána v Příkladu 2.2.15, neexistence $\lim(-1)^n$ jakožto prvku $\mathbb{R}^*$, o kterou nyní jde, plyne z 2.3.21. ♣

2.5.11. Příklad. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost a $A \in \mathbb{R}^*$. Potom $A \in H(\{a_n\})$ právě tehdy, když platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \forall k \in \mathbb{N} \ \exists n \in \mathbb{N}, n \geq k : a_n \in B(A, \varepsilon). \tag{2.28}$$

Řešení. $\Rightarrow$ Pro $A \in H(\{a_n\})$ existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ splňující $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Pro ověření (2.28) zvolme libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, a $k \in \mathbb{N}$. Potom existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $j \in \mathbb{N}, j \geq k_0$, platí $a_{n_j} \in B(A, \varepsilon)$. Zvolme $j_0 \geq \max\{k_0, k\}$. Položme $n = n_{j_0}$. Pak máme podle Lemmatu 2.2.31 $n = n_{j_0} \geq j_0 \geq k$ a dále $a_n \in B(A, \varepsilon)$, neboť $n = n_{j_0} \geq j_0 \geq k_0$. Tím je podmínka (2.28) ověřena.

$\Leftarrow$ Budeme konstruovat rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ takovou, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ bude platit $a_{n_k} \in B(A, \frac{1}{k})$. Pro $\varepsilon = 1$ a $k = 1$ nalezneme podle (2.28) $n_1 \in \mathbb{N}$ splňující $a_{n_1} \in B(A, 1)$. Předpokládejme, že jsem již zkonstruovali n_k. Potom (2.28) použijeme pro $\varepsilon = \frac{1}{k+1}$ a $k = n_k + 1$. Dostaneme $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ splňující $n_{k+1} \geq n_k + 1 > n_k$ a $a_{n_{k+1}} \in B(A, \frac{1}{k+1})$. Tím je konstrukce $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ provedena.

Dokážeme, že platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ splňující $\frac{1}{k_0} < \varepsilon$. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}, k \geq k_0$, platí $a_{n_k} \in B(A, \frac{1}{k}) \subset B(A, \frac{1}{k_0}) \subset B(A, \varepsilon)$. Odtud již podle Věty 2.3.15 plyne $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$, a tedy $A \in H(\{a_n\})$. ♣

2.5.12. Příklad. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost splňující $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$. Dokažte, že platí

$$H(\{a_n\}) = \{c \in \mathbb{R}^*;\ \liminf a_n \leq c \leq \limsup a_n\}.$$

Řešení. Označme $a = \liminf a_n$ a $b = \limsup a_n$. Z Věty 2.4.23 plyne inkluze „$\subset$“ a fakt, že $a, b \in H(\{a_n\})$. Stačí proto dokázat, že platí $H(\{a_n\}) \supset (a, b)$.

Pomocné tvrzení. Ukážeme, že pro každé $A \in (a, b)$ platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \forall k \in \mathbb{N} \ \exists n \in \mathbb{N}, n \geq k : |a_n - A| < \varepsilon.$$

Zvolme $A \in (a, b), \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, a $k \in \mathbb{N}$. Nalezneme $j_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $j_0 \geq k$ a pro každé $j \in \mathbb{N}$, $j \geq j_0$, platí $|a_{j+1} - a_j| < \varepsilon$. Protože $a < A$, z definice limes inferior existuje $j_1 \in \mathbb{N}$, $j_1 \geq j_0$, splňující $a_{j_1} < A$ a protože $A < b$, z definice limes superior existuje $j_2 \in \mathbb{N}$, $j_2 > j_1$, splňující $a_{j_2} > A$. Položme

$$J = \{j \in \mathbb{N};\ j_1 \leq j \leq j_2 \wedge a_j < A\}.$$

Protože $j_1 \in J$, je J neprázdná konečná množina, a existuje tak $m = \max J$. Protože $j_2 \notin J$, platí $m < j_2$. Potom máme

$$A \leq a_{m+1} = a_m + (a_{m+1} - a_m) < A + \varepsilon.$$

Platí tedy $|a_{m+1} - A| < \varepsilon$, čímž je pomocné tvrzení dokázáno, neboť stačí položit $n = m + 1$.

Díky pomocnému tvrzení a Příkladu 2.5.11 dostáváme $A \in H(\{a_n\})$ pro každé $A \in (a, b)$. Tím je tvrzení dokázáno. ♣

2.5.13. Příklad. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost s kladnými členy. Dokažte, že platí

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \liminf \sqrt[n]{a_n} \le \limsup \sqrt[n]{a_n} \le \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Řešení. První nerovnost. Poněvadž posloupnost $\{a_n\}$ sestává z kladných členů, platí $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 0$ a $\liminf \sqrt[n]{a_n} \ge 0$. Pokud $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$, pak dokazovaná nerovnost zřejmě platí. Můžeme tedy předpokládat $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} > 0$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$ takové, že $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} > K > 0$. K němu podle Věty 2.4.16 nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \ge n_0 \colon \frac{a_{n+1}}{a_n} > K.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \ge n_0$, platí

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \cdot a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}} \ge \left(K^{n-n_0} a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Z Věty 2.4.15 dostaneme

$$\liminf \sqrt[n]{a_n} \ge \liminf (K^{n-n_0} a_{n_0})^{\frac{1}{n}}.$$

Pomocí Příkladu 2.2.48 spočteme

$$\lim_{n\to\infty} (K^{n-n_0} a_{n_0})^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} K (K^{-n_0} a_{n_0})^{\frac{1}{n}} = K.$$

Podle Věty 2.4.13 tedy také platí

$$\liminf_{n\to\infty} \left(K^{n-n_0} a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}} = K,$$

takže celkem dostáváme $\liminf \sqrt[n]{a_n} \ge K$.

Pro spor předpokládejme, že dokazovaná nerovnost neplatí. Pak stačí zvolit K takové, že $\liminf \sqrt[n]{a_n} < K < \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Odtud plyne podle předchozí úvahy $K \le \liminf \sqrt[n]{a_n}$, což je spor.

Druhá nerovnost. Tato nerovnost platí podle 2.4.11.

Třetí nerovnost. Poněvadž posloupnost $\{a_n\}$ sestává z kladných členů, platí $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 0$. Pokud $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$, pak dokazovaná nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < \infty$. Zvolme $L \in \mathbb{R}$, $L > \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$. K němu podle Věty 2.4.16 nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \ge n_0 \colon \frac{a_{n+1}}{a_n} < L.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \ge n_0$, platí

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \cdot a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}} \le \left(L^{n-n_0} a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{2.29}$$

Z Věty 2.4.15 dostaneme

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup (L^{n-n_0} a_{n_0})^{\frac{1}{n}}.$$

Pomocí Příkladu 2.2.48 spočteme

$$\lim_{n\to\infty} (L^{n-n_0} a_{n_0})^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} L(L^{-n_0} a_{n_0})^{\frac{1}{n}} = L.$$

Podle Věty 2.4.13 tedy také platí $\limsup_{n\to\infty} (L^{n-n_0} a_{n_0})^{\frac{1}{n}} = L$, a tedy celkem dostáváme $\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq L$. Díky volbě L odtud plyne platnost třetí nerovnosti. ♣

2.5.14. Příklad. Nechť $\{a_n\}$, $\{b_k\}$ jsou posloupnosti, pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $b_k \in H(\{a_n\})$ a $\lim b_k = b \in \mathbb{R}^*$. Dokažte, že platí $b \in H(\{a_n\})$.

Řešení. Zkonstruujeme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ takovou, že pro každé $j \in \mathbb{N}$ bude platit $a_{n_j} \in B(b, \frac{1}{j})$.

Poněvadž $\lim b_k = b$, můžeme pro každé $j \in \mathbb{N}$ nalézt $k_j \in \mathbb{N}$ takové, že $b_{k_j} \in B(b, \frac{1}{j})$. Nyní pro každé $j \in \mathbb{N}$ nalezneme $\varepsilon_j > 0$ takové, že $B(b_{k_j}, \varepsilon_j) \subset B(b, \frac{1}{j})$. Díky tomu, že $b_{k_1} \in H(\{a_n\})$, existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_1} \in B(b_{k_1}, \varepsilon_1) \subset B(b, 1)$. Nechť $j \in \mathbb{N}$ a předpokládejme, že již máme určena přirozená čísla $n_1 < n_2 < \cdots < n_j$. Díky tomu, že $b_{k_{j+1}} \in H(\{a_n\})$, existuje podle Příkladu 2.5.11 přirozené číslo n_{j+1} takové, že $n_{j+1} > n_j$ a $a_{n_{j+1}} \in B(b_{k_{j+1}}, \varepsilon_{j+1}) \subset B(b, \frac{1}{j+1})$.

Posloupnost $\{a_{n_j}\}$ tedy splňuje $\lim_{j\to\infty} a_{n_j} = b$, a tedy $b \in H(\{a_n\})$. ♣

2.5.15. Příklad. Nechť $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dokažte, že pro posloupnost $\{a_n\} = \{n\alpha - [n\alpha]\}$ platí $H(\{a_n\}) = [0, 1]$. (Připomeňme, že $[x]$ značí celou část čísla $x \in \mathbb{R}$.)

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \in [0, 1)$, a proto inkluze $H(\{a_n\}) \subset [0, 1]$ plyne z Příkladu 2.4.22. K důkazu použijeme následující tvrzení.

Pomocné tvrzení. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Potom platí

$$\exists p \in \mathbb{Z}\ \exists q \in \mathbb{N} : 0 < |q\alpha - p| < \varepsilon. \tag{2.30}$$

Důkaz pomocného tvrzení. Nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $m > \frac{1}{\varepsilon}$. Interval $[0, 1)$ je sjednocením intervalů tvaru

$$\left[0, \tfrac{1}{m}\right),\ \left[\tfrac{1}{m}, \tfrac{2}{m}\right),\ \ldots,\ \left[\tfrac{m-1}{m}, 1\right). \tag{2.31}$$

Vzhledem k tomu, že těchto intervalů je konečně mnoho a množina $\mathbb{N}$ je nekonečná, musí existovat $i, j \in \mathbb{N}, i < j$, taková, že členy a_i, a_j jsou společně v jednom z intervalů uvedených v (2.31). Pak platí $|a_j - a_i| < \frac{1}{m}$. Položme $p = [\alpha j] - [\alpha i]$ a $q = j - i$. Potom $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ a platí

$$|q\alpha - p| = \big|(j - i)\alpha - ([\alpha j] - [\alpha i])\big| = |a_j - a_i| < \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

Dále platí $q\alpha - p \neq 0$, neboť α je iracionální. Tím je dokázáno (2.30).

Vlastní důkaz. Zvolme $x \in (0, 1)$. Pro x ověříme podmínku (2.28) z Příkladu 2.5.11. Nechť tedy $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, a $k \in \mathbb{N}$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $0 < x-\varepsilon < x+\varepsilon < 1$. Pro ε nalezneme příslušná p, q podle pomocného tvrzení. Označme $\eta = q\alpha - p$. Předpokládejme nejprve, že $\eta > 0$. Vzhledem k tomu, že $a_k < 1 + x$ a $0 < \eta < \varepsilon$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující

$$a_k + n_0\eta \in (1 + x - \varepsilon, 1 + x + \varepsilon).$$

Potom platí $[a_k + n_0\eta] = 1$, a tedy $a_k + n_0\eta - [a_k + n_0\eta] \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. V následujícím odvození využijeme opakovaně zřejmý vztah $[x+m] = [x]+m$, kde $x \in \mathbb{R}$ a $m \in \mathbb{Z}$. Platí

$$\begin{aligned} a_{k+n_0q} &= (k + n_0q)\alpha - [(k + n_0q)\alpha] = k\alpha + n_0q\alpha - [a_k + [k\alpha] + n_0q\alpha] \\ &= k\alpha - [k\alpha] + n_0q\alpha - [a_k + n_0q\alpha - n_0p] - n_0p \\ &= a_k + n_0\eta - [a_k + n_0\eta] = a_k + n_0\eta - 1. \end{aligned}$$

Máme tedy $a_{k+n_0q} \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ a $k + n_0q > k$, čímž jsme ověřili podmínku (2.28). Odtud vyplývá, že $x \in H(\{a_n\})$.

Předpokládejme nyní, že $\eta < 0$. Vzhledem k tomu, že $a_k > -1+x$ a $0 > \eta > -\varepsilon$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující

$$a_k + n_0\eta \in (-1 + x - \varepsilon, -1 + x + \varepsilon).$$

Potom platí $[a_k + n_0\eta] = -1$, a tedy $a_k + n_0\eta - [a_k + n_0\eta] \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Stejně jako v předchozím případě platí $a_{k+n_0q} = a_k + n_0\eta - 1$. Máme tedy $a_{k+n_0q} \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ a $k + n_0q > k$, čímž jsme ověřili podmínku (2.28). Odtud opět vyplývá, že $x \in H(\{a_n\})$.

Z předchozího tedy plyne $(0, 1) \subset H(\{a_n\})$. Podle Příkladu 2.5.14 dostáváme $[0, 1] \subset H(\{a_n\})$, a tím je tvrzení dokázáno. ♣

2.5.16. Příklad (Stolz[6]). Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost, $\{b_n\}$ je rostoucí posloupnost splňující $\lim b_n = \infty$ a

$$\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = A \in \mathbb{R}^*.$$

Dokažte, že potom $\lim \frac{a_n}{b_n} = A$.

Řešení. Položme $a_0 = b_0 = 0$. Předpokládejme nejprve, že $A > -\infty$. Zvolme $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha < A$. K němu nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí

$$\frac{a_k - a_{k-1}}{b_k - b_{k-1}} > \alpha. \tag{2.32}$$

Navíc můžeme díky předpokladu $\lim b_n = \infty$ požadovat, aby pro každé $k \in \mathbb{N}, k \geq k_0$, platilo $b_k > 0$. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n > k_0$. Potom

$$\frac{a_n}{b_n} = \sum_{k=1}^{k_0} \frac{a_k - a_{k-1}}{b_n} + \sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{a_k - a_{k-1}}{b_n}. \tag{2.33}$$

[6]Otto Stolz (1842–1905)

Pro každé $k \in \mathbb{N}, k > k_0$, máme $\frac{b_k - b_{k-1}}{b_n} > 0$, a proto můžeme druhý sčítanec v (2.33) odhadnout následovně

$$\sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{a_k - a_{k-1}}{b_n} = \sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{b_k - b_{k-1}}{b_n} \cdot \frac{a_k - a_{k-1}}{b_k - b_{k-1}}$$
$$\geq \sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{b_k - b_{k-1}}{b_n} \cdot \alpha = \frac{b_n - b_{k_0}}{b_n} \cdot \alpha.$$

Protože podle věty o aritmetice limit a z předpokladu $\lim b_n = \infty$ plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_0} \frac{a_k - a_{k-1}}{b_n} = 0,$$

a navíc zřejmě

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n - b_{k_0}}{b_n} = 1,$$

dostáváme celkem

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \geq \alpha.$$

Protože $\alpha < A$ bylo zvoleno libovolně, plyne odtud $\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \geq A$. Tato nerovnost platí tedy pro každé $A \in \mathbb{R}^*$, neboť pro $A > -\infty$ jsme ji právě dokázali a pro $A = -\infty$ je triviální. Obdobným způsobem odvodíme nerovnost $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq A$. Odtud plyne

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A,$$

čímž je tvrzení věty dokázáno. ♣

2.5.17. Příklad. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Dokažte, že $\{a_n\}$ má monotónní podposloupnost.

Řešení. Rozlišíme dva případy.

1. případ. Předpokládejme, že pro každé $m \in \mathbb{N}$ má množina $\{a_n;\ n \in \mathbb{N},\ n \geq m\}$ největší prvek.

Položme $n_0 = 0$. Nalezneme $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$a_{n_1} = \max\{a_n;\ n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}.$$

Předpokládejme nyní, že máme nalezena přirozená čísla $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ taková, že pro každé $j \in \mathbb{N}, j \leq k$, platí

$$a_{n_j} = \max\{a_n;\ n \in \mathbb{N}, n \geq n_{j-1} + 1\}.$$

Díky našemu předpokladu nalezneme $n_{k+1} \in \mathbb{N}$, $n_{k+1} > n_k$, takové, že

$$a_{n_{k+1}} = \max\{a_n;\ n \in \mathbb{N}, n \geq n_k + 1\}.$$

Podle 1.4.31 je takto zkonstruována posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, která je rostoucí. Posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je pak vybranou posloupností z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a zřejmě je nerostoucí.

2. případ. Předpokládejme, že existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že množina $\{a_n;\ n \in \mathbb{N},\ n \geq m\}$ nemá největší prvek.

Potom pro každé $m' \in \mathbb{N}$, $m' \geq m$, nemá množina $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}, n \geq m'\}$ největší prvek. Položme $n_1 = m$. Předpokládejme nyní, že máme zvolena přirozená čísla $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$. Množina $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}, n \geq n_k\}$ nemá podle předpokladu největší prvek. Protože je a_{n_k} jejím prvkem, existuje $n_{k+1} > n_k$ takové, že $a_{n_{k+1}} > a_{n_k}$. Podle 1.4.31 takto zkonstruujeme posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, která je rostoucí. Posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je zřejmě také rostoucí, čímž je tvrzení dokázáno.

♣

2.5.18. Poznámka. Příklad 2.5.17 lze využít k alternativnímu důkazu Bolzanovy–Weierstrassovy věty. Je-li totiž $\{a_n\}$ omezená posloupnost reálných čísel, pak z ní lze podle Příkladu 2.5.17 vybrat monotónní podposloupnost, která bude opět omezená. Taková posloupnost je konvergentní podle Důsledku 2.4.2.

2.6. Početní příklady k limitě posloupnosti

2.6.1. Příklad. Nechť $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{2}{3}$, a posloupnost $\{a_n\}$ je definována předpisem

$$a_n = \left(\frac{x^3}{3x-2}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vyšetřete, pro která $x \in \mathbb{R}$ je posloupnost $\{a_n\}$ monotónní, a určete typ její monotonie v závislosti na parametru x.

Řešení. Pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{2}{3}$, je $\{a_n\}$ geometrická posloupnost. Označíme $q_x = \frac{x^3}{3x-2}$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}$. Podle Příkladu 2.5.9 je tato posloupnost monotónní právě tehdy, když platí $q_x \geq 0$. Navíc je rostoucí právě tehdy, když $q_x > 1$; klesající právě tehdy, když $q_x \in (0,1)$; a konstantní právě tehdy, když $q_x \in \{0,1\}$. Podmínku $q_x > 1$ splňují ta x, která jsou řešením nerovnice

$$\frac{x^3}{3x-2} > 1.$$

Převedením členu 1 na levou stranu a algebraickou úpravou obdržíme nerovnici

$$\frac{(x-1)^2(x+2)}{3x-2} > 0.$$

Odtud již snadno vidíme, že $q_x > 1$ právě tehdy, když $x \in (-\infty,-2) \cup (\frac{2}{3},1) \cup (1,\infty)$.

Zbývající nerovnice $0 < q_x$, $q_x < 1$ a rovnice $q_x = 0$, $q_x = 1$ lze vyřešit obdobně. Pak dostaneme, že posloupnost $\{a_n\}$

- je rostoucí pro $x \in (-\infty,-2) \cup (\frac{2}{3},1) \cup (1,\infty)$,
- je klesající pro $x \in (-2,0)$,

- je konstantní pro $x \in \{-2, 0, 1\}$,
- není monotónní pro $x \in (0, \frac{2}{3})$.

♣

2.6.2. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim \frac{2n^2 + n - 3}{n^3 - 1}.$$

Řešení. Výraz $\frac{2n^2+n-3}{n^3-1}$ je podílem hodnot dvou polynomů v bodě n, přičemž polynom v čitateli má stupeň 2 a polynom ve jmenovateli má stupeň 3. Vydělíme čitatele i jmenovatele výrazem n^3, tedy mocninou čísla n odpovídající vyššímu z obou stupňů. Podle věty o aritmetice limit (Věta 2.3.26) postupně dostaneme

$$\begin{aligned} \lim \frac{2n^2 + n - 3}{n^3 - 1} &= \lim \frac{2\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{3}{n^3}}{1 - \frac{1}{n^3}} = \frac{\lim 2\frac{1}{n} + \lim \frac{1}{n^2} - \lim \frac{3}{n^3}}{\lim 1 - \lim \frac{1}{n^3}} \\ &= \frac{0 + 0 - 0}{1 - 0} = 0. \end{aligned}$$

♣

2.6.3. Příklad. Nechť $a, b \in (0, 1)$. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + a + a^2 + \cdots + a^n}{1 + b + b^2 + \cdots + b^n}.$$

Řešení. Z Příkladu 1.5.8 plyne, že

$$\frac{1 + a + \cdots + a^n}{1 + b + \cdots + b^n} = \frac{(1 - b) \cdot (1 - a^{n+1})}{(1 - a) \cdot (1 - b^{n+1})}.$$

Z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.26) a Příkladu 2.3.34 dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - a^{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} a \cdot \lim_{n\to\infty} a^n = 1 - a \cdot 0 = 1$$

a obdobně také

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - b^{n+1}\right) = 1.$$

Z věty o aritmetice limit pak vyplývá, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + a + \cdots + a^n}{1 + b + \cdots + b^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - b}{1 - a} \cdot \frac{\lim_{n\to\infty}(1 - a^{n+1})}{\lim_{n\to\infty}(1 - b^{n+1})} = \frac{1 - b}{1 - a}.$$

♣

2.6.4. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim \frac{(n + 4)^{100} - (n + 3)^{100}}{(n + 2)^{100} - n^{100}}.$$

Řešení. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom z binomické věty dostaneme

$$(n+4)^{100} = n^{100} + \binom{100}{1} 4n^{99} + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i} 4^i n^{100-i}$$

a podobně

$$(n+3)^{100} = n^{100} + \binom{100}{1} 3n^{99} + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i} 3^i n^{100-i}.$$

Tedy

$$(n+4)^{100} - (n+3)^{100} = 100n^{99} + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i} (4^i - 3^i) n^{100-i}.$$

Obdobným postupem lze odvodit, že

$$(n+2)^{100} - n^{100} = 200n^{99} + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i} 2^i n^{100-i}.$$

Odtud, z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.26) a ze známé limity $\lim \frac{1}{n} = 0$ (Příklad 2.2.11) vyplývá, že

$$\begin{aligned}
\lim \frac{(n+4)^{100} - (n+3)^{100}}{(n+2)^{100} - n^{100}} &= \lim \frac{100n^{99} + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i} (4^i - 3^i) n^{100-i}}{200n^{99} + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i} 2^i n^{100-i}} \\
&= \lim \frac{100 + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i} (4^i - 3^i) \frac{1}{n^{i-1}}}{200 + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i} 2^i \frac{1}{n^{i-1}}} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

♣

2.6.5. Příklad. Vypočtěte $\lim \frac{n\sqrt{2n+5} - 3\sqrt[3]{2n}}{\sqrt{n^3+8} + \sqrt[3]{n^4}}$.

Řešení. Nejprve provedeme následující *neformální* úvahu. Čísla 5 a 8, která vystupují pod druhými odmocninami, jsou malá ve srovnání s n, které neomezeně roste. Jestliže tato čísla zanedbáme, budou ve zlomku figurovat následující mocniny proměnné n: $n^{\frac{3}{2}}$, $n^{\frac{1}{3}}$, $n^{\frac{3}{2}}$ a $n^{\frac{4}{3}}$. Nejvyšší exponent je $\frac{3}{2}$. Na základě této předběžné úvahy rozšíříme zlomek výrazem $n^{-\frac{3}{2}}$. Dostaneme tak pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{n\sqrt{2n+5} - 3\sqrt[3]{2n}}{\sqrt{n^3+8} + \sqrt[3]{n^4}} = \frac{\sqrt{2 + \frac{5}{n}} - 3\sqrt[6]{\frac{4}{n^7}}}{\sqrt{1 + \frac{8}{n^3}} + \sqrt[6]{\frac{1}{n}}}.$$

Limitu posledního výrazu snadno spočteme na základě Věty 2.3.26 o aritmetice limit a Příkladu 2.3.37:

$$\lim \frac{\sqrt{2 + \frac{5}{n}} - 3\sqrt[6]{\frac{4}{n^7}}}{\sqrt{1 + \frac{8}{n^3}} + \sqrt[6]{\frac{1}{n}}} = \frac{\lim \sqrt{2 + \frac{5}{n}} - 3 \lim \sqrt[6]{\frac{4}{n^7}}}{\lim \sqrt{1 + \frac{8}{n^3}} + \lim \sqrt[6]{\frac{1}{n}}} = \sqrt{2}.$$

♣

2.6.6. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right).$$

Řešení. Větu o aritmetice limit (Věta 2.3.26) nemůžeme použít přímo, protože

$$\lim\sqrt{n^2+n}=\infty \quad \text{a} \quad \lim\sqrt{n^2+1}=\infty,$$

a tedy výraz

$$\lim\sqrt{n^2+n}-\lim\sqrt{n^2+1}$$

není definován. Zapíšeme výraz $\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}$ ve tvaru zlomku

$$\frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}}{1},$$

a tento zlomek rozšíříme výrazem $\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}$. Dostaneme

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}&=\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right)\cdot\left(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}\\&=\frac{n^2+n-(n^2+1)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}\\&=\frac{n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}.\end{aligned}$$

Nyní rozšíříme výsledný zlomek výrazem $\frac{1}{n}$. Dostaneme

$$\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}=\frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}.$$

Podle Příkladu 2.2.45 platí

$$\lim\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1.$$

Protože pro každé $n\in\mathbb{N}$ platí

$$1\le\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\le\sqrt{1+\frac{1}{n}},$$

plyne odtud a z věty o dvou strážnících (Věta 2.2.44), že

$$\lim\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}=1.$$

Celkem tedy z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.26) vyplývá, že

$$\begin{aligned}\lim\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right)&=\frac{\lim 1-\lim\frac{1}{n}}{\lim\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\lim\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\\&=\frac{1-0}{1+1}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

♣

2.6.7. Příklad. Vypočtěte $\lim\big(\sqrt{4n^2-n}-2n\big)$.

Řešení. Uvědomíme si, že nelze užít větu o limitě součtu, protože $\lim\sqrt{4n^2-n} = \lim\sqrt{n(4n-1)} = \infty$ (Věta 2.3.26(b) a Příklad 2.3.37) a $\lim(-2n) = -\infty$. Nejprve rozšíříme n-tý člen naší posloupnosti výrazem

$$\frac{\sqrt{4n^2-n}+2n}{\sqrt{4n^2-n}+2n}$$

a použijeme vzorec $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$, kde položíme $a = \sqrt{4n^2-n}$, $b = 2n$. Dostaneme tak

$$\sqrt{4n^2-n}-2n = \big(\sqrt{4n^2-n}-2n\big)\cdot\frac{\sqrt{4n^2-n}+2n}{\sqrt{4n^2-n}+2n} = \frac{-n}{\sqrt{4n^2-n}+2n}.$$

Tento zlomek ještě rozšíříme výrazem $\frac{1}{n}$ a dostaneme

$$\sqrt{4n^2-n}-2n = \frac{-1}{\sqrt{4-\frac{1}{n}}+2}.$$

Protože poslední rovnost platí pro každé $n\in\mathbb{N}$, obdržíme podle Věty 2.3.26 a Příkladu 2.2.46

$$\lim\big(\sqrt{4n^2-n}-2n\big) = \lim\frac{-1}{\sqrt{4-\frac{1}{n}}+2} = -\frac{1}{4}.$$

♣

2.6.8. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim\big(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\big).$$

Řešení. Podobně jako v předcházejícím příkladu, ani zde nelze ihned využít věty o aritmetice limit. Tentokrát použijeme vzorec $a^3-b^3 = (a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$ pro $a = \sqrt[3]{n+1}$ a $b = \sqrt[3]{n}$ (vizte Příklad 1.5.7). Obdržíme tak pro každé $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n} &= \frac{\big(\sqrt[3]{n+1}\big)^3-\big(\sqrt[3]{n}\big)^3}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n+1}\,\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}\\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n+1}\,\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}.\end{aligned}$$

Poslední zlomek rozšíříme výrazem $\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$. Dostaneme

$$\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n} = \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}}{\sqrt[3]{(1+\frac{1}{n})^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+1}.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ dále platí

$$1 \leq \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} \leq \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} \leq 1 + \frac{1}{n},$$

a tedy z věty o dvou strážnících (Věta 2.2.44) dostaneme

$$\lim \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} = \lim \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} = 1.$$

Z Příkladů 2.2.35 a 2.2.46 vyplývá, že

$$\lim \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = 0.$$

Pomocí věty o aritmetice limit (Věta 2.3.26) dostaneme

$$\begin{aligned} \lim\left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right) &= \frac{\lim \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}}{\lim \sqrt[3]{(1 + \frac{1}{n})^2} + \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} + \lim_{n\to\infty} 1} \\ &= \frac{0}{1+1+1} = 0. \end{aligned}$$

♣

2.6.9. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim n\left(\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}\right).$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1} = \sqrt[6]{(n^3+1)^2} - \sqrt[6]{(n^2+1)^3}.$$

Dále pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ platí podle Příkladu 1.5.7

$$(a^6 - b^6) = (a-b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5).$$

Tuto identitu aplikujeme na čísla

$$a = \sqrt[6]{(n^3+1)^2} \quad \text{a} \quad b = \sqrt[6]{(n^2+1)^3}$$

a dostaneme

$$\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1} = \frac{(n^3+1)^2 - (n^2+1)^3}{\sqrt[6]{(n^3+1)^{10}} + \sqrt[6]{(n^3+1)^8(n^2+1)^3} + \ldots + \sqrt[6]{(n^2+1)^{15}}}.$$

Tento zlomek rozšíříme výrazem $\frac{1}{n^5}$ a obdržíme

$$\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1} = \frac{-3\frac{1}{n} + 2\frac{1}{n^2} - 3\frac{1}{n^3}}{\sqrt[6]{(1+\frac{1}{n^3})^{10}} + \sqrt[6]{(1+\frac{1}{n^3})^8(1+\frac{1}{n^2})^3} + \ldots + \sqrt[6]{(1+\frac{1}{n^2})^{15}}},$$

a tedy

$$n\left(\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}\right) = \frac{-3 + 2\frac{1}{n} - 3\frac{1}{n^2}}{\sqrt[6]{(1+\frac{1}{n^3})^{10}} + \sqrt[6]{(1+\frac{1}{n^3})^8(1+\frac{1}{n^2})^3} + \ldots + \sqrt[6]{(1+\frac{1}{n^2})^{15}}}.$$

Kombinací Příkladů 2.2.11, 2.2.35, 2.2.46 a věty o aritmetice limit (Věta 2.3.26) konečně dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} n\big(\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n^2+1}\big) = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}.$$

♣

2.6.10. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim \sqrt{n}\big(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2}\big).$$

Řešení. Pokud bychom ihned použili větu o limitě součinu, tak dostaneme neurčitý výraz $\infty\cdot 0$. Zkusíme tedy zadaný výraz nejprve upravit za použití vzorce

$$(a^n-b^n) = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+b^{n-1})$$

z Příkladu 1.5.7. Snadno pro každé $n\in\mathbb{N}$ dostaneme

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\cdot\big(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2}\big) &= \sqrt{n}\cdot\big(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2}\big)\cdot\frac{\sqrt[n]{3^{n-1}}+\sqrt[n]{3^{n-2}}\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{2^{n-1}}}{\sqrt[n]{3^{n-1}}+\sqrt[n]{3^{n-2}}\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{2^{n-1}}}\\ &= \frac{\sqrt{n}\cdot(3-2)}{\sqrt[n]{3^{n-1}}+\sqrt[n]{3^{n-2}}\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{2^{n-1}}}.\end{aligned}$$

Nyní si stačí uvědomit, že ve jmenovateli posledního zlomku je n členů, z nichž každý je větší než 1, a odhadneme tedy

$$0\le\sqrt{n}\cdot\big(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2}\big)\le\frac{\sqrt{n}}{n}.$$

Z $\lim\frac{1}{\sqrt{n}}=0$ dostáváme, že hledaná limita je rovna 0 podle věty o dvou strážnících.

♣

2.6.11. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim\frac{3^n+n^2}{n^3+n!}.$$

Řešení. Výraz $\frac{3^n+n^2}{n^3+n!}$ obsahuje kromě mocnin čísla n navíc exponenciální výraz 3^n a výraz $n!$. Z předcházejících příkladů vyplývá, že bude výhodné rozšířit čitatele i jmenovatele výrazem $\frac{1}{n!}$. Pro každé $n\in\mathbb{N}$ platí

$$\frac{3^n+n^2}{n^3+n!} = \frac{\frac{3^n}{n!}+\frac{n^2}{n!}}{\frac{n^3}{n!}+1}.$$

Podle Příkladu 2.5.4 pro $a=3$ máme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!}=0.$$

Podle Příkladů 2.5.3 a 2.5.4 a podle věty o limitě součinu (Věta 2.3.26(b)) je

$$\lim\frac{n^2}{n!} = \lim\frac{n^2}{2^n}\cdot\frac{2^n}{n!} = 0\cdot 0 = 0.$$

Obdobně lze dokázat, že platí

$$\lim \frac{n^3}{n!} = 0.$$

Podle věty o aritmetice limit (Věta 2.3.26) tedy dostáváme

$$\lim \frac{3^n + n^2}{n^3 + n!} = \frac{\lim \frac{3^n}{n!} + \lim \frac{n^2}{n!}}{\lim \frac{n^3}{n!} + \lim 1} = \frac{0 + 0}{0 + 1} = 0.$$

♣

2.6.12. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin(n!)}{n + 1}.$$

Řešení. Z Věty 1.7.16(a) vyplývá, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $-1 \leq \sin(n!) \leq 1$. Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n + 1} = \frac{n}{n + 1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

Kombinací odhadů dostáváme pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$-\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \leq -\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n + 1} \leq \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin(n!)}{n + 1} \leq \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n + 1} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

Podle Příkladu 2.2.46 platí

$$\lim \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0,$$

a tedy také

$$\lim -\frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0,$$

Podle věty o dvou strážnících (Věta 2.2.44) tedy dostáváme

$$\lim \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin(n!)}{n + 1} = 0.$$

♣

2.6.13. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n}.$$

Řešení. Podle Příkladu 1.8.8 pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, platí

$$n^2 \leq 2^n \leq 3^n.$$

Pro každé takové n tedy platí

$$3 = \sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{3^n + 3^n + 3^n} = 3 \sqrt[n]{3}.$$

Podle Příkladu 2.2.48 a věty o aritmetice limit (Věta 2.3.26) platí $\lim 3\sqrt[n]{3} = 3$. Z věty o dvou strážnících (Věta 2.2.44) tedy plyne, že

$$\lim \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n} = 3.$$

♣

2.6.14. Příklad. Nechť $a_n = \left[\sqrt[3]{n^3 + 8n^2} - \sqrt[3]{n^3 + 2n^2}\right]$, $n \in \mathbb{N}$. Spočtěte $\lim a_n$.

Řešení. Označme $b_n = \sqrt[3]{n^3 + 8n^2} - \sqrt[3]{n^3 + 2n^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{6n^2}{(n^3+8n^2)^{\frac{2}{3}} + (n^3+8n^2)^{\frac{1}{3}}(n^3+2n^2)^{\frac{1}{3}} + (n^3+2n^2)^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{6}{(1+\frac{8}{n})^{\frac{2}{3}} + (1+\frac{8}{n})^{\frac{1}{3}}(1+\frac{2}{n})^{\frac{1}{3}} + (1+\frac{2}{n})^{\frac{2}{3}}}. \end{aligned}$$

Limita posloupnosti $\{b_n\}$ je tedy rovna 2. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$3 < \left(1+\tfrac{8}{n}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1+\tfrac{8}{n}\right)^{\frac{1}{3}}\left(1+\tfrac{2}{n}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(1+\tfrac{2}{n}\right)^{\frac{2}{3}},$$

takže pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme $b_n < 2$.

Nyní nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $b_n > 1$. Pro tato n pak platí $1 < b_n < 2$, a tedy $[b_n] = 1$. Odtud dostáváme $\lim a_n = \lim[b_n] = \lim 1 = 1$. ♣

2.6.15. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim \frac{n^3 - \left[\frac{n^3}{100}\right]100}{\sqrt{n}}.$$

Řešení. V řadě příkladů s celou částí stačí použít elementární odhad

$$\forall x \in \mathbb{R}\colon x - 1 < [x] \leq x.$$

Díky tohoto odhadu dostaneme

$$0 = \frac{n^3 - \frac{n^3}{100}100}{\sqrt{n}} \leq \frac{n^3 - \left[\frac{n^3}{100}\right]100}{\sqrt{n}} \leq \frac{n^3 - \left(\frac{n^3}{100} - 1\right)100}{\sqrt{n}} = \frac{100}{\sqrt{n}}.$$

Vzhledem k tomu, že platí $\lim \frac{100}{\sqrt{n}} = 0$, dostáváme, že hledaná limita je rovna 0 podle věty o dvou strážnících. ♣

2.6.16. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim \sin\left(\tfrac{\pi}{2}n\right).$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $a_{4k} = 0$ a $a_{4k+1} = 1$, a tedy $\lim a_{4k} = 0$ a $\lim a_{4k+1} = 1$. Podle Věty 2.3.21 tedy limita zadané posloupnosti neexistuje. ♣

2.6.17. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim (-1)^n \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right).$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = (-1)^n \sqrt{n}\big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big)$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ vyjádříme výraz $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ve tvaru zlomku

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{1},$$

a tento zlomek rozšíříme výrazem $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$. Dostaneme

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big) \cdot \big(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\big)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}},$$

a tedy

$$\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Poslední zlomek rozšíříme výrazem $\frac{1}{\sqrt{n}}$ a dostaneme

$$\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}.$$

Podle věty o aritmetice limit (Věta 2.3.26) a Příkladu 2.2.45 tedy platí

$$\lim \sqrt{n}\big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big) = \frac{1}{2}.$$

Odtud a opět z věty o aritmetice limit dostaneme, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\lim a_{2k} = \frac{1}{2}$, zatímco $\lim a_{2k+1} = -\frac{1}{2}$. Podle Věty 2.3.21 tedy limita zadané posloupnosti neexistuje. ♣

2.6.18. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim\Big(\frac{2 \cdot n!}{(n-1)! + 2^n} \sin\big(\tfrac{\pi}{2} n\big) + n\Big).$$

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme

$$a_n = \frac{2 \cdot n!}{(n-1)! + 2^n} \sin\big(\tfrac{\pi}{2} n\big) + n.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\frac{2 \cdot n!}{(n-1)! + 2^n} = \frac{2n}{1 + \frac{2^n}{(n-1)!}}.$$

Podle Příkladu 2.5.4 a Věty 2.3.26 platí

$$\lim \frac{2^n}{(n-1)!} = \lim 2 \cdot \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} = 2 \cdot 0 = 0.$$

Tedy opět podle Věty 2.3.26 dostáváme

$$\lim\Big(\frac{2 \cdot n!}{(n-1)! + 2^n} + n\Big) = \lim n\Big(\frac{2}{1 + \frac{2^n}{(n-1)!}} + 1\Big) = \infty$$

a
$$\lim\Big(-\frac{2\cdot n!}{(n-1)!+2^n}+n\Big)=\lim n\Big(-\frac{2}{1+\frac{2^n}{(n-1)!}}+1\Big)=-\infty.$$
Protože
$$\sin\big(\tfrac{n\pi}{2}\big)=\begin{cases}1, & \text{pokud } n\in\{4k+1;\ k\in\mathbb{N}\},\\ -1, & \text{pokud } n\in\{4k-1;\ k\in\mathbb{N}\},\end{cases}$$
dostáváme celkem $\lim a_{4k+1}=\infty$ a $\lim a_{4k-1}=-\infty$, a tedy podle Věty 2.3.21 $\lim a_n$ neexistuje. ♣

2.6.19. Příklad. Spočtěte limitu
$$\lim\frac{(-1)^n+2}{2^n(3-(-1)^n)}.$$

Řešení. Zadaná posloupnost je součinem posloupností $\left\{\frac{(-1)^n+2}{3-(-1)^n}\right\}$ a $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$. První z nich je omezená, neboť každý její člen je roven buď $\frac{1}{4}$ nebo $\frac{3}{2}$. Druhá posloupnost má limitu rovnou 0. Podle Věty 2.2.39 má tedy naše posloupnost limitu rovnou 0. ♣

2.6.20. Příklad. Spočtěte limitu rekurentně zadané posloupnosti $\{a_n\}$, kde $a_1=10$ a pro každé $n\in\mathbb{N}$ platí $a_{n+1}=6-\frac{5}{a_n}$.

Řešení. Korektnost definice posloupnosti. Matematickou indukcí dokážeme následující tvrzení. Pro každé $n\in\mathbb{N}$ jsou členy $a_1,\dots,a_n$ definovány a $a_n>5$. Pro $n=1$ tvrzení platí, neboť $a_1=10>5$. Zvolme $n\in\mathbb{N}$ a pro toto n předpokládejme platnost našeho tvrzení. Pokud máme $x\in\mathbb{R}, x>5$, pak $6-\frac{5}{x}>6-1=5$. Podle tohoto pozorování a indukčního předpokladu je definován i prvek a_{n+1} splňující $a_{n+1}=6-\frac{5}{a_n}>5$.

Odtud spolu s 1.4.31 dostáváme, že definice naší posloupnosti je korektní.

Posloupnost $\{a_n\}$ je klesající. Zvolme $n\in\mathbb{N}$. Chceme dokázat, že
$$a_n>a_{n+1}=6-\tfrac{5}{a_n},$$
jinými slovy,
$$a_n-6+\frac{5}{a_n}=\frac{a_n^2-6a_n+5}{a_n}=\frac{(a_n-5)(a_n-1)}{a_n}>0.$$
Poslední nerovnost ovšem snadno plyne z předchozího tvrzení.

Výpočet limity. Podle věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) a předchozích dvou tvrzení je $\{a_n\}$ konvergentní. Limitu označme A. Podle prvního pomocného tvrzení a věty o limitě a uspořádání (Věta 2.2.42(b)) dostáváme $A\ge 5$. Díky Větě 2.2.30 pak dostaneme $\lim a_{n+1}=A$. Z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.26) obdržíme
$$\lim a_{n+1}=\lim\big(6-\tfrac{5}{a_n}\big)=6-\tfrac{5}{A},$$
a tedy $A=6-\frac{5}{A}$. Rovnice má dvě řešení, a sice $A=1$ a $A=5$. Poněvadž platí $A\ge 5$, dostáváme $A=5$. ♣

2.6.21. Příklad. Posloupnost $\{a_n\}$ splňuje podmínku $a_1 < a_2$ a pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, platí $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$. Spočtěte $\lim a_n$.

Řešení. S pomocí 1.4.31 vidíme, že posloupnost $\{a_n\}$ je dobře definována. Nyní matematickou indukcí ukážeme, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{2k-1} < a_{2k+1} < a_{2k+2} < a_{2k}. \tag{2.34}$$

Případ $k = 1$. Ze zadané nerovnosti $a_1 < a_2$ vyplývá, že

$$a_3 = \tfrac{1}{2}(a_2 + a_1) < \tfrac{1}{2}(a_2 + a_2) = a_2$$

a

$$a_3 = \tfrac{1}{2}(a_2 + a_1) > \tfrac{1}{2}(a_1 + a_1) = a_1.$$

Odtud dále plyne, že

$$a_4 = \tfrac{1}{2}(a_3 + a_2) < \tfrac{1}{2}(a_2 + a_2) = a_2$$

a podobně

$$a_4 = \tfrac{1}{2}(a_3 + a_2) > \tfrac{1}{2}(a_3 + a_3) = a_3.$$

Kombinací odhadů dostaneme $a_1 < a_3 < a_4 < a_2$, což je (2.34) pro $k = 1$.

Indukční krok. Zvolme $k \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že (2.34) platí pro toto k. Pak z nerovnosti $a_{2k+1} < a_{2k+2}$ odvodíme

$$a_{2k+3} = \tfrac{1}{2}(a_{2k+1} + a_{2k+2}) \begin{cases} < a_{2k+2} \\ > a_{2k+1} \end{cases}.$$

Z nerovnosti $a_{2k+3} < a_{2k+2}$ dostaneme

$$a_{2k+4} = \tfrac{1}{2}(a_{2k+3} + a_{2k+2}) \begin{cases} < a_{2k+2} \\ > a_{2k+3} \end{cases}.$$

Ověřili jsme tedy platnost nerovností (2.34) pro každé $k \in \mathbb{N}$.

Výpočet limity. Z (2.34) plyne, že posloupnost $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající, posloupnost $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_1 \leq a_n \leq a_2$. Posloupnosti $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ jsou tedy omezené. Podle věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) tedy existují vlastní limity $\lim a_{2n} = A$ a $\lim a_{2n-1} = B$. Ze vztahu

$$a_{2n+1} = \tfrac{1}{2}(a_{2n} + a_{2n-1})$$

vyplývá, že $B = \frac{1}{2}(A + B)$, a tedy $A = B$. Obě posloupnosti $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ tedy konvergují ke stejné limitě.

Nechť $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Přepíšeme vzorec definující a_k ve tvaru

$$a_{k+1} - a_k = a_{k-1} - a_{k+1}.$$

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom pro hodnoty $k = 2, 3, \dots, n$ postupně dostaneme

$$\begin{aligned} a_3 - a_2 &= a_1 - a_3, \\ a_4 - a_3 &= a_2 - a_4, \\ &\vdots \\ a_{n-1} - a_{n-2} &= a_{n-3} - a_{n-1}, \\ a_n - a_{n-1} &= a_{n-2} - a_n, \\ a_{n+1} - a_n &= a_{n-1} - a_{n+1}. \end{aligned}$$

Sečtením všech těchto rovností dostaneme vztah $a_{n+1} - a_2 = a_1 + a_2 - a_n - a_{n+1}$. Odtud plyne, že $A - a_2 = a_1 + a_2 - A - A$, a tedy $A = \frac{1}{3}(a_1 + 2a_2)$. ♣

2.6.22. Příklad. Posloupnost $\{a_n\}$ je zadána rekurentně pomocí vztahů $a_1 = 1$ a $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Spočtěte $\lim a_n$.

Řešení. Korektnost definice. Matematickou indukcí ověříme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ jsou definovány členy posloupnosti $a_1, \dots, a_n$ a $a_n \in [0, 1]$. Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro toto n. Potom $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$, a tedy $a_{n+1} \leq \frac{1}{1+0} = 1$ a $a_{n+1} \geq \frac{1}{1+1} > 0$. Odtud spolu s 1.4.31 dostáváme, že definice naší posloupnosti je korektní.

Výpočet limity. Definujme funkce

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad g(x) = f\big(f(x)\big) = \frac{1+x}{2+x}, \quad x \in [0, 1].$$

Pomocí elementárního výpočtu ověříme, že

- rovnice $g(x) = x$ má v intervalu $[0, 1]$ právě jeden kořen $c = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$,
- $x < g(x) < c$ pro $x \in [0, c)$ a $c < g(x) < x$ pro $x \in (c, 1]$.

Jelikož $a_2 < c < a_1$ a pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $a_{k+2} = g(a_k)$, dostáváme z vlastností funkce g nerovnosti

$$a_2 < a_4 < \dots < a_{2k} < a_{2k+2} < c < a_{2k+1} < a_{2k-1} < \dots < a_3 < a_1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Posloupnosti $\{a_{2k}\}$ a $\{a_{2k-1}\}$ jsou tedy monotónní a omezené, což znamená podle Věty 2.4.1, že jsou konvergentní. Označme $a = \lim a_{2k}$ a $b = \lim a_{2k-1}$. Protože $a_{2k+2} = g(a_{2k}) = \frac{1+a_{2k}}{2+a_{2k}}$, dostáváme z věty o aritmetice limit (Věta 2.2.34) rovnost $a = g(a)$. Proto platí $a = c$. Obdobně odvodíme, že $b = c$, a tedy $\lim a_n = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ (vizte Větu 2.3.23). ♣

2.6.23. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim\Big(1 + \frac{1}{2n}\Big)^n.$$

Řešení. Podle věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.3.21), Příkladu 2.4.5, a Definice 2.4.6 platí

$$\lim\Big(1 + \frac{1}{2n}\Big)^{2n} = e.$$

Tudíž podle Příkladu 2.2.46 dostáváme

$$\lim\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \lim\sqrt{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}} = \sqrt{e}.$$

♣

2.6.24. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^n.$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, platí

$$1-\frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} = \frac{1}{\frac{n}{n-1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}$$

a tedy

$$\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}.$$

Díky Příkladu 2.4.5, Definici 2.4.6 a větě o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.2.30) víme, že

$$\lim\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n = e.$$

Podle věty o limitě podílu (Věta 2.2.34(c)) je tedy

$$\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

♣

2.6.25. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}.$$

Řešení. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

a tedy

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1}.$$

Odtud vyplývá, že

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \lim\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

♣

2.6.26. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1-\frac{1}{2^2}\Big)\Big(1-\frac{1}{3^2}\Big)\cdots\Big(1-\frac{1}{n^2}\Big).$$

Řešení. Pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí

$$1-\frac{1}{j^2}=\frac{j^2-1}{j^2}=\frac{(j-1)(j+1)}{j^2},$$

a tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\begin{aligned}\Big(1-\frac{1}{2^2}\Big)\Big(1-\frac{1}{3^2}\Big)\cdots\Big(1-\frac{1}{n^2}\Big)&=\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdots\frac{(n-2)n}{(n-1)^2}\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\\&=\frac{1}{2}\frac{n+1}{n}.\end{aligned}$$

Tedy

$$\lim\Big(1-\frac{1}{2^2}\Big)\Big(1-\frac{1}{3^2}\Big)\cdots\Big(1-\frac{1}{n^2}\Big)=\frac{1}{2}.$$

♣

2.6.27. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}.$$

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označíme

$$a_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\qquad\text{a}\qquad b_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_nb_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n}{2n+1}=\frac{1}{2n+1}.$$

Navíc pro každé $j \in \{1,2,\dots,n\}$ máme $\frac{2j-1}{2j}\le\frac{2j}{2j+1}$ a součinem těchto n nerovností dostaneme $a_n \le b_n$. Tedy platí

$$0\le a_n\le\sqrt{a_nb_n}\le\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Odtud dostaneme, že

$$\lim\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}=0.$$

♣

KAPITOLA 3

Číselné řady

Nejen v matematice, ale i ve fyzice, chemii, ekonomii a dalších vědách, se často setkáváme s posloupnostmi, které vznikají následujícím způsobem. Je dána posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a nová posloupnost má členy:

$$a_1, \quad a_1 + a_2, \quad a_1 + a_2 + a_3, \quad \dots,$$

tj. m-tý člen nové posloupnosti je součtem prvních m členů posloupnosti $\{a_n\}$. Tato situace nastává tak často, že stojí za to těmto speciálním posloupnostem věnovat zvláštní kapitolu.

Stejně jako v předchozí kapitole bude termín posloupnost označovat posloupnost reálných čísel.

3.1. Základní pojmy

Definice konvergentních a divergentních řad.

3.1.1. Definice. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost. Pro $m \in \mathbb{N}$ položme $s_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$. Řekneme, že **řada** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje** (je **konvergentní**), je-li $\lim_{m\to\infty} s_m$ vlastní. Řekneme, že **řada** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverguje** (je **divergentní**), jestliže $\lim_{m\to\infty} s_m$ neexistuje nebo je nevlastní. Pro jemnější rozlišení budeme někdy říkat, že **řada** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverguje k** ∞, respektive **diverguje k** $-\infty$, jestliže $\lim s_m = \infty$, respektive $\lim s_m = -\infty$. Číslo $a_n, n \in \mathbb{N}$, je n**-tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a číslo $s_m, m \in \mathbb{N}$, je jejím m**-tým částečným součtem**.

3.1.2 (Co je to řada?)**.** Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je jakožto matematický objekt totožná s posloupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pokud tedy hovoříme o řadě a ne o posloupnosti, říkáme tím, že nás zajímají otázky související s příslušnou posloupností částečných součtů.

Součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je limita posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje. Součet řady budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ značí tedy jednak řadu, jednak součet řady, pokud tento součet existuje. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ můžeme použít k označení prvku z množiny $\mathbb{R}^*$ až po ověření, že příslušná řada má součet. Potom uvedená dvojznačnost nepůsobí žádné potíže.

3.1.3. Podle chování posloupnosti částečných součtů $\{s_m\}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ můžeme provést toto rozlišení:

$$\lim s_m \begin{cases} \text{existuje} \begin{cases} \text{vlastní, pak jde o konvergentní řadu,} \\ \text{nevlastní a je rovna} \begin{cases} \infty, \text{ pak řada diverguje k } \infty, \\ -\infty, \text{ pak řada diverguje k } -\infty, \end{cases} \end{cases} \\ \text{neexistuje, pak řada diverguje a nemá součet.} \end{cases}$$

3.1.4. Pojem nekonečné řady je možné zobecnit v podobném smyslu, jako jsme to provedli pro posloupnosti v 2.3.39. Nechť $k \in \mathbb{Z}$ a $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel (ve smyslu rozšířené definice uvedené v 2.3.39). Potom symbol $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ označuje řadu, kde sčítací index probíhá množinu $\mathbb{Z} \cap [k, \infty)$. Existuje-li limita posloupnosti $\{s_m\}_{m=k}^{\infty}$, kde $s_m = \sum_{j=k}^{m} a_j$, pak tuto limitu nazýváme **součtem řady** a značíme ji opět $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$. Řekneme, že řada $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ je **konvergentní**, je-li jejím součtem reálné číslo. Řekneme, že řada $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ je **divergentní**, jestliže $\lim_{m\to\infty} s_m$ neexistuje nebo je nevlastní. Pro jednoduchost se až na drobné výjimky v této kapitole omezíme na řady tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Případná zobecnění výsledků pro řady tvaru $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ jsou přímočará.

Příklady řad.

3.1.5. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ je divergentní.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k$. Potom platí:

$$s_n = \begin{cases} -1 & \text{pro } n \text{ liché,} \\ 0 & \text{pro } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Odtud plyne, že $\lim s_n$ neexistuje. Řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ tedy diverguje. ♣

3.1.6. Definice. Nechť $q \in \mathbb{R}$. Potom řadu $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ nazýváme **geometrickou řadou** a číslo q jejím **kvocientem**.

3.1.7. Příklad. Nechť $q \in \mathbb{R}$. Dokažte, že

(a) řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ konverguje právě tehdy, když $|q| < 1$,

(b) pokud $|q| < 1$, potom $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Řešení. (a) Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ označme $s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$. S použitím Příkladu 1.5.8 dostáváme

$$s_n = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{pro } q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \\ n+1 & \text{pro } q = 1. \end{cases}$$

Případ $q \geq 1$. Potom z výše uvedeného vyplývá, že $\lim s_n = \infty$. Naše řada tedy diverguje.

Případ $|q| < 1$. Potom platí $\lim s_n = \frac{1}{1-q}$, a tedy naše řada konverguje.

Případ $q = -1$. Řada diverguje podle Příkladu 3.1.5.

Případ $q < -1$. Platí $\lim s_{2n} = \infty$ a $\lim s_{2n-1} = -\infty$, a tedy $\lim s_n$ neexistuje. Proto řada diverguje.

(b) Plyne z předchozího. ♣

3.1.8. Příklad. Dokažte, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Řešení. Podle Příkladu 2.6.25 dostáváme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

♣

3.1.9 (součet versus konvergence)**.** Všimněme si rozdílu mezi úlohou vyjádřit hodnotu součtu dané řady (pokud existuje) pomocí známých konstant a úlohou rozhodnout, zda daná řada konverguje či diverguje. Řešení první úlohy dává výsledek i pro druhou. Určit součet dané řady může být však velmi obtížné až neřešitelné. Pokud však ukážeme, že je řada konvergentní, můžeme její součet alespoň přiblížit pomocí hodnot částečných součtů.

3.1.10 (změna konečného počtu členů řady)**.** Pro nekonečné řady platí tvrzení obdobné Větě 2.3.16, tedy že změna konečně mnoha členů řady nemá vliv na konvergenci či divergenci řady či na existenci jejího součtu. Přesněji, máme-li dvě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, pro něž existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_n = b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (respektive má součet) právě tehdy, když $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje (respektive má součet).

Pro důkaz předchozího tvrzení označme n-tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jako s_n a n-tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jako t_n. Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_1$, platí

$$s_n - \sum_{k=1}^{n_1-1} a_k = \sum_{k=n_1}^{n} a_k = \sum_{k=n_1}^{n} b_k = t_n - \sum_{k=1}^{n_1-1} b_k,$$

neboli $s_n = t_n + c$, kde $c = \sum_{k=1}^{n_1-1} a_k - \sum_{k=1}^{n_1-1} b_k \in \mathbb{R}$. Má-li tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ součet $A \in \mathbb{R}^*$, pak $\lim s_n = A$, a tedy $\lim t_n = A-c$. Výraz $A-c$ je definován, neboť $c \in \mathbb{R}$. Pokud je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak $A \in \mathbb{R}$, a tedy také $A-c \in \mathbb{R}$, takže $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní. Tím je dokázána jedna implikace. Opačnou lze dokázat obdobně.

Změnou konečně mnoha členů řady však můžeme samozřejmě změnit hodnotu součtu řady.

Základní vlastnosti. Nyní uvedeme jednoduchou nutnou podmínku konvergence řady.

3.1.11. Věta (nutná podmínka konvergence řady)**.** Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Potom $\lim a_n = 0$.

Důkaz. Položme $s_0 = 0$ a pro $n \in \mathbb{N}$ označme $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Potom $a_n = s_n - s_{n-1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Podle předpokladu věty existuje vlastní $\lim s_n$. Zřejmě existuje také $\lim s_{n-1}$ a platí $\lim s_{n-1} = \lim s_n$. Podle Věty 2.2.34 tedy platí $\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = 0$. ■

3.1.12. V některých případech lze použít Větu 3.1.11 k odvození divergence řady. Jestliže je $\{a_n\}$ posloupnost a neplatí $\lim a_n = 0$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní. Například $\lim(-1)^n$ neexistuje, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ diverguje. Věta 3.1.11 nám tak poskytuje jiné řešení Příkladu 3.1.5.

3.1.13. Věta (Bolzanova–Cauchyova podmínka konvergence řady)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní,
(ii) platí výrok

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0 \colon \left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Důkaz. Položme $s_0 = 0$ a pro $n \in \mathbb{N}$ označme $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Potom pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$, platí $\sum_{k=n}^{m} a_k = s_m - s_{n-1}$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Posloupnost $\{s_n\}$ konverguje, a proto podle Věty 2.4.26 splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku. Pomocí této podmínky ověříme (ii). Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Potom nalezneme $p_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n \geq p_0, m \geq p_0 \colon |s_n - s_m| < \varepsilon.$$

Položme $n_0 = p_0 + 1$. Pro každá $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n \geq n_0$, platí $m > n - 1 \geq n_0 - 1 = p_0$, a tedy

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| = |s_m - s_{n-1}| < \varepsilon.$$

Tím je tvrzení (ii) dokázáno.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Ověříme Bolzanovu–Cauchyovu podmínku pro posloupnost $\{s_n\}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ podle (3.1). Zvolme $n, m \in \mathbb{N}, n \geq n_0, m \geq n_0$. Potom podle (ii) platí

$$|s_n - s_m| = \begin{cases} |\sum_{k=m+1}^{n} a_k| < \varepsilon & \text{pro } n > m, \\ 0 < \varepsilon & \text{pro } n = m, \\ |\sum_{k=n+1}^{m} a_k| < \varepsilon & \text{pro } m > n. \end{cases}$$

V prvním případě používáme nerovnost $n \geq m+1 > n_0$ a ve třetím $m \geq n+1 > n_0$. Podle Věty 2.4.26 $\{s_n\}$ konverguje, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. ■

3.1.14. Není těžké si rozmyslet, že výrok (3.1) je ekvivalentní výroku

$$\exists C \in \mathbb{R}, C > 0\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0 \colon \left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < C\varepsilon.$$

3.1.15. Příklad. Dokažte, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

Řešení. Posloupnost částečných součtů $\{s_n\}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je zřejmě rostoucí. Z Důsledku 2.4.2 vyplývá, že existuje $\lim s_n$, kterou označíme symbolem A. Navíc platí $A = \sup\{s_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, a tedy $A \geq s_1 > 0$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$. Položme $n = n_0 + 1$ a $m = 2n_0$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \leq 2n_0$, platí $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n_0}$. Tudíž máme

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k} = \sum_{k=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{k} \geq n_0 \cdot \frac{1}{2n_0} = \frac{1}{2}.$$

Pro $\varepsilon = \frac{1}{2}$ jsme tedy odvodili

$$\forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0 : \left| \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k} \right| \geq \varepsilon.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ tedy nesplňuje (ii) ve Větě 3.1.13, a proto diverguje. Platí tedy $A \notin \mathbb{R}$. Protože $A > 0$, platí $A = \infty$. ♣

3.1.16. Definice. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nazýváme **harmonickou řadou**.

3.1.17. Harmonická řada ukazuje, že opačná implikace v tvrzení Věty 3.1.11 neplatí. Platí totiž $\lim \frac{1}{n} = 0$, avšak podle Příkladu 3.1.15 řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje.

3.1.18. Věta. Nechť řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mají součet.

(a) Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ a výraz $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je definován. Potom má řada $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ součet a platí $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Nechť je výraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ definován. Potom má řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ součet a platí $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Důkaz. Pro $m \in \mathbb{N}$ označme $s_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$ a $t_m = \sum_{n=1}^{m} b_n$.

(a) Použitím věty o aritmetice limit (Věta 2.3.26) obdržíme existenci limity částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ a rovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \alpha a_n = \lim_{m\to\infty} \alpha s_m = \alpha \lim_{m\to\infty} s_m = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(b) Obdobně obdržíme existenci součtu řady $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ a vztah

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) &= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} (a_n + b_n) = \lim_{m\to\infty} (s_m + t_m) \\ &= \lim_{m\to\infty} s_m + \lim_{m\to\infty} t_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \end{aligned}$$

■

3.1.19. Důsledek (linearita konvergentních řad)**.** Nechť jsou řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom platí:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

3.1.20. Věta. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní řada a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je divergentní řada. Potom je řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ divergentní.

Důkaz. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ je konvergentní. Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní, je podle Důsledku 3.1.19 také řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n - a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní. To je spor. ■

3.2. Řady s nezápornými členy

Důležitý speciální případ řad představují řady s nezápornými členy, tedy řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq 0$. Takové řady mají vždy součet (Věta 3.2.1) a ke zkoumání jejich konvergence máme k dispozici speciální kritéria (např. Věty 3.2.5, 3.2.8 a 3.2.11).

3.2.1. Věta. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Pak má $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ součet.

Důkaz. Označme $s_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$ pro $m \in \mathbb{N}$. Posloupnost $\{s_m\}$ je neklesající, protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má nezáporné členy. Podle Věty 2.4.1 $\lim\{s_m\}$ existuje, a tedy existuje součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ■

V tomto a následujících dvou oddílech bude pro nás hlavním problémem rozhodnout, zda daná řada je konvergentní, či ne. Ukážeme několik vět, kterým říkáme *kritéria*, jež nám pomohou tento problém v jistých situacích vyřešit, aniž bychom museli určovat součet dané řady. Nejprve uvedeme kritéria, která umožňují rozhodnout o konvergenci řady na základě srovnání s jinou řadou, o které víme, zda konverguje, či nikoli.

3.2.2. Věta (srovnávací kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n \leq b_n$.

(a) Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní, pak je i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.
(b) Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní, pak je i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentní.

Důkaz. (a) Pro $m \in \mathbb{N}$ označme $s_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$ a $t_m = \sum_{n=1}^{m} b_n$. Posloupnost $\{s_m\}$ je neklesající, protože členy posloupnosti $\{a_n\}$ jsou nezáporné. Dokážeme, že posloupnost $\{s_m\}$ je shora omezená. Pro každé $m \in \mathbb{N}$ zřejmě platí

$$s_m = s_{n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{m} a_n \leq s_{n_0} + t_{n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{m} b_n = s_{n_0} + t_m.$$

Posloupnost $\{t_m\}$ je konvergentní, a tedy je posloupnost $\{s_{n_0} + t_m\}$ shora omezená. Proto je i posloupnost $\{s_m\}$ shora omezená. Protože posloupnost $\{s_m\}$ je neklesající a shora omezená, je podle Důsledku 2.4.2 konvergentní. Podle definice je tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(b) Tvrzení bezprostředně plyne z již dokázaného tvrzení (a). ■

3.2.3. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je konvergentní.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = \frac{1}{n^2}$ a $b_n = \frac{2}{n(n+1)}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $0 \leq a_n \leq b_n$. Z Příkladu 3.1.8 vyplývá, že $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní. Podle Věty 3.2.2(a) je tedy i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní. ♣

3.2.4. Poznámka. Součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je roven číslu $\frac{1}{6}\pi^2$. K důkazu tohoto tvrzení jsou však třeba pokročilejší pasáže matematické analýzy. K tvrzení se vrátíme v Příkladu 15.7.1.

3.2.5. Věta (limitní srovnávací kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je řada s kladnými členy a $\lim \frac{a_n}{b_n}$ existuje. Označme $A = \lim \frac{a_n}{b_n}$.

(a) Nechť $A \in (0, \infty)$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
(b) Nechť $A = 0$. Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
(c) Nechť $A = \infty$. Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Důkaz. (a) Položme $\varepsilon = \frac{1}{2}A$. K tomuto ε nalezneme podle definice limity $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že platí

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon \tfrac{1}{2}A < \frac{a_n}{b_n} < \tfrac{3}{2}A. \tag{3.2}$$

$\Rightarrow$ Předpokládejme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Z (3.2) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $b_n < \frac{2}{A}a_n$. Podle Důsledku 3.1.19(a) je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{A}a_n$ konvergentní. Podle Věty 3.2.2(a) je také řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní.

$\Leftarrow$ Nyní předpokládejme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje. Z (3.2) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n < \frac{3}{2}Ab_n$. Podle Důsledku 3.1.19(a) je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2}Ab_n$ konvergentní. Podle Věty 3.2.2(a) je také řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(b) Položme $\varepsilon = 1$. K tomuto ε nalezneme z definice limity $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $\frac{a_n}{b_n} < 1$. Pak $a_n < b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Podle Věty 3.2.2(a) je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(c) Položme $K = 1$. Podle definice nevlastní limity nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $\frac{a_n}{b_n} > 1$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n > b_n$. Podle Věty 3.2.2(a) je řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní. ■

3.2.6. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{5n^4+3}$ je konvergentní.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme

$$a_n = \frac{2n^2+1}{5n^4+3} \qquad \text{a} \qquad b_n = \frac{1}{n^2}.$$

Potom platí $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{2}{5}$. Podle Příkladu 3.2.3 je řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní. Podle Věty 3.2.5(a) je i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní. ♣

3.2.7. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+100}}$ je divergentní.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+100}} \qquad \text{a} \qquad b_n = \frac{1}{n}.$$

Potom platí $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$. Podle Příkladu 3.1.15 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje. Použitím Věty 3.2.5(c) dostáváme divergenci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ♣

3.2.8. Věta (Cauchyovo odmocninové kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy.

(a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon\ \sqrt[n]{a_n} \leq q,$$

pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(b) Jestliže $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(c) Jestliže $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(d) Jestliže $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak není pravda, že $\lim a_n = 0$, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní.

(e) Jestliže $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak není pravda, že $\lim a_n = 0$, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní.

Důkaz. (a) Z předpokladu plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n \leq q^n$. Protože je $q \in (0,1)$, je řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konvergentní (Příklad 3.1.7). Podle Věty 3.2.2(a) je tedy také $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(b) Označme $A = \limsup \sqrt[n]{a_n}$. Předpokládejme, že $A < 1$. Zvolme $q \in (A, 1)$. Pak podle definice limes superior nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sup\left\{\sqrt[n]{a_n};\ n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\right\} < q.$$

Potom platí

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon\ \sqrt[n]{a_n} < q,$$

a tedy tvrzení plyne z již dokázaného tvrzení (a).

(c) Předpokládejme, že $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$. Podle Věty 2.4.13 platí

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{a_n} < 1,$$

a tedy tvrzení plyne z již dokázaného tvrzení (b).

(d) Označme $A = \limsup \sqrt[n]{a_n}$. Předpokládejme, že $A > 1$. Podle Věty 2.4.23 nalezneme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ takovou, že $\lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{a_{n_k}} = A$. Protože $A > 1$, nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq 1$. Odtud plyne, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí $a_{n_k} \geq 1$. To znamená, že neplatí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = 0$. Podle Věty 2.2.30 tedy neplatí ani $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Není tudíž splněna nutná podmínka konvergence řady, a tedy podle Věty 3.1.11 řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

(e) Tvrzení plyne z již dokázaného tvrzení (d) a Věty 2.4.13. ■

3.2.9. Je-li $\{a_n\}$ posloupnost nezáporných reálných čísel splňující $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$, pak o konvergenci či divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ není možné rozhodnout na základě Věty 3.2.8. Označíme-li například $a_n = \frac{1}{n}$ a $b_n = \frac{1}{n^2}$ pro $n \in \mathbb{N}$, pak platí $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{b_n} = 1$, řada $\sum a_n$ je divergentní (Příklad 3.1.15) a řada $\sum b_n$ je konvergentní (Příklad 3.2.3).

3.2.10. Příklad. Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, a $k \in \mathbb{N}$. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{a^n}$ konverguje.

Řešení. Podle Příkladu 2.2.47 platí $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. Odtud a z věty o aritmetice limit pro posloupnosti (Věta 2.2.34) plyne, že

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{\frac{n^k}{a^n}} = \lim \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^k}{a} = \frac{1}{a} < 1.$$

Podle Věty 3.2.8(c) tedy řada konverguje. ♣

3.2.11. Věta (d'Alembertovo podílové kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy.

(a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q, \tag{3.3}$$

pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(b) Jestliže $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(c) Jestliže $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(d) Jestliže $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak neplatí $\lim a_n = 0$, a tedy je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

Důkaz. (a) Předpokládejme, že platí (3.3). Matematickou indukcí dokážeme, že platí výrok

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n \leq q^{n-n_0} a_{n_0}. \tag{3.4}$$

Pro $n = n_0$ je tvrzení zřejmé. Předpokládejme, že nerovnost v (3.4) platí pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Potom

$$a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} a_n \leq q a_n \leq q q^{n-n_0} a_{n_0} = q^{n+1-n_0} a_{n_0},$$

přičemž první nerovnost plyne z předpokladu věty a druhá z indukčního předpokladu. Tím je podle principu matematické indukce dokázán výrok (3.4).

Podle Příkladu 3.1.7 a Důsledku 3.1.19 je řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^{n-n_0} a_{n_0}$ konvergentní. Podle 3.1.10 je také řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-n_0} a_{n_0}$ konvergentní. Podle Věty 3.2.2(a) je tedy konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Předpokládejme, že platí $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Pak podle definice limes superior nalezneme $q \in (0,1)$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \colon \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q.$$

Tvrzení nyní plyne z (a).

(c) Tvrzení plyne z (b) a Věty 2.4.13.

(d) Předpokládejme, že $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Pak podle definice limity nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1. \tag{3.5}$$

Dokážeme, že platí výrok

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon a_n \geq a_{n_0}. \tag{3.6}$$

Pro $n = n_0$ je toto tvrzení zřejmé. Jestliže pro nějaké $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n \geq a_{n_0}$, pak podle (3.5) platí

$$a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} a_n \geq a_n \geq a_{n_0}.$$

Tím je podle principu matematické indukce dokázán výrok (3.6). Řada má podle předpokladu kladné členy, a tedy $a_{n_0} > 0$. To znamená, že neplatí $\lim a_n = 0$. Podle Věty 3.1.11 tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. ■

3.2.12. Příklad. Nechť $k \in \mathbb{N}$. Rozhodněte, zda řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!}$ konverguje.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = \frac{(n!)^k}{(kn)!}$. Řada diverguje pro $k = 1$, neboť $\lim a_n = 1 \neq 0$ a není tedy splněna nutná podmínka konvergence (Věta 3.1.11).

Předpokládejme, že $k \geq 2$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > 0$ a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^k}{(kn+1)\cdots(kn+k)} = \frac{(1+\frac{1}{n})^k}{(k+\frac{1}{n})\cdots(k+\frac{k}{n})}.$$

Z věty o limitě součinu (Věta 2.2.34(b)) dostáváme $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k^{-k} < 1$. Podle Věty 3.2.11(c) tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. ♣

3.2.13. Je-li $\{a_n\}$ posloupnost kladných reálných čísel splňující $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, pak o konvergenci či divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nemůžeme rozhodnout na základě Věty 3.2.11. Označíme-li například $a_n = \frac{1}{n}$ a $b_n = \frac{1}{n^2}$ pro $n \in \mathbb{N}$, pak platí $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1$, $\sum a_n$ diverguje a $\sum b_n$ konverguje.

3.2.14. V souvislosti s tvrzením (d) ve Větě 3.2.11 a s tvrzením (d) ve Větě 3.2.8 upozorněme na to, že předpoklad $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ nezaručuje divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Příkladem je řada $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+(-1)^n}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$0 \leq 2^{-n+(-1)^n} \leq 2^{-n+1},$$

a tedy je uvedená řada konvergentní podle srovnávacího kritéria (Věta 3.2.2(a)). Přesto však platí $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, neboť

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2^{-1+2(-1)^{n+1}} = \begin{cases} 2, & \text{pro } n \text{ liché}, \\ \frac{1}{8}, & \text{pro } n \text{ sudé}, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N},$$

takže $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$.

3.2.15. Příklad. Nechť $a > 0$. Rozhodněte, zda řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ konverguje.

Řešení. Členy zadané řady jsou kladné a platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0.$$

Řada tedy konverguje podle Věty 3.2.11(c). ♣

3.2.16. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost s kladnými členy. Z Příkladu 2.5.13 plyne, že pokud $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ existuje, pak existuje i $\lim \sqrt[n]{a_n}$ a limity se rovnají. To znamená, že je-li splněn předpoklad tvrzení (c) (respektive (d)) Věty 3.2.11, pak je též splněn předpoklad (c) (respektive (e)) Věty 3.2.8. Výpočet $\lim \sqrt[n]{a_n}$ však může být v některých případech podstatně obtížnější než výpočet $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

3.2.17. Věta (kondenzační kritérium)**.** Nechť $\{a_n\}$ je nerostoucí posloupnost s nezápornými členy. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

Důkaz. Pro $k \in \mathbb{N}$ označme

$$s_k = \sum_{j=1}^{k} a_j \quad \text{a} \quad t_k = \sum_{j=0}^{k} 2^j a_{2^j}.$$

$\Leftarrow$ Označme $A = \sum_{j=0}^{\infty} 2^j a_{2^j}$. Potom $A \in \mathbb{R}$. Zvolme $m \in \mathbb{N}$. K němu nalezneme $k \in \mathbb{N}$ takové, že $m < 2^k$. Potom $t_k \le A$, a tedy platí

$$\begin{aligned} s_m &\le a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^{k-1}} + \cdots + a_{2^k-1}) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} a_n \le \sum_{j=0}^{k-1} 2^j a_{2^j} = t_{k-1} \le t_k \le A. \end{aligned}$$

Podle Věty 3.2.1 má řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ součet. Označme jej B. Podle předchozího platí $B < \infty$ a zřejmě také platí $B \ge 0$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je tedy konvergentní.

$\Rightarrow$ Označme $C = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Potom $C \in \mathbb{R}$. Zvolme $k \in \mathbb{N}$. K němu nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $2^k \le m$. Potom $s_m \le C$ a navíc platí

$$\begin{aligned} s_m &\ge a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}) \\ &= a_1 + \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=2^{j-1}+1}^{2^j} a_i \ge a_1 + \sum_{j=1}^{k} 2^{j-1} a_{2^j} = a_1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} 2^j a_{2^j} \\ &\ge \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{k} 2^j a_{2^j} = \tfrac{1}{2} t_k, \end{aligned}$$

takže $t_k \le 2C$. To znamená, že posloupnost $\{t_k\}$ je shora omezená. Podle Věty 3.2.1 má řada $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ součet. Označme jej D. Podle předchozího platí $D < \infty$ a zřejmě také platí $D \ge 0$. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ je tedy konvergentní. ■

Víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje (Příklad 3.1.15), zatímco $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje (Příklad 3.2.3). V následující větě uvedeme charakterizaci konvergence řad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$. Věta je důležitou aplikací kondenzačního kritéria.

3.2.18. Věta. Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$.

Důkaz. Dokazovaná ekvivalence plyne z následující diskuze.

Případ $\alpha \le 0$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{1}{n^\alpha} \ge 1$, takže není splněna podmínka $\lim a_n = 0$. Podle Věty 3.1.11 tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ diverguje.

Případ $\alpha > 0$. Z definice výrazu n^α (vizte 1.7.15) a vlastností funkcí exp a log (vizte 1.7.13 a 1.7.14) plyne, že $\{\frac{1}{n^\alpha}\}$ je nerostoucí posloupnost kladných reálných čísel. Podle kondenzačního kritéria (Věta 3.2.17) řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^n .$$

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^n$ je geometrickou řadou s kvocientem $2^{1-\alpha}$, a tedy je podle Příkladu 3.1.7 konvergentní právě tehdy, když $2^{1-\alpha} < 1$. To nastává právě tehdy, když $\alpha > 1$. ■

3.2.19. Příklad. Rozhodněte, zda řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sqrt[3]{n}}{1+\sqrt{n^3}}$ konverguje.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = \frac{1+\sqrt[3]{n}}{1+\sqrt{n^3}}$ a $b_n = n^{-\frac{7}{6}}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > 0$ a $b_n > 0$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje podle Věty 3.2.18, neboť $\frac{7}{6} > 1$. Navíc platí

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim n^{\frac{7}{6}} \cdot \frac{1 + \sqrt[3]{n}}{1 + \sqrt{n^3}} = \lim \frac{n^{\frac{7}{6}} + n^{\frac{3}{2}}}{1 + n^{\frac{3}{2}}} = \lim \frac{1 + n^{-\frac{1}{3}}}{1 + n^{-\frac{3}{2}}} = 1.$$

Podle Věty 3.2.5(a) tedy konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ♣

3.3. Řady s obecnými členy

V tomto oddílu odvodíme několik postačujících podmínek pro konvergenci řad, jejichž členy mohou být kladné i záporné. Prvním výsledkem tohoto typu bude Leibnizova věta.

3.3.1. Věta (Leibniz[1]). Nechť $\{a_n\}$ je monotónní posloupnost splňující $\lim a_n = 0$. Potom je řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergentní.

[1] Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716)

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $\{a_n\}$ je nerostoucí. Odtud, z předpokladu věty a Věty 2.4.1 plyne, že $\inf\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\} = 0$, tedy $a_n \geq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Označme pro $m \in \mathbb{N}$

$$s_m = \sum_{n=1}^{m} (-1)^n a_n.$$

Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$s_{2k+2} - s_{2k} = a_{2k+2} - a_{2k+1} \leq 0 \quad \text{a} \quad s_{2k+1} - s_{2k-1} = -a_{2k+1} + a_{2k} \geq 0,$$

neboť $\{a_n\}$ je nerostoucí. Tedy posloupnost $\{s_{2k}\}$ je nerostoucí a posloupnost $\{s_{2k+1}\}$ je neklesající. Díky větě o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) mají obě posloupnosti limitu. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $s_{2k+1} = s_{2k} - a_{2k+1}$. Z předpokladu víme, že $\lim a_n = 0$, a tedy díky větě o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.3.21) také $\lim a_{2k+1} = 0$. Z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.26) tedy dostáváme

$$\lim s_{2k+1} = \lim(s_{2k} - a_{2k+1}) = \lim s_{2k} - \lim a_{2k+1} = \lim s_{2k},$$

takže posloupnosti $\{s_{2k}\}$ a $\{s_{2k+1}\}$ mají společnou limitu $s \in \mathbb{R}^*$. Protože ale pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$s_1 \leq s_{2k+1} = s_{2k} - a_{2k+1} \leq s_{2k} \leq s_2,$$

je $s \in \mathbb{R}$. Odtud díky Větě 2.3.23 (vizte též 2.3.24) plyne, že $\lim s_n = s$, a naše řada je tedy konvergentní.

Je-li posloupnost $\{a_n\}$ neklesající, potom je posloupnost $\{-a_n\}$ nerostoucí a $\lim(-a_n) = 0$, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n(-a_n)$ podle již dokázaného konverguje. Podle Důsledku 3.1.19 konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$. ■

3.3.2. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ je konvergentní.

Řešení. Posloupnost $\{\frac{1}{n}\}$ je nerostoucí a navíc platí $\lim \frac{1}{n} = 0$. Z Věty 3.3.1 tedy plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ je konvergentní. ♣

3.3.3. Předpoklad monotonie ve Větě 3.3.1 nelze vynechat. Příkladem je řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, kde

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ sudé}, \\ 0 & \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ liché}. \end{cases}$$

Posloupnost $\{a_n\}$ sestává z nezáporných čísel a konverguje k 0, není však monotónní. Označme $\{s_m\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$s_{2k} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2j} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j}.$$

Podle Příkladu 3.1.15 je $\lim_{k\to\infty} s_{2k} = \infty$, a tedy uvedená řada diverguje.

V následujícím lemmatu využíváme úmluvu uvedenou v Označení 1.5.2.

3.3.4. Lemma (Abelova[2] parciální sumace)**.** Nechť $m \in \mathbb{N}$ a $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m$ jsou reálná čísla.

(a) Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \le m$, a $\sigma_k = \sum_{j=n}^{k} a_j$, $k = n, \dots, m$. Pak platí

$$\sum_{j=n}^{m} a_j b_j = \sum_{j=n}^{m-1} \sigma_j (b_j - b_{j+1}) + \sigma_m b_m. \tag{3.7}$$

(b) Označme $s_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$, $k = 0, \dots, m$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \le m$, platí

$$\sum_{j=n}^{m} a_j b_j = -s_{n-1} b_n + \sum_{j=n}^{m-1} s_j (b_j - b_{j+1}) + s_m b_m. \tag{3.8}$$

Důkaz. (a) Pomocí elementárních úprav dostaneme

$$\begin{aligned}\sum_{j=n}^{m} a_j b_j &= a_n b_n + \cdots + a_m b_m \\ &= \sigma_n b_n + (\sigma_{n+1} - \sigma_n) b_{n+1} + \cdots + (\sigma_m - \sigma_{m-1}) b_m \\ &= \sigma_n (b_n - b_{n+1}) + \cdots + \sigma_{m-1} (b_{m-1} - b_m) + \sigma_m b_m \\ &= \sum_{j=n}^{m-1} \sigma_j (b_j - b_{j+1}) + \sigma_m b_m.\end{aligned}$$

Tím je dokázáno tvrzení (a).

(b) Podobně jako v důkazu tvrzení (a) platí

$$\begin{aligned}\sum_{j=n}^{m} a_j b_j &= a_n b_n + \cdots + a_m b_m \\ &= (s_n - s_{n-1}) b_n + (s_{n+1} - s_n) b_{n+1} + \cdots + (s_m - s_{m-1}) b_m \\ &= -s_{n-1} b_n + s_n (b_n - b_{n+1}) + \cdots + s_{m-1} (b_{m-1} - b_m) + s_m b_m \\ &= -s_{n-1} b_n + \sum_{j=n}^{m-1} s_j (b_j - b_{j+1}) + s_m b_m.\end{aligned}$$

Tím je dokázáno tvrzení (b). ■

3.3.5. Věta (Abelovo a Dirichletovo[3] kritérium)**.** Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, přičemž $\{b_n\}$ je monotónní. Nechť je navíc splněna alespoň jedna z následujících dvou podmínek:

(A) posloupnost $\{b_n\}$ je omezená a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,
(D) $\lim b_n = 0$ a posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je omezená.

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

---

[2] Niels Henrik Abel (1802–1829)
[3] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859)

Důkaz. Nejprve budeme předpokládat, že posloupnost $\{b_n\}$ je nerostoucí, neboli platí

$$\forall n \in \mathbb{N}: b_n - b_{n+1} \geq 0. \tag{3.9}$$

Tvrzení věty dokážeme za předpokladu, že je splněna podmínka (A), a poté za předpokladu splnění (D). V obou případech dokážeme konvergenci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ ověřením Bolzanovy–Cauchyovy podmínky pro řady (Věta 3.1.13).

Podmínka (A). S pomocí (A) nalezneme $K \in (0, \infty)$ takové, že platí

$$\forall n \in \mathbb{N}: |b_n| \leq K. \tag{3.10}$$

Pro ověření Bolzanovy–Cauchyovy podmínky pro $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je podle (A) konvergentní, a proto splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku (Věta 3.1.13), takže k našemu ε můžeme nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že platí

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0: \left|\sum_{j=n}^{m} a_j\right| < \varepsilon. \tag{3.11}$$

Zvolme $n, m \in \mathbb{N}$ splňující $m \geq n \geq n_0$ a označme $\sigma_k = \sum_{j=n}^{k} a_j$, $k = n, \dots, m$. Potom díky (3.11) platí

$$\forall k \in \{n, \dots, m\}: |\sigma_k| < \varepsilon. \tag{3.12}$$

Pak postupně dostáváme:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=n}^{m} a_j b_j\right| &= \left|\Big(\sum_{j=n}^{m-1} \sigma_j (b_j - b_{j+1})\Big) + \sigma_m b_m\right| && \text{(Lemma 3.3.4(a))} \\
&\leq \Big(\sum_{j=n}^{m-1} |\sigma_j| (b_j - b_{j+1})\Big) + |\sigma_m||b_m| && \text{(trojúhelníková nerovnost a (3.9))} \\
&\leq \varepsilon\Big(\sum_{j=n}^{m-1} (b_j - b_{j+1})\Big) + \varepsilon |b_m| && \text{(podle (3.12))} \\
&= \varepsilon\big((b_n - b_m) + |b_m|\big) && \text{(teleskopická suma, vizte 1.5.5)} \\
&\leq \varepsilon\big(|b_n| + 2|b_m|\big) \leq 3K\varepsilon. && \text{(podle (3.10))}
\end{aligned}$$

Díky předchozímu a 3.1.14 splňuje $\sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j$ Bolzanovu–Cauchyovu podmínku, a tedy je podle Věty 3.1.13 konvergentní.

Podmínka (D). Pro $k \in \mathbb{N}$ označme $s_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$. Díky podmínce (D) nalezneme $M \in (0, \infty)$ takové, že platí

$$\forall n \in \mathbb{N}: |s_n| \leq M. \tag{3.13}$$

Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. S pomocí (D) k němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že platí

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: |b_n| < \varepsilon \tag{3.14}$$

Nechť $n, m \in \mathbb{N}$ splňují $m \geq n \geq n_0$. Z Lemmatu 3.3.4(b) plyne

$$
\begin{aligned}
&\Big|\sum_{j=n}^{m} a_j b_j\Big| \\
&\quad = \Big|-s_{n-1}b_n + \sum_{j=n}^{m-1} s_j(b_j - b_{j+1}) + s_m b_m\Big| && \text{(Lemma 3.3.4(b))} \\
&\quad \leq M|b_n| + \sum_{j=n}^{m-1} M(b_j - b_{j+1}) + M|b_m| && \text{(trojúhelníková nerovnost, (3.9) a (3.13))} \\
&\quad = M|b_n| + M(b_n - b_m) + M|b_m| && \text{(teleskopická suma, vizte 1.5.5)} \\
&\quad \leq 4M\varepsilon. && \text{(podle (3.14))}
\end{aligned}
$$

Díky předchozímu a 3.1.14 splňuje $\sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j$ Bolzanovu–Cauchyovu podmínku, a tedy je podle Věty 3.1.13 konvergentní.

Je-li posloupnost $\{b_n\}$ neklesající, lze důkaz provést obdobně, nebo lze již dokázané tvrzení použít pro posloupnost $\{-b_n\}$. ■

3.3.6. Leibnizova věta (Věta 3.3.1) je speciálním případem Věty 3.3.5(D), protože řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ má omezenou posloupnost částečných součtů (vizte Příklad 3.1.5).

3.3.7. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ má omezenou posloupnost částečných součtů pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Ze součtových vzorců plyne, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$2\sin(\tfrac{1}{2}x)\sin(nx) = \cos(n - \tfrac{1}{2})x - \cos(n + \tfrac{1}{2})x,$$

Pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $m \in \mathbb{N}$ dostáváme

$$
\begin{aligned}
2\sin(\tfrac{1}{2}x)\sum_{n=1}^{m}\sin(nx) &= \sum_{n=1}^{m}\big(\cos(n - \tfrac{1}{2})x - \cos(n + \tfrac{1}{2})x\big) \\
&= \cos(1 - \tfrac{1}{2})x - \cos(m + \tfrac{1}{2})x && \text{(teleskopická suma)} \\
&= \cos(\tfrac{1}{2}x) - \cos(m + \tfrac{1}{2})x.
\end{aligned}
$$

Jestliže $x \notin \{2l\pi;\ l \in \mathbb{Z}\}$, pak z předchozího plyne pro každé $m \in \mathbb{N}$ odhad

$$\Big|\sum_{n=1}^{m}\sin(nx)\Big| \leq \frac{\big|\cos(\frac{1}{2}x) - \cos(m + \frac{1}{2})x\big|}{\big|2\sin(\frac{1}{2}x)\big|} \leq \frac{1}{\big|\sin(\frac{1}{2}x)\big|},$$

a tedy má řada $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(nx)$ omezenou posloupnost částečných součtů.

Jestliže $x \in \{2l\pi;\ l \in \mathbb{Z}\}$, pak sestává řada $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(nx)$ z nulových členů, a má tedy omezenou posloupnost částečných součtů. ♣

3.3.8. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx$ má omezenou posloupnost částečných součtů právě tehdy, když $x \in \mathbb{R} \setminus \{2l\pi;\ l \in \mathbb{Z}\}$.

Řešení. Ze součtových vzorců plyne, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$2\sin(\tfrac{1}{2}x)\cos(kx) = \sin(n+\tfrac{1}{2})x - \sin(n-\tfrac{1}{2})x.$$

Pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $m \in \mathbb{N}$ dostáváme

$$\begin{aligned} 2\sin(\tfrac{1}{2}x)\cdot\sum_{n=1}^{m}\cos(nx) &= \sum_{n=1}^{m}\bigl(\sin(n+\tfrac{1}{2})x - \sin(n-\tfrac{1}{2})x\bigr) \\ &= -\sin(1-\tfrac{1}{2})x + \sin(m+\tfrac{1}{2})x \qquad \text{(teleskopická suma)} \\ &= \sin(m+\tfrac{1}{2})x - \sin(\tfrac{1}{2}x). \end{aligned}$$

Jestliže $x \notin \{2l\pi;\ l \in \mathbb{Z}\}$, pak z předchozího plyne

$$\Bigl|\sum_{n=1}^{m}\cos(nx)\Bigr| \le \frac{\bigl|\sin(m+\frac{1}{2})x - \sin(\frac{1}{2}x)\bigr|}{\bigl|2\sin(\frac{1}{2}x)\bigr|} \le \frac{1}{\bigl|\sin(\frac{1}{2}x)\bigr|},$$

a tedy má řada $\sum_{n=1}^{\infty}\cos(nx)$ omezenou posloupnost částečných součtů.

Jestliže $x \in \{2l\pi;\ l \in \mathbb{Z}\}$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}\cos(nx) = \sum_{n=1}^{\infty}1$ zřejmě nemá omezenou posloupnost částečných součtů. ♣

3.3.9. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ je konvergentní pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $a_n = \sin nx$, $b_n = \frac{1}{n}$. Podle Příkladu 3.3.7 je posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ omezená. Posloupnost $\{b_n\}$ je klesající a splňuje $\lim b_n = 0$. Z Dirichletova kritéria (Věta 3.3.5(D)) tedy plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ konverguje. ♣

3.3.10. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ konverguje právě tehdy, když $x \in \mathbb{R}\setminus\{2l\pi;\ l \in \mathbb{Z}\}$.

Řešení. Jestliže $x \in \mathbb{R}\setminus\{2l\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$, pak lze konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ dokázat obdobně jako v řešení Příkladu 3.3.9. Jestliže $x = 2l\pi$, kde $l \in \mathbb{Z}$, potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\cos nx = 1$, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverguje podle Příkladu 3.1.15. ♣

3.4. Absolutní konvergence číselných řad

3.4.1. Definice. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ je **absolutně konvergentní**, jestliže je řada $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ konvergentní. Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergentní, ale není absolutně konvergentní, říkáme, že je **neabsolutně konvergentní**.

3.4.2. Řada, jejíž členy nemění znaménko, konverguje právě tehdy, když konverguje absolutně.

3.4.3. Věta. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ je absolutně konvergentní řada. Pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergentní a navíc platí $\sum_{n=1}^{\infty}a_n \le \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

Důkaz. Podle Věty 3.1.13 splňuje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ Bolzanovu–Cauchyovu podmínku. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak lze nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n, m \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0$, platí $\sum_{j=n}^{m} |a_j| < \varepsilon$. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne, že pro každé $n, m \in \mathbb{N}$, $m \geq n \geq n_0$, platí

$$\left|\sum_{j=n}^{m} a_j\right| \leq \sum_{j=n}^{m} |a_j| < \varepsilon,$$

a tedy také řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku. Podle Věty 3.1.13 je tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

Pro $m \in \mathbb{N}$ označme $s_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$ a $\sigma_m = \sum_{n=1}^{m} |a_n|$. Potom zřejmě platí pro každé $m \in \mathbb{N}$ nerovnost $s_m \leq \sigma_m$. Odtud, z definice součtu řady a Věty 2.2.42(b) plyne, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. ■

3.4.4. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ je absolutně konvergentní.

Řešení. Označme $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom platí $|a_n| = \frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje (vizte Příklad 3.2.3), je podle Věty 3.4.3 řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ absolutně konvergentní. ♣

3.4.5. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ je neabsolutně konvergentní.

Řešení. Označme $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ a $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom je $\{b_n\}$ monotónní posloupnost splňující $\lim b_n = 0$, a tedy je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní podle Věty 3.3.1. Naproti tomu je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergentní podle Věty 3.2.18. Odtud plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je neabsolutně konvergentní. ♣

Následující dvě věty jsou variantami Cauchyova odmocninového a d'Alembertova podílového kritéria pro absolutní konvergenci řad.

3.4.6. Věta (Cauchyovo odmocninové kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada.

(a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon\ \sqrt[n]{|a_n|} \leq q,$$

pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.

(b) Je-li $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.

(c) Je-li $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.

(d) Je-li $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, pak není pravda, že $\lim a_n = 0$, a tedy je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

(e) Je-li $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, pak není pravda, že $\lim a_n = 0$, a tedy je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

Důkaz. (a) Podle již dokázaného Cauchyova kritéria pro řady s nezápornými členy (Věta 3.2.8(a)) dostáváme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně. Tvrzení (b) a (c) lze odvodit obdobně.

(d) Podle Věty 3.2.8(d) dostáváme, že posloupnost $\{|a_n|\}$ nekonverguje k nule. Podle Věty 2.2.24 pak $\{a_n\}$ také nekonverguje k nule. Odtud plyne podle Věty 3.1.11 divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(e) Tvrzení bezprostředně plyne z (d). ■

3.4.7. Věta (d'Alembertovo podílové kritérium). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nenulovými členy.

(a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q,$$

pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.

(b) Je-li $\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.

(c) Je-li $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.

(d) Je-li $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, pak není pravda, že $\lim a_n = 0$, a tedy je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

Důkaz. (a) D'Alembertovo podílové kritérium pro řady s nezápornými členy (Věta 3.2.11(a)) ukazuje, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně. Při důkazu tvrzení (b) a (c) lze postupovat obdobně.

(d) Podle Věty 3.2.11(d) dostáváme, že posloupnost $\{|a_n|\}$ nekonverguje k 0. Podle Věty 2.2.24 pak $\{a_n\}$ také nekonverguje k 0. Odtud plyne díky Větě 3.1.11 divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ■

3.4.8. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$ konverguje neabsolutně.

Řešení. Neplatnost absolutní konvergence. Protože

$$\lim \frac{\frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim \frac{(n+1)\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n+1}-1} = 1$$

a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverguje podle Věty 3.2.18, z limitního srovnávacího kritéria (Věta 3.2.5(a)) plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$ diverguje. Proto řada ze zadání nekonverguje absolutně.

Neabsolutní konvergence. Použijeme Leibnizovo kritérium (Věta 3.3.1). Řada zřejmě pravidelně střídá znaménka. Dále platí

$$\lim \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1} = \lim \frac{1}{\sqrt{n+1}-\frac{1}{n+1}} = 0.$$

Nakonec potřebujeme rozhodnout o platnosti nerovnosti

$$a_n = \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1} \geq \frac{n+2}{(n+2)\sqrt{n+2}-1} = a_{n+1}. \tag{3.15}$$

Tuto nerovnost však snadno převedeme ekvivalentními úpravami na nerovnost

$$(n+1)(n+2)\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)+1\geq 0,$$

jež platí pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tedy platí i (3.15). Ověřili jsme, že naše řada splňuje předpoklady Věty 3.3.1, a proto řada konverguje. Řada ze zadání je tedy neabsolutně konvergentní. ♣

3.4.9. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$ je neabsolutně konvergentní.

Řešení. Zadaná řada je konvergentní podle Příkladu 3.3.9. K ověření neabsolutní konvergence je třeba ukázat divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}|\frac{\sin n}{n}|$. Protože však

$$\forall n \in \mathbb{N}: \left|\frac{\sin n}{n}\right| \geq \frac{\sin^2 n}{n},$$

stačí podle Věty 3.2.2(b) dokázat divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n}$. Pomocí vzorce pro dvojnásobný argument kosinu dostaneme pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\sin^2 n}{n}=\frac{1-\cos 2n}{2n}.$$

Pro spor předpokládejme, že $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n}$ konverguje. Pak konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos 2n}{2n}$. Podle Příkladu 3.3.10 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n}$ konverguje. Navíc pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{n}=\frac{1-\cos 2n}{n}+\frac{\cos 2n}{n}.$$

Podle Důsledku 3.1.19(b) konverguje i harmonická řada, což je spor (Příklad 3.1.15). ♣

3.4.10. Věta (Toeplitz[4])**.** Nechť $c_{n,k} \in \mathbb{R}$, $n, k \in \mathbb{N}$, jsou reálná čísla splňující

(a) pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\lim_{n\to\infty} c_{n,k}=0$,
(b) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k}=1$,
(c) $\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{\infty}|c_{n,k}|<\infty$.

Nechť $\{a_k\}$ je konvergentní posloupnost. Potom je posloupnost $\{b_n\}$, kde $b_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k}a_k$, dobře definovaná a platí $\lim b_n = \lim a_n$.

Důkaz. Označme $C=\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{\infty}|c_{n,k}|$. Posloupnost $\{a_k\}$ je omezená, neboť je konvergentní. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Potom podle (c) platí

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_{n,k}a_k|\leq C\cdot\sup\{|a_k|;\ k\in\mathbb{N}\}<\infty,$$

a tedy řada $\sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k}a_k$ konverguje absolutně, takže b_n je reálné číslo.

Speciální případ $\lim a_k = 0$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq k_0:\ |a_k|<\varepsilon. \tag{3.16}$$

[4] Otto Toeplitz (1881–1940)

Potom platí

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} |b_n| &= \limsup_{n\to\infty} \Big|\sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} a_k\Big| \\ &= \limsup_{n\to\infty} \Big|\sum_{k=1}^{k_0} c_{n,k} a_k + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} c_{n,k} a_k\Big|.\end{aligned}$$

Díky (a) platí rovnost

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_0} c_{n,k} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_0} c_{n,k} a_k = 0,$$

neboť uvažovaná suma má konečný počet sčítanců, a tedy lze užít větu o aritmetice limit. Dále odhadneme s pomocí (c) a (3.16)

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \Big|\sum_{k=k_0+1}^{\infty} c_{n,k} a_k\Big| &\le \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |c_{n,k} a_k| \\ &\le \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |c_{n,k}|\varepsilon \le C\varepsilon.\end{aligned}$$

Dohromady tedy díky Větě 2.4.14 máme

$$\limsup_{n\to\infty} |b_n| \le \limsup_{n\to\infty} \Big|\sum_{k=1}^{k_0} c_{n,k} a_k\Big| + \limsup_{n\to\infty} \Big|\sum_{k=k_0+1}^{\infty} c_{n,k} a_k\Big| \le C\varepsilon.$$

Odtud plyne $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Obecný případ. Označme $\lim a_n = A$. Máme $A \in \mathbb{R}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí, že řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k}(a_k - A), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} A$$

jsou konvergentní, a proto podle Věty 3.1.19(b) pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$b_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k}(a_k - A) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} A.$$

Potom můžeme psát

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k}(a_k - A) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} A.$$

První limita je rovna 0 podle předchozí části, neboť $\lim_{k\to\infty}(a_k - A) = 0$. Druhá limita je rovna A díky (b). Dohromady tedy dostáváme $\lim_{n\to\infty} b_n = A$, čímž je tvrzení dokázáno. ■

V následující větě ukážeme důležitý speciální případ Toeplitzovy věty.

3.4.11. Věta. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Jestliže platí $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$, potom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = A.$$

Důkaz. Pro $n, k \in \mathbb{N}$ položme

$$c_{n,k} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{pokud } k \leq n, \\ 0, & \text{pokud } k > n. \end{cases}$$

Ověříme předpoklady Toeplitzovy věty (Věta 3.4.10). Nechť $k \in \mathbb{N}$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} c_{n,k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

a tedy předpoklad (a) je splněn. Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = n \cdot \frac{1}{n} = 1,$$

je splněn i předpoklad (b). Konečně protože $c_{n,k} \geq 0$ pro každé $n, k \in \mathbb{N}$, dostáváme

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{n,k}| = \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} = 1$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Platí tedy $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{n,k}| = 1 < \infty$, takže i předpoklad (c) je ověřen. Vzhledem k tomu, že

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} a_k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

plyne tvrzení z Toeplitzovy věty (Věta 3.4.10). ■

Z následujícího příkladu vyplývá, že implikaci ve Větě 3.4.11 nelze obrátit.

3.4.12. Příklad. Nechť $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = 0.$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{pro } n \text{ liché}, \\ 0 & \text{pro } n \text{ sudé}. \end{cases}$$

Odtud s pomocí Věty 2.3.23 snadno plyne dokazované tvrzení. ♣

3.5. Přerovnání řad

Sčítáme-li konečně mnoho reálných čísel $a_1, \dots, a_m$, pak výsledný součet nezávisí na pořadí sčítanců $a_1, \dots, a_m$. Jinými slovy, je-li π libovolná bijekce množiny $\{1, \dots, m\}$ na sebe, pak platí $\sum_{n=1}^{m} a_n = \sum_{n=1}^{m} a_{\pi(n)}$. V tomto oddílu ukážeme, za jakých podmínek platí analogie uvedeného pozorování i pro nekonečné řady.

3.5.1. Definice. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada. Je-li $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekce, nazveme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ **přerovnáním** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3.5.2. Uvažujme například bijekci $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definovanou předpisem

$$\pi(n) = \begin{cases} n+1 & \text{pro } n \text{ liché}, \\ n-1 & \text{pro } n \text{ sudé}. \end{cases}$$

Máme-li řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots,$$

pak pomocí bijekce π obdržíme přerovnanou řadu

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} &= a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + a_{\pi(3)} + a_{\pi(4)} + \dots \\ &= a_2 + a_1 + a_4 + a_3 + \dots \end{aligned}$$

Přerovnání absolutně konvergentní řady. Následující jednoduché lemma v dalším výkladu několikrát použijeme.

3.5.3. Lemma. Nechť $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je zobrazení a $A \subset f(\mathbb{N})$ je konečná množina. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $A \subset \{f(1), \dots, f(n)\}$.

Důkaz. Pokud je A prázdná, pak stačí položit například $n = 1$. Předpokládejme, že A je neprázdná. Pro každé $a \in A$ nalezneme $n_a \in \mathbb{N}$ takové, že platí $f(n_a) = a$. Množina $B = \{n_a;\ a \in A\}$ je neprázdná a konečná, neboť A je neprázdná a konečná. Položme $n = \max B$. Potom platí

$$A = f(B) \subset f\bigl(\{1, \dots, n\}\bigr) = \{f(1), \dots, f(n)\},$$

čímž je tvrzení dokázáno. ■

3.5.4. Lemma. Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Potom pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\left|\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n\right| < \varepsilon$.

Důkaz. Označme $\{s_n\}$ posloupnost částečných součtů $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a s její součet. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|s - s_{n_0-1}| < \varepsilon$. Označme $\{t_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ částečné součty řady $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, tj.

$$t_n = a_{n_0} + \dots + a_n, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq n_0.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $s_n = s_{n_0-1} + t_n$, a tedy také

$$\lim t_n = \lim(s_n - s_{n_0-1}) = s - s_{n_0-1}.$$

Posloupnost $\{t_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ tedy konverguje, takže $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ je konvergentní a její součet je roven $s - s_{n_0-1}$. Tedy platí

$$\Bigl|\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n\Bigr| = |s - s_{n_0-1}| < \varepsilon.$$

■

3.5.5. Věta. Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje a $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce. Pak přerovnaná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ absolutně konverguje a platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$.

Důkaz. Absolutní konvergence. Zvolme $m \in \mathbb{N}$. Lemma 3.5.3 aplikujeme na zobrazení π^{-1} a množinu $A = \{1, \dots, m\}$. Nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\{1, \dots, m\} \subset \{\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(n)\}.$$

Máme tedy $\{\pi(1), \dots, \pi(m)\} \subset \{1, \dots, n\}$. Potom platí

$$\sum_{j=1}^{m} |a_{\pi(j)}| \le \sum_{i=1}^{n} |a_i| \le \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|.$$

Odtud podle Věty 3.2.1 plyne, že řada $\sum_{j=1}^{\infty} |a_{\pi(j)}|$ konverguje, a tedy řada $\sum_{j=1}^{\infty} a_{\pi(j)}$ konverguje absolutně.

Rovnost součtů. Označme

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{l=1}^{n} a_l, & t_n &= \sum_{l=1}^{n} a_{\pi(l)}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ s &= \lim_{n\to\infty} s_n, & t &= \lim_{n\to\infty} t_n. \end{aligned}$$

Potom s a t jsou dobře definovaná reálná čísla, neboť řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ absolutně konvergují, a tedy i konvergují. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Pomocí Lemmatu 3.5.4 nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{l=m+1}^{\infty} |a_l| < \varepsilon \qquad \text{a} \qquad \sum_{l=m+1}^{\infty} |a_{\pi(l)}| < \varepsilon. \tag{3.17}$$

Lemma 3.5.3 aplikujeme na zobrazení π^{-1} a π a nalezneme $n, j \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\begin{aligned} \{1, \dots, m\} &\subset \{\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(n)\}, \\ \{1, \dots, m\} &\subset \{\pi(1), \dots, \pi(j)\}. \end{aligned}$$

Položíme-li $k = \max\{j, n\}$, máme $k \ge n$, a dostaneme

$$\{\pi(1), \dots, \pi(m)\} \subset \{1, \dots, k\}, \tag{3.18}$$

$$\{1, \dots, m\} \subset \{\pi(1), \dots, \pi(k)\}. \tag{3.19}$$

Zvolme libovolné $p \in \mathbb{N}$, $p \ge k$. Označme

$$\begin{aligned} A &= \{1, \dots, p\} \setminus \{\pi(1), \dots, \pi(p)\}, \\ B &= \{\pi(1), \dots, \pi(p)\} \setminus \{1, \dots, p\}. \end{aligned}$$

Pak podle (3.19) máme $A \subset \{l \in \mathbb{N};\ l > m\}$ a podle (3.18) je $B \subset \{\pi(l);\ l \in \mathbb{N}, l > m\}$. Potom dostáváme

$$\begin{aligned} |s_p - t_p| &= \Big|\sum_{l=1}^{p} a_l - \sum_{l=1}^{p} a_{\pi(l)}\Big| = \Big|\sum_{i\in A} a_i - \sum_{j\in B} a_j\Big| \leq \sum_{i\in A}|a_i| + \sum_{j\in B}|a_j| \\ &\leq \sum_{l=m+1}^{\infty}|a_l| + \sum_{l=m+1}^{\infty}|a_{\pi(l)}| < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Ukázali jsme, že platí $s - t = \lim_{p\to\infty}(s_p - t_p) = 0$, a tedy $s = t$. Tím je důkaz dokončen. ■

Riemannova věta. Předcházející věta říká, že přerovnání absolutně konvergentní řady nemění její součet. Pro neabsolutně konvergentní řady však toto tvrzení neplatí. Nejprve ukážeme příklad řady a jejího přerovnání s rozdílnými součty.

3.5.6. Příklad. Uvažujme řadu

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdots$$

Dokažte, že existuje přerovnání této řady, které má jiný součet než původní řada.

Řešení. Zadanou řadu přepíšeme ve tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_{2n-1} = \frac{1}{n}$, $a_{2n} = -\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Pro částečné součty této řady platí $s_{2n-1} = \frac{1}{n}$ a $s_{2n} = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Odtud podle Věty 2.3.23 plyne, že $\lim s_n = 0$, takže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$.

Položme

$$\pi(n) = \begin{cases} 4k-3 & \text{pro } n = 3k-2, k \in \mathbb{N}, \\ 4k-1 & \text{pro } n = 3k-1, k \in \mathbb{N}, \\ 2k & \text{pro } n = 3k, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Potom platí

$$a_{\pi(3k-2)} = \frac{1}{2k-1}, \qquad a_{\pi(3k-1)} = \frac{1}{2k}, \qquad a_{\pi(3k)} = -\frac{1}{k}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

a tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \dots.$$

Označme n-tý částečný součet přerovnané řady symbolem σ_n. Potom platí

$$\sigma_{3n} = \sum_{k=1}^{n}\big(a_{\pi(3k-2)} + a_{\pi(3k-1)} + a_{\pi(3k)}\big) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)2k}, \tag{3.20}$$

$$\sigma_{3n+1} = \sigma_{3n} + \frac{1}{2n+1}, \tag{3.21}$$

$$\sigma_{3n+2} = \sigma_{3n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}. \tag{3.22}$$

Protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\frac{1}{(2k-1)2k} \leq \frac{1}{k^2}$, je řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)2k}$ konvergentní podle srovnávacího kritéria (Věta 3.2.2(a)) a Věty 3.2.18. Její součet je kladný, neboť členy řady jsou kladné. Podle (3.20) tedy platí vztah $\lim_{n\to\infty} \sigma_{3n} = s \in (0,\infty)$. Nyní snadno podle (3.21) a (3.22) dostáváme, že platí také $\lim_{n\to\infty} \sigma_{3n+1} = \lim_{n\to\infty} \sigma_{3n+2} = s$. Podle Věty 2.3.23 obdržíme $\lim \sigma_n = s$. Součet přerovnané řady je s, takže se liší od součtu původní řady. ♣

Následující věta mimo jiné ukazuje, že chování řady a jejího přerovnání popsané v předcházejícím příkladu nastává pro každou neabsolutně konvergentní řadu.

3.5.7. Věta (Riemann[5])**.** *Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje neabsolutně a nechť $s \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje přerovnání této řady se součtem s.*

Zbytek tohoto oddílu bude věnován důkazu Riemannovy věty.

3.5.8. Označení. Pro $x \in \mathbb{R}$ označme $x^+ = \max\{x, 0\}$ a $x^- = \max\{-x, 0\}$. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí následující vztahy:

$$x^+ \geq 0,\ x^- \geq 0,\ x = x^+ - x^-,\ |x| = x^+ + x^-,\ (-x)^+ = x^-,\ (-x)^- = x^+.$$

3.5.9. Lemma. *Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje neabsolutně. Pak platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \infty$.*

Důkaz. Jelikož obě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ sestávají z nezáporných čísel, jejich součty existují a jsou buď konečné nebo rovné ∞. Označme tyto součty po řadě s_+ a s_-. Jestliže jsou s_+ i s_- vlastní, potom podle Důsledku 3.1.19 řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ + a_n^-)$$

konverguje, což je spor s předpokladem.

Předpokládáme-li $s_+ = \infty$ a $s_- \in \mathbb{R}$, pak dostaneme snadno z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.26)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) = \infty,$$

což je opět spor s předpokladem. Analogicky bychom pak přivedli ke sporu předpoklad $s_+ \in \mathbb{R}$ a $s_- = \infty$. Zbývá tedy pouze možnost $s_+ = s_- = \infty$. ∎

3.5.10. Lemma. *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost, $A \in \mathbb{R}^*$, $\lim a_n = A$ a $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce. Pak $\lim_{n\to\infty} a_{\pi(n)} = A$.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí $a_k \in B(A, \varepsilon)$. Podle Lemmatu 3.5.3 nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že platí $\{1, \dots, k_0\} \subset \{\pi(1), \dots, \pi(n_0)\}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}, n > n_0$, pak máme $\pi(n) > k_0$, a tedy $a_{\pi(n)} \in B(A, \varepsilon)$, čímž je tvrzení dokázáno. ∎

Riemannova věta (Věta 3.5.7) bude snadným důsledkem následující obecnější věty.

[5]Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866)

3.5.11. Věta. Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje neabsolutně a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \le \beta$. Pak existuje bijekce $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že pro částečné součty $\{\sigma_n\}$ přerovnané řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ platí

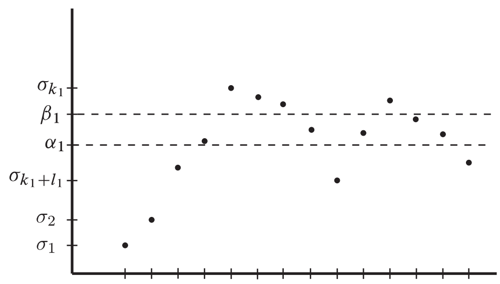
$$\liminf \sigma_n = \alpha \qquad \text{a} \qquad \limsup \sigma_n = \beta. \tag{3.23}$$

3.5.12 (myšlenka důkazu)**.** Důkaz Věty 3.5.11 je obtížnější než zatím uvedené důkazy, ale základní myšlenka je jednoduchá. Označíme

$$P = \{n \in \mathbb{N};\ a_n \ge 0\} \qquad \text{a} \qquad Q = \{n \in \mathbb{N};\ a_n < 0\}.$$

Množiny P a Q zřejmě rozloží množinu $\mathbb{N}$ na dvě disjunktní podmnožiny.

Nalezneme posloupnosti $\{\alpha_j\}$ a $\{\beta_j\}$ splňující $\lim \alpha_j = \alpha$, $\lim \beta_j = \beta$ a pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí $\alpha_j < \beta_j$. Zkonstruovat hledanou bijekci π znamená určit hodnoty $\pi(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Tyto hodnoty budeme konstruovat induktivně. Nejprve nalezneme prvky $\pi(1) < \pi(2) < \cdots < \pi(k_1)$ z množiny P, kde $k_1 \in \mathbb{N}$ je nejmenší přirozené číslo takové, že platí $\sum_{j=1}^{k_1} a_{\pi(j)} > \beta_1$. Potom nalezneme prvky $\pi(k_1+1) < \pi(k_1+2) < \cdots < \pi(k_1+l_1)$ z množiny M, kde $l_1 \in \mathbb{N}$ je nejmenší přirozené číslo takové, že platí $\sum_{j=1}^{k_1+l_1} a_{\pi(j)} < \alpha_1$. Tento postup potom opakujeme s čísly $\beta_2, \alpha_2, \beta_3, \ldots$ tak, že střídavě vybíráme prvky z množin P a M, přičemž každý vybereme právě jednou. Částečné součty takto vznikající přerovnané řady nejprve tedy vystoupají nad hodnotu β_1, pak začnou klesat až pod hodnotu α_1, pak začnou stoupat až nad hodnotu β_2 a tak dále. Tento postup vede ke splnění (3.23). Následující obrázek nám pomůže lépe pochopit celý postup, který nyní provedeme podrobně.



Obrázek 1.

Důkaz Věty 3.5.11. Použijeme označení z 3.5.12. Již víme, že platí $\mathbb{N} = P \cup Q$ a $P \cap Q = \emptyset$. Dokážeme, že množiny P a Q jsou nekonečné. Předpokládejme pro spor nejprve, že P je konečná. Pak pro $n \in \mathbb{N}$, $n > \max P$, platí $a_n < 0$, a tedy $a_n^+ = 0$. Z tohoto pozorování plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ konverguje. To je ovšem ve sporu s Lemmatem 3.5.9. Obdobně bychom přivedli ke sporu předpoklad, že množina Q je konečná.

Prvky množiny P uspořádáme do rostoucí posloupnosti $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$. Platí tedy $P = \{p_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Podobně uspořádáme prvky množiny Q do rostoucí posloupnosti $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$. Potom pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{n=1}^{m} a_{p_n} = \sum_{n=1}^{p_m} a_n^+ \qquad a \qquad \sum_{n=1}^{m} a_{q_n} = \sum_{n=1}^{q_m} (-a_n^-).$$

Odtud, z Věty 2.2.42(b) a z Lemmatu 3.5.9 plyne

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n} = \infty. \tag{3.24}$$

Obdobně lze odvodit rovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{q_n} = -\infty. \tag{3.25}$$

Položme $k_0 = l_0 = 0$. Konstrukce hledaného přerovnání se bude opírat o následující pomocné tvrzení.

Pomocné tvrzení. Existují rostoucí posloupnosti přirozených čísel $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ a $\{l_j\}_{j=1}^{\infty}$ takové, že pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí:

(a) k_j je nejmenší přirozené číslo splňující $k_j > k_{j-1}$ a zároveň

$$\sum_{k=1}^{k_j} a_{p_k} + \sum_{k=1}^{l_{j-1}} a_{q_k} \geq \beta_j, \tag{3.26}$$

(b) l_j je nejmenší přirozené číslo splňující $l_j > l_{j-1}$ a zároveň

$$\sum_{k=1}^{k_j} a_{p_k} + \sum_{k=1}^{l_j} a_{q_k} \leq \alpha_j. \tag{3.27}$$

Důkaz pomocného tvrzení. Budeme postupovat pomocí matematické indukce. Nejprve nalezneme nejmenší $k_1 \in \mathbb{N}$ splňující

$$\sum_{k=1}^{k_1} a_{p_k} \geq \beta_1.$$

Takové k_1 existuje díky (3.24). Nyní s pomocí (3.25) nalezneme nejmenší $l_1 \in \mathbb{N}$ splňující

$$\sum_{k=1}^{k_1} a_{p_k} + \sum_{k=1}^{l_1} a_{q_k} \leq \alpha_1.$$

Tím je první krok konstrukce proveden.

Nyní předpokládejme, že přirozená čísla k_j a l_j jsou již zkonstruována. S pomocí (3.24) nalezneme nejmenší přirozené číslo k_{j+1} splňující $k_{j+1} > k_j$ a

$$\sum_{k=1}^{k_{j+1}} a_{p_k} + \sum_{k=1}^{l_j} a_{q_k} \geq \beta_{j+1}.$$

Dále s pomocí (3.25) nalezneme nejmenší přirozené číslo l_{j+1} splňující $l_{j+1} > l_j$ a

$$\sum_{k=1}^{k_{j+1}} a_{p_k} + \sum_{k=1}^{l_{j+1}} a_{q_k} \leq \alpha_{j+1}.$$

Tím je konstrukce provedena a pomocné tvrzení dokázáno. ∎

Konstrukce bijekce π. Neformálně řečeno, posloupnost hodnot $\{\pi(n)\}_{n=1}^{\infty}$ budeme definovat jako

$$p_1, p_2, \dots, p_{k_1}, q_1, q_2, \dots, q_{l_1}, p_{k_1+1}, \dots, p_{k_2}, q_{l_1+1}, \dots, q_{l_2}, \cdots$$

Formálně přesný zápis může vypadat následovně. Pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí

$$k_{j-1} + l_{j-1} < k_j + l_{j-1} < k_j + l_j. \tag{3.28}$$

Pro $j \in \mathbb{N}$ označme

$$A_j = \big(k_{j-1} + l_{j-1}, k_j + l_{j-1}\big] \cap \mathbb{N} \quad \text{a} \quad B_j = \big(k_j + l_{j-1}, k_j + l_j\big] \cap \mathbb{N}.$$

Protože $k_0 = l_0 = 0$, dostáváme z (3.28) rovnost $\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{\infty}(A_j \cup B_j)$. Navíc jsou množiny $A_i, B_j, i, j \in \mathbb{N}$, po dvou disjunktní. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$\pi(n) = \begin{cases} p_{n-l_{j-1}}, & \text{pokud } n \in A_j, \\ q_{n-k_j}, & \text{pokud } n \in B_j. \end{cases}$$

Platí $\pi(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$. Přímo z definice plyne, že pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí

$$\pi(A_j) = \{p_{k_{j-1}+1}, \dots, p_{k_j}\} \quad \text{a} \quad \pi(B_j) = \{q_{l_{j-1}+1}, \dots, q_{l_j}\}. \tag{3.29}$$

Pak platí

$$\begin{aligned}\pi(\mathbb{N}) &= \bigcup_{j=1}^{\infty}(\pi(A_j) \cup \pi(B_j)) = \bigcup_{j=1}^{\infty}\big(\{p_{k_{j-1}+1}, \dots, p_{k_j}\} \cup \{q_{l_{j-1}+1}, \dots, q_{l_j}\}\big) \\ &= P \cup Q = \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Prostota π. Pro každé $j \in \mathbb{N}$ jsou zobrazení $\pi|_{A_j}, \pi|_{B_j}$ prostá, neboť $\{p_j\}$ a $\{q_j\}$ jsou rostoucí posloupnosti. Dále máme $\pi\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\big) \cap \pi\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\big) = P \cap Q = \emptyset$ a navíc podle (3.29) pro každé $i, j \in \mathbb{N}, i \neq j$, platí $\pi(A_i) \cap \pi(A_j) = \emptyset$ a $\pi(B_i) \cap \pi(B_j) = \emptyset$. Z právě uvedených faktů již plyne, že π je prosté.

Rovnost $\liminf \sigma_n = \alpha$. Pro hodnotu n-tého částečného součtu σ_n přerovnané řady platí podle definice π následující vztah

$$\sigma_n = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n-l_{j-1}} a_{p_k} + \sum_{k=1}^{l_{j-1}} a_{q_k}, & \text{pokud } n \in A_j, \\ \sum_{k=1}^{k_j} a_{p_k} + \sum_{k=1}^{n-k_j} a_{q_k}, & \text{pokud } n \in B_j. \end{cases} \tag{3.30}$$

Zvolme $j \in \mathbb{N}$. Podle (3.27) platí $\sigma_{k_j+l_j} \leq \alpha_j$. Dále platí buď $l_j > l_{j-1} + 1$ nebo $l_j = l_{j-1} + 1$. V prvním případě máme $l_j - 1 > l_{j-1}$, a tedy, díky podmínce minimality v (b), platí $\sigma_{k_j+l_j-1} > \alpha_j$. Pokud nastává druhý případ, potom $\sigma_{k_j+l_j-1} = \sigma_{k_j+l_{j-1}} \geq \beta_j > \alpha_j$ podle (3.26). Odtud plyne

$$\begin{aligned} \alpha_j \geq \sigma_{k_j+l_j} &= \sigma_{k_j+l_j-1} + a_{q_{l_j}} \\ &\geq \alpha_j + a_{q_{l_j}}. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní, a tedy platí $\lim a_n = 0$ (Věta 3.1.11). Užitím Lemmatu 3.5.10 obdržíme $\lim_{n\to\infty} a_{\pi(n)} = 0$. Z věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.2.30) plyne $\lim_{j\to\infty} a_{q_{l_j}} = \lim_{j\to\infty} a_{\pi(k_j+l_j)} = 0$. Odtud, z (3.31) a z věty o dvou strážnících (Věta 2.2.44) snadno dostaneme

$$\lim_{j\to\infty} \sigma_{k_j+l_j} = \alpha. \tag{3.32}$$

Podle věty o vztahu limes superior, limes inferior a hromadných hodnot (Věta 2.4.23) dostaneme nerovnost $\liminf \sigma_n \leq \alpha$. Nyní dokážeme opačnou nerovnost.

Pro $n \in A_j$ platí

$$\sigma_n = \sigma_{k_{j-1}+l_{j-1}} + \sum_{i=k_{j-1}+l_{j-1}+1}^{n} a_{p_{i-l_{j-1}}} \geq \sigma_{k_{j-1}+l_{j-1}},$$

neboť členy $a_{p_{i-l_{j-1}}}$ v předchozí sumě jsou nezáporné. Pro $n \in B_j$ platí

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_{k_j+l_{j-1}} + \sum_{i=k_j+l_{j-1}+1}^{n} a_{q_{i-k_j}} \\ &\geq \sigma_{k_j+l_{j-1}} + \sum_{i=k_j+l_{j-1}+1}^{k_j+l_j} a_{q_{i-k_j}} = \sigma_{k_j+l_j}, \end{aligned}$$

neboť $n \leq k_j + l_j$ a členy $a_{q_{i-k_j}}$ v předchozí sumě jsou záporné. Pro $n \in A_j \cup B_j$ tedy dohromady máme

$$\sigma_n \geq \min\{\sigma_{k_{j-1}+l_{j-1}}, \sigma_{k_j+l_j}\}. \tag{3.33}$$

Pokud $\alpha = -\infty$, je nerovnost $\liminf \sigma_n \geq \alpha$ zřejmá. Předpokládejme, že $\alpha > -\infty$. Zvolme $\alpha' \in \mathbb{R}$, $\alpha' < \alpha$. K němu s pomocí (3.32) nalezneme $j_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall j \in \mathbb{N}, j \geq j_0 \colon \sigma_{k_j+l_j} > \alpha'. \tag{3.34}$$

Nechť nyní $n \in \mathbb{N}$ splňuje $n > k_{j_0} + l_{j_0}$. K němu existuje $j \in \mathbb{N}$, $j > j_0$, takové, že $n \in A_j \cup B_j$. Potom podle (3.33) a (3.34) platí

$$\sigma_n \geq \min\{\sigma_{k_{j-1}+l_{j-1}}, \sigma_{k_j+l_j}\} > \alpha'.$$

Tím je dokázána nerovnost $\liminf \sigma_n \geq \alpha$. Spolu s již dokázanou opačnou nerovností $\liminf \sigma_n \leq \alpha$ dostáváme rovnost $\liminf \sigma_n = \alpha$.

Rovnost $\limsup \sigma_n = \beta$. Tento vztah lze dokázat obdobně jako rovnost $\liminf \sigma_n = \alpha$. ∎

Riemannovu větu (Věta 3.5.7) lze nyní snadno dokázat pomocí Věty 3.5.11.

Důkaz Věty 3.5.7. Položme $\alpha = \beta = s$. Podle Věty 3.5.11 existuje bijekce $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že pro posloupnost částečných součtů přerovnané řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ platí $\liminf \sigma_n = \limsup \sigma_n = s$. Díky Větě 2.4.13 tedy máme $\lim \sigma_n = s$, čímž je důkaz dokončen. ∎

3.6. Součin řad

Nechť $a_1, \dots, a_n$ a $b_1, \dots, b_m$ jsou konečné posloupnosti reálných čísel. Pak platí

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right) = \sum_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,m\}} a_i b_j. \tag{3.35}$$

V tomto oddílu ukážeme analogii vztahu (3.35) pro nekonečné řady. Je zřejmé, že bychom měli určitým způsobem sčítat všechna čísla $a_n b_m$, kde $n, m \in \mathbb{N}$. Otázkou však je, v jakém pořadí je sčítat. Jedna možnost je patrná z následujícího obrázku.

$$\begin{array}{ccccc} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \dots \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \dots \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 & \dots \\ a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 & a_4b_4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Obrázek 2.

Zde nejprve sčítáme prvky na „diagonálách" a dostáváme tak novou řadu, jejíž součet (pokud existuje) můžeme chápat jako součin řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$. Právě uvedená možnost násobení řad není jediná, patří však mezi důležitější. Její formální definice následuje.

3.6.1. Definice. Cauchyovým součinem řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ rozumíme řadu $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, jejíž členy jsou definovány předpisem

$$c_k = \sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i, \quad k \in \mathbb{N}.$$

3.6.2. Věta (Mertens[6]). Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje a řada $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ konverguje. Pak jejich Cauchyův součin je konvergentní řada, jejíž součet je roven $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\right)$.

Důkaz. Pro $k \in \mathbb{N}$ označme:

$$A_k = \sum_{j=1}^{k} a_j, \qquad A = \sum_{j=1}^{\infty} a_j, \qquad \tilde{A} = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|,$$
$$B_k = \sum_{j=1}^{k} b_j, \qquad B = \sum_{j=1}^{\infty} b_j, \qquad \beta_k = B_k - B,$$
$$c_k = \sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i, \qquad C_k = \sum_{j=1}^{k} c_j.$$

Pro $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} C_k &= (a_1 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + \cdots + (a_1 b_k + \cdots + a_k b_1) \\ &= a_1(b_1 + \cdots + b_k) + a_2(b_1 + \cdots + b_{k-1}) + \cdots + a_k b_1 \\ &= a_1 B_k + a_2 B_{k-1} + \cdots + a_k B_1 \\ &= a_1(B + \beta_k) + a_2(B + \beta_{k-1}) + \cdots + a_k(B + \beta_1) \\ &= (a_1 + \cdots + a_k)B + (a_1 \beta_k + a_2 \beta_{k-1} + \cdots + a_k \beta_1) \\ &= A_k B + (a_1 \beta_k + a_2 \beta_{k-1} + \cdots + a_k \beta_1) \\ &= A_k B + \sum_{j=1}^{k} a_j \beta_{k+1-j} = A_k B + \sum_{j=1}^{k} a_{k+1-j} \beta_k. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Pro $k \in \mathbb{N}$ označme $\gamma_k = \sum_{j=1}^{k} a_j \beta_{k+1-j}$. Nyní ukážeme, že platí $\lim \gamma_k = 0$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí $|\beta_k| < \varepsilon$, neboť $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ je konvergentní. Pak pro $k \in \mathbb{N}$, $k > k_0$,

[6] Franz Mertens (1840–1927)

máme

$$
\begin{aligned}
|\gamma_k| = \Big|\sum_{j=1}^{k} a_{k+1-j}\beta_j\Big| &\le \Big|\sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j}\beta_j\Big| + \Big|\sum_{j=k_0+1}^{k} a_{k+1-j}\beta_j\Big| \\
&\le \Big|\sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j}\beta_j\Big| + \sum_{j=k_0+1}^{k} |a_{k+1-j}||\beta_j| \\
&\le \Big|\sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j}\beta_j\Big| + \varepsilon \cdot \sum_{j=k_0+1}^{k} |a_{k+1-j}| \\
&\le \Big|\sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j}\beta_j\Big| + \varepsilon\tilde{A}.
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

Podle Věty 3.1.11 platí $\lim a_k = 0$, a tedy podle Věty 2.2.30 také pro každé $j \in \{1, \dots, k_0\}$ platí $\lim_{k\to\infty} a_{k+1-j} = 0$. Díky 2.3.28 dostáváme

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j}\beta_j = 0. \tag{3.38}$$

Díky Větě 2.4.14, (3.37) a (3.38) pak platí $\limsup |\gamma_k| \le \varepsilon\tilde{A}$. Odtud plyne, že $\limsup |\gamma_k| = 0$, a tedy $\lim |\gamma_k| = 0$. Tedy podle Věty 2.2.24 dostáváme $\lim \gamma_k = 0$.

Limitním přechodem v (3.36) pak dostáváme z Věty 2.2.34 rovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \lim_{k\to\infty} C_k = \lim_{k\to\infty} (A_k B + \gamma_k) = AB.$$

Tím je důkaz dokončen. ■

3.6.3. Důsledek. Cauchyův součin dvou absolutně konvergentních řad je absolutně konvergentní.

Důkaz. Podle Mertensovy věty (Věta 3.6.2) je Cauchyův součin řad $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ a $\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|$ konvergentní řada. Pro Cauchyův součin řad $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ a $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ tak platí

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i}b_i\Big| \le \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{k} |a_{k+1-i}||b_i|\Big) < \infty.$$

Odtud plyne, že Cauchyův součin řad $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ a $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ absolutně konverguje. ■

Předpoklad pouhé konvergence obou řad ve Větě 3.6.2 ke konvergenci jejich Cauchyova součinu nestačí, jak vyplývá z následujícího příkladu.

3.6.4. Příklad. Nechť $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale Cauchyův součin řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se stejnou řadou $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nekonverguje.

Řešení. Konvergence řady vyplývá z Leibnizova kritéria (Věta 3.3.1). Členy odpovídajícího Cauchyova součinu mají pro $k \in \mathbb{N}$ tvar

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k+1-i} \frac{1}{\sqrt{k+1-i}} (-1)^i \frac{1}{\sqrt{i}} \\ &= (-1)^{k+1} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{(k+1-i)i}}. \end{aligned}$$

Podle AG-nerovnosti (Příklad 1.8.13) dostaneme odhad

$$\sqrt{(k+1-i)i} \le \frac{(k+1-i)+i}{2} = \frac{k+1}{2}, \quad k \in \mathbb{N},\ i \in \{1, \dots, k\}.$$

Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$|c_k| = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{(k+1-i)i}} \ge \sum_{i=1}^{k} \frac{2}{k+1} = \frac{2k}{k+1}.$$

Tedy neplatí $\lim_{k\to\infty} c_k = 0$. Odtud plyne, že Cauchyův součin $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ nekonverguje, neboť není splněna nutná podmínka konvergence řady (Věta 3.1.11). ♣

Cauchyův součin dvou konvergentních řad tedy nemusí konvergovat. Nicméně platí následující věta, jejíž důkaz provedeme až v Kapitole 7 (vizte 7.3.5). Další výsledek týkající se Cauchyova součinu naleznete v Příkladu 15.6.1.

3.6.5. Věta (Abel)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ jsou konvergentní řady, jejichž Cauchyův součin konverguje. Pak platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i \Big) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Big) \cdot \Big(\sum_{m=1}^{\infty} b_m \Big).$$

3.6.6 (Cauchyův součin obecněji)**.** Nechť $n_1, m_1 \in \mathbb{Z}$ a $\sum_{n=n_1}^{\infty} a_n$, $\sum_{m=m_1}^{\infty} b_m$ jsou řady. Cauchyův součin těchto řad je definován jako řada $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, kde

$$c_k = \sum_{i=1}^{k} a_{n_1+k-i} b_{m_1+i-1}.$$

Změna indexování členů řad nemá vliv na důkazy uvedené v tomto oddíle, a proto dokázaná tvrzení o Cauchyově součinu platí i v této obecnější situaci.

3.7. Zobecněné řady

Nechť I je množina a pro každé $\alpha \in I$ je dáno reálné číslo x_α, neboli máme zobrazení $\alpha \mapsto x_\alpha$ definované na množině I s hodnotami v $\mathbb{R}$. Je-li I konečná, pak je součet $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ dobře definován. V tomto oddílu ukážeme, že součet $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$

lze v jistých případech definovat i pro I nekonečnou, přičemž některé vlastnosti obvyklé pro součet konečně mnoha čísel zůstanou v platnosti. Přístup použitý v tomto oddílu je odlišný od způsobu, jakým jsme definovali součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. V definici součtu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jsme totiž podstatným způsobem využili uspořádání sčítaných členů, zatímco pro definici součtu $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ *žádné uspořádání k dispozici nemáme.* Příkladem takového součtu je $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} x_{(n,m)}$.

3.7.1. Označení. Nechť I je množina. Potom symbolem $\mathcal{K}(I)$ označíme množinu všech konečných podmnožin I.

3.7.2. Definice. Nechť I je množina a $\alpha \mapsto x_\alpha$ je zobrazení z I do $\mathbb{R}$. Prvek $x \in \mathbb{R}^*$ nazveme **součtem zobecněné řady** $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$, pokud platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists F \in \mathcal{K}(I)\ \forall F' \in \mathcal{K}(I), F' \supset F\colon \sum_{\alpha\in F'} x_\alpha \in B(x,\varepsilon).$$

3.7.3. V tomto oddílu se budeme zabývat téměř výlučně zobecněnými řadami. Pokud nebude hrozit nedorozumění budeme místo termínu „zobecněná řada" často psát jen „řada".

3.7.4. Věta (jednoznačnost součtu)**.** Zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ má nejvýše jeden součet.

Důkaz. Předpokládejme, že $x, y \in \mathbb{R}^*$ jsou součtem $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ a $x \neq y$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, takové, že $B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon) = \emptyset$. K němu nalezneme konečné množiny $F_1, F_2 \subset I$ splňující

$$\forall F \in \mathcal{K}(I), F \supset F_1\colon \sum_{\alpha\in F} x_\alpha \in B(x,\varepsilon),$$
$$\forall F \in \mathcal{K}(I), F \supset F_2\colon \sum_{\alpha\in F} x_\alpha \in B(y,\varepsilon).$$

Pak pro konečnou množinu $F_1 \cup F_2$ platí

$$\sum_{\alpha\in F_1\cup F_2} x_\alpha \in B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon) = \emptyset,$$

což je zřejmý spor. ■

3.7.5. Definice. Nechť I je množina a $\alpha \mapsto x_\alpha$ je zobrazení z I do $\mathbb{R}$. Pokud má zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ součet x, pak píšeme $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = x$ a říkáme, že zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ **má součet**. Je-li $x \in \mathbb{R}$, říkáme, že je $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ **konvergentní**. Pokud není zobecněná řada konvergentní, říkáme, že je **divergentní**. Pokud zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} |x_\alpha|$ konverguje, říkáme, že $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ je **absolutně konvergentní**.

3.7.6. Nechť I je množina a $\alpha \mapsto x_\alpha$ je zobrazení z I do $\mathbb{R}$. Symbol $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ značí jednak zobecněnou řadu, kterou ztotožňujeme se zobrazením $\alpha \mapsto x_\alpha$, jednak součet této řady, pokud existuje. Symbol $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ můžeme tedy používat k označení prvku z $\mathbb{R}^*$ až po ověření, že má příslušná řada součet. Zde uplatňujeme stejný přístup jako u nekončných řad, srovnejte s 3.1.2.

3.7.7. Je-li indexová množina I konečná, pak je součet zobecněné řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ roven obvyklému součtu. Vskutku, je-li $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, pak můžeme položit $F = I$. Potom pro každou $F' \in \mathcal{K}(I)$ splňující $F' \supset F$ platí $F' = I$. Tedy $\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha \in B\big(\sum_{\alpha\in I} x_\alpha, \varepsilon\big)$. Pokud $I = \emptyset$, pak klademe $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = 0$. Ve shodě s touto úmluvou platí právě uvedená úvaha o zobecněném součtu i v případě, kdy je I prázdná množina.

Následující věta je obdobou Věty 3.1.18 pro zobecněné řady.

3.7.8. Věta (linearita součtu zobecněných řad)**.** Nechť zobecněné řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ a $\sum_{\alpha\in I} y_\alpha$ mají součet.

(a) Pokud $c \in \mathbb{R}$ a výraz $c\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ je definován, pak má i zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} cx_\alpha$ součet a platí
$$\sum_{\alpha\in I} cx_\alpha = c\sum_{\alpha\in I} x_\alpha.$$

(b) Pokud je definován výraz $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha + \sum_{\alpha\in I} y_\alpha$, pak má i zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I}(x_\alpha + y_\alpha)$ součet a platí
$$\sum_{\alpha\in I}(x_\alpha + y_\alpha) = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha + \sum_{\alpha\in I} y_\alpha.$$

Důkaz. Označme $x = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ a $y = \sum_{\alpha\in I} y_\alpha$.

(a) Pokud je $c = 0$, potom musí být $x \in \mathbb{R}$ a tvrzení je téměř zřejmé. Předpokládejme v dalším, že platí $c \neq 0$. Rozlišíme následující případy

Případ $x \in \mathbb{R}$. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Nalezneme $F \in \mathcal{K}(I)$ takovou, že platí
$$\forall F' \in \mathcal{K}(I), F' \supset F: \Big|\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha - x\Big| < \frac{\varepsilon}{|c|}.$$
Pro každou množinu $F' \in \mathcal{K}(I), F' \supset F$, pak máme
$$\Big|\sum_{\alpha\in F'} cx_\alpha - cx\Big| = |c|\Big|\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha - x\Big| < |c|\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon.$$
Platí tedy rovnost $\sum_{\alpha\in I} cx_\alpha = cx$.

Případ $x = -\infty, c < 0$. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Nalezneme $F \in \mathcal{K}(I)$ takovou, že platí
$$\forall F' \in \mathcal{K}(I), F' \supset F: \sum_{\alpha\in F'} x_\alpha < -\frac{1}{|c|\varepsilon}.$$
Pro každou množinu $F' \in \mathcal{K}(I), F' \supset F$, pak máme
$$\sum_{\alpha\in F'} cx_\alpha > -c\frac{1}{|c|\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}.$$
Platí tedy rovnost $\sum_{\alpha\in I} cx_\alpha = \infty$.

Ostatní případy lze dokázat obdobně jako v předchozím případě.

(b) Rozlišíme několik případů.

Případ $x, y \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $F_1, F_2 \in \mathcal{K}(I)$ takové, že platí

$$\forall F_1' \in \mathcal{K}(I), F_1' \supset F_1\colon \Big|\sum_{\alpha\in F_1'} x_\alpha - x\Big| < \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$
$$\forall F_2' \in \mathcal{K}(I), F_2' \supset F_2\colon \Big|\sum_{\alpha\in F_2'} y_\alpha - y\Big| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Položme $F = F_1 \cup F_2$. Pro každou konečnou množinu $F' \subset I$ obsahující F dostáváme

$$\Big|\sum_{\alpha\in F'}(x_\alpha + y_\alpha) - (x+y)\Big| \le \Big|\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha - x\Big| + \Big|\sum_{\alpha\in F'} y_\alpha - y\Big| < \varepsilon.$$

Tímto je požadovaná rovnost dokázána.

Případ $x = \infty$, $y \in \mathbb{R}$. Chceme dokázat, že platí $\sum_{\alpha\in I}(x_\alpha + y_\alpha) = \infty$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, k němu nalezneme $F_1 \in \mathcal{K}(I)$ takovou, že platí

$$\forall F_1' \in \mathcal{K}(I), F_1' \supset F_1\colon \sum_{\alpha\in F_1'} x_\alpha > \frac{1}{\varepsilon} - y + 1. \tag{3.39}$$

Dále nalezneme $F_2 \in \mathcal{K}(I)$ takovou, že platí

$$\forall F_2' \in \mathcal{K}(I), F_2' \supset F_2\colon \Big|\sum_{\alpha\in F_2'} y_\alpha - y\Big| < 1.$$

Pak máme

$$\forall F_2' \in \mathcal{K}(I), F_2' \supset F_2\colon \sum_{\alpha\in F_2'} y_\alpha > y - 1. \tag{3.40}$$

Položíme $F = F_1 \cup F_2$. Pak pro každou množinu $F' \in \mathcal{K}(I)$, $F' \supset F$, dostáváme díky (3.39) a (3.40) nerovnost

$$\sum_{\alpha\in F'}(x_\alpha + y_\alpha) = \sum_{\alpha\in F'} x_\alpha + \sum_{\alpha\in F'} y_\alpha > \frac{1}{\varepsilon} - y + 1 + y - 1 = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Tím je požadovaná rovnost pro případ $x = \infty$, $y \in \mathbb{R}$ dokázána. Ve zbývajících případech lze postupovat obdobně. Příslušné důkazy již uvádět nebudeme. ■

3.7.9. Věta. Nechť $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ je zobecněná řada.

(a) Nechť x_α, $\alpha \in I$, jsou nezáporná čísla. Pak $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ má součet a platí

$$\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = \sup\Big\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha;\ F \in \mathcal{K}(I)\Big\}. \tag{3.41}$$

(b) Řady $\sum_{\alpha\in I} |x_\alpha|$, $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+$, $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-$ mají vždy součet a platí

$$\sum_{\alpha\in I} |x_\alpha| = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+ + \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-. \tag{3.42}$$

(c) Řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ má součet právě tehdy, když je definován výraz $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+ - \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-$. Je-li součet $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ definován, pak platí

$$\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+ - \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-. \tag{3.43}$$

Důkaz. (a) Nechť x_α, $\alpha \in I$, jsou nezáporná čísla. Označme

$$s = \sup\Big\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha;\ F \in \mathcal{K}(I)\Big\}.$$

Ukážeme, že platí $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = s$. Nejprve si povšimneme, že platí

$$\forall F \in \mathcal{K}(I)\colon \sum_{\alpha\in F} x_\alpha \le s. \tag{3.44}$$

Mějme nyní dáno libovolné $s' \in \mathbb{R}$, $s' < s$. Z definice suprema nalezneme $F \in \mathcal{K}(I)$ takovou, že $\sum_{\alpha\in F} x_\alpha > s'$. Pak pro libovolnou $F' \in \mathcal{K}(I)$, $F' \supset F$, platí

$$\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha \ge \sum_{\alpha\in F} x_\alpha > s'.$$

Odtud a z (3.44) již snadno dostaneme rovnost $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = s$.

(b) Díky (a) mají zobecněné řady $\sum_{\alpha\in I} |x_\alpha|$, $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+$, $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-$ vždy součet. Rovnost (3.42) plyne z Věty 3.7.8(b), neboť $|x_\alpha| = x_\alpha^+ + x_\alpha^-$ a součet $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+ + \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-$ je definován.

(c) Položme $P = \{\alpha \in I;\ x_\alpha \ge 0\}$, $M = \{\alpha \in I;\ x_\alpha < 0\}$, $p = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+$ a $m = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-$. Dokážeme nejprve, že platí

$$p = \sum_{\alpha\in P} x_\alpha \qquad \text{a} \qquad m = -\sum_{\alpha\in M} x_\alpha. \tag{3.45}$$

Zřejmě platí rovnosti

$$\Big\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha^+;\ F \in \mathcal{K}(I)\Big\} = \Big\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha;\ F \in \mathcal{K}(P)\Big\}, \tag{3.46}$$

$$\Big\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha^-;\ F \in \mathcal{K}(I)\Big\} = \Big\{-\sum_{\alpha\in F} x_\alpha;\ F \in \mathcal{K}(M)\Big\}, \tag{3.47}$$

a tedy máme

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+ &= \sup\Big\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha^+;\ F\in\mathcal{K}(I)\Big\} \\
&= \sup\Big\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha;\ F\in\mathcal{K}(P)\Big\} && \text{(podle (3.46))} \\
&= \sum_{\alpha\in P} x_\alpha = p, \\
\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^- &= \sup\Big\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha^-;\ F\in\mathcal{K}(I)\Big\} \\
&= \sup\Big\{\sum_{\alpha\in F} -x_\alpha;\ F\in\mathcal{K}(M)\Big\} && \text{(podle (3.47))} \\
&= \sum_{\alpha\in M} -x_\alpha && \text{(podle již dokázané části (a))} \\
&= -\sum_{\alpha\in M} x_\alpha = m. && \text{(podle Věty 3.7.8(a))}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nejprve dokážeme, že rozdíl $p-m$ je dobře definován. Pro spor předpokládejme, že tomu tak není, tj. $p=m=\infty$. Nechť $F\in\mathcal{K}(I)$. Z (3.45) plyne

$$\sup\Big\{\sum_{\alpha\in G} x_\alpha;\ G\in\mathcal{K}(P\setminus F)\Big\} = \infty,$$

a tedy existuje konečná množina $G_1\subset P\setminus F$ taková, že

$$\sum_{\alpha\in G_1} x_\alpha > -\sum_{\alpha\in F} x_\alpha + 1.$$

Z (3.45) dále plyne

$$\inf\Big\{\sum_{\alpha\in G} x_\alpha;\ G\in\mathcal{K}(M\setminus F)\Big\} = -\infty,$$

a tedy existuje konečná množina $G_2\subset M\setminus F$ taková, že

$$\sum_{\alpha\in G_2} x_\alpha < -\sum_{\alpha\in F} x_\alpha - 1.$$

Položíme $F_1=F\cup G_1$ a $F_2=F\cup G_2$. Pro každou konečnou množinu $F\subset I$ jsme tedy nalezli $F_1,F_2\in\mathcal{K}(I)$, které obsahují F a splňují $\sum_{\alpha\in F_1} x_\alpha > 1$ a $\sum_{\alpha\in F_2} x_\alpha < -1$. Toto je ale ve sporu s předpokladem existence součtu řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$. Rozdíl $p-m$ je tedy dobře definován.

$\Leftarrow$ Řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ konverguje podle Věty 3.7.8.

Rovnost (3.43) plyne z právě dokázané ekvivalence a Věty 3.7.8, neboť pro každé $\alpha\in I$ platí $x_\alpha = x_\alpha^+ + (-1)\cdot x_\alpha^-$. ∎

Z Věty 3.7.9(a) snadno plyne následující analogie srovnávacího kritéria z Věty 3.2.2.

3.7.10. Věta (srovnávací kritérium pro zobecněné řady)**.** Nechť $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ a $\sum_{\alpha\in I} y_\alpha$ jsou zobecněné řady takové, že pro každé $\alpha \in I$ platí $0 \le y_\alpha \le x_\alpha$. Potom součty řad existují a platí $\sum_{\alpha\in I} y_\alpha \le \sum_{\alpha\in I} x_\alpha$. Jestliže tedy navíc řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ konverguje, pak konverguje i řada $\sum_{\alpha\in I} y_\alpha$.

Důkaz. Existence součtů obou řad plyne z Věty 3.7.9(a). Z nerovností $0 \le y_\alpha \le x_\alpha$, $\alpha \in I$, dostáváme

$$0 \le \sup\Big\{\sum_{\alpha\in F} y_\alpha;\ F \in \mathcal{K}(I)\Big\} \le \sup\Big\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha;\ F \in \mathcal{K}(I)\Big\}.$$

Pak pomocí Věty 3.7.9(a) ihned plyne

$$0 \le \sum_{\alpha\in I} y_\alpha \le \sum_{\alpha\in I} x_\alpha.$$

Odtud pak snadno vyplývá i tvrzení o konvergenci. ■

Následující věta ukazuje, že vztah konvergence a absolutní konvergence pro zobecněné řady je jiný než v případě standardních řad.

3.7.11. Věta (absolutní konvergence zobecněné řady)**.** Zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ je konvergentní právě tehdy, když je absolutně konvergentní.

Důkaz. $\Rightarrow$ Podle Věty 3.7.9(c) řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+$ a $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-$ konvergují, a proto konverguje podle Věty 3.7.9(b) i řada $\sum_{\alpha\in I} |x_\alpha|$.

$\Leftarrow$ Pro každé $\alpha \in I$ platí nerovnosti $0 \le x_\alpha^+ \le |x_\alpha|$ a $0 \le x_\alpha^- \le |x_\alpha|$, a proto podle Věty 3.7.10 řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+$ a $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-$ konvergují. Podle Věty 3.7.9(c) konverguje tedy i řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$. ■

3.7.12. Věta (přerovnání zobecněné řady)**.** Nechť má zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ součet a $\pi\colon I \to I$ je bijekce. Potom má součet i řada $\sum_{\alpha\in I} x_{\pi(\alpha)}$ a platí $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = \sum_{\alpha\in I} x_{\pi(\alpha)}$.

Důkaz. Označme s součet řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $F \in \mathcal{K}(I)$ takovou, že

$$\forall F' \in \mathcal{K}(I), F' \supset F\colon \sum_{\alpha\in F'} x_\alpha \in B(s,\varepsilon).$$

Položme $G = \pi^{-1}(F)$ a vezměme libovolnou $G' \in \mathcal{K}(I)$ obsahující G. Pak množina $F' = \pi(G')$ je konečná, obsahuje F a platí

$$\sum_{\alpha\in G'} x_{\pi(\alpha)} = \sum_{\alpha\in F'} x_\alpha \in B(s,\varepsilon).$$

Tedy $\sum_{\alpha\in I} x_{\pi(\alpha)} = s$. ■

3.7.13. Věta. Nechť zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ konverguje. Potom je množina $\{\alpha \in I;\ x_\alpha \neq 0\}$ spočetná.

Důkaz. Řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ je absolutně konvergentní dle Věty 3.7.11. Označme $s = \sum_{\alpha\in I} |x_\alpha|$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $I_n = \left\{\alpha \in I;\ |x_\alpha| \ge \frac{1}{n}\right\}$. Máme-li pak libovolnou konečnou množinu $F \subset I_n$, platí pro počet jejích prvků odhad

$$|F| = \sum_{\alpha\in F} 1 = n \sum_{\alpha\in F} \frac{1}{n} \le n \sum_{\alpha\in F} |x_\alpha| \le ns.$$

Tedy i sama množina I_n má nejvýše ns prvků, a je tedy konečná. Proto je podle Věty 1.6.21(b) množina $\{\alpha \in I;\ x_\alpha \ne 0\} = \{\alpha \in I;\ |x_\alpha| > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ spočetná. ■

3.7.14. Nechť $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ je konvergentní zobecněná řada. Z důkazu tvrzení Věty 3.7.13 plyne, že pro pro každé $c \in \mathbb{R}, c > 0$, je množina $\{\alpha \in I;\ |x_\alpha| > c\}$ konečná. Tuto vlastnost můžeme chápat jako analogii Věty 3.1.11 pro konvergentní zobecněné řady.

3.7.15. Věta (Bolzanova–Cauchyova podmínka)**.** Zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ konverguje právě tehdy, když platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists F \in \mathcal{K}(I)\ \forall F' \in \mathcal{K}(I), F' \cap F = \emptyset\colon \left|\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha\right| < \varepsilon. \tag{3.48}$$

Důkaz. $\Rightarrow$ Předpokládejme nejprve, že řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ konverguje a její součet je roven $x \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $F \in \mathcal{K}(I)$ takovou, že pro každou množinu $F'' \in \mathcal{K}(I)$ obsahující F platí $\left|\sum_{\alpha\in F''} x_\alpha - x\right| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Vezměme libovolnou $F' \in \mathcal{K}(I)$ disjunktní s F. Pak platí

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha\right| &= \left|\sum_{\alpha\in F\cup F'} x_\alpha - \sum_{\alpha\in F} x_\alpha\right| = \left|\sum_{\alpha\in F\cup F'} x_\alpha - x + x - \sum_{\alpha\in F} x_\alpha\right| \\ &\le \left|\sum_{\alpha\in F\cup F'} x_\alpha - x\right| + \left|x - \sum_{\alpha\in F} x_\alpha\right| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.\end{aligned}$$

Podmínka (3.48) je tedy splněna.

$\Leftarrow$ Nechť $n \in \mathbb{N}$. Pak pomocí podmínky (3.48) pro $\varepsilon = \frac{1}{n}$ nalezneme konečnou množinu $F_n \in \mathcal{K}(I)$ takovou, že

$$\forall F' \in \mathcal{K}(I), F' \cap F_n = \emptyset\colon \left|\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha\right| < \tfrac{1}{n}. \tag{3.49}$$

Označme $y_n = \sum_{\alpha\in F_n} x_\alpha$, $n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že $\{y_n\}$ je cauchyovská posloupnost reálných čísel. Pro každé $n, m \in \mathbb{N}$ platí

$$|y_m - y_n| = \left|\sum_{\alpha\in F_m} x_\alpha - \sum_{\alpha\in F_n} x_\alpha\right| \le \left|\sum_{\alpha\in F_m\setminus F_n} x_\alpha\right| + \left|\sum_{\alpha\in F_n\setminus F_m} x_\alpha\right|.$$

Protože $F_m \setminus F_n$ je konečná množina disjunktní s F_n, dostáváme podle (3.49) odhad $\left|\sum_{\alpha\in F_m\setminus F_n} x_\alpha\right| < \frac{1}{n}$. Obdobně dostaneme odhad $\left|\sum_{\alpha\in F_n\setminus F_m} x_\alpha\right| < \frac{1}{m}$. Tedy pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ máme $|y_m - y_n| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n_0} < \frac{1}{2}\varepsilon$. Potom pro každá $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_0$, platí

$$|y_m - y_n| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Tudíž je posloupnost $\{y_n\}$ cauchyovská.

Díky Větě 2.4.26 tedy existuje $x \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim y_n = x$. Ukážeme, že platí $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = x$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n_0} < \frac{1}{2}\varepsilon$ a $|y_{n_0} - x| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Nechť $F' \in \mathcal{K}(I)$ obsahuje F_{n_0}. Potom platí

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{\alpha \in F'} x_\alpha - x\Big| &= \Big|\sum_{\alpha \in F_{n_0}} x_\alpha + \sum_{\alpha \in F' \setminus F_{n_0}} x_\alpha - x\Big| \\
&\leq \Big|\sum_{\alpha \in F_{n_0}} x_\alpha - x\Big| + \Big|\sum_{\alpha \in F' \setminus F_{n_0}} x_\alpha\Big| \\
&= |y_{n_0} - x| + \Big|\sum_{\alpha \in F' \setminus F_{n_0}} x_\alpha\Big|.
\end{aligned}$$

Podle (3.49) platí

$$\Big|\sum_{\alpha \in F' \setminus F_{n_0}} x_\alpha\Big| < \frac{1}{n_0} < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Tedy celkem dostaneme

$$\Big|\sum_{\alpha \in F'} x_\alpha - x\Big| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Podle Definice 3.7.2 tedy $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = x$. ■

3.7.16. Věta (součin zobecněných řad)**.** Nechť zobecněné řady $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ a $\sum_{\beta \in J} y_\beta$ konvergují. Potom konverguje i řada $\sum_{(\alpha,\beta) \in I \times J} x_\alpha y_\beta$ a platí

$$\sum_{(\alpha,\beta) \in I \times J} x_\alpha y_\beta = \Big(\sum_{\alpha \in I} x_\alpha\Big) \cdot \Big(\sum_{\beta \in J} y_\beta\Big).$$

Důkaz. Podle předpokladu a Věty 3.7.11 jsou řady $\sum_{\alpha \in I} |x_\alpha|$ a $\sum_{\beta \in J} |y_\beta|$ konvergentní. Označme

$$x = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha, \qquad y = \sum_{\beta \in J} y_\beta, \qquad A = \sum_{\alpha \in I} |x_\alpha|, \qquad B = \sum_{\beta \in J} |y_\beta|.$$

Platí tedy $x, y, A, B \in \mathbb{R}$.

Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $F_1 \in \mathcal{K}(I)$ a $F_2 \in \mathcal{K}(J)$ takové, že platí

$$\forall F_1' \in \mathcal{K}(I), F_1' \supset F_1 \colon \sum_{\alpha \in F_1' \setminus F_1} |x_\alpha| < \varepsilon \ \wedge \ \Big| \sum_{\alpha \in F_1} x_\alpha - x \Big| < \varepsilon, \tag{3.50}$$

$$\forall F_2' \in \mathcal{K}(J), F_2' \supset F_2 \colon \sum_{\beta \in F_2' \setminus F_2} |y_\beta| < \varepsilon \ \wedge \ \Big| \sum_{\alpha \in F_2} y_\beta - y \Big| < \varepsilon. \tag{3.51}$$

Konstrukci množiny F_1 ukážeme podrobně. Konstrukce F_2 je obdobná. Podle definice součtu zobecněné řady nalezneme k číslu $\frac{1}{2}\varepsilon$ množinu $\tilde{F}_1 \in \mathcal{K}(I)$ takovou, že

$$\forall F_1' \in \mathcal{K}(I), F_1' \supset \tilde{F}_1 \colon \Big| \sum_{\alpha \in F_1'} |x_\alpha| - A \Big| < \varepsilon$$

Pro každou množinu $F_1' \in \mathcal{K}(I)$ splňující $F_1' \supset \tilde{F}_1$ platí

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in F_1' \setminus \tilde{F}_1} |x_\alpha| &= \Big| \sum_{\alpha \in F_1'} |x_\alpha| - \sum_{\alpha \in \tilde{F}_1} |x_\alpha| \Big| \\ &\le \Big| \sum_{\alpha \in \tilde{F}_1} |x_\alpha| - A \Big| + \Big| \sum_{\alpha \in \tilde{F}_1} |x_\alpha| - A \Big| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Podle definice součtu zobecněné řady nalezneme k číslu ε množinu $F_1^* \in \mathcal{K}(I)$ takovou, že

$$\forall F_1' \in \mathcal{K}(I), F_1' \supset \tilde{F}_1^* \colon \Big| \sum_{\alpha \in F_1'} x_\alpha - x \Big| < \varepsilon \tag{3.53}$$

Položíme $F_1 = \tilde{F}_1 \cup F_1^*$. Pokud množina $F_1' \in \mathcal{K}(I)$ splňuje $F_1' \supset F_1$ pak máme

$$\sum_{\alpha \in F_1' \setminus F_1} |x_\alpha| \le \sum_{\alpha \in F_1' \setminus \tilde{F}_1} |x_\alpha| < \varepsilon.$$

Odtud a z (3.53) dostáváme (3.50).

Položme $F = F_1 \times F_2$. Zvolme $F' \in \mathcal{K}(I \times J)$ takovou, že $F \subset F'$. Snadno je vidět, že platí

$$\sum_{(\alpha,\beta) \in F_1 \times F_2} x_\alpha y_\beta = \Big(\sum_{\alpha \in F_1} x_\alpha \Big) \cdot \Big(\sum_{\beta \in F_2} y_\beta \Big),$$

a tedy

$$\begin{aligned} &\Big| \sum_{(\alpha,\beta) \in F'} x_\alpha y_\beta - xy \Big| \\ &= \Big| \sum_{(\alpha,\beta) \in F'} x_\alpha y_\beta - \sum_{(\alpha,\beta) \in F_1 \times F_2} x_\alpha y_\beta + \Big(\sum_{\alpha \in F_1} x_\alpha \Big) \cdot \Big(\sum_{\beta \in F_2} y_\beta \Big) - xy \Big| \\ &\le \Big| \sum_{(\alpha,\beta) \in F'} x_\alpha y_\beta - \sum_{(\alpha,\beta) \in F_1 \times F_2} x_\alpha y_\beta \Big| + \Big| \Big(\sum_{\alpha \in F_1} x_\alpha \Big) \cdot \Big(\sum_{\beta \in F_2} y_\beta \Big) - xy \Big|. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Odhadněme nejprve první člen z předchozího řádku. Uvažujme zobrazení $\pi_1\colon I \times J \to I$ definované předpisem $\pi_1(\alpha,\beta) = \alpha$. Potom je podle Věty 1.6.15(d) množina $H_1 = \pi_1(F')$ konečná. Podobně uvažujme zobrazení $\pi_2\colon I \times J \to J$ definované předpisem $\pi_2(\alpha,\beta) = \beta$. Opět podle Věty 1.6.15(d) je množina $H_2 = \pi_2(F')$ konečná. Potom zřejmě platí $F' \subset H_1 \times H_2$ a máme

$$\begin{aligned}
\Big| \sum_{(\alpha,\beta)\in F'} x_\alpha y_\beta - \sum_{(\alpha,\beta)\in F_1\times F_2} x_\alpha y_\beta \Big| \\
&\le \sum_{(\alpha,\beta)\in F'\setminus(F_1\times F_2)} |x_\alpha y_\beta| \\
&\le \sum_{\alpha\in H_1\setminus F_1,\,\beta\in H_2} |x_\alpha y_\beta| + \sum_{\alpha\in H_1,\,\beta\in H_2\setminus F_2} |x_\alpha y_\beta| \\
&= \Big(\sum_{\alpha\in H_1\setminus F_1} |x_\alpha| \Big) \cdot \Big(\sum_{\beta\in H_2} |y_\beta| \Big) + \Big(\sum_{\alpha\in H_1} |x_\alpha| \Big) \cdot \Big(\sum_{\beta\in H_2\setminus F_2} |y_\beta| \Big) \\
&\le \varepsilon B + A\varepsilon.
\end{aligned}$$

Nyní odhadneme druhý člen na pravé straně (3.54). Platí

$$\begin{aligned}
\Big| \Big(\sum_{\alpha\in F_1} x_\alpha \Big) \cdot \Big(\sum_{\beta\in F_2} y_\beta \Big) - xy \Big| &= \Big| \sum_{\alpha\in F_1} x_\alpha \cdot \Big(\sum_{\beta\in F_2} y_\beta - y \Big) + \Big(\sum_{\alpha\in F_1} x_\alpha - x \Big) \cdot y \Big| \\
&\le \sum_{\alpha\in F_1} |x_\alpha| \cdot \Big| \sum_{\beta\in F_2} y_\beta - y \Big| + \Big| \sum_{\alpha\in F_1} x_\alpha - x \Big| \cdot |y| \\
&\le A\varepsilon + \varepsilon |y|.
\end{aligned}$$

Tedy celkem

$$\Big| \sum_{(\alpha,\beta)\in F'} x_\alpha y_\beta - xy \Big| \le \varepsilon B + A\varepsilon + A\varepsilon + \varepsilon|y| = \varepsilon\big(2A + B + |y|\big).$$

Odtud plyne tvrzení. ∎

3.7.17. Věta (asociativita zobecněných řad)**.** Nechť $\mathcal{I}$ je disjunktní systém množin, $S = \bigcup \mathcal{I}$ a zobecněná řada $\sum_{\alpha\in S} x_\alpha$ konverguje. Potom pro každé $I \in \mathcal{I}$ zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ konverguje. Označíme-li $y_I = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ pro $I \in \mathcal{I}$, pak řada $\sum_{I\in\mathcal{I}} y_I$ konverguje a platí $\sum_{\alpha\in S} x_\alpha = \sum_{I\in\mathcal{I}} y_I$.

Důkaz. Zvolme $I \in \mathcal{I}$. Podle Věty 3.7.11 je řada $\sum_{\alpha\in S} |x_\alpha|$ konvergentní. Pomocí (3.41) odhadneme

$$0 \le \sum_{\alpha\in I} |x_\alpha| \le \sum_{\alpha\in S} |x_\alpha| < \infty.$$

Odtud plyne, že i řada $\sum_{\alpha\in I} |x_\alpha|$ konverguje. Tedy dle Věty 3.7.11 řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ konverguje. Pro každé $I \in \mathcal{I}$ je tedy prvek y_I dobře definován jako prvek $\mathbb{R}$.

Označme $\sum_{\alpha \in S} x_\alpha = x$. Nyní dokážeme rovnost $\sum_{I \in \mathcal{I}} y_I = x$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K číslu $\frac{1}{2}\varepsilon$ nalezneme podle definice $F \in \mathcal{K}(S)$ takovou, že

$$\forall F' \in \mathcal{K}(I), F' \supset F : \Big| \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha - x \Big| < \tfrac{1}{2}\varepsilon. \tag{3.55}$$

Označme $\mathcal{G} = \{I \in \mathcal{I};\ F \cap I \neq \emptyset\}$. Množina $\mathcal{G}$ je konečná, neboť systém $\mathcal{I}$ je disjunktní a množina F je konečná. Nechť $\mathcal{G}' \in \mathcal{K}(\mathcal{I})$, $\mathcal{G}' \supset \mathcal{G}$. Počet prvků $\mathcal{G}'$ označme n. Pro každé $I \in \mathcal{G}'$ nalezneme $F_I \in \mathcal{K}(I)$ takovou, že

$$\forall F' \in \mathcal{K}(I), F' \supset F_I : \Big| \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha - y_I \Big| < \tfrac{1}{2n}\varepsilon. \tag{3.56}$$

Položme $F^* = F \cup \bigcup_{I \in \mathcal{G}'} F_I$. Množina F^* je konečná. Dále platí $F^* \subset \bigcup \mathcal{G}'$, neboť $F \subset \bigcup \mathcal{G} \subset \bigcup \mathcal{G}'$. Potom platí

$$\begin{aligned} \Big| \sum_{I \in \mathcal{G}'} y_I - x \Big| &\leq \Big| \sum_{I \in \mathcal{G}'} y_I - \sum_{\alpha \in F^*} x_\alpha \Big| + \Big| \sum_{\alpha \in F^*} x_\alpha - x \Big| \\ &= \Big| \sum_{I \in \mathcal{G}'} \Big(y_I - \sum_{\alpha \in F^* \cap I} x_\alpha \Big) \Big| + \Big| \sum_{\alpha \in F^*} x_\alpha - x \Big| \\ &\leq \sum_{I \in \mathcal{G}'} \Big| y_I - \sum_{\alpha \in F^* \cap I} x_\alpha \Big| + \Big| \sum_{\alpha \in F^*} x_\alpha - x \Big|. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Dále zřejmě platí $F \subset F^*$, a tedy podle (3.55)

$$\Big| \sum_{\alpha \in F^*} x_\alpha - x \Big| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Pro $I \in \mathcal{G}'$ platí $F_I \subset F^* \cap I$, a proto podle (3.56) platí

$$\Big| y_I - \sum_{\alpha \in F^* \cap I} x_\alpha \Big| < \tfrac{1}{2n}\varepsilon.$$

Z těchto dvou odhadů a z (3.57) pak plyne

$$\Big| \sum_{I \in \mathcal{G}'} y_I - x \Big| < n \cdot \tfrac{1}{2n}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon,$$

čímž je tvrzení dokázáno. ■

Je-li $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost, pak můžeme uvažovat jednak zobecněnou řadu $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ a také řadu $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Použité symboly odlišují zobecněnou řadu od řady. Následující věta ukazuje jejich vzájemný vztah.

3.7.18. Věta (zobecněný součet na $\mathbb{N}$)**.** Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost.

(a) Zobecněná řada $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ je konvergentní právě tehdy, když řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je absolutně konvergentní.

(b) Jestliže má zobecněná řada $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ součet, má ho i řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ a tyto součty se rovnají.

Důkaz. (a) $\Rightarrow$ Podle Věty 3.7.11 konverguje zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ absolutně. Podle Věty 3.7.9(a) to znamená, že

$$\sup\Big\{\sum_{n\in F} |x_n|;\ F \in \mathcal{K}(\mathbb{N})\Big\} < \infty,$$

tedy, dle definice suprema,

$$\sup\Big\{\sum_{n=1}^{m} |x_n|;\ m \in \mathbb{N}\Big\} < \infty.$$

Z poslední nerovnosti plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ je konvergentní, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je absolutně konvergentní.

$\Leftarrow$ Platí

$$\sup\Big\{\sum_{n=1}^{m} |x_n|;\ m \in \mathbb{N}\Big\} < \infty.$$

Nechť $F \in \mathcal{K}(\mathbb{N})$. Pak existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $F \subset \{1, \dots, m\}$, a proto platí $\sum_{n\in F} |x_n| \le \sum_{n=1}^{m} |x_n|$. Odtud plyne

$$\sup\Big\{\sum_{n\in F} |x_n|;\ F \in \mathcal{K}(\mathbb{N})\Big\} < \infty.$$

Podle Věty 3.7.9(a) je zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ absolutně konvergentní, a tedy konvergentní podle Věty 3.7.11.

(b) Označme $s = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$. Dokážeme rovnost $s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $F \in \mathcal{K}(\mathbb{N})$ takové, že platí

$$\forall F' \in \mathcal{K}(I), F' \supset F\colon \sum_{n\in F'} x_n \in B(s, \varepsilon). \tag{3.58}$$

Množina F je konečná, a proto můžeme nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$, které je horní závorou F. Zvolme $m \in \mathbb{N}, m \ge n_0$, a položme $F' = \{1, \dots, m\}$. Potom platí $F' \in \mathcal{K}(\mathbb{N})$ a $F \subset F'$. Podle (3.58) tedy máme

$$\sum_{n=1}^{m} x_n = \sum_{n\in F'} x_n \in B(s, \varepsilon).$$

Dostáváme tak $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s$. ■

3.7.19. Obrácená implikace v tvrzení Věty 3.7.18(b) neplatí, tj. řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ může konvergovat, ale zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ nemusí konvergovat. Stačí uvažovat libovolnou neabsolutně konvergentní řadu $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Ta nemůže mít zobecněný součet. Kdyby totiž $s = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$, pak i $s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ podle Věty 3.7.18(b). Pomocí Riemannovy věty (Věta 3.5.7) bychom nalezli bijekci $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takovou, že $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} \ne s$. Podle Věty 3.7.12 ale platí $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_{\pi(n)} = s$. Opět z Věty 3.7.18(b) máme $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = s$, což je spor.

3.7.20. Příklad. Dokažte, že zobecněná řada $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{n^2+m^2}$ má součet ∞.

Řešení. Protože naše řada sestává z nezáporných čísel, má součet. Pro přirozené číslo $j \in \mathbb{N}$ odhadneme částečný součet přes indexovou množinu

$$I_j = \{j+1, \dots, 2j\} \times \{j+1, \dots, 2j\},$$

tedy

$$\begin{aligned}\sum_{(n,m)\in I_j} \frac{1}{n^2+m^2} &= \sum_{m=j+1}^{2j} \sum_{n=j+1}^{2j} \frac{1}{n^2+m^2} \geq \sum_{m=j+1}^{2j} \sum_{n=j+1}^{2j} \frac{1}{8j^2} \\ &= j^2 \cdot \frac{1}{8j^2} = \frac{1}{8}.\end{aligned} \tag{3.59}$$

Množiny I_{2^j}, $j \in \mathbb{N}$, jsou po dvou disjunktní, a proto můžeme odhadnout

$$\begin{aligned}\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{n^2+m^2} &\geq \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{(n,m)\in\bigcup_{j=1}^{k} I_{2^j}} \frac{1}{n^2+m^2} && \text{(podle definice zobecněné řady)} \\ &= \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{k} \sum_{(n,m)\in I_{2^j}} \frac{1}{n^2+m^2} && (\text{disjunktnost } I_{2^j},\ j \in \mathbb{N}) \\ &\geq \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{8} = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{k}{8} = \infty. && \text{(podle (3.59))}\end{aligned}$$

♣

3.7.21. Příklad. Dokažte, že zobecněná řada $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{n^3+m^3}$ je konvergentní.

Řešení. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ položme

$$N_k = \big\{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ \max\{m,n\} = k\big\}.$$

Potom je počet prvků množiny N_k pro každé $k \in \mathbb{N}$ roven $2k-1$. Pro $k \in \mathbb{N}$ tedy odhadneme

$$\sum_{(n,m)\in N_k} \frac{1}{n^3+m^3} \leq \sum_{(n,m)\in N_k} \frac{1}{\max\{m,n\}^3} = \sum_{(n,m)\in N_k} \frac{1}{k^3} = \frac{2k-1}{k^3}. \tag{3.60}$$

Nechť $F \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je libovolná konečná množina. Nalezneme $p \in \mathbb{N}$ takové, že $F \subset \bigcup_{k=1}^{p} N_k$, a dostaneme

$$\begin{aligned}\sum_{(n,m)\in F} \frac{1}{n^3+m^3} &\leq \sum_{(n,m)\in\bigcup_{k=1}^{p} N_k} \frac{1}{n^3+m^3} \\ &= \sum_{k=1}^{p} \sum_{(n,m)\in N_k} \frac{1}{n^3+m^3} && (\text{disjunktnost } N_k, k \in \mathbb{N}) \\ &\leq \sum_{k=1}^{p} \frac{2k-1}{k^3} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{k^3}. && \text{(odhad (3.60))}\end{aligned}$$

Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{k^3}$ konverguje podle limitního srovnávacího kritéria (Věta 3.2.5(a)) srovnáním s konvergentní řadou $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Z (3.41) tedy máme

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{n^3+m^3} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{k^3} < \infty.$$

♣

3.7.22. Příklad. Nechť Q značí množinu všech racionálních čísel z intervalu $(0,1)$. Dokažte, že $\sum_{q\in Q} q = \infty$.

Řešení. Protože racionálních čísel větších než $\frac{1}{2}$ je nekonečně mnoho, je množina $\{q \in Q;\ q > \frac{1}{2}\}$ nekonečná, a tedy daná řada diverguje podle 3.7.14. Protože je tvořena kladnými čísly, platí $\sum_{q\in Q} q = \infty$ dle Věty 3.7.9(a). ♣

3.8. Teoretické příklady k číselným řadám

Řady s nezápornými členy.

3.8.1. Příklad (Raabeovo kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má kladné členy. Dokažte následující tvrzení.

(a) Nechť platí $\liminf n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) Nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že platí

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \ge n_0 \colon n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \le 1. \tag{3.61}$$

Potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

(c) Nechť platí $\limsup n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Řešení. (a) Zvolme $q \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo $1 < q < \liminf n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$. Potom s pomocí Věty 2.4.16(a) nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$, platí

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > q,$$

a tedy

$$na_n - (n+1)a_{n+1} \ge (q-1)a_{n+1}. \tag{3.62}$$

Proto pro každé $m \in \mathbb{N}$, $m \ge n_0$, platí

$$\begin{aligned} n_0 a_{n_0} &> n_0 a_{n_0} - (m+1)a_{m+1} && \text{(řada má kladné členy)} \\ &= \sum_{n=n_0}^{m} \big(na_n - (n+1)a_{n+1}\big) && \text{(teleskopická suma)} \\ &\ge (q-1) \sum_{n=n_0}^{m} a_{n+1}. && \text{(odhad (3.62))} \end{aligned}$$

Tedy pro každé $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$, platí

$$\sum_{n=n_0+1}^{m+1} a_n = \sum_{n=n_0}^{m} a_{n+1} \leq \frac{n_0 a_{n_0}}{q-1}.$$

Odtud snadno plyne, že posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je shora omezená, a tedy je tato řada konvergentní.

(b) Matematickou indukcí odvodíme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$a_n \geq \frac{n_0}{n} \cdot a_{n_0}. \tag{3.63}$$

Pro $n = n_0$ nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme platnost (3.63) pro jedno pevné $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$. Díky (3.61) platí první následující nerovnost a díky indukčnímu předpokladu druhá:

$$a_{n+1} \geq \frac{n}{n+1} \cdot a_n \geq \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n_0}{n} \cdot a_{n_0} = \frac{n_0}{n+1} \cdot a_{n_0}.$$

Tím je nerovnost podle principu matematické indukce dokázána.

Protože je řada $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{n_0}{n} a_{n_0}$ divergentní, ze srovnávacího kritéria (vizte Větu 3.2.2(b)) plyne, že řada $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ je divergentní, a tedy je divergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(c) Tvrzení plyne z již dokázaného tvrzení (b). ♣

3.8.2. Příklad. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s kladnými členy. Nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}. \tag{3.64}$$

(a) Předpokládejme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní. Dokažte, že pak je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
(b) Pomocí (a) dokažte d'Alambertovo kritérium 3.2.11(c),(d).

Řešení. (a) Matematickou indukcí odvodíme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$a_n \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_n. \tag{3.65}$$

Pro $n = n_0$ nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme platnost (3.65) pro jedno pevné $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$. Pomocí (3.64) a indukčního předpokladu obdržíme

$$a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot a_n \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \cdot a_n \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \cdot \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_n = \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n+1}.$$

Tím je nerovnost podle principu matematické indukce dokázána.

Konverguje-li tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} b_n$, a tedy podle Věty 3.2.2 i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Předpokládejme nyní, že $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Nalezneme $q \in (0,1)$ takové, že $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < q$. Díky Větě 2.2.42(a) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$. Pak máme $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{q^{n+1}}{q^n}$, přičemž řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konverguje (vizte Příklad 3.1.7). Podle tvrzení (a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Případ, kdy $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, lze dokázat analogicky. ♣

3.8.3. Příklad. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní řada s kladnými členy a $\{s_n\}$ je posloupnost jejích částečných součtů. Ukažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ diverguje.

Řešení. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ konverguje. Pak splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku podle Věty 3.1.13. Pro $\varepsilon = \frac{1}{2}$ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n_0 \leq n \leq m\colon \sum_{k=n}^{m} \frac{a_k}{s_k} < \tfrac{1}{2}. \tag{3.66}$$

Posloupnost $\{s_k\}$ je rostoucí a platí $\lim s_k = \infty$. Snadno tedy dostaneme $\lim_{k\to\infty} \frac{s_k - s_{n_0}}{s_k} = \lim_{k\to\infty}\bigl(1 - \frac{s_{n_0}}{s_k}\bigr) = 1$. Existuje tedy $m_0 \in \mathbb{N}$, $m_0 \geq n_0$, takové, že $\frac{s_{m_0} - s_{n_0}}{s_{m_0}} > \frac{1}{2}$. Potom platí

$$\sum_{k=n_0+1}^{m_0} \frac{a_k}{s_k} \geq \frac{1}{s_{m_0}} \sum_{k=n_0+1}^{m_0} a_k = \frac{s_{m_0} - s_{n_0}}{s_{m_0}} > \tfrac{1}{2},$$

což je ale spor s (3.66). ♣

3.8.4. Příklad. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní řada s kladnými členy. Dokažte, že existuje posloupnost $\{b_n\}$ taková, že $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ a $\lim \frac{b_n}{a_n} = 0$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ položíme $b_n = \frac{a_n}{s_n}$, kde s_n je n-tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje podle Příkladu 3.8.3. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje a má kladné členy, proto platí $\lim s_n = \infty$. Odtud dostáváme

$$\lim \frac{b_n}{a_n} = \lim \frac{1}{s_n} = 0.$$

♣

3.8.5. Příklad. Nechť $\{c_n\}$ je posloupnost splňující $\lim c_n = \infty$. Dokažte, že existuje konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ s kladnými členy taková, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n$ diverguje.

Řešení. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že všechny členy posloupnosti $\{c_n\}$ jsou větší než 1. Nalezneme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}$ splňující

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_k : c_n \geq k + 1.$$

Položme $n_0 = 0$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme jednoznačně určené $k \in \mathbb{N}$ takové, že $n_{k-1} < n \leq n_k$ a definujeme

$$b_n = \frac{1}{c_n} \cdot \frac{1}{k(n_k - n_{k-1})}.$$

Nechť $\{s_m\}$ je posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Pro $n \in \mathbb{N}$ splňující $n_{k-1} < n \leq n_k$ platí

$$b_n \leq \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k(n_k - n_{k-1})}.$$

Pak pro každé $l \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} s_{n_l} &= \sum_{n=1}^{n_l} b_n = \sum_{k=1}^{l} \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} b_n \leq \sum_{k=1}^{l} \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{k^2(n_k - n_{k-1})} \\ &= \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty. \end{aligned}$$

Posloupnost $\{s_{n_l}\}_{l=1}^{\infty}$ je omezená a posloupnost $\{s_m\}$ je rostoucí, a tedy je i posloupnost $\{s_m\}$ omezená. Odtud plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní. Dále platí pro každé $l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{n_l} c_n b_n &= \sum_{k=1}^{l} \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} c_n b_n \\ &= \sum_{k=1}^{l} \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{k(n_k - n_{k-1})} = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

Tím je tvrzení dokázáno. ♣

Následující příklad ukazuje, že limitní srovnávací kritérium pro konvergenci řad (Věta 3.2.5) neplatí bez předpokladu nezápornosti členů zadaných řad.

3.8.6. Příklad. Dokažte, že existuje konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a divergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ splňující $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad \text{a} \qquad b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje podle Leibnizova kritéria (Věta 3.3.1) a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje, neboť je součtem konvergentní řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a divergentní řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Dále platí

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1.$$

♣

3.8.7. Příklad. Dokažte, že platí $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme

$$a_n = \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n \qquad \text{a} \qquad s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Dokážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq s_n \leq e$. Protože $\lim a_n = e$ (Definice 2.4.6), dostaneme z věty o dvou strážnících (Věta 2.2.44) rovnost $\lim s_n = e$. Tím bude tvrzení dokázáno.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq s_n$. Pro $n = 1$ zřejmě platí $a_1 = s_1 = 2$. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Potom z binomické věty (Věta 1.5.6) plyne, že

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \frac{1}{k!} \\ &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \tfrac{j}{n}\right). \end{aligned}$$

Pro každé $k \in \{2, \dots, n\}$ zřejmě platí $\prod_{j=1}^{k-1}\left(1 - \frac{j}{n}\right) \leq 1$, a tedy

$$a_n \leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = s_n.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $s_n \leq e$. Posloupnost $\{s_n\}$ je zřejmě rostoucí, a proto stačí toto tvrzení dokázat pouze pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Potom pro každé $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$, platí

$$\begin{aligned} a_m &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{1}{m^k} \geq \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} \frac{1}{m^k} \\ &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \tfrac{j}{m}\right). \end{aligned}$$

Pro každé $k \in \{2, \dots, n\}$ zřejmě platí

$$\lim_{m \to \infty} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \tfrac{j}{m}\right) = 1.$$

Tedy z věty o aritmetice limit plyne, že

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} \frac{1}{m^k} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = s_n.$$

Odtud a z věty o limitě a uspořádání (Věta 2.2.42), že $e = \lim a_m \geq s_n$. ♣

3.8.8. Příklad. Dokažte, že e je iracionální číslo.

Řešení. Pro spor předpokládejme, že e je racionální, tedy $e = \frac{p}{q}$ pro nějaká $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Z Definice 2.4.6 plyne, že číslo e je kladné, a proto $p \in \mathbb{N}$. Pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ platí podle Příkladu 3.8.7

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} < e = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j!}.$$

Zřejmě dále platí

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j!} = \sum_{i=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{i} \frac{1}{k+j} \Big) < \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^i}.$$

Podle Příkladu 3.1.7 máme

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^i} = \frac{1}{k},$$

a tedy celkem dostáváme

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} < e < \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} + \frac{1}{k \cdot k!}.$$

Potom

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} < \frac{p}{q} < \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} + \frac{1}{k \cdot k!}.$$

Vynásobíme obě nerovnosti kladným výrazem $q \cdot k!$ a dostaneme

$$q \cdot k! \cdot \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} < p \cdot k! < q \cdot k! \cdot \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} + \frac{q}{k}.$$

Označme

$$m = q \cdot k! \cdot \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}.$$

Pak zřejmě platí $m \in \mathbb{N}$ a navíc

$$m < p \cdot k! < m + \frac{q}{k}.$$

Pro speciální volbu $k = q$ odtud dostáváme $p \cdot k! \in (m, m+1)$. To je ale spor, protože $m \in \mathbb{N}$ a $p \cdot k! \in \mathbb{N}$. ♣

Číselné rozvoje.

3.8.9. Příklad. Nechť $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$, a $\mathcal{S}(p)$ je množina všech posloupností $\{a_n\}$, které splňují

(a) $\forall n \in \mathbb{N} \colon a_n \in \{0, \dots, p-1\}$.

Nechť dále $\mathcal{I}(p)$ je množina všech posloupností, které splňují (a) a navíc podmínku

(b) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}, m \geq n \colon a_m \neq p-1$.

Definujme zobrazení $\varphi\colon \mathcal{S}(p) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\varphi(\{a_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}.$$

Dokažte, že zobrazení φ je dobře definované a jde o bijekci $\mathcal{I}(p)$ na $[0,1)$.

Řešení. Korektnost definice φ. Nechť $\{a_n\} \in \mathcal{S}(p)$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$0 \le \frac{a_n}{p^n} \le \frac{p-1}{p^n}.$$

Podle Příkladu 3.1.7 platí $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p-1}{p^n} = 1$, takže díky Větě 3.2.2(a) je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$ konvergentní. Díky podmínce (b) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_0} < p-1$. Potom platí

$$\begin{aligned} 0 \le \varphi(\{a_n\}) &= \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{a_{n_0}}{p^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n} \\ &< \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{p-1}{p^n} + \frac{p-1}{p^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{p-1}{p^n} = 1. \end{aligned}$$

Prostota $\varphi|_{\mathcal{I}(p)}$. Předpokládejme, že $\{a_n\}, \{b_n\} \in \mathcal{I}(p)$ a $\{a_n\} \neq \{b_n\}$. Existuje tedy $k \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $j \in \mathbb{N}, j < k$, platí $a_j = b_j$ a $a_k \neq b_k$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a_k < b_k$. Potom platí

$$\begin{aligned} \varphi(\{a_n\}) &< \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{a_k}{p^k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{p-1}{p^n} && \text{(odhad shora členů posloupnosti } \{a_n\}) \\ &= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{a_k}{p^k} + \frac{1}{p^k} && \text{(součet geometrické řady)} \\ &= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{b_n}{p^n} + \frac{a_k+1}{p^k} && \text{(využita definice čísla } k \text{ a algebraická úprava)} \\ &\le \sum_{n=1}^{k} \frac{b_n}{p^n} && \text{(použita nerovnost } a_k < b_k) \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{p^n} = \varphi(\{b_n\}). \end{aligned}$$

Zobrazení $\varphi|_{\mathcal{I}(p)}$ je na $[0,1)$. Nechť $x \in [0,1)$. Posloupnost $\{a_n\}$ splňující $\varphi(\{a_n\}) = x$ budeme pomocí funkce celá část konstruovat takto. Položíme $a_1 = [px]$. Máme-li $n \in \mathbb{N}, n > 1$, a čísla $a_1, \dots, a_{n-1}$ jsou již nalezena, definujme

$$a_n = \left[p^n x - \sum_{k=1}^{n-1} a_k p^{n-k} \right]$$

Tím je konstrukce $\{a_n\}$ provedena. Nyní je třeba ukázat, že $\{a_n\} \in \mathcal{I}(p)$.

Celé číslo a_1 splňuje $0 \le a_1 \le px < p$, a proto $a_1 \in \{0, \dots, p-1\}$. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom postupně dostáváme:

$$a_n \le p^n x - \sum_{k=1}^{n-1} a_k p^{n-k} < a_n + 1, \qquad \text{(definice } a_n \text{ a celé části)}$$

$$0 \le p^n x - \sum_{k=1}^{n-1} a_k p^{n-k} - a_n < 1, \qquad \text{(odečtení } a_n\text{)}$$

$$0 \le p^{n+1} x - \sum_{k=1}^{n} a_k p^{n+1-k} < p. \qquad \text{(algebraická úprava)} \tag{3.67}$$

Odtud plyne $0 \le a_{n+1} < p$, takže $a_{n+1} \in \{0, \dots, p-1\}$, neboť a_{n+1} je podle definice celé číslo. Tím jsme ověřili, že posloupnost $\{a_n\}$ splňuje podmínku (a).

Pro ověření podmínky (b) předpokládejme pro spor existenci $n_0 \in \mathbb{N}$ takového, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n > n_0$, platí $a_n = p-1$. Z (3.67) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$0 \le x - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{p^k} < \frac{1}{p^n}. \tag{3.68}$$

Pak pro každé $n \in \mathbb{N}, n \ge n_0$, máme

$$0 \le x - \sum_{k=1}^{n_0} \frac{a_k}{p^k} - \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{p-1}{p^k} < \frac{1}{p^n}.$$

Limitním přechodem odtud plyne

$$0 \le x - \sum_{k=1}^{n_0} \frac{a_k}{p^k} - \frac{1}{p^{n_0}} \le 0,$$

a tedy také

$$x - \sum_{k=1}^{n_0} \frac{a_k}{p^k} = \frac{1}{p^{n_0}},$$

což je ve sporu s (3.68) pro $n = n_0$.

Nyní s pomocí věty o dvou strážnících (Věta 2.2.42) a (3.68) máme

$$\varphi(\{a_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_k}{p^k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{p^k} = x.$$

Tedy $\varphi|_{\mathcal{I}(p)}$ je zobrazení na. ♣

3.8.10. (a) Nechť $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$. Pak p-**adickým rozvojem** budeme rozumět každou řadu tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$, kde $\{a_n\} \in \mathcal{S}(p)$. Podle Příkladu 3.8.9 lze každé číslo $x \in [0, 1)$ vyjádřit jako součet p-adického rozvoje $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$. Pokud budeme uvažovat pouze takové p-adické rozvoje, kde $\{a_n\} \in \mathcal{I}(p)$, pak je příslušný p-adický rozvoj určen jednoznačně.

(b) Pokud máme p-adický rozvoj $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$, kde $\{a_n\}$ nesplňuje podmínku (b) z Příkladu 3.8.9, pak existuje nejmenší $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n = p - 1$. Pokud $n_0 = 1$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p-1}{p^n} = 1.$$

Pokud $n_0 > 1$, pak $a_{n_0-1} < p - 1$. Potom platí $a_{n_0-1} + 1 \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n} &= \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{a_n}{p^n} + \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{p-1}{p^n} = \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{1}{p^{n_0-1}} \\ &= \sum_{n=1}^{n_0-2} \frac{a_n}{p^n} + \frac{a_{n_0-1}+1}{p^{n_0-1}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{0}{p^n}. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že ve druhém případě posloupnost $\{b_n\}$ definovaná předpisem

$$b_n = \begin{cases} a_n, & \text{pokud } n \in \mathbb{N}, n < n_0 - 1, \\ a_{n_0-1} + 1, & \text{pokud } n = n_0 - 1, \\ 0, & \text{pokud } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, \end{cases}$$

určuje jiný p-adický rozvoj než $\{a_n\}$, neboť se liší od $\{a_n\}$, nicméně součet mají oba p-adické rozvoje stejný. Při práci s p-adickými rozvoji je často třeba brát tuto nejednoznačnost v potaz.

3.8.11. (desetinné rozvoje) Nejdůležitejší typem p-adického rozvoje je případ, kdy $p = 10$, neboť většinu výpočtů provádíme v desítkové soustavě. Každé reálné číslo můžeme zapsat jako součet celého čísla a reálného čísla z intervalu $[0, 1)$, pro každé $x \in \mathbb{R}$ totiž platí $x = [x] + (x - [x])$. Každé nezáporné celé číslo n lze jednoznačně zapsat ve tvaru

$$n = \sum_{n=0}^{k} a_n \cdot 10^n,$$

kde $k \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_k \in \{0, \dots, 9\}$. Každé nezáporné reálné číslo pak můžeme zapsat ve tvaru $a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0, b_1 b_2 b_2 \dots$.

3.8.12. Příklad. Nechť $p \in \mathbb{N}, p > 1$. Pak p-adický rozvoj $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$ nazýváme **periodický**, pokud existují $k, r \in \mathbb{N}$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq k$, platí $a_{n+r} = a_n$. Ukažte, že p-adický rozvoj $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$ má racionální součet právě tehdy, když je periodický.

Řešení. $\Leftarrow$ Nechť $k, r \in \mathbb{N}$ svědčí o periodičnosti p-adického rozvoje $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$, neboli platí

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq k : a_n = a_{n+r}.$$

Odtud snadno plyne

$$\forall j \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq k : a_n = a_{n+(j-1)r}. \tag{3.69}$$

Pro $m \in \mathbb{N}$ označme m-tý částečný součet našeho rozvoje jako s_m. Pro každé $l \in \mathbb{N}$ platí

$$s_{k+lr} = \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{p^n} + \sum_{j=1}^{l} \sum_{n=k+(j-1)r+1}^{k+jr} \frac{a_n}{p^n} \tag{3.70}$$

Pokud $n \in \mathbb{N}$ splňuje

$$k + (j-1)r + 1 \leq n \leq k + jr,$$

kde $j \in \mathbb{N}$, pak můžeme psát $n = k + (j-1)r + u$ pro $u \in \{1, 2, \ldots, r\}$ a díky (3.69) platí $a_n = a_{k+u}$. Toto pozorování nám umožňuje přepsat rovnost (3.70) následujícím způsobem

$$s_{k+lr} = \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{p^n} + \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{p^{k+(j-1)r}} \sum_{u=1}^{r} \frac{a_{k+u}}{p^u}.$$

Označme $\alpha = \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{p^n}$ a $\beta = \sum_{u=1}^{r} \frac{a_{k+u}}{p^u}$. Obě čísla α, β jsou zřejmě racionální. Potom platí

$$\begin{aligned}
\lim_{l\to\infty} s_{k+lr} &= \lim_{l\to\infty} \Big(\alpha + \frac{\beta}{p^k} \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{(p^r)^{j-1}} \Big) \\
&= \alpha + \frac{\beta}{p^k} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(p^r)^{j-1}} \\
&= \alpha + \frac{\beta}{p^k} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^r}},
\end{aligned}$$

což je racionální číslo. Odtud plyne, že součet našeho rozvoje je racionální, neboť $\lim_{m\to\infty} s_m = \lim_{l\to\infty} s_{k+lr}$.

$\Rightarrow$ Nechť nyní p-adický rozvoj $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$ má racionální součet $x \in [0, 1]$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x \in (0, 1)$. Potom existují $u, v \in \mathbb{N}$, $u < v$, splňující $x = \frac{u}{v}$, Pokud $\{a_n\} \in \mathcal{S}(p) \setminus \mathcal{I}(p)$, pak je uvažovaný rozvoj zřejmě periodický. Předpokládejme tedy, že $\{a_n\} \in \mathcal{I}(p)$. Pro $k \in \mathbb{N}$ označme $s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{p^n}$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$0 \leq x - s_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n} < \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{p-1}{p^n} = \frac{1}{p^k},$$

a tedy

$$0 \leq p^k (x - s_k) < 1. \tag{3.71}$$

Platí

$$p^k s_k = p^k \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{p^n} = \sum_{n=1}^{k} a_n p^{k-n},$$

takže $p^k s_k \in \mathbb{N}$. Dále máme

$$p^k (x - s_k) = p^k \frac{u}{v} - p^k s_k. \tag{3.72}$$

Odtud plyne, že existuje $c_k \in \mathbb{Z}$ takové, že $p^k(x - s_k) = \frac{c_k}{v}$. S pomocí (3.71) pro každé $k \in \mathbb{N}$ dostáváme $c_k \in \{0, \dots, v-1\}$. Musí tedy existovat $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, $k_1 < k_2$ takové, že $c_{k_1} = c_{k_2}$. Položme $r = k_2 - k_1$, pak $c_{k_2} = c_{k_1+r}$ a platí

$$\frac{c_{k_1}}{v} = p^{k_1}(x - s_{k_1}) = \sum_{n=k_1+1}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n-k_1}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{j+k_1}}{p^j},$$

$$\frac{c_{k_1+r}}{v} = \frac{c_{k_2}}{v} = p^{k_1+r}(x - s_{k_1+r}) = \sum_{n=k_1+r+1}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n-k_1-r}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{j+k_1+r}}{p^j}.$$

Posloupnosti $\{a_{j+k_1}\}_{j=1}^{\infty}$, $\{a_{j+k_1+r}\}_{j=1}^{\infty}$ patří do $\mathcal{I}(p)$ a obě definují p-adický rozvoj se součtem $\frac{c_{k_1}}{v}$. Podle Příkladu 3.8.9 se uvedené posloupnosti musí rovnat. Proto pro $n > k_1$ platí $a_n = a_{n+r}$, takže uvažovaný rozvoj je periodický. ♣

Řady s obecnými členy.

3.8.13. Příklad. Nechť $\{a_j\}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných reálných čísel a $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí

$$0 \le \sum_{i=0}^{k} (-1)^i a_{n+i} \le a_n.$$

Řešení. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je dáno. Indukcí podle k dokážeme, že pro každou nerostoucí posloupnost nezáporných čísel $\{a_j\}$ platí uvedená nerovnost. Pro $k = 0$ zřejmě platí $\sum_{i=0}^{0} (-1)^i a_{n+i} = a_n$, a tedy

$$0 \le \sum_{i=0}^{0} (-1)^i a_{n+i} \le a_n.$$

Předpokládejme nyní, že uvedené tvrzení platí pro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Naším cílem je dokázat nerovnost pro $k+1$, tj. chceme ověřit nerovnosti

$$0 \le \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i a_{n+i} \le a_n. \tag{3.73}$$

Posloupnost $\{a_{i+1}\}_{i=0}^{\infty}$ má nezáporné členy a je nerostoucí. Proto podle indukčního předpokladu platí

$$0 \le \sum_{i=0}^{k} (-1)^i a_{n+1+i} \le a_{n+1}. \tag{3.74}$$

Potom díky (3.74) dostáváme

$$\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i a_{n+i} = a_n - \sum_{i=0}^{k}(-1)^i a_{n+1+i} \begin{cases} \geq a_n - a_{n+1} \geq 0 \\ \leq a_n \end{cases}, \tag{3.75}$$

čímž je podle principu matematické indukce tvrzení dokázáno. ♣

3.8.14 (alternativní důkaz Věty 3.3.1)**.** Konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ ověříme pomocí Bolzanovy–Cauchyovy podmínky pro řady, tedy ověříme platnost podmínky (3.1). Předpokládejme nejprve, že posloupnost $\{a_n\}$ je nerostoucí. Členy této posloupnosti jsou pak nutně nezáporné. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n < \varepsilon. \tag{3.76}$$

Vezměme nyní libovolná čísla $n, m \in \mathbb{N}$ splňující $n_0 \leq n \leq m$. Pak z Příkladu 3.8.13 a (3.76) plyne

$$\left|\sum_{i=n}^{m}(-1)^i a_i\right| = \left|\sum_{i=0}^{m-n}(-1)^i a_{n+i}\right| = \sum_{i=0}^{m-n}(-1)^i a_{n+i} \leq a_n < \varepsilon.$$

Tím je ověřena platnost Bolzanovy–Cauchyovy podmínky pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

Je-li posloupnost $\{a_n\}$ neklesající, pak lze důkaz dokončit stejně jako v původním důkazu Věty 3.3.1.

3.8.15. Příklad. Nechť řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mají omezené posloupnosti částečných součtů a $c \in \mathbb{R}$. Dokažte následující tvrzení.

(a) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ má omezenou posloupnost částečných součtů.
(b) Řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ má omezenou posloupnost částečných součtů.

Řešení. Označme postupně $\{s_m\}$ a $\{t_m\}$ posloupnosti částečných součtů řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Podle předpokladu existuje $M \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí $|s_m| \leq M$ a $|t_m| \leq M$.

(a) Pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí

$$\left|\sum_{n=1}^{m} ca_n\right| = |cs_m| \leq |c|M.$$

Tím je omezenost posloupnosti částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ dokázána.

(b) Pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí

$$\left|\sum_{n=1}^{m}(a_n + b_n)\right| \leq |s_m| + |t_m| \leq 2M,$$

čímž je tvrzení dokázáno. ♣

3.8.16. Příklad. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní řada a $\{n_k\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel splňující $n_1 = 1$. Položme $b_k = \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} a_j$, $k \in \mathbb{N}$. Dokažte, že $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Řešení. Nechť $\{s_m\}$ a $\{t_m\}$ jsou posloupnosti částečných součtů pro řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} t_m &= \sum_{k=1}^{m} b_k = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} a_j \\ &= \sum_{j=1}^{n_{m+1}-1} a_j = s_{n_{m+1}-1}. \end{aligned} \tag{3.77}$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, a proto je limita $\lim_{j\to\infty} s_j$ vlastní. Z Věty 2.2.30 a (3.77) pak dostáváme $\lim_{m\to\infty} t_m = \lim_{m\to\infty} s_{n_{m+1}-1} = \lim_{j\to\infty} s_j$. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ tedy konverguje. ♣

3.8.17. Příklad. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy a $\{n_k\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel splňující $n_1 = 1$. Pro $k \in \mathbb{N}$ položme $b_k = \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} a_j$. Dokažte, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje.

Řešení. Použijeme stejné označení jako v Příkladu 3.8.16.

$\Rightarrow$ Tato implikace plyne z Příkladu 3.8.16.

$\Leftarrow$ Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má nezáporné členy, a proto $\lim_{m\to\infty} s_m$ existuje podle Věty 3.2.1. Podle předpokladu je $\lim_{m\to\infty} t_m$ vlastní a z (3.77) plyne $\lim_{m\to\infty} s_{n_{m+1}-1} = \lim_{m\to\infty} t_m$. Posloupnost $\{s_m\}$ má tedy konvergentní podposloupnost $\{s_{n_{m+1}-1}\}$. Proto je sama konvergentní dle Věty 2.3.21 a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. ♣

3.8.18. Příklad. Nalezněte divergentní řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}$ splňující $n_1 = 1$ takové, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, kde $b_k = \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} a_j$, $k \in \mathbb{N}$, konverguje.

Řešení. Položme $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, a $n_k = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$. Pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $b_k = a_{2k-1} + a_{2k} = 0$. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ tedy konverguje, zatímco řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje (například díky Větě 3.1.11). ♣

Nekonečné součiny.

3.8.19. Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Řekneme, že **součin** $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje** (je **konvergentní**), je-li $\lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} a_n$ vlastní. Řekneme, že **součin** $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ (je **divergentní**), jestliže $\lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} a_n$ neexistuje nebo je nevlastní. Pokud existuje $\lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} a_n$, pak symbol $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ označuje také její hodnotu.

3.8.20. Příklad. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost s kladnými členy. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ konverguje.

Řešení. $\Leftarrow$ Posloupnost $\left\{\prod_{n=1}^{m}(1 + a_n)\right\}_{m=1}^{\infty}$ je rostoucí a pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n) \geq \prod_{n=1}^{m}(1 + a_n) \geq 1 + \sum_{n=1}^{m} a_n \geq \sum_{n=1}^{m} a_n.$$

Odtud již plyne konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$\Rightarrow$ Posloupnost $\{\prod_{n=1}^{m}(1 + a_n)\}_{m=1}^{\infty}$ je rostoucí, a proto má limitu. Díky nerovnosti $\log(1 + x) \leq x$ (vizte 1.7.14) platné pro každé $x \in (0, \infty)$ dostaneme pro každé $m \in \mathbb{N}$

$$\log\Bigl(\prod_{n=1}^{m}(1 + a_n)\Bigr) = \sum_{n=1}^{m}\log(1 + a_n) \leq \sum_{n=1}^{m} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Odtud plyne

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n) \leq \exp\Bigl(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Bigr) < \infty,$$

a nekonečný součin tedy konverguje. ♣

3.8.21. Příklad. Ukažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$, kde p_n značí n-té prvočíslo, diverguje.

Řešení. Pro spor předpokládejme, že naše řada je konvergentní. Potom je konvergentní také řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{p_n}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $p_n \geq 2$, a proto díky součtu geometrické řady dostaneme

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Bigl(\frac{1}{p_n}\Bigr)^k = \frac{1}{p_n}\frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} \leq \frac{2}{p_n}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\Bigl(\sum_{k=1}^{\infty}\bigl(\frac{1}{p_n}\bigr)^k\Bigr)$ je tedy konvergentní. Podle předchozího příkladu pak konverguje nekonečný součin

$$\prod_{n=1}^{\infty}\Bigl(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\Bigl(\frac{1}{p_n}\Bigr)^k\Bigr) = \prod_{n=1}^{\infty}\Bigl(\sum_{k=0}^{\infty}\Bigl(\frac{1}{p_n}\Bigr)^k\Bigr).$$

Zvolme $m \in \mathbb{N}$ libovolné. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že prvočíselný rozklad každého $l \in \mathbb{N}, l \leq m$, obsahuje pouze prvočísla menší než n_0 a v mocnině nejvýše n_0 (vizte 1.2.14). Pak platí

$$\prod_{n=1}^{\infty}\Bigl(\sum_{k=0}^{\infty}\Bigl(\frac{1}{p_n}\Bigr)^k\Bigr) \geq \prod_{n=1}^{n_0}\Bigl(\sum_{k=0}^{n_0}\Bigl(\frac{1}{p_n}\Bigr)^k\Bigr) \geq \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j}.$$

Harmonická řada však diverguje, a proto musí nekonečný součin $\prod_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\bigl(\frac{1}{p_n}\bigr)^k$ též divergovat, což je spor. ♣

Miscelanea.

3.8.22. Příklad. Dokažte, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí nerovnosti

$$\tfrac{1}{k+1} \leq \log\bigl(1 + \tfrac{1}{k}\bigr) \leq \tfrac{1}{k}. \tag{3.78}$$

Řešení. Nechť $k \in \mathbb{N}$. Podle 1.7.14 platí pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$, nerovnost $\log(1+x) \leq x$. Dosadíme $x = \frac{1}{k}$ a dostaneme ihned druhou nerovnost v (3.78). Dále položíme $x = -\frac{1}{k+1}$, pak $x > -1$, a tedy platí

$$\log\left(1 - \tfrac{1}{k+1}\right) \leq -\tfrac{1}{k+1},$$

to jest

$$-\log\left(1 - \tfrac{1}{k+1}\right) \geq \tfrac{1}{k+1}.$$

Odtud a z vlastností logaritmu (1.7.14) dostáváme

$$\log\left(1 + \tfrac{1}{k}\right) = \log\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{k+1}}\right) = -\log\left(1 - \tfrac{1}{k+1}\right) \geq \tfrac{1}{k+1},$$

což je první nerovnost v (3.78). ♣

3.8.23. Příklad. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnosti

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leq \log(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Řešení. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Sečtením nerovností v (3.78) pro hodnoty $k \in \{1, \ldots, n\}$ dostaneme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \log\left(1 + \tfrac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Pomocí vlastností logaritmické funkce a úpravou teleskopické sumy (vizte 1.7.14 a 1.5.5) dostáváme

$$\sum_{k=1}^{n} \log\left(1 + \tfrac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \bigl(\log(k+1) - \log k\bigr) = \log(n+1).$$

Odtud vyplývají obě dokazované nerovnosti. ♣

3.8.24. Příklad. Dokažte, že posloupnost $\{a_n\}$ definovaná předpisem

$$a_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \log n, \quad n \in \mathbb{N},$$

je konvergentní.

Řešení. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \log(n+1) + \log n = \frac{1}{n+1} - \log\left(1 + \tfrac{1}{n}\right) \leq 0$$

podle první nerovnosti v (3.78). Posloupnost $\{a_n\}$ je tedy nerostoucí. Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí podle Příkladu 3.8.23

$$a_n \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n+1) \geq 0,$$

takže posloupnost $\{a_n\}$ je zdola omezená. Z Důsledku 2.4.2 tedy plyne, že posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní. ♣

3.8.25. Poznámka. Označíme

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) - \log n\right).$$

Z Příkladu 3.8.24 vyplývá, že toto číslo je dobře definováno. Číslo γ nazýváme **Eulerovou-Mascheroniho konstantou**.[7] Tato konstanta je přibližně rovna $0,577$ a není známo, zda je racionální.

3.8.26. Příklad. Spočtěte limitu $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$a_n = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) - \log n \qquad \text{a} \qquad b_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$b_n = a_{2n} - a_n + \log(2n) - \log n,$$

a tedy podle věty o limitě součtu (Věta 2.2.34(a)) platí

$$\begin{aligned}\lim b_n &= \lim(a_{2n} - a_n + \log(2n) - \log n)\\ &= \lim\bigl(a_{2n} - a_n + \log\bigl(\tfrac{2n}{n}\bigr)\bigr) = \gamma - \gamma + \log 2\\ &= \log 2.\end{aligned}$$

♣

3.8.27. Příklad. Dokažte, že platí $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx \mathbb{R}$ (vizte 1.3.3 a 1.6.1(a)).

Řešení. Podle Cantorovy–Bernsteinovy věty (Věta 1.6.5) stačí dokázat, že $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \preceq \mathbb{R}$ a $\mathbb{R} \preceq \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Platnost $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \preceq \mathbb{R}$. Označme $\mathcal{Z}$ množinu všech posloupností, jejichž členy jsou prvky množiny $\{0,1\}$. Symbol χ_A bude značit charakteristickou funkci množiny A definovanou na $\mathbb{N}$ (vizte 1.4.21). Charakteristická funkce χ_A je tedy zobrazení z množiny $\mathbb{N}$, a proto jde o posloupnost, která patří do $\mathcal{Z}$ (vizte 1.4.30). Definujme zobrazení $\Phi\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{Z}$ předpisem

$$\Phi(A) = \chi_A, \quad A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Pokud $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ a $\chi_A = \chi_B$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\chi_A(n) = \chi_B(n)$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tedy platí, že $n \in A$ právě tehdy, když $n \in B$, neboli $A = B$. Zobrazení Φ je tedy prosté. (Není těžké si rozmyslet, že Φ je i zobrazení na $\mathcal{Z}$.) Platí tedy $\mathcal{Z} \preceq \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

[7] Lorenzo Mascheroni (1750–1800)

Pro $z \in \mathcal{Z}$ definujme $\varphi\colon \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z(n)}{3^n}, \quad z \in \mathcal{Z}.$$

Každému $z \in \mathcal{Z}$ je tedy přiřazen 3-adický rozvoj, a protože $\mathcal{Z} \subset \mathcal{I}(3)$ je podle Příkladu 3.8.9 zobrazení φ prosté. Tedy $\mathcal{Z} \preceq \mathbb{R}$. Podle Věty 1.6.3(b) dostáváme $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \preceq \mathbb{R}$.

Platnost $\mathbb{R} \preceq \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Podle Příkladu 1.6.23 platí $\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$, a tedy podle Příkladu 1.8.22 stačí ověřit, že platí $\mathbb{R} \preceq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Definujme zobrazení $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ předpisem

$$\psi(x) = \{q \in \mathbb{Q};\ q < x\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dokážeme, že zobrazení ψ je prosté. Předpokládejme, že $x, y \in \mathbb{R}$, přičemž $x \neq y$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x < y$. Podle Věty 1.5.34 existuje racionální číslo r splňující $x < r < y$. To znamená, že $r \in \psi(y) \setminus \psi(x)$, a tedy $\psi(x) \neq \psi(y)$. Odtud plyne, že ψ je prosté, a tudíž $\mathbb{R} \preceq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. ♣

3.8.28. Příklad. Dokažte, že množina $\mathbb{R}$ je nespočetná.

Řešení. Pro spor předpokládejme $\mathbb{R} \preceq \mathbb{N}$. Podle Příkladu 3.8.27 a Věty 1.6.3 pak máme $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \preceq \mathbb{N}$, což je ve sporu s Cantorovou větou (Věta 1.6.7), ze které plyne $\mathbb{N} \prec \mathcal{P}(\mathbb{N})$. ♣

3.8.29. Příklad. Dokažte, že platí $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{R}$.

Řešení. Tvrzení dokážeme pomocí Cantorovy–Bernsteinovy věty (Věta 1.6.5).

Platnost $\mathbb{R} \preceq \mathbb{R}^2$. Definujme zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ předpisem $\varphi(x) = [x, 0]$. Potom je φ zřejmě prosté. Odtud plyne, že $\mathbb{R} \preceq \mathbb{R}^2$.

Platnost $\mathbb{R}^2 \preceq \mathbb{R}$. Nyní definujme zobrazení $\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{Q}^2)$ předpisem

$$\psi(x, y) = \big\{[p, q] \in \mathbb{Q}^2;\ (p < x) \wedge (q < y)\big\}, \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2.$$

Nechť $[x, y], [x', y'] \in \mathbb{R}^2$, $[x, y] \neq [x', y']$. Pak platí buď $x \neq x'$ nebo $y \neq y'$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x \neq x'$, a dále že $x < x'$. Podle Věty 1.5.34 nalezneme racionální číslo r splňující $x < r < x'$. Dále zvolme $q \in \mathbb{Q}$, $q < y'$. Potom platí $[r, q] \in \psi(x', y') \setminus \psi(x, y)$, takže $\psi(x, y) \neq \psi(x', y')$. Odtud plyne, že ψ je prosté. Platí tedy $\mathbb{R}^2 \preceq \mathcal{P}(\mathbb{Q}^2)$.

Podle Věty 1.6.21(c) a Příkladu 1.6.23 platí $\mathbb{Q}^2 \approx \mathbb{N}$, a díky Příkladu 1.8.22 máme $\mathcal{P}(\mathbb{Q}^2) \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Odtud a z Vět 1.6.4, 3.8.27 plyne $\mathcal{P}(\mathbb{Q}^2) \approx \mathbb{R}$. Díky Větě 1.6.3 dostáváme $\mathbb{R} \prec \mathbb{R}^2$. ♣

3.8.30. Příklad. Nechť jsou posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ definovány předpisy:

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{pro } n = 1, \\ 2^{n-1} & \text{pro } n \in \mathbb{N}, n > 1, \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} -1 & \text{pro } n = 1, \\ 1 & \text{pro } n \in \mathbb{N}, n > 1, \end{cases}$$

Dokažte, že Cauchyův součin divergentních řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní.

Řešení. Označme $\{c_n\}$ posloupnost členů Cauchyova součinu obou řad. Potom platí $c_1 = -2$ a pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, máme

$$\begin{aligned} c_k &= a_1 b_k + \cdots + a_k b_1 = a_1 + \cdots + a_{k-1} - a_k \\ &= 2 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{k-2} - 2^{k-1} = 0. \end{aligned}$$

Odtud vyplývá tvrzení. ♣

3.8.31. Příklad. Nechť Q značí množinu racionálních čísel v intervalu $(0, 1)$. Dokažte, že existují bijekce π a σ množiny $\mathbb{N}$ na Q takové, že $\sum_{n\in\mathbb{N}} \pi(n)^n$ konverguje a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma(n)^n$ diverguje.

Řešení. Konstrukce π. Nalezneme rostoucí posloupnost $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ reálných čísel z intervalu $[0, 1)$ splňující $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{1}{2}$ a $\lim a_k = 1$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ nalezneme $n_k \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\frac{a_{k+1}^{n_k}}{1 - a_{k+1}} < 2^{-(k+1)}.$$

Položíme $n_0 = 0$. Dále nalezneme posloupnost nekonečných množin $\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$, které splňují

- $P_k \subset \{n \in \mathbb{N};\ n \geq n_k\}$,
- $\forall k, l \in \mathbb{N}, k \neq l \colon P_k \cap P_l = \emptyset$,
- $\bigcup_{k=0}^{\infty} P_k = \mathbb{N}$.

Pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ nalezneme bijekci π_k množiny P_k na množinu $A_k = (a_k, a_{k+1}] \cap Q$. Hledanou bijekci pak definujeme jako $\pi(n) = \pi_k(n)$ pro $n \in P_k$. Odhadneme

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{N}} \pi(n)^n &= \sum_{q\in Q} q^{\pi^{-1}(q)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{q\in A_k} q^{\pi^{-1}(q)} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{k+1}^{n_k+l} \leq \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k+1}^{n_k}}{1 - a_{k+1}} \leq 2 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 3. \end{aligned}$$

Konstrukce σ. Nalezneme rostoucí posloupnost $\{q_k\}$ prvků Q splňující $q_k^{2k} > \frac{1}{2}$. Označme $T = \{q_k;\ k \in \mathbb{N}\}$. Množina T je nekonečná a spočetná. Nalezneme bijekci τ množiny lichých přirozených čísel na množinu $Q \setminus T$. Potom definujeme bijekci $\sigma \colon \mathbb{N} \to Q$ předpisem $\sigma(2k) = q_k$ a $\sigma(2k-1) = \tau(2k-1)$, $k \in \mathbb{N}$. Pro $m \in \mathbb{N}$ odhadneme

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma(n)^n > \sum_{k=1}^{m} q_k^{2k} > \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2} = \frac{m}{2}.$$

Odtud plyne $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma(n)^n = \infty$. ♣

3.9. Početní příklady k číselným řadám

Řady s nezápornými členy.

3.9.1. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^n+3}{(n^4+1)^6}$.

Řešení. Řada má kladné členy. Spočteme $\lim \sqrt[n]{\frac{n^2 2^n+3}{(n^4+1)^6}}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí

$$2\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \leq \sqrt[n]{n^2 2^n + 3} \leq \sqrt[n]{2 \cdot 2^n n^2} = 2\sqrt[n]{2}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2$$

a

$$\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{n^{24}} \leq \sqrt[n]{(n^4+1)^6} \leq \sqrt[n]{2^6 n^{24}} = \sqrt[n]{2^6}\left(\sqrt[n]{n}\right)^{24}.$$

Odtud vyplývá, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí

$$\frac{2}{\sqrt[n]{2^6}\left(\sqrt[n]{n}\right)^{22}} = \frac{2\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{\sqrt[n]{2^6}\left(\sqrt[n]{n}\right)^{24}} \leq \sqrt[n]{\frac{n^2 2^n + 3}{(n^4+1)^6}} \leq \frac{2\sqrt[n]{2}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{\sqrt[n]{n}} = 2\sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n}.$$

Podle věty o dvou strážnících, Příkladů 2.2.47 a 2.2.48 a věty o aritmetice limit tedy platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2 2^n + 3}{(n^4+1)^6}} = 2.$$

Protože $2 > 1$, zadaná řada diverguje podle Cauchyova odmocninového kritéria. ♣

3.9.2. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$.

Řešení. Řada má kladné členy. Pro velké hodnoty $n \in \mathbb{N}$ je ve výrazu $n^3 + 1$ člen 1 zanedbatelný, a proto můžeme očekávat, že se zadaná řada bude chovat podobně jako řada s členy $\frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $a_n = \frac{n^2}{n^3+1}$ a $b_n = \frac{1}{n}$. Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^3+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^3}} = 1.$$

Podle limitního srovnávacího kritéria (Věta 3.2.5) tedy dostáváme, že zadaná řada konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Tato řada diverguje podle Příkladu 3.1.15, a tedy diverguje i zadaná řada. ♣

3.9.3. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

Řešení. Pomocí Příkladu 2.2.48 dostaneme

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{1}{2} \lim \sqrt[n]{n} \cdot \lim \sqrt[n]{n} = \frac{1}{2}.$$

Protože $\frac{1}{2} < 1$, Zadaná řada konverguje podle Cauchyova odmocninového kritéria (Věta 3.2.8). ♣

3.9.4. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\big(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\big)$ v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$.

Řešení. Řada má kladné členy pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$n^{\alpha}\big(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\big) = \frac{n^{\alpha}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$a_n = \frac{n^{\alpha}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}, \qquad b_n = \frac{n^{\alpha}}{\sqrt{n}} = n^{\alpha-\frac{1}{2}}.$$

Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^{\alpha}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}{\frac{n^{\alpha}}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}.$$

Podle limitního srovnávacího kritéria zadaná řada konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-\frac{1}{2}}$. Ta podle Věty 3.2.18 konverguje právě tehdy, když $\alpha - \frac{1}{2} < -1$, neboli právě tehdy, když $\alpha < -\frac{1}{2}$. ♣

3.9.5. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log^2 n}$.

Řešení. Posloupnost $\{\frac{1}{n\log^2 n}\}_{n=2}^{\infty}$ je klesající a má kladné členy. Podle kondenzačního kritéria zadaná řada konverguje právě tehdy, když konverguje řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k \log^2(2^k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \log^2 2}.$$

Tato řada konverguje podle Příkladu 3.2.3 a linearity konvergentních řad (Důsledek 3.1.19). Zadaná řada je tedy konvergentní. ♣

3.9.6. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\log^2 n}$.

Řešení. Výraz $\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\log^2 n}$ je dobře definován a je kladný pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Pro tato n označme $a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\log^2 n}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí

$$a_n = \frac{1}{\big(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2}\big)\log^2 n}.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, položme $b_n = \frac{1}{n\log^2 n}$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{1}{2}.$$

Podle Příkladu 3.9.5 řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log^2 n}$ konverguje. Tedy podle limitního srovnávacího kritéria konverguje i zadaná řada. ♣

3.9.7. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.

Řešení. Řada má kladné členy. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $a_n = \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}}.$$

Podle Příkladu 2.5.3 platí $\lim \frac{n}{2^n} = 0$. Tedy

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^n}\right)^2 = 0.$$

Protože $0 < 1$, zadaná řada konverguje podle d'Alembertova podílového kritéria. ♣

3.9.8. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^n$.

Řešení. Obor hodnot funkce kosinus je interval $[-1, 1]$ a pro všechna $t \in [-1, 1]$ platí

$$0 \le \frac{1+t}{2+t} = 1 - \frac{1}{2+t} \le 1 - \frac{1}{2+1} = \frac{2}{3}.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tedy platí

$$0 \le \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^n \le \left(\tfrac{2}{3}\right)^n.$$

Podle Příkladu 3.1.7 řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ konverguje. Podle srovnávacího kritéria tudíž konverguje i zadaná řada. ♣

3.9.9. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}\right)$.

Řešení. Řada má zřejmě kladné členy. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $a_n = \sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}$. Podle Příkladu 1.5.7 pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}
a_n &= \sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1} \\
&= \left(\sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}\right) \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{n^2+5}\right)^2 + \sqrt[3]{n^2+5} \cdot \sqrt[3]{n^2+1} + \left(\sqrt[3]{n^2+1}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{n^2+5}\right)^2 + \sqrt[3]{n^2+5} \cdot \sqrt[3]{n^2+1} + \left(\sqrt[3]{n^2+1}\right)^2} \\
&= \frac{(n^2+5) - (n^2+1)}{\left(\sqrt[3]{n^2+5}\right)^2 + \sqrt[3]{n^2+5} \cdot \sqrt[3]{n^2+1} + \left(\sqrt[3]{n^2+1}\right)^2} \\
&= \frac{4}{\left(\sqrt[3]{n^2+5}\right)^2 + \sqrt[3]{n^2+5} \cdot \sqrt[3]{n^2+1} + \left(\sqrt[3]{n^2+1}\right)^2}.
\end{aligned}$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $b_n = n^{-\frac{4}{3}}$. Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{5}{n^2}\right)^2} + \sqrt[3]{1+\frac{5}{n^2}} \cdot \sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}} + \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^2}} = \frac{4}{3}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{4}{3}}$ konverguje podle Věty 3.2.18, a proto konverguje i zadaná řada podle limitního srovnávacího kritéria. ♣

3.9.10. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}}$.

Řešení. Řada má zřejmě kladné členy. Podle Příkladu 2.5.3 platí $\lim_{k\to\infty} \frac{k^6}{e^k} = 0$. Existuje tedy $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí $\frac{k^6}{e^k} \leq 1$. Položme $n_0 = k_0^3$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$\frac{n^2}{e^{\sqrt[3]{n}}} = \frac{\left(\sqrt[3]{n}\right)^6}{e^{\sqrt[3]{n}}} \leq \frac{([\sqrt[3]{n}]+1)^6}{e^{[\sqrt[3]{n}]}} \leq \frac{\left(2[\sqrt[3]{n}]\right)^6}{e^{[\sqrt[3]{n}]}} \leq 2^6,$$

a tedy

$$e^{-\sqrt[3]{n}} \leq \frac{2^6}{n^2}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^6}{n^2}$ konverguje, a proto podle srovnávacího kritéria konverguje i zadaná řada. ♣

3.9.11. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+3} - \sqrt[3]{n^3+1}\right)$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $a_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+1}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^2+3} - \sqrt[3]{n^3+1} &= \sqrt[6]{(n^2+3)^3} - \sqrt[6]{(n^3+1)^2} \\
&= \frac{(n^2+3)^3 - (n^3+1)^2}{\sum_{j=0}^{5}\left(\sqrt[6]{(n^2+3)^3}\right)^{5-j}\left(\sqrt[6]{(n^3+1)^2}\right)^j} \\
&= \frac{9n^4 - 2n^3 + 27n^2 + 26}{\sum_{j=0}^{5}\left(\sqrt[6]{(n^2+3)^3}\right)^{5-j}\left(\sqrt[6]{(n^3+1)^2}\right)^j}.
\end{aligned}$$

Protože $\lim(9n^4 - 2n^3 + 27n^2 + 26) = \infty$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, je a_n nezáporné. Navíc platí

$$\begin{aligned}
\lim \frac{a_n}{\frac{1}{n}} &= \lim \frac{9n^5 - 2n^4 + 27n^3 + 26n}{\sum_{j=0}^{5}\left(\sqrt[6]{(n^2+3)^3}\right)^{5-j}\left(\sqrt[6]{(n^3+1)^2}\right)^j} \\
&= \lim \frac{9 - \frac{2}{n} + \frac{27}{n^2} + \frac{26}{n^4}}{\sum_{j=0}^{5}\left(\sqrt[6]{(1+\frac{3}{n^2})^3}\right)^{5-j}\left(\sqrt[6]{(1+\frac{1}{n^3})^2}\right)^j} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Protože $\frac{3}{2} \in (0,\infty)$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje podle Příkladu 3.1.15, zadaná řada diverguje podle limitního srovnávacího kritéria. ♣

3.9.12. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde

$$a_n = \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Řešení. Členy zadané řady jsou kladné a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2 + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}} + 1.$$

Odtud plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\Big) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n+1}} = \infty.$$

Podle Raabeova kritéria (Příklad 3.8.1) tedy daná řada konverguje. ♣

3.9.13. Příklad. Nechť $a, b, d \in (0, \infty)$. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde

$$a_n = \frac{a(a+d)\cdots(a+nd)}{b(b+d)\cdots(b+nd)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Řešení. Členy řady jsou kladné a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{b+(n+1)d}{a+(n+1)d}.$$

Pak

$$\lim_{n\to\infty} n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\Big) = \lim_{n\to\infty} n\frac{b-a}{a+(n+1)d} = \frac{b-a}{d}.$$

Jestliže $b - a > d$, pak zadaná řada konverguje podle Raabeova kritéria. Jestliže $b - a < d$, pak zadaná řada dle stejného kritéria diverguje. Jestliže $b = a + d$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n = \frac{a(a+d)\cdots(a+nd)}{(a+d)(a+2d)\cdots(a+nd)(a+(n+1)d)} = \frac{a}{a+(n+1)d},$$

a tedy

$$\lim \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \frac{a}{d}.$$

Protože $\frac{a}{d} \in (0, \infty)$, zadaná řada v tomto případě diverguje podle Věty 3.2.5. ♣

Řady s obecnými členy.

3.9.14. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Řešení. Posloupnost $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ je zřejmě klesající a splňuje $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Zadaná řada tedy konverguje podle Leibnizovy věty (Věta 3.3.1). Navíc podle Věty 3.2.18 řada $\sum_{n=1}^{\infty} \big|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\big| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverguje, a tedy zadaná řada nekonverguje absolutně. ♣

3.9.15. Příklad. Ukažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n(\sqrt{n}+1)}$ je absolutně konvergentní.

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left|(-1)^{[\sqrt{n}]}\right| \leq 1 \quad \text{a} \quad 0 \leq \frac{1}{n(\sqrt{n}+1)} \leq \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Odtud pro každé $n \in \mathbb{N}$ plyne

$$0 \leq \left|\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n(\sqrt{n}+1)}\right| \leq \frac{1}{n^{3/2}}. \tag{3.79}$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ je konvergentní podle Věty 3.2.18. Z nerovnosti (3.79) a srovnávacího kritéria tedy vyplývá, že zadaná řada je absolutně konvergentní. ♣

3.9.16. Příklad. Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{R}\setminus\{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Dokažte, že řady $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx+\alpha)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx+\alpha)$ mají omezené posloupnosti částečných součtů.

Řešení. Nechť $x \in \mathbb{R}\setminus\{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Řady $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ mají omezené posloupnosti částečných součtů podle Příkladů 3.3.7 a 3.3.8. Dále podle 1.7.16 pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}\sin(nx+\alpha) &= \sin nx \cdot \cos\alpha + \cos nx \cdot \sin\alpha,\\ \cos(nx+\alpha) &= \cos nx \cdot \cos\alpha - \sin nx \cdot \sin\alpha.\end{aligned}$$

Odtud pak dokazovaná tvrzení plynou pomocí Příkladu 3.8.15. ♣

3.9.17. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin nx$ má omezenou posloupnost částečných součtů pro každé $x \in \mathbb{R}$ a že řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cos nx$ má omezenou posloupnost částečných součtů právě tehdy, když $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Řešení. Podle 1.7.16 platí pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{N}$

$$(-1)^n \sin nx = \sin n(x+\pi) \quad \text{a} \quad (-1)^n \cos nx = \cos n(x+\pi).$$

Tvrzení tedy plyne z Příkladu 3.9.16. ♣

3.9.18. Příklad. Dokažte, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ konverguje.

Řešení. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Podle Příkladu 3.9.17 má řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin nx$ omezenou posloupnost částečných součtů. Posloupnost $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ je klesající a konverguje k 0. Zadaná řada tedy konverguje podle Dirichletova kritéria (Věta 3.3.5(D)). ♣

3.9.19. Příklad. Dokažte, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} \frac{n^2}{n^2+1}$ konverguje.

Řešení. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ konverguje podle Příkladu 3.9.18. Navíc pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$0 \leq \frac{n^2}{n^2+1} \leq 1 \quad \text{a} \quad \frac{n^2}{n^2+1} = 1 - \frac{1}{n^2+1}.$$

Posloupnost $\left\{\frac{n^2}{n^2+1}\right\}$ je tedy omezená a rostoucí. Podle Abelova kriteria (Věta 3.3.5(A)) je tedy zadaná řada konvergentní. ♣

3.9.20. Příklad. Dokažte, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(nx + \tfrac{\pi}{4}\right) \cdot \left(\sqrt{n^2 + \sqrt{n}} - n\right) \cdot \frac{n^2 + n}{n^2 + 2}$$

konverguje právě tehdy, když $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Řešení. $\Leftarrow$ Nechť $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$a_n = \cos\left(nx + \tfrac{\pi}{4}\right), \qquad b_n = \sqrt{n^2 + \sqrt{n}} - n, \qquad c_n = \frac{n^2 + n}{n^2 + 2}.$$

Potom

$$b_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + \sqrt{n}} + n},$$

a tedy $\lim b_n = 0$.

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Nerovnost $b_{n+1} \le b_n$ platí právě tehdy, když

$$\sqrt{(n+1)^2 + \sqrt{n+1}} - (n+1) \le \sqrt{n^2 + \sqrt{n}} - n.$$

Tato nerovnost je postupně ekvivalentní nerovnostem

$$(n+1)^2 + \sqrt{n+1} \le n^2 + \sqrt{n} + 1 + 2\sqrt{n^2 + \sqrt{n}},$$

$$2n + \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \le 2\sqrt{n^2 + \sqrt{n}},$$

$$4n^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right)^2 + \frac{4n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \le 4n^2 + 4\sqrt{n},$$

a konečně

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \le 4. \tag{3.80}$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označme výraz na levé straně předchozí nerovnosti jako x_n. Potom platí $\lim x_n = 2$. Podle Věty 2.3.30 existuje tedy $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$, platí (3.80), a proto pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$, platí $b_{n+1} \le b_n$.

Podle Příkladu 3.9.16 má $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ omezenou posloupnost částečných součtů. Podle Dirichletova kritéria (Věta 3.3.5(D)) je tedy řada $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n b_n$ konvergentní. Proto je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Protože $\lim c_n = 1$, je posloupnost $\{c_n\}$ omezená. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom platí $c_n \ge c_{n+1}$ právě tehdy, když

$$\frac{n^2 + n}{n^2 + 2} \ge \frac{(n+1)^2 + (n+1)}{(n+1)^2 + 2}.$$

Tato nerovnost je postupně ekvivalentní nerovnostem

$$
\begin{aligned}
(n^2 + 2n + 3)(n^2 + n) &\geq (n^2 + 2)(n^2 + 3n + 2),\\
n^4 + 3n^3 + 5n^2 + 3n &\geq n^4 + 3n^3 + 4n^2 + 6n + 4,\\
n^2 &\geq 3n + 4,
\end{aligned}
$$

a konečně

$$1 \geq \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2}.$$

Protože pravá strana poslední nerovnosti zřejmě konverguje k 0, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon c_n \geq c_{n+1}. \tag{3.81}$$

Proto podle Abelova kritéria (Věta 3.3.5(A)) konverguje řada $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n b_n c_n$, a tedy i zadaná řada.

$\Rightarrow$ Tuto implikaci dokážem nepřímým důkazem. Nechť $x \in \{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Pak $a_n = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n c_n$ má pro uvedenou volbu x nezáporné členy a platí

$$\lim \frac{a_n b_n c_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{n}{\sqrt{n^2 + \sqrt{n}} + n} \cdot \frac{n^2 + n}{n^2 + 2} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n c_n$ proto diverguje podle limitního srovnávacího kritéria a Věty 3.2.18. ♣

3.9.21. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$.

Řešení. Posloupnost $\{\frac{1}{\log n}\}_{n=2}^{\infty}$ je zřejmě klesající a platí $\lim \frac{1}{\log n} = 0$. Zadaná řada tedy konverguje podle Leibnizovy věty. Podle 1.7.14 pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí $\frac{1}{\log n} \geq \frac{1}{n-1}$. Protože řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$ diverguje, plyne ze srovnávacího kritéria, že diverguje i řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$. Zadaná řad je tedy neabsolutně konvergentní. ♣

3.9.22. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{3} - 1)$.

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = \sqrt[n]{3} - 1$. Potom je posloupnost $\{a_n\}$ klesající a platí $\lim a_n = 0$ podle Příkladu 2.2.48. Řada tedy konverguje podle Leibnizovy věty. Ukážeme, že řada nekonverguje absolutně. Podle Věty 1.5.7 pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$
\begin{aligned}
a_n &= \left(\sqrt[n]{3} - 1\right) \cdot \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \left(\sqrt[n]{3}\right)^k}{\sum_{k=1}^{n-1} \left(\sqrt[n]{3}\right)^k}\\
&= \frac{3 - 1}{\sum_{k=1}^{n-1} \left(\sqrt[n]{3}\right)^k} = \frac{2}{\sum_{k=1}^{n-1} \left(\sqrt[n]{3}\right)^k} \geq \frac{2}{3n}.
\end{aligned}
$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n}$ je divergentní, takže podle srovnávacího kritéria řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n (\sqrt[n]{3} - 1)\right|$ diverguje. ♣

3.9.23. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ v závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Pro $x = 0$ řada zřejmě konverguje absolutně. Zvolme $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{x^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0.$$

Podle d'Alembertova podílového kritéria (Věta 3.2.11) tedy zadaná řada konverguje absolutně pro každé $x \in \mathbb{R}$. ♣

3.9.24. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řad

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

v závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Pro $x = 0$ první řada zřejmě konverguje absolutně. Zvolme $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}}{(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+3)} = 0.$$

Podle d'Alembertova podílového kritéria (Věta 3.2.11) tedy první řada konverguje absolutně pro každé $x \in \mathbb{R}$. Obdobně lze ukázat, že i druhá řada konverguje absolutně pro každé $x \in \mathbb{R}$. ♣

3.9.25. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ v závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Pro $x = 0$ řada zřejmě konverguje absolutně. Zvolme $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} x^{n+1}\right|}{\left|\frac{(-1)^n}{n} x^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot |x| = |x|.$$

Podle d'Alembertova podílového kritéria (Věta 3.4.7) tedy zadaná řada absolutně konverguje pro každé $x \in (-1, 1)$ a diverguje pro každé $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Zbývá vyšetřit případy $x = 1$ a $x = -1$. Položme $x = -1$. Pak obdržíme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, která diverguje. Položme $x = 1$. Potom dostaneme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, která konverguje (Věta 3.3.1) nikoli však absolutně (Věta 3.2.18).

Zadaná řada tedy konverguje právě tehdy, když $x \in [-1, 1)$, a absolutně konverguje právě tehdy, když $x \in (-1, 1)$. ♣

3.9.26. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n$ v závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Pro $x = 0$ řada zřejmě konverguje absolutně. Zvolme $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Označme $a_n = \binom{2n}{n}x^n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+1)!}|x|^{n+1}}{\frac{(2n)!}{n!n!}|x|^n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(2(n+1))!}{(2n)!}\frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2}\frac{|x|^{n+1}}{|x|^n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}|x| = 4|x|\,.\end{aligned}$$

Podle d'Alembertova podílového kritéria tedy zadaná řada absolutně konverguje pro každé $x \in (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ a diverguje pro každé $x \in (-\infty, -\frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{4}, \infty)$. Zbývá vyřešit případy $x = \frac{1}{4}$ a $x = -\frac{1}{4}$.

Položme $b_n = \binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom $b_1 = \frac{1}{2}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$b_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}\cdot b_n. \tag{3.82}$$

Matematickou indukcí dokážeme, že

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon \frac{1}{2n} \le b_n \le \frac{1}{\sqrt{2n+1}}. \tag{3.83}$$

Je zřejmé, že pro $n = 1$ obě nerovnosti v (3.83) platí. Předpokládejme, že nerovnosti jsou splněny pro $n \in \mathbb{N}$. Potom dostáváme

$$b_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}\cdot b_n \begin{cases} \ge \frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{1}{2n} \ge \frac{1}{2n+2},\\ \le \frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \le \frac{1}{\sqrt{2n+3}}.\end{cases}$$

Z (3.82) vyplývá, že posloupnost $\{b_n\}$ je klesající. Z (3.83) a věty o dvou strážnících plyne, že $\lim b_n = 0$. Podle Leibnizovy věty tedy dostáváme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$.

Z (3.83) a srovnávacího kritéria dále plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je divergentní.

Zadaná řada tedy konverguje právě tehdy, když platí $x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ a absolutně konverguje právě tehdy, když $x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. ♣

3.9.27. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n)}{n}$.

Řešení. Konvergence. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = \sin(2n)$ a $b_n = \frac{1}{n}$. Podle Příkladu 3.3.7 má řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ omezenou posloupnost částečných součtů. Posloupnost $\{b_n\}$ je klesající a platí $\lim b_n = 0$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ tedy konverguje podle Dirichletova kritéria.

Absolutní konvergence. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|\sin(2n)| \ge \sin^2(2n) = \tfrac{1}{2}\big(1 - \cos(4n)\big) \ge 0,$$

a tedy

$$\forall n \in \mathbb{N}: \left|\frac{\sin(2n)}{n}\right| \geq \frac{1-\cos(4n)}{2n}. \tag{3.84}$$

Podle Dirichletova kritéria a Příkladu 3.3.8 je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(4n)}{n}$ konvergentní. Předpokládejme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos(4n)}{2n}$ konverguje. Potom díky linearitě konvergentních řad (Důsledek 3.1.19) konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$, což je spor. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos(4n)}{2n}$ tedy diverguje. Tato řada má nezáporné členy. Podle srovnávacího kritéria a (3.84) tedy diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(2n)|}{n}$. Zadaná řada tedy konverguje neabsolutně. ♣

3.9.28. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\cos(n\frac{\pi}{4})}{\log(\log n)}. \tag{3.85}$$

Řešení. Konvergence. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, označme $a_n = \cos\bigl(n\frac{\pi}{4}\bigr)$ a $b_n = \frac{1}{\log(\log n)}$. Z Příkladu 3.3.8 plyne, že řada $\sum_{n=3}^{\infty} a_n$ má omezenou posloupnost částečných součtů. Posloupnost $\{b_n\}_{n=3}^{\infty}$ je klesající a platí $\lim b_n = 0$. Podle Dirichletova kritéria tedy zadaná řada konverguje.

Absolutní konvergence. Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, platí

$$\log(\log n) \geq \log(\log 3) > \log(\log e) = 0$$

a

$$\frac{\bigl|\cos\bigl(n\frac{\pi}{4}\bigr)\bigr|}{\log(\log n)} \geq \frac{\cos^2\bigl(n\frac{\pi}{4}\bigr)}{\log(\log n)} = \frac{\frac{1}{2}\Bigl(1+\cos\bigl(n\frac{\pi}{2}\bigr)\Bigr)}{\log(\log n)} \geq 0. \tag{3.86}$$

Podle 1.7.14 pro každé $x \in (0,\infty)$ platí $\log x \leq x - 1 < x$. Odtud plyne

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3: 0 < \log(\log n) < \log n < n.$$

Odtud plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, platí

$$\frac{1}{2\log(\log n)} \geq \frac{1}{2n},$$

takže řada $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2\log(\log n)}$ diverguje. Řada $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\cos(n\frac{\pi}{2})}{2n}$ konverguje podle Dirichletova kritéria. Z linearity konvergentních řad tedy plyne, že řada

$$\sum_{n=3}^{\infty}\Bigl(\frac{1}{2\log(\log n)} - \frac{\cos(n\frac{\pi}{2})}{2n}\Bigr)$$

diverguje. Podle (3.86) a srovnávacího kritéria tedy řada (3.85) konverguje neabsolutně. ♣

3.9.29. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} n. \tag{3.87}$$

Řešení. Konvergence. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označme

$$a_n = \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \quad \text{a} \quad b_n = \operatorname{arctg} n.$$

Posloupnost $\{b_n\}$ je rostoucí a omezená. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje podle Dirichletova kritéria, neboť řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$ má omezenou posloupnost částečných součtů a posloupnost $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ je klesající a má limitu rovnou nule. Řada (3.87) konverguje podle Abelova kritéria.

Absolutní konvergence. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left|\frac{\sin n}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} n\right| \geq \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{8} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\pi}{8} \frac{\cos(2n)}{\sqrt{n}} \geq 0.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n)}{\sqrt{n}}$ konverguje podle Dirichletova kritéria, zatímco řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverguje. Podle srovnávacího kritéria tedy řada (3.87) není absolutně konvergentní. ♣

3.9.30. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum_{n=11}^{\infty} \frac{\sin n}{n + 10 \sin n}.$$

Řešení. Konvergence. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 11$, označme

$$a_n = \frac{\sin n}{n + 10 \sin n} \quad \text{a} \quad b_n = \frac{\sin n}{n}.$$

Řada $\sum_{n=11}^{\infty} b_n$ je podle Příkladu 3.3.9 konvergentní. Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 11$, platí

$$|a_n - b_n| = \left|\frac{-10(\sin n)^2}{n(n + 10 \sin n)}\right| \leq \frac{10}{n(n-10)}.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 11$, označme $c_n = \frac{10}{n(n-10)}$. Řada $\sum_{n=11}^{\infty} c_n$ nezáporné členy, platí

$$\lim \frac{c_n}{\frac{1}{n^2}} = 10$$

a řada $\sum \frac{1}{n^2}$ konverguje podle Příkladu 3.2.3. Tedy podle limitního srovnávacího kritéria konverguje i řada $\sum_{n=11}^{\infty} c_n$. Podle srovnávacího kritéria je tudíž i řada $\sum_{n=11}^{\infty} |a_n - b_n|$ konvergentní. Podle Věty 3.4.3 odtud plyne, že je řada

$$\sum_{n=11}^{\infty} a_n = \sum_{n=11}^{\infty} (a_n - b_n) + \sum_{n=11}^{\infty} b_n$$

konvergentní.

Absolutní konvergence. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 11$, platí

$$\left|\frac{\sin n}{n + 10\sin n}\right| \geq \frac{\sin^2 n}{n + 10\sin n} = \frac{\frac{1}{2}\big(1 - \cos(2n)\big)}{n + 10\sin n} \geq 0.$$

Řada

$$\sum_{n=11}^{\infty} \frac{\cos 2n}{2(n + 10\sin n)}$$

konverguje, což lze ověřit podobně jako v případě řady $\sum_{n=11}^{\infty} a_n$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 11$, platí

$$\frac{1}{n + 10\sin n} \geq \frac{1}{n + 10} \geq 0,$$

takže podle srovnávacího kritéria řada

$$\sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{n + 10\sin n}$$

diverguje. Z linearity konvergentních řad tedy vyplývá, že

$$\sum_{n=11}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n + 10\sin n}$$

diverguje. Podle srovnávacího kritéria tudíž diverguje i řada $\sum_{n=11}^{\infty} |a_n|$. Zadaná řada tedy konverguje neabsolutně. ♣

3.9.31. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde

$$a_n = \frac{\sin(2n + 1)}{2n + (-1)^n n} \operatorname{arctg}(n^2), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2n + (-1)^n n} = \frac{2n - (-1)^n n}{3n^2} = \frac{2 - (-1)^n}{3n}.$$

Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{\sin(2n + 1)}{2n + (-1)^n n} = \frac{2\sin(2n + 1)}{3n} - \frac{(-1)^n \sin(2n + 1)}{3n}.$$

Z Příkladu 3.9.16 víme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(2n + 1)$ má omezené částečné součty. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(-1)^n \sin(2n + 1) = (-1)^n \sin(2n)\cos(1) + (-1)^n \cos(2n)\sin(1).$$

Podle Příkladu 3.9.17 má řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin(2n + 1)$ omezenou posloupnost částečných součtů. Posloupnost $\left\{\frac{2}{3n}\right\}$ je klesající a platí $\lim \frac{2}{3n} = 0$. Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin(2n + 1)}{3n}$$

tudíž konverguje podle Dirichletova kritéria. Podobně lze ověřit konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(2n+1)}{3n}.$$

Odtud vyplývá, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)}{2n+(-1)^n n}$$

konverguje. Protože posloupnost $\{\operatorname{arctg}(n^2)\}$ je rostoucí a omezená, zadaná řada konverguje podle Abelova kritéria. ♣

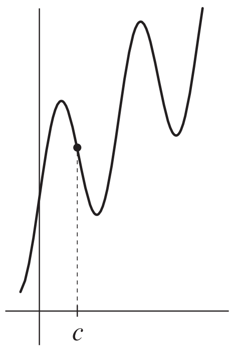
KAPITOLA 4

Limita a spojitost funkce

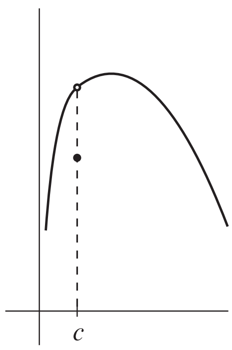
4.1. Definice a základní vlastnosti

4.1.1. Definice. **Reálnou funkcí jedné reálné proměnné** rozumíme zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, tj. $f : M \to \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}$. V této kapitole budeme psát stručněji jen **funkce**. Podobně tomu bude i dále, nebude-li hrozit nedorozumění.

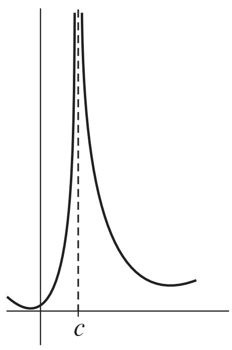
4.1.2 (intuitivní pojem limity funkce)**.** Na následujících obrázcích máme grafy několika různých funkcí. Podívejme se na chování těchto funkcí blízko bodu c. Na prvém obrázku se zdá, že přibližují-li se hodnoty x k bodu c, blíží se $f(x)$ k funkční hodnotě f v bodě c. Na druhém obrázku se děje něco podobného, ale $f(c)$ je různé od hodnoty, k níž se blíží $f(x)$, když se proměnná x přibližuje k c. Konečně na třetím obrázku rostou hodnoty $f(x)$ nade všechny meze. Analogicky můžeme rozumět dalším dvěma obrázkům pro $c = \infty$. Na posledním obrázku se však pro x blížící se k c funkční hodnoty $f(x)$ k žádné hodnotě nepřibližují.



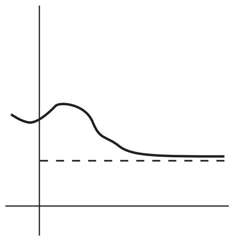
Obrázek 1.



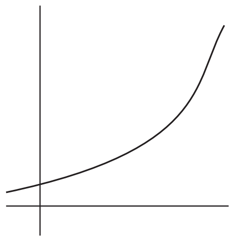
Obrázek 2.



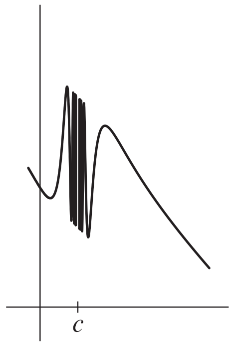
Obrázek 3.



Obrázek 4.



Obrázek 5.



Obrázek 6.

Nyní budeme chtít matematicky postihnout, co to znamená, že se funkční hodnoty $f(x)$ k něčemu blíží, pokud se x blíží k c. Přitom si ale nebudeme všímat funkční hodnoty v bodě c, ale pouze samotného faktu „blížení se“. Následující definice nám pomůže při přesné formulaci tohoto pojmu.

4.1.3. Definice. Nechť $c \in \mathbb{R}$. Potom **prstencovým okolím** bodu c rozumíme každou množinu tvaru $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \setminus \{c\}$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, a kterou značíme $P(c,\varepsilon)$.

Prstencovým okolím bodu ∞ rozumíme každou množinu tvaru $(\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, a kterou značíme $P(\infty, \varepsilon)$.

Prstencovým okolím bodu $-\infty$ rozumíme každou množinu tvaru $B(-\infty,\varepsilon) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, a kterou značíme $P(-\infty, \varepsilon)$.

Připomeňme, že v Definici 2.3.13 jsme definovali pojem okolí pro body z $\mathbb{R}^*$.

4.1.4. Učiníme několik jednoduchých pozorování stran pojmu okolí.

(a) Ať už je $c \in \mathbb{R}$ nebo $c \in \{\infty, -\infty\}$, vždy pro $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}, 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, platí $B(c,\varepsilon_1) \subset B(c,\varepsilon_2)$. Podobně je tomu, nahradíme-li okolí prstencovým okolím. Všimněte si, že v případě bodu ∞ je okolí a prstencové okolí táž množina. Stejně je tomu s okolím a prstencovým okolím bodu $-\infty$.

(b) Pokud $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^*$, $c_1 \neq c_2$, potom existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, takové, že $B(c_1,\varepsilon) \cap B(c_2,\varepsilon) = \emptyset$. V případě, že $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, můžeme volit například $\varepsilon = \frac{1}{2}|c_1 - c_2|$. Pokud je $c_1 = \infty$ a $c_2 \in \mathbb{R}$, pak položíme $\varepsilon = \min\{1, \frac{1}{|c_2|+2}\}$. Potom totiž platí

$$c_2 + \varepsilon \leq c_2 + 1 < |c_2| + 2 = \frac{1}{\frac{1}{|c_2|+2}} \leq \frac{1}{\varepsilon},$$

takže $B(\infty,\varepsilon) \cap B(c_2,\varepsilon) = \emptyset$. Ve zbývajících případech postupujeme obdobně.

(c) Pokud $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^*$, $c_1 < c_2$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, splňují $B(c_1,\varepsilon) \cap B(c_2,\varepsilon) = \emptyset$, potom pro každé $x \in B(c_1,\varepsilon)$, $y \in B(c_2,\varepsilon)$ platí $x < y$.

Následující definice je jednou z nejdůležitějších v tomto textu.

4.1.5. Definice. Řekneme, že prvek $A \in \mathbb{R}^*$ je **limitou funkce** f **v bodě** $c \in \mathbb{R}^*$, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \; \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \; \forall x \in P(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon). \tag{4.1}$$

4.1.6 (formule jako hra ještě jednou)**.** Na ověřování podmínky (4.1) je možné opět nahlížet jako na hru, v níž se utkají dva hráči (vizte 2.2.5). První hráč (náš protivník) volí v prvním tahu hry kladné reálné číslo ε. Naším úkolem (v roli druhého hráče) je zvolit ve druhém tahu hry kladné reálné číslo δ. Ve třetím (posledním) tahu hry volí první hráč $x \in P(c, \delta)$. Pokud $f(x) \notin B(A, \varepsilon)$, vyhrává první hráč, v opačném případě vítězíme my. Pokud dokážeme vyhrát *libovolnou* takovou partii, je limitou funkce f v bodě c prvek A.

4.1.7. Věta (jednoznačnost limity)**.** Funkce má v bodě nejvýše jednu limitu.

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^*$, $A_1 \neq A_2$, jsou limity funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, takové, že $B(A_1, \varepsilon) \cap B(A_2, \varepsilon) = \emptyset$. Podle definice limity pak existuje $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta_1) \colon f(x) \in B(A_1, \varepsilon).$$

Podobně existuje $\delta_2 \in \mathbb{R}$, $\delta_2 > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta_2) \colon f(x) \in B(A_2, \varepsilon).$$

Položme $\delta_3 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Vezměme $x \in P(c, \delta_3)$. Potom máme

$$f(x) \in B(A_1, \varepsilon_1) \cap B(A_2, \varepsilon_2) = \emptyset,$$

což je spor. ■

Podobně jako u limity posloupnosti nám předchozí věta umožňuje zavést následující označení.

4.1.8. Označení. Má-li funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$ limitu $A \in \mathbb{R}^*$, pak píšeme $\lim_{x \to c} f(x) = A$.

4.1.9. (a) Jestliže $\lim_{x \to c} f(x)$ existuje, pak je f definována na jistém prstencovém okolí bodu c. V bodě c funkce f nemusí být vůbec definována.

(b) Nechť $\lim_{x \to c} f(x) = A$, kde $c, A \in \mathbb{R}^*$. Pak můžeme rozlišit tyto případy:

$$\text{počítáme limitu} \begin{cases} \textbf{ve vlastním bodě}, \text{ tj. } c \in \mathbb{R} \text{ a} \begin{cases} A \in \mathbb{R} \text{ (limita je } \textbf{vlastní}\text{)}, \\ A = \infty \text{ (limita je rovna } \textbf{plus nekonečnu}\text{)}, \\ A = -\infty \text{ (limita je rovna } \textbf{mínus nekonečnu}\text{)}, \end{cases} \\ \textbf{v nevlastním bodě}, \text{ tj. } c = \pm\infty \text{ a} \begin{cases} A \in \mathbb{R} \text{ (limita je } \textbf{vlastní}\text{)}, \\ A = \infty \text{ (limita je rovna } \textbf{plus nekonečnu}\text{)}, \\ A = -\infty \text{ (limita je rovna } \textbf{mínus nekonečnu}\text{)}. \end{cases} \end{cases}$$

Uvědomme si, že pro $c, A \in \mathbb{R}$ platí $\lim_{x \to c} f(x) = A$ právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \; \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \colon 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon. \tag{4.2}$$

Obdobně platí $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ právě tehdy, když

$$\forall K \in \mathbb{R} \; \exists L \in \mathbb{R} \; \forall x \in \mathbb{R} \colon x > L \Rightarrow f(x) > K.$$

Zde je vidět užitečnost pojmů okolí a prstencové okolí, které nám dovolují formulovat definici vlastní i nevlastní limity funkce ve vlastním i nevlastním bodě pomocí jedné formule.

4.1.10. Příklad. Nechť $A \in \mathbb{R}$ a f je funkce, jejíž funkční hodnoty jsou na jistém prstencovém okolí bodu $c \in \mathbb{R}^*$ rovny $A \in \mathbb{R}$. Potom $\lim_{x\to c} f(x) = A$.

Důkaz. Podle předpokladu existuje $\delta_0 \in \mathbb{R}$, $\delta_0 > 0$, takové, že pro každé $x \in P(c, \delta_0)$ platí $f(x) = A$. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Nyní položíme $\delta = \delta_0$. Pro $x \in P(c, \delta)$ platí $x \in P(c, \delta_0)$, a tedy $f(x) = A \in B(A, \varepsilon)$. ■

4.1.11. Příklad. Nechť $c \in \mathbb{R}^*$. Potom $\lim_{x\to c} x = c$.

Důkaz. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položme $\delta = \varepsilon$. Pro $x \in P(c, \varepsilon)$ platí $x \in P(c, \delta) = P(c, \varepsilon) \subset B(c, \varepsilon)$. ■

4.1.12. Příklad. Platí $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Důkaz. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu volme $\delta = \varepsilon$. Pro $x \in P(\infty, \delta)$ platí $0 < \frac{1}{x} < \varepsilon$, a tedy $\frac{1}{x} \in B(0, \varepsilon)$. ■

4.1.13. Příklad. Platí $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

Důkaz. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K tomuto ε hledáme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P(0, \delta)\colon \frac{1}{x^2} \in B(\infty, \varepsilon),$$

neboli

$$\forall x \in P(0, \delta)\colon \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Položíme-li $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, pak je výše uvedená formule splněna a důkaz proveden. ■

4.1.14 (lokální charakter limity)**.** Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$ a funkce f, g splňují

$$\forall x \in P(c, \eta)\colon f(x) = g(x).$$

Potom $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x)$, pokud alespoň jedna strana existuje.

K ověření tohoto tvrzení stačí ukázat, že pokud $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$, pak také $\lim_{x\to c} g(x) = A$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu podle definice limity nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta)\colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

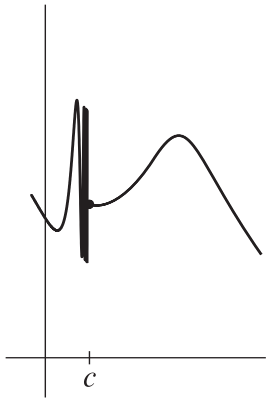
Nyní položme $\delta' = \min\{\delta, \eta\}$. Pak pro každé $x \in P(c, \delta')$ platí

$$g(x) = f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Tím jsme ověřili formuli (4.1), a platí tedy $\lim_{x\to c} g(x) = A$.

Pokud se tedy dvě funkce shodují na jistém prstencovém okolí bodu c, pak se vzhledem k pojmu limity v bodě c chovají stejně. Jinými slovy existence limity a hodnota limity funkce v daném bodě závisí pouze na chování funkce na jistém prstencovém okolí bodu c, proto hovoříme o *lokálním charakteru* limity. Tuto vlastnost budeme při výpočtech limit často používat.

Na následujícím obrázku vidíme, že limita funkce f v bodě c zjevně neexistuje, přesto blíží-li se x k bodu c zprava, potom se i funkční hodnoty blíží k jisté hodnotě.



I tento pojem, kdy se proměnná blíží k c z jedné strany, lze formalizovat a to pomocí pojmu limity v bodě zprava (respektive zleva). K tomu budeme potřebovat pravé (respektive levé) okolí bodu, jež jsou definovány následovně.

4.1.15. Definice. Nechť $c \in \mathbb{R}$.

- **Pravým okolím** bodu c rozumíme každý interval $[c, c+\varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $B_+(c,\varepsilon)$,
- **levým okolím** bodu c rozumíme každý interval $(c-\varepsilon, c]$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $B_-(c,\varepsilon)$,
- **pravým prstencovým okolím** bodu c rozumíme každý interval $(c, c+\varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $P_+(c,\varepsilon)$,
- **levým prstencovým okolím** bodu c rozumíme každý interval $(c-\varepsilon, c)$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $P_-(c,\varepsilon)$.

Pokračujme s definicí pro nevlastní hodnoty.

- **Pravým okolím** bodu $-\infty$ rozumíme každý interval $(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $B_+(-\infty,\varepsilon)$,
- **levým okolím** bodu ∞ rozumíme každý interval $(\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $B_-(\infty,\varepsilon)$,
- **pravým prstencovým okolím** bodu $-\infty$ rozumíme každý interval $(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $P_+(-\infty,\varepsilon)$,
- **levým prstencovým okolím** bodu ∞ rozumíme každý interval $(\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $P_-(\infty,\varepsilon)$.

4.1.16. Definice. Nechť $A \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c **limitu zprava** rovnou A, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in P_+(c,\delta)\colon f(x) \in B(A,\varepsilon).$$

Analogicky definujeme pojem **limity zleva** v bodě $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

4.1.17. Obdobně jako ve Větě 4.1.7 lze dokázat, že funkce f má v daném bodě c nejvýše jednu limitu zprava a nejvýše jednu limitu zleva. Pro limitu zleva funkce f v bodě c užíváme symbol $\lim_{x\to c_-} f(x)$ a pro limitu zprava symbol $\lim_{x\to c_+} f(x)$.

4.1.18. Věta. Nechť f je funkce a $c \in \mathbb{R}$. Limita funkce f v bodě c existuje právě tehdy, když má f v bodě c limitu zprava i zleva a hodnoty těchto jednostranných limit se rovnají. Navíc pokud $\lim_{x\to c} f(x)$ existuje, pak

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c_-} f(x) = \lim_{x\to c_+} f(x).$$

Důkaz. $\Rightarrow$ Předpokládejme, že $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, libovolně. Podle definice limity nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P(c,\delta)\colon f(x) \in B(A,\varepsilon).$$

Potom ale máme také

$$\forall x \in P_+(c,\delta)\colon f(x) \in B(A,\varepsilon),$$

neboť $P_+(c,\delta) \subset P(c,\delta)$. Tím jsme dokázali, že platí $\lim_{x\to c_+} f(x) = A$. Rovnost $\lim_{x\to c_-} f(x) = A$ lze dokázat obdobně.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že $\lim_{x\to c_+} f(x) = \lim_{x\to c_-} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, libovolně. Podle definice limity zprava nalezneme $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P_+(c,\delta_1)\colon f(x) \in B(A,\varepsilon).$$

Dále podle definice limity zleva nalezneme $\delta_2 \in \mathbb{R}$, $\delta_2 > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P_-(c,\delta_2)\colon f(x) \in B(A,\varepsilon).$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$. Potom $P(c,\delta) \subset P(c,\delta_1) \cup P(c,\delta_2)$, takže pro každé $x \in P(c,\delta)$ máme $f(x) \in B(A,\varepsilon)$. Dokázali jsme tak, že platí $\lim_{x\to c} f(x) = A$.

Závěrečné tvrzení plyne z předchozího. ■

Následující výsledek je obdobou Věty 2.2.24 pro funkce.

4.1.19. Věta. Nechť f je funkce a $c \in \mathbb{R}^*$. Potom $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ právě tehdy, když $\lim_{x\to c} |f(x)| = 0$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle definice limity nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c,\delta)\colon f(x) \in (-\varepsilon,\varepsilon).$$

Pro každé $x \in P(c,\delta)$ pak platí $|f(x)| \in [0,\varepsilon) \subset B(0,\varepsilon)$. Tím jsme dokázali, že platí $\lim_{x\to c} |f(x)| = 0$.

$\Leftarrow$ Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle definice limity nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c,\delta)\colon |f(x)| \in (-\varepsilon,\varepsilon).$$

Pro každé $x \in P(c,\delta)$ pak platí $f(x) \in (-\varepsilon,\varepsilon) = B(0,\varepsilon)$. Tím jsme dokázali $\lim_{x\to c} f(x) = 0$. ■

4.1.20. Definice. Nechť $c \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je v bodě c **spojitá**, jestliže $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Řekneme, že funkce f je v bodě c **spojitá zprava** (respektive **zleva**), jestliže $\lim_{x\to c+} f(x) = f(c)$ (respektive $\lim_{x\to c-} f(x) = f(c)$).

4.1.21. Z vlastností okolí lze snadno odvodit ekvivalenci následujících výroků.

(i) Funkce f je spojitá v bodě c.

(ii) Funkce f splňuje

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in B(c,\delta)\colon f(x) \in B(f(c),\varepsilon).$$

(iii) Funkce f splňuje

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\colon |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Porovnejte poslední dvě formule s formulemi (4.1) a (4.2).

4.1.22. Příklad. (a) Definujme

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ -1 & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

Tuto funkci nazýváme **signum** a značíme ji sign. Snadno nahlédneme, že

$$\lim_{x\to 0+} \operatorname{sign} x = 1 \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to 0-} \operatorname{sign} x = -1.$$

Funkce sign je tedy v bodě 0 nespojitá.

(b) Afinní funkce $f\colon x \mapsto ax+b$ je spojitá v každém bodě $c \in \mathbb{R}$. Tvrzení dokážeme přímým ověřením definice. Udělejme to podrobně v případě, že $a > 0$. Mějme $c \in \mathbb{R}$. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položíme $\delta = \frac{\varepsilon}{a}$. Pak pro každé $x \in (c-\delta, c+\delta)$ platí

$$f(c) - \varepsilon = f(c) - a\delta < f(x) = f(c) + a(x-c) < f(c) + a\delta = f(c) + \varepsilon.$$

Tím je dokázáno, že $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

4.1.23. Věta (vlastní limita a omezenost)**.** Nechť funkce f má v bodě $c \in \mathbb{R}^*$ vlastní limitu. Pak existuje $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že f je na $P(c,\delta)$ omezená.

Důkaz. Označme $A = \lim_{x\to c} f(x)$. Podle předpokladu je $A \in \mathbb{R}$. Pro $\varepsilon = 1$ nalezneme $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c,\delta)\colon f(x) \in B(A,1),$$

neboli $f\big(P(c,\delta)\big) \subset (A-1, A+1)$. Tato inkluze dokazuje omezenost funkce f na $P(c,\delta)$. ■

4.2. Věty o limitách

Definice limity neobsahuje návod, jak tuto limitu vypočítat, případně jak ukázat, že funkce v daném bodě limitu nemá. Věty z tohoto oddílu nám umožní jednak limity v některých případech vypočítat a dále ukáží nové vlastnosti právě definovaných pojmů.

Aritmetika limit.

4.2.1. Věta (aritmetika limit funkcí)**.** Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbb{R}^*$. Potom platí:

(a) $\lim\limits_{x\to c}\big(f(x) + g(x)\big) = A + B$, pokud je výraz na pravé straně definován,

(b) $\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x) = AB$, pokud je výraz na pravé straně definován,

(c) $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, pokud je výraz na pravé straně definován.

Důkaz. Dokážeme pouze tvrzení (c). Technika důkazů zbývajících tvrzení je obdobná a zde je nebudeme provádět. Výraz $\frac{A}{B}$ je podle předpokladu definován, takže musí nastat některý z následujících případů:

(1) $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
(2) $A \in \mathbb{R}$, $B \in \{-\infty, \infty\}$,
(3) $A = \infty$, $B \in \mathbb{R}$, $B > 0$,
(4) $A = \infty$, $B \in \mathbb{R}$, $B < 0$,
(5) $A = -\infty$, $B \in \mathbb{R}$, $B > 0$,
(6) $A = -\infty$, $B \in \mathbb{R}$, $B < 0$.

(1) Naším cílem je dokázat, že ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P(c, \delta) \colon \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B}\right| < \varepsilon. \tag{4.3}$$

Z definice limity plyne, že ke kladnému číslu $\frac{1}{2}|B|$ existuje $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, takové, že pro každé $x \in P(c, \eta)$ platí $g(x) \in (B - \frac{1}{2}|B|, B + \frac{1}{2}|B|)$, a tedy $|g(x)| > \frac{1}{2}|B| > 0$, takže výraz $\frac{f(x)}{g(x)}$ má smysl pro každé $x \in P(c, \eta)$. Pro $x \in P(c, \eta)$ odhadujme

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B}\right| &= \frac{1}{|g(x)||B|} \cdot |f(x)B - g(x)A| \\
&= \frac{1}{|g(x)||B|} \cdot |f(x)B - AB + AB - g(x)A| \\
&\le \frac{1}{|g(x)||B|}\big(|B||f(x) - A| + |A||B - g(x)|\big) \\
&\le M\big(|f(x) - A| + |g(x) - B|\big),
\end{aligned} \tag{4.4}$$

kde $M = \max\left\{\frac{2}{|B|}, \frac{2|A|}{|B|^2}\right\}$. Zvolme nyní $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Z předpokladů věty plyne, že k číslu $\frac{\varepsilon}{2M}$ existují kladná čísla $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ taková, že platí

$$\forall x \in P(c, \delta_1) \colon\ |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2M}, \tag{4.5}$$

$$\forall x \in P(c, \delta_2) \colon\ |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2M}. \tag{4.6}$$

Potom pro $\delta = \min\{\eta, \delta_1, \delta_2\}$ plyne platnost (4.3) z (4.4), (4.5) a (4.6).

(2) Podle Věty 4.1.23 existuje $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$, a kladné $K \in \mathbb{R}$ takové, že

$$x \in P(c, \delta_1)\colon |f(x)| < K. \tag{4.7}$$

Zvolme nyní libovolně $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Ať už předpokládáme $B = \infty$ nebo $B = -\infty$, můžeme v obou případech nalézt $\delta_2 \in \mathbb{R}$, $\delta_2 > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta_2)\colon |g(x)| > \frac{K}{\varepsilon}. \tag{4.8}$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Potom pro každé $x \in P(c, \delta)$ díky (4.7) a (4.8) dostáváme

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \frac{K}{\frac{K}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Tím je dokázáno, že pro $A \in \mathbb{R}$ a B nevlastní je limita rovna 0.

(3) Podobně jako v bodě (1) nalezneme $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c, \eta)\colon g(x) < 2B. \tag{4.9}$$

Zvolme libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Nalezneme $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta_1)\colon f(x) > \frac{2B}{\varepsilon}. \tag{4.10}$$

Položme $\delta = \min\{\eta, \delta_1\}$. Potom pro každé $x \in P(c, \delta)$ platí

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{2B}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{2B} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Tím je dokázáno, že $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Zbývající případy (4)–(6) lze dokázat stejným způsobem jako případ (3), pouze je třeba na příslušných místech změnit nerovnosti a znaménka. ∎

4.2.2. Bez předpokladu existence pravých stran ve vzorcích Věty 4.2.1 nelze o hodnotě limit na levých stranách nic říci. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Uvažujme funkce $f(x) = x + a$ a $g(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}$. Pak $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$, ale $\lim_{x\to\infty}\bigl(f(x) + g(x)\bigr) = a$. (Srovnejte s 2.3.27.) Obdobné příklady je možné zkonstruovat pro limitu součinu i limitu podílu dvou funkcí.

4.2.3. Věta 4.2.1 má i své zřejmé jednostranné varianty.

4.2.4. Věta (spojitost a aritmetické operace)**.** Nechť f, g jsou spojité funkce v bodě $c \in \mathbb{R}$. Potom i funkce $f + g$ a fg spojité v bodě c. Je-li navíc $g(c) \neq 0$, je i funkce $\frac{f}{g}$ spojitá v bodě c.

Důkaz. Tvrzení plynou okamžitě z Věty 4.2.1. ∎

4.2.5 (spojitost polynomu a racionální funkce)**.** Nechť $b \in \mathbb{R}$. Víme již, že funkce $x \mapsto b$, $x \mapsto x$, $x \in \mathbb{R}$, jsou spojité v každém bodě $c \in \mathbb{R}$ (Příklad 4.1.22(b)). Podle předcházející věty jsou tedy funkce $x \mapsto x^2, x \mapsto x^3, x \mapsto x^4, \ldots$ spojité v každém bodě $\mathbb{R}$. Odtud podle téže věty plyne, že polynomy a racionální funkce jsou spojité na svých definičních oborech.

Výraz „$\frac{A}{0}$“ není definován, nicméně platí tato věta.

4.2.6. Věta. Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to c} g(x) = 0$, $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ a $A > 0$. Nechť existuje $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, takové, že pro každé $x \in P(c,\eta)$ platí $g(x) > 0$. Potom platí $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Důkaz. Rozlišíme dva případy.

Případ $A \in \mathbb{R}$. Zvolme $L \in \mathbb{R}$ libovolně. Nalezneme $\delta_1 > 0$ takové, že pro každé $x \in P(c,\delta_1)$ platí $f(x) \in (A - \frac{1}{2}A, A + \frac{1}{2}A)$. Dále nalezneme $\delta_2 > 0$ takové, že pro každé $x \in P(c,\delta_2)$ platí $|g(x)| < \frac{A}{2(|L|+1)}$. Položíme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \eta\}$. Pak pro každé $x \in P(c,\delta)$ máme

$$0 < g(x) < \frac{A}{2(|L|+1)} \quad \text{a} \quad \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{\frac{A}{2}}{\frac{A}{2(|L|+1)}} = |L| + 1 > L.$$

Tím je tvrzení pro $A \in \mathbb{R}$ dokázáno.

Případ $A = \infty$. Zvolme opět $L \in \mathbb{R}$ libovolně. Nalezneme $\delta_1 > 0$ takové, že pro každé $x \in P(c,\delta_1)$ platí $f(x) > 1$. Dále nalezneme $\delta_2 > 0$ takové, že pro každé $x \in P(c,\delta_2)$ platí $|g(x)| < \frac{1}{|L|+1}$. Položíme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \eta\}$. Pak pro každé $x \in P(c,\delta)$ máme

$$0 < g(x) < \frac{1}{|L|+1} \quad \text{a} \quad \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{1}{1/(|L|+1)} = |L| + 1 > L.$$

■

4.2.7. Předchozí věta má i svou variantu pro jednostranné limity. Předpokládáme-li, že $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\lim_{x\to c+} g(x) = 0$, $\lim_{x\to c+} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$, $A > 0$ a existuje $\eta > 0$ takové, že pro každé $x \in P_+(c,\eta)$ platí $g(x) > 0$, pak $\lim_{x\to c+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$. Podobně lze zformulovat i variantu s limitou zleva.

Limita a uspořádání.

4.2.8. Věta (o srovnání)**.** Nechť $c \in \mathbb{R}^*$.

(a) Nechť

$$\lim_{x\to c} f(x) > \lim_{x\to c} g(x).$$

Pak existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in P(c,\delta)\colon\ f(x) > g(x).$$

(b) Nechť existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in P(c,\delta)\colon\ f(x) \le g(x).$$

Nechť existuje $\lim_{x\to c} f(x)$ a $\lim_{x\to c} g(x)$. Potom platí

$$\lim_{x\to c} f(x) \le \lim_{x\to c} g(x).$$

(c) (o dvou strážnících) Nechť existuje $\eta > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in P(c, \eta) \colon f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$

Dále předpokládejme, že

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = A \in \mathbb{R}^*.$$

Potom existuje rovněž $\lim_{x \to c} h(x)$ a rovná se A.

Důkaz. (a) Označme $A = \lim_{x \to c} f(x)$ a $B = \lim_{x \to c} g(x)$. Podle Poznámky 4.1.4(b) nalezneme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, takové, že $B(A, \varepsilon) \cap B(B, \varepsilon) = \emptyset$. K tomuto ε nalezneme kladná $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\forall x \in P(c, \delta_1) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon),$$
$$\forall x \in P(c, \delta_2) \colon g(x) \in B(B, \varepsilon).$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Díky volbě ε a nerovnosti $A > B$ platí podle Poznámky 4.1.4(c) pro každé $x \in B(c, \delta)$ nerovnost $f(x) > g(x)$.

(b) Pro spor předpokládejme, že $\lim_{x \to c} f(x) > \lim_{x \to c} g(x)$. Potom podle již dokázané části (a) existuje $\eta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(c, \eta) \colon f(x) > g(x).$$

Zvolme $y \in P(c, \delta) \cap P(c, \eta)$. Pak ovšem platí $f(y) > g(y) \geq f(y)$, což je spor.

(c) *Případ* $A \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu existuje $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$ takové, že pro $x \in P(c, \delta_1)$ platí

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon, \qquad A - \varepsilon < g(x) < A + \varepsilon.$$

Nechť nyní $\delta = \min\{\delta_1, \eta\}$. Je-li $x \in P(c, \delta)$, potom máme

$$A - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < A + \varepsilon,$$

a tedy $h(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. Ke každému $\varepsilon > 0$ tedy existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta) \colon h(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon),$$

čili $\lim_{x \to c} h(x) = A$.

Případ $A = \infty$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu existuje $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$, takové, že pro každé $x \in P(c, \delta_1)$ platí $\frac{1}{\varepsilon} < f(x)$. Nechť nyní $\delta = \min\{\delta_1, \eta\}$. Je-li $x \in P(c, \delta)$, pak platí

$$\frac{1}{\varepsilon} < f(x) \leq h(x),$$

a tedy $h(x) \in B(\infty, \varepsilon)$. Dokázali jsme tedy $\lim_{x \to c} h(x) = \infty$.

Případ $A = -\infty$. Důkaz lze provést podobně jako v předchozím případě. ∎

4.2.9. Příklad. Nechť $h(x) = x \cos(x) \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pak $\lim_{x \to 0} h(x) = 0$.

Řešení. Položme $f(x) = -|x|$, $g(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Pak pro každé $x \in P(0,1)$ platí $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ a

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0.$$

Z Věty 4.2.8(c) tedy plyne $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$. ♣

4.2.10. Pokud je funkce f v bodě c spojitá a $f(c) > 0$, pak existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $x \in B(c,\delta)$ platí $f(x) > 0$. Toto tvrzení plyne z části (a) předchozí věty, kde za funkci g volíme konstantní nulovou funkci.

V kapitole o posloupnostech jsme ukázali varianty věty o dvou strážnících pro nevlastní limity (Věta 2.3.31 a 2.3.32). Podobně je tomu i v případě nevlastních limit funkcí. Uveďme formulaci věty pro limitu rovnou ∞.

4.2.11. Věta. Nechť $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ a existuje $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, takové, že pro každé $x \in P(c,\eta)$ platí $f(x) \leq h(x)$. Potom platí $\lim_{x\to c} h(x) = \infty$.

4.2.12. Příklad. Ukažte, že $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+\sin x}{x} = \infty$.

Řešení. Pro každé $x \in (0,\infty)$ platí

$$\frac{x^2+\sin x}{x} \geq \frac{x^2-1}{x} = x - \frac{1}{x},$$

a

$$\lim_{x\to\infty}\left(x - \tfrac{1}{x}\right) = \infty.$$

Podle Věty 4.2.11 pak dostáváme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+\sin x}{x} = \infty.$$

♣

Při výpočtech limit je často užitečná následující věta, jejíž důkaz lze snadno provést pomocí Věty 4.2.8(c).

4.2.13. Věta. Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ a existuje $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, takové, že g je omezená na $P(c,\eta)$. Potom $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = 0$.

Heineova věta a její varianty. Další věta dává do souvislosti limitu funkce s limitou posloupnosti.

4.2.14. Věta (Heine)**.** Nechť $c, A \in \mathbb{R}^*$ a f je reálná funkce. Pak jsou výroky (i) a (ii) ekvivalentní.

(i) Platí $\lim_{x\to c} f(x) = A$.

(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující:
- $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq c$,
- $\lim_{n\to\infty} x_n = c$

platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Mějme posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \neq c$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = c$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Podle (i) existuje $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c,\delta) \colon f(x) \in B(A,\varepsilon).$$

Díky předpokladu $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ k již nalezenému δ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že platí

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon x_n \in B(c,\delta).$$

Potom máme také

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon x_n \in P(c,\delta),$$

a tedy

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon f(x_n) \in B(A,\varepsilon).$$

Tím jsem dokázali, že platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Provedeme nepřímý důkaz, neboli dokážeme $\neg$(i) $\Rightarrow$ $\neg$(ii). Předpokládáme tedy negaci (i), tj.

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \exists x \in P(a,\delta) \colon \neg\big(f(x) \in B(A,\varepsilon)\big).$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tak existuje $x_n \in P(c, \frac{1}{n})$ takové, že $\neg\big(f(x_n) \in B(A,\varepsilon)\big)$. Pak máme $x_n \neq c$, $\neg\big(f(x_n) \in B(A,\varepsilon)\big)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\lim x_n = c$. Neplatí tak $\lim f(x_n) = A$. Jsou tedy splněny předpoklady ve (ii) ale nikoliv závěr ve (ii), tj. (ii) neplatí, což jsme měli dokázat. ∎

4.2.15 (k důkazu Věty 4.2.14)**.** Výrokovou formu $\neg\big(f(x) \in B(A,\varepsilon)\big)$ v předchozím důkazu nepřepisujeme jako $f(x) \notin B(A,\varepsilon)$, neboť hodnota $f(x)$ nemusí být definována.

Není těžké zformulovat Heineovu větu pro limitu zleva (respektive zprava). Podobně lze dát do souvislosti spojitost a limitu posloupnosti. Z několika různých variant uveďme následující dvě, přičemž dokážeme pouze druhou.

4.2.16. Věta. Nechť $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $A \in \mathbb{R}^*$ a f je reálná funkce. Pak jsou výroky (i) a (ii) ekvivalentní.

(i) Platí $\lim_{x\to c-} f(x) = A$.
(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n < c$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

4.2.17. Věta. Nechť $c \in \mathbb{R}$ a f je reálná funkce. Pak jsou výroky (i) a (ii) ekvivalentní.

(i) Funkce f je spojitá v bodě c.
(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$.

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Mějme posloupnost $\{x_n\}$ splňující $\lim_{n\to\infty} x_n = c$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle (i) existuje $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in B(c,\delta)\colon\ f(x) \in B(f(c),\varepsilon).$$

K již nalezenému δ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon\ x_n \in B(c,\delta),$$

a tedy

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon\ f(x_n) \in B(f(c),\varepsilon).$$

Platí tedy $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Provedeme nepřímý důkaz, neboli dokážeme $\neg$(i) $\Rightarrow$ $\neg$(ii). Předpokládáme-li negaci (i), potom máme

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \exists x \in B(c,\delta)\colon \neg\big(f(x) \in B(f(c),\varepsilon)\big).$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tak existuje $x_n \in B(c, \frac{1}{n})$ takové, že $\neg\big(f(x_n) \in B(A,\varepsilon)\big)$. Pak máme $\neg\big(f(x_n) \in B(A,\varepsilon)\big)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\lim x_n = c$. Neplatí tak $\lim f(x_n) = A$. Jsou tedy splněny předpoklady ve (ii) ale nikoliv závěr ve (ii). ■

Větu 4.2.14 lze často použít k důkazu neexistence limity.

4.2.18. Příklad. Ukažte, že $\lim_{x\to\infty}(-1)^{[x]}$ neexistuje. Symbol $[x]$ značí celou část čísla x.

Řešení. Předpokládejme, že $\lim_{x\to\infty}(-1)^{[x]} = A \in \mathbb{R}^*$. Vezměme posloupnost $\{x_n\} = \{2n\}$. Potom $(-1)^{[x_n]} = (-1)^{[2n]} = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy $\lim_{n\to\infty}(-1)^{[x_n]} = 1$. Přitom $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ a $x_n \neq \infty$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Vezměme dále posloupnost $\{y_n\} = \{2n+1\}$. Potom $(-1)^{[y_n]} = (-1)^{[2n+1]} = -1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy $\lim_{n\to\infty}(-1)^{[y_n]} = -1$. Přitom $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$ a $y_n \neq \infty$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Podle Heineovy věty musí být $\lim_{n\to\infty}(-1)^{[x_n]} = \lim_{n\to\infty}(-1)^{[y_n]} = A$. Na druhé straně ovšem $\lim_{n\to\infty}(-1)^{[x_n]} \neq \lim_{n\to\infty}(-1)^{[y_n]}$, a to je spor. Proto limita $\lim_{x\to\infty}(-1)^{[x]}$ neexistuje. ♣

4.2.19. Příklad (spojitost odmocniny).

Věta o limitě složené funkce. Věta 4.2.1 říká, jak se limita funkce chová vzhledem k algebraickým operacím sčítání, násobení a dělení. Následující věta ozřejmuje vztah limity ke skládání funkcí.

4.2.20. Věta (limita složené funkce). Nechť $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^*$, f, g jsou funkce, $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$, $\lim_{y\to y_0} f(y)$ existuje a je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(P) $\exists \eta \in \mathbb{R}, \eta > 0\ \forall x \in P(x_0,\eta)\colon\ g(x) \neq y_0$,

(S) f je spojitá v bodě y_0.

Potom platí

$$\lim_{x\to x_0} (f \circ g)(x) = \lim_{y\to y_0} f(y). \tag{4.11}$$

Důkaz. Označme $A = \lim_{y\to y_0} f(y)$. Rozlišíme dva případy.

Je splněna podmínka (P). Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K tomuto ε nalezneme $\psi \in \mathbb{R}, \psi > 0$, takové, že

$$\forall y \in P(y_0, \psi)\colon f(y) \in B(A, \varepsilon), \tag{4.12}$$

neboť $\lim_{y\to y_0} f(y) = A$. K ψ nalezneme $\delta' \in \mathbb{R}, \delta' > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(x_0, \delta')\colon g(x) \in B(y_0, \psi), \tag{4.13}$$

neboť $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$. Díky (P) nalezneme $\eta \in \mathbb{R}, \eta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(x_0, \eta)\colon g(x) \neq y_0. \tag{4.14}$$

Položme $\delta = \min\{\delta', \eta\}$.

Zvolme $x \in P(x_0, \delta)$. Pak podle (4.13) a (4.14) platí $g(x) \in B(y_0, \psi) \setminus \{y_0\}$, neboli $g(x) \in P(y_0, \psi)$. Díky (4.12) dostáváme, že platí $f\big(g(x)\big) \in B(A, \varepsilon)$. Tím je (4.11) dokázáno.

Je splněna podmínka (S). Zde platí $y_0 \in \mathbb{R}$ a $A = f(y_0)$. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K tomuto ε nalezneme $\psi \in \mathbb{R}, \psi > 0$, takové, že

$$\forall y \in B(y_0, \psi)\colon f(y) \in B\big(f(y_0), \varepsilon\big), \tag{4.15}$$

neboť je splněna podmínka (S) (vizte 4.1.21). K ψ nalezneme $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(x_0, \delta)\colon g(x) \in B(y_0, \psi). \tag{4.16}$$

Zvolme $x \in P(x_0, \delta)$. Pak podle (4.15) a (4.16) platí $f\big(g(x)\big) \in B\big(f(y_0), \varepsilon\big)$. Tím je (4.11) dokázáno ■

4.2.21. Příklad. Není-li splněna podmínka (P) ani (S), pak závěr věty nemusí platit. Zvolíme-li $f(y) = |\operatorname{sign}(y)|$, $y \in \mathbb{R}$, $g(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, a $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, pak $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, $\lim_{y\to 0} f(y) = 1$, ale $\lim_{x\to 0}(f \circ g)(x) = 0 \neq 1$.

4.2.22. Věta. Pokud je funkce g spojitá v bodě $c \in \mathbb{R}$ a funkce f je spojitá v bodě $g(c)$, pak je funkce $f \circ g$ spojitá v bodě c.

Důkaz. Tvrzení plyne ihned z Věty 4.2.20. ■

4.2.23. Příklad. Nechť funkce f je spojitá v bodě 0. Potom je $\lim_{x\to\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = f(0)$.

Řešení. Platí $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ (Příklad 4.1.12) a $\lim_{y\to 0} f(y) = f(0)$. Podle Věty 4.2.20 ve verzi s podmínkou (S) pak platí $\lim_{x\to\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = f(0)$. ♣

Věta o limitě složené funkce má také své varianty pro jednostranné limity. Bez důkazu uveďme jednu z nich.

4.2.24. Věta. Nechť $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $y_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, f a g jsou funkce splňující $\lim_{x\to x_0-} g(x) = y_0$, $\lim_{y\to y_0+} f(y)$ existuje a je splněna alespoň jedna z následujících podmínek

(P') $\exists \eta \in \mathbb{R}, \eta > 0\ \forall x \in P_-(c, \eta)\colon g(x) > y_0$,

(S') f je spojitá v bodě y_0 zprava.

Potom platí

$$\lim_{x\to x_{0-}} (f\circ g)(x) = \lim_{y\to y_{0+}} f(y).$$

Limita monotónní funkce.

4.2.25. Věta (limita monotónní funkce)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, f je monotónní funkce na intervalu (a, b). Potom existují $\lim_{x\to a_+} f(x)$ a $\lim_{x\to b_-} f(x)$, přičemž platí:

(a) je-li f na (a, b) neklesající, pak

$$\lim_{x\to a_+} f(x) = \inf f\big((a,b)\big) \quad \text{a} \quad \lim_{x\to b_-} f(x) = \sup f\big((a,b)\big),$$

(b) je-li f na (a, b) nerostoucí, pak

$$\lim_{x\to a_+} f(x) = \sup f\big((a,b)\big) \quad \text{a} \quad \lim_{x\to b_-} f(x) = \inf f\big((a,b)\big).$$

Důkaz. (a) Předpokládejme nejprve, že f je neklesající zdola omezená na (a, b). Označme $m = \inf f\big((a,b)\big)$. Potom platí $m \in \mathbb{R}$. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Z vlastností infima plyne, že existuje $y \in f\big((a,b)\big)$ takové, že $y < m + \varepsilon$. Z definice množiny $f\big((a,b)\big)$ plyne, že existuje $x' \in (a, b)$ splňující $y = f(x')$. Protože však funkce f je neklesající, je

$$\forall x \in (a, x')\colon\ f(x) \le f(x') < m + \varepsilon.$$

Protože m je dolní závora množiny $f\big((a,b)\big)$, je

$$\forall x \in (a, b)\colon m - \varepsilon < m \le f(x).$$

Na intervalu (a, x') tedy platí

$$\forall x \in (a, x')\colon m - \varepsilon < f(x) < m + \varepsilon.$$

Nyní nalezneme $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že $P_+(a,\delta) \subset (a, x')$. Potom platí

$$\forall x \in P_+(a,\delta)\colon\ f(x) \in B(m,\varepsilon).$$

Tím jsme dokázali, že platí $\lim_{x\to a_+} f(x) = m$.

Případ, kdy f není omezená zdola, a případ (b) je možné dokázat obdobně.

■

4.3. Funkce spojité na intervalu

4.3.1. Definice. Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval (vizte Definici 1.5.26). Funkce $f\colon J \to \mathbb{R}$ je **spojitá na intervalu** J, jestliže platí:

- f je spojitá v každém vnitřním bodě J,
- f je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,
- f je spojitá zleva v pravém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J.

Spojitost funkce na intervalu lze charakterizovat pomocí konvergence posloupností, jak ukazuje následující varianta Heineovy věty.

4.3.2. Věta. Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval a $f: J \to \mathbb{R}$. Pak je ekvivalentní:

(i) funkce f je spojitá na J,
(ii) pro každou posloupnost $\{x_n\}$ bodů J splňující $\lim x_n = c \in J$, platí $\lim f(x_n) = f(c)$.

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Uvažujme posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in J$, $n \in \mathbb{N}$, a $\lim x_n = c \in J$. Pokud je bod c vnitřním bodem intervalu J, potom podle Heineovy věty (Věta 4.2.17) platí $\lim f(x_n) = f(c)$. Pokud je bod c krajním bodem intervalu J, pak $\lim f(x_n) = f(c)$ platí podle příslušné jednostranné varianty Heineovy věty.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Spojitost ve vnitřních bodech J plyne opět z Heineovy věty. Spojitost v krajních bodech, pokud jsou tyto prvkem J, plyne z jednostranných variant Heineovy věty. ■

4.3.3. Věta. Nechť I, J jsou intervaly v $\mathbb{R}$ a $f: I \to J$, $g: J \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce. Pak $g \circ f: I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce.

Důkaz. Použijme Větu 4.3.2. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost bodů v I konvergující k bodu $x \in I$. Dle Věty 4.3.2 použité pro funkci f platí $\lim f(x_n) = f(x)$. Opětovným použití tohoto tvrzení, tentokrát pro funkci g, dostaneme, že $\lim g(f(x_n)) = g(f(x))$. Proto $\lim(g \circ f)(x_n) = (g \circ f)(x)$, a tedy $g \circ f$ je spojitá na I opět dle Věty 4.3.2. ■

4.3.4. Věta (Bolzano)**.** Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a,b]$ a $f(a) < f(b)$. Pak ke každému $C \in \big(f(a), f(b)\big)$ existuje $\xi \in (a,b)$ takové, že platí $f(\xi) = C$.

Důkaz. Zvolme $C \in \big(f(a), f(b)\big)$ a položme $M = \{z \in [a,b];\ f(z) < C\}$. Množina M je neprázdná, neboť platí $a \in M$. Množina M je také shora, protž číslo b je horní závora M. Můžeme tedy položit $\xi = \sup M \in \mathbb{R}$. Zřejmě platí $\xi \in [a,b]$. Ukážeme, že $f(\xi) = C$ vyloučením možností $f(\xi) > C$ a $f(\xi) < C$.

Kdyby $f(\xi) > C$, pak $\xi > a$ a lze nalézt $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (\xi - \delta, \xi)$ platí $f(x) > C$. To znamená, že $M \subset [a, \xi - \delta]$, což je spor s definicí ξ.

Kdyby $f(\xi) < C$, pak $\xi < b$ a lze nalézt $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (\xi, \xi + \delta)$ platí $f(x) < C$. To znamená, že $(\xi, \xi + \delta) \subset M \subset [a, \xi]$, což je opět spor. ■

4.3.5. Věta analogicky platí v případě, kdy $f(a) > f(b)$. Povšimněme si, že z předpokladů věty neplyne nic o tom, kolik je takových bodů $\xi \in (a,b)$, v nichž je $f(\xi) = C$. Bolzanova věta pouze tvrdí, že takový bod existuje alespoň jeden.

4.3.6. Věta. Nechť J je nedegenerovaný interval a funkce $f: J \to \mathbb{R}$ je spojitá na J. Potom je $f(J)$ interval.

Důkaz. Ověříme, že množina $f(J)$ splňuje předpoklad Lemmatu 1.5.28. Zvolme $y_1, y_2 \in f(J)$ a $z \in \mathbb{R}$, $y_1 < z < y_2$. Pak existují $x_1, x_2 \in J$ taková, že $f(x_1) = y_1$ a $f(x_2) = y_2$. Podle Věty 4.3.4 a za ní následující poznámky musí f v jistém bodě nabývat hodnoty z, takže $z \in f(J)$. Podle Lemmatu 1.5.28 je tedy množina $f(J)$ intervalem. ■

4.3.7. Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M, tj. $M \subset \mathcal{D}(f)$.

(a) Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima** (**minima**) **na** M, jestliže platí

$$\forall y \in M\colon f(y) \leq f(x) \qquad \bigl(\forall y \in M\colon f(y) \geq f(x)\bigr).$$

Bod x pak nazýváme **bodem maxima** (**minima**) funkce f na množině M.

(b) Řekneme, že f nabývá v bodě x **lokálního maxima** (**lokálního minima**) **vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall y \in B(x,\delta) \cap M\colon f(y) \leq f(x) \qquad \bigl(\forall y \in B(x,\delta) \cap M\colon f(y) \geq f(x)\bigr).$$

Bod x pak nazýváme **bodem lokálního maxima** (**lokálního minima**) funkce f na množině M.

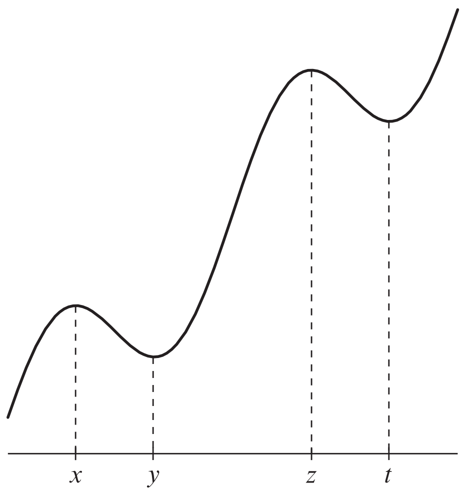
(c) Řekneme, že f nabývá v bodě x **ostrého lokálního maxima** (**ostrého lokálního minima**) **vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall y \in P(x,\delta) \cap M\colon f(y) < f(x) \qquad \bigl(\forall y \in P(x,\delta) \cap M\colon f(y) > f(x)\bigr).$$

Bod x pak nazýváme **bodem ostrého lokálního maxima** (**ostrého lokálního minima**) funkce f na množině M.

(d) Symboly $\max_M f$ a $\min_M f$ označují po řadě maximum a minimum množiny $f(M)$.

(e) Bodem **extrému** budeme rozumět bod maxima či minima. Bodem **lokálního extrému** budeme rozumět bod lokálního maxima či lokálního minima.



Obrázek 7.

Na obrázku jsou x a z body lokálního maxima funkce f a v bodech y a t má funkce f lokální minimum.

4.3.8. Budeme-li hovořit o lokálním extrému reálné funkce bez udání množiny, budeme mít na mysli lokální extrém vzhledem k nějakému okolí.

4.3.9. Věta. Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, a f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Potom má f bod maxima i bod minima na $[a, b]$.

Důkaz. Bod maxima. Označme $G = \sup f([a, b])$. Podle Věty 2.3.36 existuje posloupnost $\{y_n\}$ prvků množiny $f([a, b])$ taková, že $\lim y_n = G$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme $x_n \in [a, b]$ splňující $f(x_n) = y_n$. Podle Věty 2.4.7 vybereme z posloupnosti $\{x_n\}$ konvergentní posloupnost $\{x_{n_k}\}$ s limitou x^*. Podle Věty 2.2.42(b) leží bod x^* v intervalu $[a, b]$. Podle Věty 4.2.17 platí $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x^*)$. Protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $f(x_{n_k}) = y_{n_k}$, je posloupnost $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ vybraná z posloupnosti $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. Podle Věty 2.2.30 platí

$$f(x^*) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} y_n = G.$$

Je tedy $f(x^*) = G$ a x^* je bodem maxima funkce f na intervalu $[a, b]$.

Bod minima. Pro důkaz existence bodu minima definujme funkci $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ předpisem $g(x) = -f(x)$. Funkce g je na $[a, b]$ spojitá, musí tedy na $[a, b]$ nabývat svého maxima podle již dokázané části věty. Nechť tomu tak je v bodě $x_* \in [a, b]$. Pak pro každé $x \in [a, b]$ platí $g(x) \le g(x_*)$. To znamená, že $f(x) \ge f(x_*)$ pro každé $x \in [a, b]$, a f nabývá svého minima na $[a, b]$ v bodě x_*. Tím je věta dokázána. ■

4.3.10. Funkce $f(x) = \frac{1}{x}, x \in (0, 1)$, nenabývá na intervalu $(0, 1)$ extrému. Stejně tak funkce $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pro } x \in \{0, 1\}, \\ x & \text{pro } x \in (0, 1) \end{cases}$$

nemá na $[0, 1]$ extrém. Tyto dva příklady ukazují, že ani předpoklad uzavřenosti intervalu ani spojitosti funkce nelze ve Větě 4.3.9 vynechat.

4.3.11. Důsledek. Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Potom je f na $[a, b]$ omezená.

Důkaz. Podle Věty 4.3.9 existuje bod maxima x^* a bod minima x_* funkce f na intervalu $[a, b]$. Platí tedy $f(x_*) \le f(x) \le f(x^*)$ pro každé $x \in [a, b]$, takže množina $f([a, b])$ je omezená, což znamená, že funkce f je omezená. ■

4.3.12. Hledání extrémů funkce patří k důležitým úlohám. Věta 4.3.9 sice nedává návod jak bod extrému hledat, ale dává nám velmi cennou informaci o tom, že při splnění předpokladů věty alespoň jeden bod maxima a alespoň jeden bod minima existuje. V dalším se naučíme jak vytipovat body, které jsou podezřelé z toho, že by v nich funkce mohla nabývat extrému. Pokud víme, že naše funkce nabývá maxima (respektive minima) na uvažované množině, pak bodem maxima (respektive minima) bude ten z vytipovaných podezřelých bodů, v němž funkce nabývá největší (respektive nejmenší) hodnoty.

Spojitost inverzní funkce. Spojitá funkce na intervalu J zobrazuje tento interval na interval $f(J)$ (Věta 4.3.6). Pokud je f na J rostoucí (nebo klesající), je f prosté zobrazení J na $f(J)$ a existuje inverzní zobrazení $f^{-1}\colon f(J) \to J$ (vizte 1.4.27). Toto zobrazení je funkce, budeme proto o f^{-1} hovořit jako o **inverzní funkci**. Následující věta tvrdí, že jak druh monotonie tak i spojitost zdědí inverzní funkce od funkce výchozí.

4.3.13. Věta. Nechť f je spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu J. Potom funkce f^{-1} je spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $f(J)$.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že f je spojitá a rostoucí, jinak bychom uvažovali $-f$. Potom podle Věty 4.3.6 je funkce f^{-1} definována na intervalu $f(J)$ a je rostoucí, což je snadné si uvědomit. Dokážeme spojitost f^{-1} na $f(J)$. Nechť $y_0 \in f(J)$ není pravý krajní bod intervalu $f(J)$. Dokážeme spojitost f^{-1} v bodě y_0 zprava. Označme $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Bod x_0 není pravým krajním bodem J, neboť f je rostoucí na J. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Zvolme $x_1 \in J \cap (x_0, x_0 + \varepsilon)$ a položme $\delta = f(x_1) - y_0$. Odtud potom $[y_0, y_0 + \delta] \subset f(J)$, a tedy

$$f^{-1}\big(B_+(y_0, \delta)\big) = f^{-1}\big([y_0, y_0 + \delta)\big) = [x_0, x_1) \subset B(x_0, \varepsilon) = B(f^{-1}(y_0), \varepsilon).$$

Analogicky bychom dokázali spojitost zleva funkce f^{-1} v bodech $f(J)$, které nejsou levým krajním bodem $f(J)$. Odtud plyne spojitost f^{-1} na $f(J)$. ■

4.4. Teoretické příklady k limitě funkce

4.4.1. Příklad. Nechť f, g jsou reálné funkce spojité v bodě $c \in \mathbb{R}$. Ukažte, že funkce $|f|$, $\max\{f, g\}$ a $\min\{f, g\}$ definované po řadě předpisy

$$\begin{aligned} |f|(x) &= |f(x)|, && x \in \mathcal{D}(f), \\ \max\{f, g\}(x) &= \max\{f(x), g(x)\}, && x \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g), \\ \min\{f, g\}(x) &= \min\{f(x), g(x)\}, && x \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g), \end{aligned}$$

jsou spojité v c.

Řešení. Absloutní hodnota. Díky Důsledku 1.5.12(a) platí pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ nerovnost

$$0 \le \big||f(x)| - |f(c)|\big| \le |f(x) - f(c)|. \tag{4.17}$$

Podle předpokladu platí $\lim_{x\to c}\big(f(x) - f(c)\big) = 0$, a tedy také podle Věty 4.1.19 platí $\lim_{x\to c} |f(x) - f(c)| = 0$. Odtud a z (4.17) platí díky Větě 4.2.8(c) $\lim_{x\to c}\big||f(x)| - |f(c)|\big| = 0$. Pak máme opět podle Věty 4.1.19 $\lim_{x\to c}\big(|f(x)| - |f(c)|\big) = 0$, neboli $\lim_{x\to c} |f(x)| = |f(c)|$. Funkce $|f|$ je tedy spojitá v c.

Maximum a minimum. Dále pro každé $x \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$ platí

$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}$$

a

$$\min\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2},$$

z čehož použitím první části důkazu plynou požadovaná tvrzení. ♣

4.4.2. Příklad (varianta Heineovy věty)**.** Nechť $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $A \in \mathbb{R}^*$ a f je reálná funkce. Dokažte, že pak jsou výroky (i) a (ii) ekvivalentní.

(i) Platí $\lim_{x \to c-} f(x) = A$.
(ii) Pro každou *rostoucí* posloupnost $\{x_n\}$ splňující $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Řešení. (i) $\Rightarrow$ (ii) Tato implikace platí podle Heineovy věty 4.2.16.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Provedeme nepřímý důkaz. Předpokládejme tedy, že neplatí (i), neboli

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \exists x \in P_-(c, \delta)\colon \neg\big(f(x) \in B(A, \varepsilon)\big). \tag{4.18}$$

Zkonstruujeme posloupnost $\{x_n\}$ následujícím způsobem. Dle (4.18) existuje $x_1 \in P_-(c, 1)$ takové, že $\neg\big(f(x_1) \in B(A, \varepsilon)\big)$. Předpokládejme nyní, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ máme nalezeny body $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ takové, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí $x_i \in P_-(c, \frac{1}{n+1})$ a $\neg\big(f(x_i) \in B(A, \varepsilon)\big)$. Zvolíme $\delta_{n+1} \in (0, \frac{1}{n+1})$ takové, že $x_n \notin P_-(c, \delta_{n+1})$. Použitím (4.18) obdržíme $x_{n+1} \in P_-(c, \delta_{n+1})$ splňující $\neg\big(f(x_{n+1}) \in B(A, \varepsilon)\big)$. Zjevně pak platí $x_n < x_{n+1}$ a $x_{n+1} \in P_-(c, \frac{1}{n+1})$. Tím je konstrukce ukončena.

Našli jsem tak rostoucí posloupnost $\{x_n\}$ splňující $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, neboť pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $x_n \in P_-(c, \frac{1}{n})$. Neplatí však $\lim f(x_n) = A$, protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme $\neg\big(f(x_n) \in B(A, \varepsilon)\big)$. Tím je důkaz proveden. ♣

4.4.3. Příklad. Nechť φ je rostoucí spojitá funkce na $[1, \infty)$ splňující $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$ a f je nekonstatní periodická funkce na $\mathbb{R}$. Pak $\lim_{x\to\infty} f \circ \varphi(x)$ neexistuje.

Řešení. Podle Věty 4.3.6 je $\varphi\big([1, \infty)\big)$ interval. Tento interval je shora neomezený, protože $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$. Funkce φ je rostoucí na $[1, \infty)$, a proto $\varphi([1, \infty)) = [\varphi(1), \infty)$. Inverzní funkce φ^{-1} je tedy rostoucí funkce definovaná na $[\varphi(1), \infty)$ a její obor hodnot je roven $[1, \infty)$. Podle Věty 4.2.25 platí

$$\lim_{y\to\infty} \varphi(y) = \sup \varphi^{-1}\big([\varphi(1), \infty)\big) = \sup[1, \infty) = \infty.$$

Nechť $p > 0$ je perioda funkce f. Funkce f je nekonstantní, a proto můžeme nalézt body $x^*, y^* \in \mathbb{R}$ splňující $f(x^*) \neq f(y^*)$. Nalezneme $k \in \mathbb{N}$ takové, že $x^* + kp, y^* + kp \in [\varphi(1), \infty)$. Definujme $x_n = \varphi^{-1}(x^* + (k+n)p)$, $n \in \mathbb{N}$. Pak platí $\lim_{n\to\infty}(x^* + (k+n)p) = \infty$ a podle Heineovy věty (Věta 4.2.14) platí $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Dále máme

$$\lim_{n\to\infty} (f \circ \varphi)(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x^* + (k+n)p) = \lim_{n\to\infty} f(x^*) = f(x^*).$$

Podobně definujme $y_n = \varphi^{-1}(y^* + (k+n)p)$, $n \in \mathbb{N}$. Pak stejně jako v předchozím případě platí $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$ a také $\lim_{n\to\infty}(f \circ \varphi)(y_n) = f(y^*)$. Poněvadž

$f(x^*) \neq f(y^*)$, dostáváme podle Věty 4.2.14, že limita $\lim_{x\to\infty} f \circ \varphi(x)$ neexistuje. ♣

4.4.4. Příklad.

Body nespojitosti.

4.4.5. Příklad. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je monotónní funkce. Dokažte, že množina

$$D = \{x \in \mathbb{R};\ f \text{ není spojitá v bodě } x\}$$

je spočetná.

Řešení. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že f je neklesající. Funkce f má tedy v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ limitu zleva i zprava dle Věty 4.2.25. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ označme $a_x = \lim_{z\to x-} f(z)$ a $b_x = \lim_{z\to x+} f(z)$. Zřejmě pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $a_x \leq f(x) \leq b_x$. Dostáváme tak, že $D = \{x \in \mathbb{R};\ a_x < b_x\}$. Máme-li $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, pak pro $w \in (x, y)$ platí $b_x \leq f(w) \leq a_y$, a tedy $b_x \leq a_y$. Systém otevřených intervalů $\mathcal{S} = \{(a_x, b_x);\ x \in D\}$ je tedy disjunktní, a proto je podle Příkladu 1.6.25 spočetný. Pro každý interval $I \in \mathcal{S}$ existuje právě jedno $x \in D$ splňující $I = (a_x, b_x)$. Množina D je pak spočetná díky Lemmatu 1.6.8. ♣

4.4.6. Příklad. Nechť $D \subset \mathbb{R}$ je spočetná množina. Nalezněte neklesající funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takovou, že její množina bodů nespojitosti je právě D.

Řešení. Pokud je množina D konečná, pak je řešení snadné. Předpokládejme tedy, že D je nekonečná. Mmnožina D je podle předpokladu spočetná, a proto existuje posloupnost $\{x_n\}$ splňující $D = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $f_n = \chi_{[x_n,\infty)}$ (vizte 1.4.21), neboli

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < x_n, \\ 1 & \text{pro } x \geq x_n. \end{cases}$$

Definujme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jako

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x). \tag{4.19}$$

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ je řada (4.19) absolutně konvergentní, a proto je f definovaná na $\mathbb{R}$. Funkce f je neklesající, neboť všechny funkce f_n jsou neklesající.

Spojitost f v bodech $\mathbb{R} \setminus D$. Nechť $x \in \mathbb{R} \setminus D$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon$. Funkce $f_1, \dots, f_{n_0}$ jsou spojité v x, a proto můžeme nalézt $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že pro každé $n \in \{1, \dots, n_0\}$ a každé $y \in B(x, \delta)$ platí $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$. Pro každé $n \in \mathbb{N}, n > n_0$, a každé $y \in \mathbb{R}$ máme podle definice a trojúhelníkové nerovnosti $|f_n(x) - f_n(y)| \leq 2$. Pak pro každé $y \in B(x, \delta)$

máme

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &\le \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n}|f_n(x)-f_n(y)| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|f_n(x)-f_n(y)| \\ &\le \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n}\varepsilon + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\cdot 2 \\ &\le \varepsilon + \varepsilon\cdot 2 = 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Tedy f je spojitá v x.

Nespojitost f v bodech D. Nechť $x \in D$. Nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $x = x_m$. Definujme funkci g jako

$$g = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{2^n} f_n + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n.$$

Funkce g je definována na $\mathbb{R}$ a je neklesající na $\mathbb{R}$. Má tedy jednostranné limity ve všech bodech $\mathbb{R}$ a pro každé $y \in \mathbb{R}$ platí $\lim_{x\to y-} g(x) \le g(y)$. Dále platí $f = g + \frac{1}{2^m} f_m$ a $\lim_{x\to x_m-} f_m(x) = 0$. Pak dostáváme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_m-} f(x) &= \lim_{x\to x_m-} \left(g(x) + \tfrac{1}{2^m} f_m(x)\right) = \lim_{x\to x_m-} g(x) + \lim_{x\to x_m-} \tfrac{1}{2^m} f_m(x) \\ &= \lim_{x\to x_m-} g(x) + 0 < g(x_m) + \tfrac{1}{2^m} = g(x_m) + \tfrac{1}{2^m} f_m(x_m) = f(x_m).\end{aligned}$$

Tedy f není spojitá v x_m, neboť $\lim_{x\to x_m-} f(x) < f(x_m)$. ♣

4.4.7 (klasifikace bodů nespojitosti)**.** Nechť f je reálná funkce definovaná na jistém okolí bodu $c \in \mathbb{R}$. Jestliže f není spojitá v c, ale existuje její vlastní limita v c, potom říkáme, že f má v c **odstranitelnou nespojitost**. Změníme-li totiž hodnotu funkce f v bodě c z $f(c)$ na $\lim_{x\to c} f(x)$, bude nová funkce spojitá v bodě c.

Neexistuje-li vlastní limita f v bodě x, pak říkáme, že bod c je bodem **neodstranitelné nespojitosti** funkce f. Body neodstranitelné nespojitosti klasifikujeme dále takto. Existují-li různé jednostranné limity v bodě c, pak říkáme, že c je bodem **nespojitosti prvního druhu**. Jestliže alespoň jedna z jednostranných limit neexistuje, pak říkáme, že c je bodem **nespojitosti druhého druhu**.

4.4.8. Příklad. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dokažte, že platí:

(a) Množina $\{x \in \mathbb{R};\ f \text{ má v } x \text{ odstranitelnou nespojitost}\}$ je spočetná.
(b) Množina $\{x \in \mathbb{R};\ f \text{ má v } x \text{ neodstranitelnou nespojitost 1. druhu}\}$ je spočetná.

Řešení. (a) Stačí dokázat, že množiny

$$O = \{x \in \mathbb{R};\ \lim_{y\to x} f(y) < f(x)\} \quad \text{a} \quad P = \{x \in \mathbb{R};\ \lim_{y\to x} f(y) > f(x)\}$$

jsou spočetné. Provedeme důkaz pouze pro množinu O, protože pro množinu P je důkaz obdobný. Pro každé $x \in O$ nalezneme $r_x \in \mathbb{Q}$ takové, že

$$\lim_{y\to x} f(y) < r_x < f(x).$$

Pak množina $O = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} O_r$, kde $O_r = \{x \in O;\ r_x = r\}$, je sjednocením spočetně mnoha množin, a tedy stačí dokázat, že každá množina $O_r, r \in \mathbb{Q}$, je spočetná.

Nechť $r \in \mathbb{Q}$. Pro každé $x \in O_r$ nalezneme $\delta_x > 0$ splňující

$$\forall z \in P(x, \delta_x) \colon\ f(z) < r.$$

Dokážeme, že systém intervalů

$$\mathcal{J} = \left\{(x - \tfrac{1}{2}\delta_x, x + \tfrac{1}{2}\delta_x);\ x \in O_r\right\}$$

je disjunktní. Pro spor předpokládejme, že pro $x, y \in O_r$, $x \neq y$, platí

$$(x - \tfrac{1}{2}\delta_x, x + \tfrac{1}{2}\delta_x) \cap (y - \tfrac{1}{2}\delta_y, y + \tfrac{1}{2}\delta_y) \neq \emptyset$$

Potom platí $|x - y| < \frac{1}{2}\delta_x + \frac{1}{2}\delta_y$. Nyní rozlišíme dva případy. Pokud $\delta_x \leq \delta_y$, pak $|x - y| < \delta_y$, a tedy $f(x) < r$ díky volbě δ_y a zároveň $f(x) > r_x = r$, což je spor. Pokud $\delta_x > \delta_y$, pak lze spor odvodit obdobně. Systém $\mathcal{J}$ je tedy spočetný dle Příkladu 1.6.25, a proto je i množina O_r spočetná.

(b) Stačí dokázat, že množiny

$$N = \{x \in \mathbb{R};\ \lim_{y \to x-} f(y) < \lim_{y \to x+} f(y)\},$$
$$M = \{x \in \mathbb{R};\ \lim_{y \to x-} f(y) > \lim_{y \to x+} f(y)\}$$

jsou spočetné. Důkaz provedeme pouze pro množinu N. Důkaz pro M je obdobný. Pro každé $x \in N$ nalezneme $r_x \in \mathbb{Q}$ splňující

$$\lim_{y \to x-} f(y) < r_x < \lim_{y \to x+} f(y)$$

a zapíšeme N jako $N = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} N_r$, kde $N_r = \{x \in N;\ r_x = r\}$, $r \in \mathbb{Q}$. Dokážeme, že každá z množin $N_r, r \in \mathbb{Q}$, je spočetná.

Nechť $r \in \mathbb{Q}$. Pro každé $x \in N_r$ nalezneme $\delta_x > 0$ takové, že

$$\forall z \in P_-(x, \delta_x) \colon\ f(z) < r,$$
$$\forall z \in P_+(x, \delta_x) \colon\ f(z) > r.$$

Máme-li nyní dva body $x, y \in N_r$, $x < y$, pak zjevně

$$(x, x + \delta_x) \cap (y - \delta_y, y) = \emptyset.$$

Tedy i

$$(x - \delta_x, x + \delta_x) \cap (y - \delta_y, y + \delta_y) = \emptyset.$$

Opět je tedy systém $\{(x - \delta_x, x + \delta_x);\ x \in N_r\}$ disjunktní, a proto spočetný. Tedy i množina N_r je spočetná. Odtud plyne spočetnost N. ♣

4.4.9. Příklad. Nechť f je funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Potom je množina

$$E = \{x \in \mathbb{R};\ f \text{ má v bodě } x \text{ ostrý lokální extrém}\}$$

spočetná.

Řešení. Zjevně stačí ukázat, že množina

$$M = \{x \in \mathbb{R};\ f \text{ má v } x \text{ ostré lokální maximum}\}$$

je spočetná. K tomuto účelu nalezneme pro každé $x \in M$ kladné číslo δ_x takové, že

$$\forall y \in P(x, \delta_x) \colon f(y) < f(x).$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $M_n = \{x \in M;\ \delta_x > \frac{1}{n}\}$. Předpokládejme, že $x, y \in M_n$, $x \neq y$, a platí

$$z \in \left(x - \tfrac{1}{2n}, x + \tfrac{1}{2n}\right) \cap \left(y - \tfrac{1}{2n}, y + \tfrac{1}{2n}\right). \tag{4.20}$$

Pak máme

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y| < \tfrac{1}{2n} + \tfrac{1}{2n} = \tfrac{1}{n},$$

což znamená, že $y \in (x - \delta_x, x + \delta_x)$ a $x \in (y - \delta_y, y + \delta_y)$. Díky volbě δ_x a δ_y pak platí $f(y) < f(x)$ a $f(x) < f(y)$, což je spor. Systém intervalů

$$\left\{(x - \tfrac{1}{2n}, x + \tfrac{1}{2n});\ x \in M_n\right\}$$

je proto disjunktní, a tedy spočetný dle Příkladu 1.6.25. Tedy i množina $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ je spočetná podle Věty 1.6.21(c). ♣

Podivné funkce.

4.4.10. Příklad. Sestrojte funkci $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takovou, že pro každý nedegenerovaný interval $I \subset \mathbb{R}$ platí $f(I) = \mathbb{R}$.

Řešení. Při řešení úlohy využijeme výsledky i značení z Příkladu 3.8.9. Podle uvedeného příkladu pro každé $x \in [0, 1)$ existuje jednoznačně určená posloupnost $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{I}(10)$ splňující

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(x)}{10^n}.$$

Označme D množinu všech posloupností $\{a_n\} \in \mathcal{I}(10)$, pro které existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že
- $a_{2m} = 9$ a
- $\forall j \in \mathbb{N}, j > m \colon a_{2j} = 0.$

Definice pomocné funkce g. Nejprve zkonstruujeme funkci $g \colon [0, 1) \to [0, 1)$ splňující $g\big(I \cap [0, 1)\big) = [0, 1)$ pro každý otevřený nedegenerovaný interval I, který má neprázdný průnik s intervalem $[0, 1)$. Definujme g předpisem

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } \{a_n(x)\} \in \mathcal{I}(10) \setminus D, \\ \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{a_{2j-1}(x)}{10^{j-m}}, & \text{pokud } \{a_n(x)\} \in D \text{ a } m \in \mathbb{N} \text{ splňuje (4.4) pro } \{a_n(x)\}. \end{cases}$$

Funkce g je dobře definovaná, protože pokud $\{a_n\} \in D$, pak je číslo $m \in \mathbb{N}$, pro které je splněno (4.4), určeno jednoznačně.

Nechť I je nedegenerovaný otevřený interval takový, že $I \cap [0, 1) \neq \emptyset$. Nalezneme $x, y \in I \cap [0, 1)$, $a < b$. Dále nalezneme $k \in \mathbb{N}$ takové, že $x + \frac{2}{10^k} < y$ a $a_k(x) \neq 9$.

Položme
$$z=\sum_{n=1}^{k-1}\frac{a_n(x)}{10^n}+\frac{a_k(x)+1}{10^k}.$$
Pak platí
$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n(x)}{10^n}<\sum_{n=1}^{k}\frac{a_n(x)}{10^n}+\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{9}{10^n}=\sum_{n=1}^{k}\frac{a_n(x)}{10^n}+\frac{1}{10^k}=z,$$
$$z=\sum_{n=1}^{k}\frac{a_n(x)}{10^n}+\frac{1}{10^k}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n(x)}{10^n}+\frac{1}{10^k}=x+\frac{1}{10^k}.$$
Platí tedy $x<z\le x+\frac{1}{10^k}$.

Pozorování. Nechť posloupnost $\{c_n\}\in\mathcal{I}(10)$ splňuje $c_j=a_j(z)$ pro každé $j\in\{1,\dots,k\}$. Potom platí
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{10^n}\in(x,y).$$
Máme totiž
$$x<z\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{10^n}<\sum_{n=1}^{k}\frac{a_n(z)}{10^n}+\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{9}{10^n}=z+\frac{1}{10^k}\le x+\frac{2}{10^k}<y.$$
Tím je Pozorování ověřeno.

Rovnost $g\big(I\cap[0,1)\big)=[0,1)$. Zřejmě $g\big(I\cap[0,1)\big)\subset[0,1)$. Dokážeme opačnou inkluzi. Zvolme $\alpha\in[0,1)$. Nalezneme $m\in\mathbb{N}$ takové, že $2m>k$. Definujme dekadický rozvoj $\{w_n\}$ následovně.
$$w_n=\begin{cases}a_j(z) & \text{pro } j\le k,\\ 9 & \text{pro } k<j\le 2m,\\ a_{\frac{j+1}{2}-m}(\alpha) & \text{pro } j>2m \text{ liché},\\ 0 & \text{pro } j>2m \text{ sudé}.\end{cases}$$
Neformálně zapsána vypadá posloupnost $\{w_n\}$ takto
$$a_1(z)\quad\dots\quad a_k(z)\quad 9\quad\dots\quad 9\quad a_1(\alpha)\quad 0\quad a_2(\alpha)\quad 0\quad\dots$$
Platí, že $\{w_n\}\in\mathcal{I}(10)$. Reálné číslo $t=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{w_j}{10^j}$ splňuje $t\in(x,y)$ podle Pozorování a podle definice funkce g platí $g(t)=\alpha$. Máme tedy $g\big(I\cap[0,1)\big)=[0,1)$.

Konstrukce hledané funkce f. Definujme $h\colon[0,1)\to\mathbb{R}$ předpisem
$$h(x)=\begin{cases}0 & \text{pro } x=0,\\ \operatorname{tg}\big(\pi x-\frac{\pi}{2}\big) & \text{pro } x\in(0,1).\end{cases}$$
Je snadné ověřit, že platí $h\big([0,1)\big)=h\big((0,1)\big)=\mathbb{R}$. Definujme
$$f(x)=h\circ g(x-[x]),\qquad x\in\mathbb{R}.$$

Je-li I nedegenerovaný interval, nalezneme otevřený nedegenerovaný interval $(a,b) \subset I$. Pak existuje $n \in \mathbb{Z}$ takové, že $(a,b) \cap [n, n+1) \neq \emptyset$. Potom platí

$$f\big((a,b) \cap [n,n+1)\big) = h\big(g\big((a-n, b-n) \cap [0,1)\big)\big) = h\big([0,1)\big) = \mathbb{R}.$$

♣

4.4.11. Příklad. Dirichletova funkce $D\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definována předpisem

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Dokažte, že každý bod z $\mathbb{R}$ je bodem neodstranitelné nespojitosti 2. druhu funkce D.

Řešení. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Zvolme $\delta > 0$. Podle Věty 1.5.34 existují $u, q \in (a, a+\delta) \cap \mathbb{Q}$, $u < q$. Položme $v = u + \frac{1}{\sqrt{2}}(q-u)$. Potom platí

$$u < v < u + (q-u) = q,$$

a tedy $v \in (a, a+\delta)$. Kdyby bylo číslo v racionální, pak by bylo racionální i číslo $\sqrt{2}$, což není pravda (vizte Příklad 1.2.17). Číslo v je tedy iracionální. Máme tedy $u, v \in P^+(a,\delta)$ splňující $D(u) = 1$ a $D(v) = 0$. Odtud plyne, že $\lim_{x\to a+} D(x)$ neexistuje. Obdobně lze ukázat, že $\lim_{x\to a-} D(x)$ neexistuje. Tím je důkaz proveden. ♣

4.4.12. Příklad. Riemannova funkce, někdy nazývána také jako **Thomaeova**[1] funkce, $R\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definována předpisem

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, \text{kde } x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \text{ a } p,q \text{ jsou nesoudělná}, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Dokažte, že funkce R je spojitá právě v bodech množiny $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Řešení. Spojitost v bodech z $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Nechť $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $q_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{q_0} < \varepsilon$. Díky iracionalitě a a vlastnostem celé části pro každé $q \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{[qa]}{q} < a < \frac{[qa]+1}{q}. \tag{4.21}$$

Označme

$$d_q = \min\left\{a - \frac{[qa]}{q}, \frac{[qa]+1}{q} - a\right\}, \qquad q \in \mathbb{N},$$

Podle (4.21) je $d_q > 0$ pro každé $q \in \mathbb{N}$ a interval $(a - d_q, a + d_q)$ neobsahuje žádné číslo tvaru $\frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$. Definujme dále

$$\delta = \min\{d_q;\ q \in \mathbb{N}, q \leq q_0\}.$$

Číslo δ je definováno jako minimum z konečné množiny kladných čísel, a proto je také kladné. Množina $B(a,\delta)$ tedy neobsahuje žádné číslo tvaru $\frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$

[1] Carl Johannes Thomae (1840 –1921)

a $q \in \mathbb{N}, q \leq q_0$. Pro každé $x \in B(a,\delta)$ tedy máme $0 \leq R(x) < \frac{1}{q_0} < \varepsilon$. Poněvadž $R(a) = 0$, je tím spojitost R v bodě a ověřena.

Nespojitost v bodech z $\mathbb{Q}$. Nechť $a \in \mathbb{Q}$. Potom $R(a) > 0$. Nalezneme $\varepsilon > 0$ takové, že $R(a) - \varepsilon > 0$. Pro každé $\delta > 0$ existuje iracionální číslo $x \in B(a,\delta)$, vizte řešení Příkladu 4.4.11, a proto $R(x) = 0 < R(a) - \varepsilon$. K danému ε tedy nelze nalézt příslušné δ z definice spojitosti, a proto je funkce R nespojitá v bodě a. ♣

4.4.13. Příklad. Nalezněte spojitou funkci na $\mathbb{R}$, která není na žádném nedegenerovaném intervalu v $\mathbb{R}$ monotónní.

Řešení. Nechť $\varphi(x) = |x|$ pro $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ a je dodefinována na $\mathbb{R}$ periodicky s periodou 1. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme

$$f_n(x) = 4^{-n}\varphi(4^n x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Funkce f_n je potom 4^{-n}-periodická a spojitá na $\mathbb{R}$ a nabývá maximální hodnoty $\frac{1}{2}4^{-n}$. Hledanou funkci definujeme předpisem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{4.22}$$

Korektnost definice f. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{2}4^{-n}$, a tedy řada v (4.22) konverguje podle srovnávacího kritéria, neboť $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}4^{-n}$ konverguje.

Spojitost f. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $4^{-m} < \varepsilon$. Dále nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall i \in \{1,\dots,m\}\ \forall x \in B(a,\delta)\colon |f_i(x) - f_i(a)| < \frac{\varepsilon}{m}.$$

Pak pro každé $y \in B(x,\delta)$ platí

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq \sum_{i=1}^{m} |f_i(x) - f_i(a)| + \sum_{i=m+1}^{\infty} \big(|f_i(x)| + |f_i(a)|\big) \\ &\leq m \cdot \frac{\varepsilon}{m} + \sum_{i=m+1}^{\infty} 2 \cdot \tfrac{1}{2}4^{-i} = \varepsilon + \tfrac{1}{3} \cdot 4^{-m} < 2\varepsilon. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Tedy f je spojitá v a.

Pozorování 1. Platí

$$\forall i \in \mathbb{N}\ \forall x, y \in \mathbb{R}\colon |f_i(x) - f_i(y)| \leq |x - y|.$$

Nechť $i \in \mathbb{N}$ a $x, y \in \mathbb{R}$. Funkce f_i je 4^{-i}-periodická, a proto můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $x, y \in [-\frac{1}{2}4^{-i}, \frac{1}{2}4^{-i}]$. Potom platí $4^i x, 4^i y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ a díky Důsledku 1.5.12 dostáváme

$$\begin{aligned} |f_i(x) - f_i(y)| &= \left|4^{-i}\varphi(4^i x) - 4^{-i}\varphi(4^i y)\right| = \left|4^{-i}(|4^i x| - |4^i y|)\right| \\ &= \big||x| - |y|\big| \leq |x - y|. \end{aligned}$$

Pozorování 2. Nechť $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $a = k4^{-n}$ a $h \in [0, \frac{1}{2}4^{-n}]$. Pak platí $f_n(a+h) = f_n(a-h) = h$.

Platí $4^n h \in [0, \frac{1}{2}]$, $4^n a = k \in \mathbb{Z}$ a φ je 1-periodická. Proto máme

$$f_n(a+h) = 4^{-n}\varphi(4^n a + 4^n h) = 4^{-n}\varphi(4^n h) = 4^{-n} \cdot 4^n h = h.$$

Obdobně obdržíme $f_n(a-h) = h$.

Pozorování 3. Nechť $k \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $a = k4^{-m}$ a $h = \frac{1}{2}4^{-2m}$. Pak $f(a+h) > f(a)$ a $f(a-h) > f(a)$.

Pro $n > 2m$ platí $k4^{n-m} \in \mathbb{Z}$ a $k4^{n-m} + \frac{1}{2}4^{n-2m} \in \mathbb{Z}$. Díky Pozorování 2 tedy pro každé $n > 2m$ platí

$$f_n(a) = f_n\big(k4^{-m}\big) = f_n\big(k4^{n-m}4^{-n}\big) = 0$$

a

$$f_n(a+h) = f_n\big(k4^{-m} + \tfrac{1}{2}4^{-2m}\big) = f_n\big((k4^{n-m} + \tfrac{1}{2}4^{n-2m}) \cdot 4^{-n}\big) = 0,$$

Podle Pozorování 2 obdržíme pro každé $n \in \{m, \dots, 2m\}$ rovnost $f_n(a+h) = h$. Díky Pozorování 1 a z předchozího máme

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \sum_{i=1}^{m-1}\big(f_i(a+h) - f_i(a)\big) + \sum_{i=m}^{2m}\big(f_i(a+h) - f_i(a)\big) \\ &\geq -(m-1)h + (m+1)h = 2h > 0. \end{aligned}$$

Obdobně dostaneme, že $f(a-h) - f(a) \geq h > 0$.

Nikde monotónnost f. Nechť I je nedegenerovaný interval. Nalezneme $m \in \mathbb{N}$ a $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $\big[(k-1)4^{-m}, (k+1)4^{-m}\big] \subset I$. Položíme $a = k4^{-m}$ a $h = \frac{1}{2}4^{-2m}$. Pak máme $a-h, a, a+h \in I$ a z Pozorování 2 dostáváme $f(a-h) > f(a)$ a $f(a+h) > f(a)$. Funkce f proto není monotónní na I. ♣

4.4.14. Příklad. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je nekonstantní periodická funkce. Označme

$$P = \{T > 0;\ T \text{ je perioda } f\}.$$

(a) Ukažte, že pokud je f spojitá, potom existuje minimum množiny P, tzv. *fundamentální perioda*.
(b) Ukažte, že minimum množiny P nemusí existovat.

Řešení. (a) Označme $T = \inf P$. Nejprve ukážeme, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) = f(x+T)$. Nalezneme posloupnost $\{T_n\}$ prvků množiny P splňující $\lim T_n = T$. Potom platí

$$f(x+T) = \lim f(x+T_n) = \lim f(x) = f(x).$$

První rovnost plyne pomocí Heineovy věty (Věta 4.2.17) ze spojitosti funkce f, druhá rovnost plyne z faktu, že f je T_n-periodická funkce pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Zbývá ukázat, že $T > 0$. Pro spor předpokládejme, že $T = 0$. Nalezneme posloupnost $\{T_n\}$ prvků množiny P splňující $\lim T_n = 0$. Nechť $x \in \mathbb{R}$ je libovolné, stejně jako $\varepsilon > 0$. Díky spojitosti f nalezneme $\delta > 0$, takové, že

$$\forall y \in (x-\delta, x+\delta)\colon |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Vezměme nyní $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $T_{n_0} < \delta$. Pak nalezneme $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $kT_{n_0} \in (x-\delta, x+\delta)$. Tedy

$$|f(x) - f(0)| = |f(x) - f(kT_{n_0})| < \varepsilon.$$

Jelikož ε bylo libovolné, platí $f(0) = f(x)$. Tedy f je konstantní, což je spor.

(b) Uvažujme Dirichletovu funkci D z Příkladu 4.4.11. Pak je každé kladné racionální číslo periodou funkce D, a tedy D nemá fundamentální periodu. ♣

Limes superior a inferior.

4.4.15. Limes superior a limes inferior pro funkce zavedeme podobně jako limes superior a limes inferior pro posloupnosti, vizte 2.4.8 a Definici 2.4.9. Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ a f je funkce, pro kterou existuje $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, splňující $P(c,\eta) \subset \mathcal{D}(f)$. **Limes superior** funkce f v bodě c definujeme jako

$$\limsup_{x\to c} f(x) = \begin{cases} \lim_{\delta\to 0_+} \sup f\big(P(c,\delta)\big), & \text{pokud existuje } \eta' \in (0,\eta)\text{, takové, že } f \text{ je omezená shora na } P(c,\eta'), \\ \infty, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pokud nastává první možnost, tj., pokud existuje $\eta' \in (0,\eta)$ takové, že f je omezená shora na $P(c,\eta')$, pak předpis $\delta \mapsto \sup f\big(P(c,\delta)\big)$ definuje reálnou funkci na intervalu $(0,\eta')$, která je neklesající, a proto existuje uvedená limita podle Věty 4.2.25(a). Definice je tedy korektní.

Limes inferior funkce f v bodě c definujeme jako

$$\liminf_{x\to c} f(x) = \begin{cases} \lim_{\delta\to 0_+} \inf f\big(P(c,\delta)\big), & \text{pokud existuje } \eta' \in (0,\eta)\text{ takové, že } f \text{ je omezená zdola na } P(c,\eta'), \\ -\infty, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Podobně jako v definici limes superior plyne existence limity v prvním případě z Věty 4.2.25. Tentokrát použijeme její část (b) na funkci $\delta \mapsto \inf f\big(P(c,\delta)\big)$, která je na intervalu $(0,\eta')$ nerostoucí

Obdobně definujeme limes superior a limes inferior v bodě c zleva či zprava, prstencová okolí v předchozích definicích nahradíme příslušnými jednostrannými prstencovými okolími.

V Příkladech 4.4.16–4.4.19 jsou funkce f a bod c jako v 4.4.15.

4.4.16. Příklad. Dokažte, že platí

$$\liminf_{x\to c} f(x) \le \limsup_{x\to c} f(x). \tag{4.24}$$

Řešení. Předpokládejme, že existuje $\eta' \in (0, \eta)$ takové, že funkce f je na množině $P(c, \eta')$ omezená. Pak pro každé $\delta \in (0, \eta')$ platí

$$\inf f\big(P(c,\delta)\big) \leq \sup f\big(P(c,\delta)\big).$$

Podle definice lim sup a lim inf dostaneme

$$\liminf_{x\to c} f(x) = \lim_{\delta\to 0_+} \inf f\big(P(c,\delta)\big) \leq \lim_{\delta\to 0_+} \sup f\big(P(c,\delta)\big) = \limsup_{x\to c} f(x).$$

V případě, že neexistuje η' s uvedenými vlastnostmi, pak $\liminf_{x\to c} f(x) = -\infty$ nebo $\limsup_{x\to c} f(x) = \infty$. V obou případech pak (4.24) zřejmě platí. ♣

4.4.17. Příklad. Limita $\lim_{x\to c} f(x)$ existuje právě tehdy, když $\limsup_{x\to c} f(x) = \liminf_{x\to c} f(x)$. Pokud $\lim_{x\to c} f(x)$ existuje, pak platí

$$\lim_{x\to c} f(x) = \limsup_{x\to c} f(x) = \liminf_{x\to c} f(x). \tag{4.25}$$

Řešení. Začneme s důkazem prvního tvrzení.

$\Rightarrow$ Označme $A = \lim_{x\to c} f(x)$. Rozlišíme případy podle hodnoty A. Předpokládejme nejprve, že $A \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta_1 > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(c,\delta_1)\colon f(x) \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon).$$

Odtud plyne $\sup f(B(c,\delta)) \leq A + \varepsilon$ pro každé $\delta \in (0,\delta_1)$. Podle definice limes superior pak dostáváme $\limsup_{x\to c} f(x) = \lim_{\delta\to 0_+} \sup f(B(c,\delta)) \leq A + \varepsilon$. Podobně odvodíme $\liminf_{x\to c} f(x) \geq A - \varepsilon$. Odtud a díky Příkladu 4.4.16 máme

$$0 \leq \limsup_{x\to c} f(x) - \liminf_{x\to c} f(x) \leq A + \varepsilon - (A-\varepsilon) = 2\varepsilon.$$

Vzhledem k tomu, že ε bylo voleno jako libovolné kladné reálné číslo, dostáváme požadovanou rovnost.

Pokud $A = \infty$, pak díky Příkladu 4.4.16 stačí dokázat, že $\liminf_{x\to c} f(x) = \infty$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta_1 > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(c,\delta_1)\colon f(x) > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Odtud plyne $\sup f(B(c,\delta)) \geq \frac{1}{\varepsilon}$ pro každé $\delta \in (0,\delta_1)$. Podle definice limes superior pak dostáváme $\limsup_{x\to c} f(x) = \lim_{\delta\to 0_+} \sup f(B(c,\delta)) \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Vzhledem k tomu, že ε bylo voleno jako libovolné kladné reálné číslo, dostáváme požadovanou rovnost.

Pokud $A = -\infty$, pak lze postupovat obdobně jako v předchozím případě.

$\Leftarrow$ Označme

$$A = \limsup_{x\to c} f(y) = \liminf_{x\to c} f(y).$$

Opět rozlišíme tři případy podle hodnoty A. Předpokládejme nejprve, že platí $A \in \mathbb{R}$. Pro dané $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, nalezneme kladná $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ taková, že

$$A - \varepsilon < \inf f(P(c,\delta_1)) \quad \text{a} \quad \sup f(P(c,\delta_2)) < A + \varepsilon.$$

Položíme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ a dostáváme

$$A - \varepsilon < \inf f(P(c,\delta)) \le \sup f(P(c,\delta)) < A + \varepsilon.$$

Tedy $f(P(c,\delta)) \subset B(A,\varepsilon)$, což dává $\lim_{x\to c} f(x) = A$.

Pokud platí $A = \infty$, pak pro dané $\varepsilon > 0$ nalezneme $\delta > 0$ takové, že $\inf f(P(c,\delta)) > \frac{1}{\varepsilon}$. Tedy $f(P(x,\delta)) \subset B(A,\varepsilon)$. Odtud plyne $\lim_{x\to c} f(y) = \infty$. V případě $A = -\infty$ lze dokázat obdobně jako předchozí případ.

V důkazu druhé implikace jsme ověřili platnost (4.25). ♣

4.4.18. Příklad. Platí $\liminf_{x\to c} f(x) = -\limsup_{x\to c}(-f(x))$.

Řešení. Pro $A \subset \mathbb{R}$ připomeňme značení $-A = \{-x;\ x \in A\}$.

Pomocné tvrzení. Nechť $A \subset \mathbb{R}$. Potom platí $\inf A = -\sup(-A)$.

Pokud je A neprázdná a zdola omezená, pak pomocné tvrzení platí podle Věty 1.5.17. Pokud je A prázdná, pak

$$\sup A = \sup \emptyset = -\infty \qquad \text{a} \qquad \inf(-A) = \inf \emptyset = \infty,$$

takže dokazovaná rovnost platí. Pokud A není zdola omezená, pak $-A$ není shora omezená, a proto $\sup(-A) = \infty$. Poněvadž platí $\inf A = -\infty$, dostáváme dokazovanou rovnost i v tomto případě.

Vlastní řešení. Nejprve předpokládejme, že existuje $\eta' \in (0,\eta)$, takové, že funkce f je zdola omezená na $P(c,\eta')$. Potom platí i díky pomocnému tvrzení

$$\begin{aligned}\liminf_{x\to c} f(x) &= \lim_{\delta\to 0+} \inf f(P(x,\delta)) = \lim_{\delta\to 0+} -\sup\bigl(-f(P(x,\delta))\bigr)\\ &= -\lim_{\delta\to 0+} \sup\bigl(-f(P(x,\delta))\bigr) = -\limsup_{x\to c} f(P(x,\delta)),\end{aligned}$$

čímž je tvrzení v tomto případě dokázáno.

V případě, kdy neexistuje $\eta' \in \mathbb{R}$, $\eta' > 0$, takové, že funkce f je zdola omezená a definovaná na $P(c,\eta')$, pak také neexistuje $\eta' \in \mathbb{R}$, $\eta' > 0$, takové, že funkce $-f$ je shora omezená a definovaná na $P(c,\eta')$. Podle definice dostáváme $\limsup_{x\to c}(-f(x)) = \infty$ a $\liminf_{x\to c} f(x) = -\infty$. Odtud plyne dokazovaná rovnost. ♣

4.4.19. Příklad. Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ a f, g jsou funkce definované na nějakém $P(c,\delta)$. Potom platí

$$\begin{aligned}\liminf_{x\to c}\bigl(f(y) + g(y)\bigr) &\ge \liminf_{x\to c} f(y) + \liminf_{x\to c} g(y),\\ \limsup_{x\to c}\bigl(f(y) + g(y)\bigr) &\le \limsup_{x\to c} f(y) + \limsup_{x\to c} g(y),\end{aligned}$$

pokud jsou pravé strany definovány.

Řešení. Dokážeme pouze druhou nerovnost, důkaz první je obdobný. Označme

$$b_1 = \limsup_{x\to c} f(x) \quad \text{a} \quad b_2 = \limsup_{x\to c} g(x).$$

Je-li $b_1 + b_2 = \infty$, požadovaná nerovnost zjevně platí. Předpokládejme tedy, že $b_1 + b_2 < \infty$ a nechť $b' \in \mathbb{R}$ je libovolné číslo větší než $b_1 + b_2$. Snadno nalezneme čísla $b_1', b_2' \in \mathbb{R}$ taková, že $b_1 < b_1'$, $b_2 < b_2'$ a $b_1' + b_2' < b'$. Z definice nyní existují $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ kladná splňující

$$\sup f(P(x,\delta_1)) < b_1' \quad \text{a} \quad \sup g(P(x,\delta_2)) < b_2'.$$

Pro $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ pak z Věty 1.5.20(a) dostáváme

$$\begin{aligned}\sup(f+g)(P(c,\delta)) &\le \sup f(P(c,\delta)) + \sup g(P(x,\delta))\\ &\le \sup f(P(c,\delta_1)) + \sup g(P(c,\delta_2))\\ &< b_1' + b_2' < b'.\end{aligned}$$

Tedy

$$\limsup_{x\to c}(f+g)(x) < b'.$$

Jelikož bylo b' libovolné, platí

$$\limsup_{x\to c}(f+g)(x) \le b_1 + b_2.$$

Tím je důkaz dokončen. ♣

4.5. Početní příklady k limitě funkce

4.5.1 (metody výpočtu limit)**.** Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, f je funkce a naším úkolem je spočítat limitu funkce f v bodě c. Pokud je funkce f v bodě c spojitá, pak platí $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ a výpočet je proveden. Často se však budeme setkávat se situací, kdy funkce f není spojitá v bodě c. Jednou z možností, kterou budeme často využívat, je nalezení funkce g, která je spojitá v bodě c a která se shoduje s funkcí f na jistém prstencovém okolí bodu c. Potom podle 4.1.14 platí $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = g(c)$.

Mezi další metody patří použití věty o aritmetice limit (Věta 4.2.1), věty o dvou strážnících (Věta 4.2.8(c)), věty o limitě složené funkce(Věta 4.2.20) a využití limit, jejichž hodnotu již známe. V následujících úlohách tyto postupy podrobně předvedeme. Další důležitou metodou je l'Hôpitalovo pravidlo, které je však uvedeno až v následující kapitole.

4.5.2. Příklad. Spočtěte

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}.$$

Řešení. Z Příkladu 4.2.5 víme, že funkce $x \mapsto x^2+2x-3$, $x \mapsto x^2-1$ jsou spojité na $\mathbb{R}$, a proto

$$\lim_{x\to 0}(x^2+2x-3) = -3 \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to 0}(x^2-1) = -1.$$

Z věty o aritmetice limit funkcí (Věta 4.2.1) dostáváme

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{\lim_{x\to 0}(x^2+2x-3)}{\lim_{x\to 0}(x^2-1)} = \frac{-3}{-1} = 3.$$

♣

4.5.3. Příklad. Spočtěte
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}.$$

Řešení. Díky spojitosti příslušných funkcí platí
$$\lim_{x\to 1}(x^2+2x-3)=0 \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to 1}(x^2-1)=0.$$
Jelikož výraz $\frac{0}{0}$ není definovaný, nelze použít přímočaře Větu 4.2.1(c). Označme
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}, && x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\\ g(x) &= \frac{x+3}{x+1}, && x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}. \end{aligned}$$
Pak
$$f(x)=\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)}=g(x), \qquad x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}.$$
Speciálně tedy platí, že pro každé $x\in P(1,1)$ máme $f(x)=g(x)$. Proto podle 4.1.14 $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1} g(x)$, pokud alespoň jedna z limit existuje. Poslední limitu ale snadno spočteme pomocí věty o aritmetice limit. Obdržíme tak
$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x+1}=\frac{\lim_{x\to 1}(x+3)}{\lim_{x\to 1}(x+1)}=\frac{4}{2}=2.$$

♣

4.5.4. Příklad. Spočtěte limitu
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}.$$

Řešení. Vezměme nejprve $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, pevné a vyjádřeme funkci x^n-2x+1 jako
$$\begin{aligned} x^n-2x+1 &= (x^n-x)-(x-1)=x(x^{n-1}-1)-(x-1)\\ &= x(x-1)\Big(\sum_{j=0}^{n-2}x^j\Big)-(x-1)=(x-1)\Big(x\Big(\sum_{j=0}^{n-2}x^j\Big)-1\Big). \end{aligned}$$
Tedy dostáváme postupem podobným jako v Příkladu 4.5.3 výpočet
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\Big(x\Big(\sum_{j=0}^{98}x^j\Big)-1\Big)}{(x-1)\Big(x\Big(\sum_{j=0}^{48}x^j\Big)-1\Big)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x\Big(\sum_{j=0}^{98}x^j\Big)-1}{x\Big(\sum_{j=0}^{48}x^j\Big)-1}=\frac{1\cdot 99-1}{1\cdot 49-1}=\frac{98}{48}=\frac{49}{24}. \end{aligned}$$

♣

4.5.5 (limity racionálních funkcí).

4.5.6. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$$

Řešení. Zajímá nás chování polynomů v zadané limitě pro x jdoucí do nekonečna. V čitateli i jmenovateli máme polynom 50 stupně, u něhož je v nekonečnu převládající člen x^{50}. Rozšíříme tedy zlomek v limitě výrazem $\frac{1}{x^{50}}$ a dostaneme

$$\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} = \frac{(2-\frac{3}{x})^{20}(3+\frac{2}{x})^{30}}{(2+\frac{1}{x})^{50}}.$$

Podle Příkladu 4.1.12 platí $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$. Tedy z věty o aritmetice limit funkcí (Věta 4.2.1) máme

$$\lim_{x\to\infty}\left(2-\tfrac{3}{x}\right) = 2, \qquad \lim_{x\to\infty}\left(3+\tfrac{2}{x}\right) = 3, \qquad \lim_{x\to\infty}\left(2+\tfrac{1}{x}\right) = 2.$$

Dále je funkce $y \mapsto y^n$, $y \in \mathbb{R}$, spojitá na $\mathbb{R}$ (vizte Příklad 4.2.5), a tedy máme opět z Věty 4.2.1

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2-\frac{3}{x})^{20}(3+\frac{2}{x})^{30}}{(2+\frac{1}{x})^{50}} = \frac{2^{20}\cdot 3^{30}}{2^{50}}.$$

♣

4.5.7. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1} \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} x^j\right) - n}{x-1}.$$

Řešení. Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ vyjádříme

$$\frac{\left(\sum_{j=1}^{n} x^j\right) - n}{x-1} = \frac{\sum_{j=1}^{n}(x^j-1)}{x-1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{x^j-1}{x-1}.$$

Pro každé $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ platí

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{x^j-1}{x-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(\sum_{k=0}^{j-1} x^k\right)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1} \sum_{k=0}^{j-1} x^k = j.\end{aligned}$$

Z Věty 4.2.1 tady máme

$$\lim_{x\to 1} \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} x^j\right) - n}{x-1} = \sum_{j=1}^{n} j = \tfrac{1}{2}n(n+1),$$

přičemž poslední rovnost plyne z Příkladu 1.8.6 pro $a = 1$ a $b = 0$. ♣

4.5.8. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2},$$

kde $n, m \in \mathbb{N}$.

Řešení. Čitatel zadané funkce vyjádříme pro $x \in \mathbb{R}$ jako

$$\begin{aligned}(1+mx)^n - (1+nx)^m &= \Big(\sum_{j=0}^{n} \tbinom{n}{j}(mx)^j\Big) - \Big(\sum_{k=0}^{m} \tbinom{m}{k}(nx)^k\Big)\\ &= \Big(1 + \tbinom{n}{1}mx + \sum_{j=2}^{n} \tbinom{n}{j}(mx)^j\Big) - \Big(1 + \tbinom{m}{1}nx + \sum_{k=2}^{m} \tbinom{m}{k}(nx)^k\Big).\end{aligned}$$

Protože platí $\binom{n}{1}m = nm = mn = \binom{m}{1}n$ máme

$$(1+mx)^n - (1+nx)^m = x^2 \cdot P(x),$$

kde P je polynom definovaný předpisem

$$P(x) = \Big(\sum_{j=2}^{n} \tbinom{n}{j} m^j x^{j-2}\Big) - \Big(\sum_{k=2}^{m} \tbinom{m}{k} n^k x^{k-2}\Big). \tag{4.26}$$

Z Věty 4.2.1 a Příkladu 4.2.5 tedy dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} = \lim_{x\to 0} P(x) = P(0).$$

V závislosti na n a m vyjádříme hodnotu $P(0)$ z (4.26), přičemž bereme v úvahu konvenci zavedenou v 1.5.2(a):

$$P(0) = \begin{cases} 0 - 0 = 0, & n = m = 1,\\ 0 - \binom{m}{2}n^2 = -\binom{m}{2}n^2, & n = 1, m > 1,\\ \binom{n}{2}m^2 - 0 = \binom{n}{2}m^2, & n > 1, m = 1,\\ \binom{n}{2}m^2 - \binom{m}{2}n^2. & n > 1, m > 1.\end{cases}$$

Ve všech uvedených případech je příslušná hodnota $P(0)$ rovna $\frac{1}{2}nm(n-m)$, což je tedy výsledek naší úlohy. ♣

4.5.9. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1}\Big(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n}\Big),$$

kde $m, n \in \mathbb{N}$.

Řešení. Funkci v zadané limitě upravíme takto

$$\begin{aligned}\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}&=\frac{m(1-x^n)-n(1-x^m)}{(1-x^n)(1-x^m)}\\&=\frac{m(1-x^n)-n(1-x^m)}{(1-x)\sum_{i=0}^{n-1}x^i\cdot(1-x)\sum_{j=0}^{n-1}x^j}\\&=\frac{m(1-x^n)-n(1-x^m)}{(1-x)^2}\cdot\frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1}x^i\cdot\sum_{j=0}^{n-1}x^j}.\end{aligned}\tag{4.27}$$

Limity obou činitelů vypočítáme zvlášť. Pro každé $x\in\mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}m(1-x^n)&=m(1-x)\sum_{j=0}^{n-1}x^j\\&=m(1-x)\sum_{j=0}^{n-1}(x^j-1)+m(1-x)\sum_{j=0}^{n-1}1\\&=m(1-x)^2\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{j-1}x^k+mn(1-x)\end{aligned}\tag{4.28}$$

Obdobně platí

$$n(1-x^m)=n(1-x)^2\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{l-1}x^l+mn(1-x)\tag{4.29}$$

Díky (4.28) a (4.29) platí pro každé $x\in P(1,1)$

$$\frac{m(1-x^n)-m(1-x^n)}{(1-x)^2}=m\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{j-1}x^k-n\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{l-1}x^l.$$

Limitu funkce v bodě 1 na pravé straně je již snadné dopočítat, neboť jde o polynom. Máme tedy

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{m(1-x^n)-m(1-x^n)}{(1-x)^2}&=\lim_{x\to1}\Big(m\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{j-1}x^k-n\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{i-1}x^l\Big)\\&=m\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{j-1}1-n\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{i-1}1\\&=m\sum_{j=0}^{n-1}j-n\sum_{i=0}^{m-1}i=m\cdot\tfrac12 n(n-1)-n\cdot\tfrac12 m(m-1)\\&=\tfrac12 mn(n-m).\end{aligned}$$

Přímým použitím věty o limitě podílu spočteme limitu druhého činitele v (4.27)

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} x^i \cdot \sum_{j=0}^{n-1} x^j} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} 1 \cdot \sum_{j=0}^{n-1} 1} = \frac{1}{nm}.$$

Odtud pomocí věty o limitě součinu odvodíme výsledek naší úlohy

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n}\right) = \frac{\frac{1}{2}mn(n-m)}{nm} = \frac{1}{2}(n-m).$$

♣

4.5.10 (limity s odmocninami)**.**

4.5.11. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2-9}.$$

Řešení. Pro každé $x \in P(3,1)$ platí

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2-9} &= \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2-9} \cdot \frac{\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{(x+13) - 4(x+1)}{x^2-9} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{-3(x-3)}{(x-3)(x+3)} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1}}.\end{aligned}$$

Funkce

$$g(x) = \frac{-3}{x+3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1}}, \qquad x \in (2,\infty),$$

je spojitá na intervalu $I = (2,\infty)$ z následujících důvodů. Funkce $x \mapsto x+13$, $x \mapsto x+1$ jsou spojité na I dle Příkladu 4.2.5. Vzhledem k Příkladu 4.2.19 a Větě 4.3.3 jsou i funkce $x \mapsto \sqrt{x+13}$, $x \mapsto \sqrt{x+1}$ spojité na I. Dále jsou funkce $x \mapsto x+3$, $x \mapsto \sqrt{x+13}$, $x \mapsto \sqrt{x+1}$ kladné na I, a tedy je g, jakožto výsledek algebraických operací provedených na tyto funkce, spojitá na I dle Věty 4.2.4. Odtud a také díky 4.5.1 máme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2-9} &= \lim_{x\to 3} \frac{-3}{x+3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{-3}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{16} + 2\sqrt{4}} = -\frac{1}{16}.\end{aligned}$$

♣

4.5.12. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}.$$

Řešení. Pro každé $x \in P(0,1)$ platí

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}} = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}} & \\
\cdot \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} & \\
\cdot \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}} & \\
= \frac{1+x-(1-x)}{1+x-(1-x)} \cdot \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} & \\
= \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}. &
\end{aligned}
$$

Z Věty 4.2.1 a Příkladu 4.2.19 máme

$$
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}} = \frac{3}{2}.
$$

♣

4.5.13. Příklad. Spočtěte limitu

$$
\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2},
$$

Řešení. Úprava čitatele. Použijeme vzorec z Příkladu 1.5.7 pro $n = 6$, $a = \sqrt{x+2}$ a $b = \sqrt[3]{x+20}$. Definujme funkci g předpisem

$$
g(x) = \sum_{i=1}^{6} \left(\sqrt{x+2}\right)^{6-i} \cdot \left(\sqrt[3]{x+20}\right)^{i}, \qquad x \in (0,\infty).
$$

Potom platí

$$
\lim_{x\to 7} g(x) = 6 \cdot 3^5 \tag{4.30}
$$

a pro každé $x \in (0,\infty)$ máme

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20} &= \frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^6-\left(\sqrt[3]{x+20}\right)^6}{g(x)} = \frac{(x+2)^3-(x+20)^2}{g(x)} \\
&= \frac{x^3+5x^2-28x-392}{g(x)}.
\end{aligned}
$$

Polynom v čitateli předchozího výrazu označme jako Q. Číslo 7 je kořenem Q a pomocí algoritmu z 1.7.9 dostaneme, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$
Q(x) = (x-7)(x^2+12x+56). \tag{4.31}
$$

Úprava jmenovatele. Opět použijeme vzorec z Příkladu 1.5.7, tentokrát pro $n = 4$, $a = \sqrt[4]{x+9}$ a $b = 2$. Definujme funkci h předpisem

$$h(x) = \sum_{i=1}^{4} \left(\sqrt[4]{x+9}\right)^{4-i} 2^i, \qquad (0, \infty).$$

Potom platí

$$\lim_{x\to 7} h(x) = 4 \cdot 2^3 \tag{4.32}$$

a pro každé $x \in (0, \infty)$ máme

$$\sqrt[4]{x+9} - 2 = \frac{(x+9) - 2^4}{h(x)} = \frac{x-7}{h(x)}.$$

Kombinací (4.30), (4.31) a (4.32) dostaneme pomocí Věty 4.2.1 závěr

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2} &= \lim_{x\to 7} \frac{(x-7)(x^2+12x+56)}{g(x)} \cdot \frac{h(x)}{x-7} \\ &= \frac{(7^2 + 12 \cdot 7 + 56)(4 \cdot 2^3)}{6 \cdot 3^5} = \frac{189 \cdot 4 \cdot 2^3}{6 \cdot 3^5}.\end{aligned}$$

♣

4.5.14. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1 - \sqrt{1-\frac{x}{2}}}.$$

Řešení. Úprava čitatele. Pro zjednodušení zápisu definujme na intervalu $(-1, 1)$ pomocné funkce

$$a(x) = \sqrt[3]{1+\tfrac{x}{3}} \qquad \text{a} \qquad b(x) = \sqrt[4]{1+\tfrac{x}{4}}.$$

Podle vzorce z Příkladu 1.5.7 pro $n = 12$ platí pro každé $x \in (-1, 1)$

$$a(x)^{12} - b(x)^{12} = (a(x) - b(x)) \cdot \sum_{k=1}^{12} a(x)^{12-k} b(x)^{k-1}.$$

Pro $x \in (-1, \infty)$ označme ještě

$$c(x) = \sum_{k=1}^{12} a(x)^{12-k} b(x)^{k-1}.$$

Pak pro každé $x \in (-1, 1)$ máme

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1+\frac{x}{4}} &= a(x) - b(x) = \frac{a(x)^{12} - b(x)^{12}}{c(x)} \\
&= \frac{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{3}x}\right)^{12} - \left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{4}x}\right)^{12}}{c(x)} \\
&= \frac{1}{c(x)} \cdot \left(\left(1+\tfrac{1}{3}x\right)^4 - \left(1+\tfrac{1}{4}x\right)^3\right) \\
&= \frac{1}{c(x)} \cdot \left(\sum_{k=0}^{4} \tbinom{4}{k}\left(\tfrac{1}{3}x\right)^k - \sum_{k=0}^{3} \tbinom{3}{k}\left(\tfrac{1}{4}x\right)^k\right) \\
&= \frac{1}{c(x)} \cdot \left(x\left(\tbinom{4}{1} - \tbinom{3}{1}\right) + x^2 P(x)\right),
\end{aligned}$$

kde P je polynom.

Úprava jmenovatele. Dále pro každé $x \in (-1, 1)$ platí

$$1 - \sqrt{1-\frac{x}{2}} = \frac{1-(1-\frac{1}{2}x)}{1+\sqrt{1-\frac{1}{2}x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1+\sqrt{1-\frac{1}{2}x}}.$$

Závěrečný výpočet. Funkce a a b jsou spojité v 0, a proto je v 0 spojitá i funkce c. Platí tedy $\lim_{x\to 0} c(x) = c(0) = 12$. Podobně jako v předchozích úlohách dostáváme

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{c(x)} \cdot \left(x\left(\binom{4}{1} - \binom{3}{1}\right) + x^2 P(x)\right)}{\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1+\sqrt{1-\frac{1}{2}x}}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{c(x)} \cdot \left(1 + xP(x)\right) \cdot 2 \cdot \left(1 + \sqrt{1-\tfrac{1}{2}x}\right) \\
&= \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

♣

4.5.15. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}.$$

Řešení. Pomocí Věty 4.2.1 a Příkladu 4.2.19 spočteme

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}=1.$$

♣

4.5.16. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right).$$

Řešení. Pro každé $x\in(0,\infty)$ platí

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\\
&\quad=\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}+\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\\
&\quad=\frac{x+2-(x+1)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}+\frac{x-(x+1)}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\\
&\quad=\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\\
&\quad=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}\\
&\quad=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}\\
&\quad=\frac{-2}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+2}\right)}.
\end{aligned}$$

Proto platí

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\\
&\quad=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)}\\
&\quad=\frac{-2}{2\cdot 2\cdot 2}=-\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

♣

4.5.17. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left[\sqrt{x^2+5}\right]+x}{\sqrt{x^2+1}+[3x]}.$$

Řešení. Protože pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $[x] \le x < [x]+1$, dostáváme odhady

$$\frac{\sqrt{x^2+5}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+3x} \le \frac{\left[\sqrt{x^2+5}\right]+x}{\sqrt{x^2+1}+[3x]} \le \frac{\sqrt{x^2+5}+x}{\sqrt{x^2+1}+3x-1} \tag{4.33}$$

platné pro každé reálné číslo $x > 1$. Označme pro $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+3x} \quad \text{a} \quad g(x) = \frac{\sqrt{x^2+5}+x}{\sqrt{x^2+1}+3x-1}.$$

Pak

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+3} = \frac{1}{2} \tag{4.34}$$

a

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+3-\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}. \tag{4.35}$$

Označíme-li

$$h(x) = \frac{\left[\sqrt{x^2+5}\right]+x}{\sqrt{x^2+1}+[3x]}, \quad x \in (1,\infty),$$

dostáváme z (4.33) nerovnosti

$$f(x) \le h(x) \le g(x), \quad x \in (1,\infty).$$

Díky Větě 4.2.8(c) tak z (4.34) a (4.35) plyne

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \frac{1}{2}.$$

♣

4.5.18. Příklad. Ukažte, že

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x(\sin x - 1)}{\sqrt{x^2+1}}$$

neexistuje.

Řešení. Pro spor předpokládejme, že $\lim_{x\to\infty} \frac{x(\sin x-1)}{\sqrt{x^2+1}} = A \in \mathbb{R}^*$. Označme $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$. Pak

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1.$$

Uvažujme pro $n \in \mathbb{N}$ body

$$x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad y_n = 2\pi n.$$

Pak $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ jsou posloupnosti v definičním oboru funkce $\frac{x(\sin x - 1)}{\sqrt{x^2+1}}$ konvergující k ∞, a proto z Heineovy věty 4.2.16 plyne

$$A = \lim_{n\to\infty} f(x_n)(\sin x_n - 1) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

a

$$A = \lim_{n\to\infty} f(y_n)(\sin y_n - 1) = \lim_{n\to\infty} f(y_n)(-1) = -1.$$

To je ale zřejmý spor, takže $\lim_{x\to\infty} \frac{x(\sin x - 1)}{\sqrt{x^2+1}}$ neexistuje. ♣

KAPITOLA 5

Derivace funkce

Derivace funkce je po pojmech limity posloupnosti a limity funkce dalším klíčovým pojmem matematické analýzy. V této kapitole odvodíme jeho základní vlastnosti a pomocí něj budeme zkoumat hlubší vlastnosti funkcí a zkoumat průběh funkce.

5.1. Základní vlastnosti derivace

5.1.1. Definice. Nechť $a \in \mathbb{R}$ a f je funkce. Jestliže existuje limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \tag{5.1}$$

pak tuto limitu nazýváme **derivací funkce** f **v bodě** a a značíme ji $f'(a)$. Obdobně definujeme **derivaci zprava** a **derivaci zleva funkce** f **v bodě** a předpisy

$$\lim_{h \to 0_+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad \text{a} \qquad \lim_{h \to 0_-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Derivaci zleva v bodě a derivaci zprava v bodě nazýváme **jednostrannými derivacemi**.

5.1.2. Označení. Jestliže existuje derivace funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$, pak je určena jednoznačně. Tvrzení bezprostředně vyplývá z definice derivace a Věty 4.1.7 o jednoznačnosti limity funkce. Obdobná tvrzení platí pro jednostranné derivace. Derivaci funkce f v bodě a, derivaci funkce f v bodě a zprava a derivaci funkce f v bodě a zleva budeme po řadě značit $f'(a)$, $f'_+(a)$ a $f'_-(a)$.

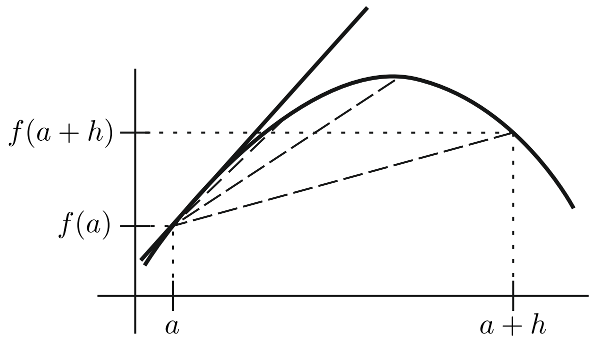
5.1.3. (a) Při počítání derivace funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ mohou nastat tyto případy:

$$\text{derivace v bodě } a \begin{cases} \text{neexistuje,} \\ \text{existuje a je} \begin{cases} \textbf{vlastní}\text{, tj. je rovna reálnému číslu,} \\ \textbf{nevlastní}\text{, tj. je rovna } +\infty \text{ nebo } -\infty. \end{cases} \end{cases}$$

(b) Z existence $f'(a)$ plyne, že funkce f je definovaná na jistém okolí bodu a. Podobně z existence $f'_+(a)$ plyne, že funkce f je definovaná na jistém pravém okolí bodu a. Obdobné tvrzení platí i pro derivaci zleva.

(c) Derivace reálné funkce v bodě má *lokální charakter*. To znamená, že jestliže se funkce f a g shodují na nějakém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ a existuje $f'(a)$, pak existuje i $g'(a)$ a platí $f'(a) = g'(a)$. Srovnejte s 4.1.14

5.1.4 (geometrický význam derivace)**.** Podíl $\frac{1}{h}\big(f(a+h) - f(a)\big)$ je směrnicí afinní funkce, jejíž graf obsahuje body $[a, f(a)]$ a $[a+h, f(a+h)]$. Přibližujeme-li bod h k 0, pak, pokud $f'(a)$ existuje vlastní, se příslušná afinní funkce v jistém smyslu přibližuje k afinní funkci se směrnicí $f'(a)$, jejíž graf obsahuje bod $[a, f(a)]$.



Obrázek 1.

5.1.5. Definice. Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a $f'(a)$ existuje vlastní. Pak **tečnou ke grafu funkce** f **v bodě** a nazýváme afinní funkci $t\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$t(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

5.1.6 (aproximační vlastnost tečny)**.** Nechť f, t a a jsou jako výše. Pak tečna t má následující důležitou vlastnost

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{f(x) - t(x)}{x - a} &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)\cdot(x-a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a}\Big(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a)\Big) = f'(a) - f'(a) = 0.\end{aligned}$$

Funkce t tedy v blízkosti bodu a dobře přibližuje (aproximuje) chování funkce f ve výše uvedeném smyslu.

5.1.7 (diferenciální počet jako nauka o linearizaci)**.** Tečna ke grafu funkce f v bodě a je afinní funkce, a jde tedy o jednoduchý objekt, který poskytuje informaci o chování obecně složitějšího objektu, totiž funkce f. Tečna nese jen část informace o chování f, která však někdy může být dostatečná pro zkoumání jistých vlastností funkce f. Pokud při řešení nějakého problému nahradíme funkci f její tečnou, hovoříme o *linearizaci*. Možnosti a korektnost takových postupů budeme zkoumat v této i dalších kapitolách.

5.1.8 (alternativní vzorec pro výpočet derivace)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$ a f je funkce. Potom platí

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \tag{5.2}$$

pokud alespoň jedna z limit existuje. Odtud plyne alternativní vzorec pro výpočet derivace

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Obdobně platí

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a_+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \text{a} \qquad f'_-(a) = \lim_{x \to a_-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

vždy má-li alespoň jedna ze stran rovnosti smysl.

Ověříme rovnost (5.2). Předpokládejme, že existuje limita na levé straně. Pak je funkce

$$F(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

definována na jistém prstencovém okolí bodu 0. Označme dále $g(x) = x - a$, $x \in \mathbb{R}$. Funkce g splňuje $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ a $g(x) \neq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$. Podle věty o limitě složené funkce (Věta 4.2.20(P)) dostáváme

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} F(g(x)) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Nyní naopak předpokládejme, že existuje limita na pravé straně (5.2). Potom je funkce

$$G(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

definovaná na nějakém prstencovém okolí bodu a. Označme dále $u(h) = a + h$, $h \in \mathbb{R}$. Funkce u splňuje $\lim_{h \to 0} u(h) = a$ a $u(h) \neq a$ pro každé $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Podle věty o limitě složené funkce (Věta 4.2.20(P)) dostáváme

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} G(u(h)) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

5.1.9. Věta (vztah derivace a jednostranných derivací)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$ a f je funkce. Potom $f'(a)$ existuje právě tehdy, když existují $f'_+(a)$ a $f'_-(a)$ a platí $f'_+(a) = f'_-(a)$. Navíc pokud $f'(a)$ existuje, potom $f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a)$.

Důkaz. Tvrzení bezprostředně plyne z definice derivace, definice jednostranných derivací a Věty 4.1.18. ■

5.1.10. Definice. Nechť f je reálná funkce. Potom **definičním oborem funkce** f' budeme rozumět množinu všech $x \in \mathcal{D}(f)$, pro která existuje vlastní $f'(x)$.

5.1.11. Příklad. Nechť $c \in \mathbb{R}$, $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$, a $a \in \mathbb{R}$. Dokažte, že platí $f'(a) = 0$.

Řešení. Podle 5.1.8 platí

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{c - c}{x - a} = \lim_{x\to a} 0 = 0.$$

♣

5.1.12. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$, a $a \in \mathbb{R}$. Dokažte, že platí $f'(a) = na^{n-1}$.

Řešení. S pomocí Příkladu 1.5.7 spočteme

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{x - a}{x - a} \cdot \sum_{k=1}^{n} x^{n-k} a^{k-1} \\ &= \lim_{x\to a} \sum_{k=1}^{n} x^{n-k} a^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} a^{k-1} = na^{n-1}. \end{aligned}$$

Poslední rovnost plyne ze spojitosti polynomů (Příklad 4.2.5). ♣

5.1.13. Příklad. Nechť $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že $f'(0)$ neexistuje, $f'_+(0) = 1$ a $f'_-(0) = -1$.

Řešení. Podle definice jednostranných derivací máme

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{x} = 1, \\ f'_-(0) &= \lim_{x\to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0-} \frac{-x}{x} = -1. \end{aligned}$$

Protože se jednostranné derivace funkce f v bodě 0 nerovnají, vyplývá z Věty 5.1.9, že $f'(0)$ neexistuje. ♣

5.1.14. Příklad. Nechť $f(x) = \operatorname{sign} x$, $x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že $f'(0) = \infty$.

Řešení. Platí

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty, \\ f'_-(0) &= \lim_{x\to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0-} \frac{-1}{x} = \infty. \end{aligned}$$

Z Věty 5.1.9 tedy vyplývá, že $f'(0) = \infty$. ♣

Ukázali jsme, že existence (nevlastní) derivace funkce f v bodě a nezaručuje její spojitost v a. Jestliže však má f *vlastní* derivaci v a, pak je již v tomto bodě spojitá.

5.1.15. Věta (derivace a spojitost)**.** Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. Potom je f v bodě a spojitá.

Důkaz. Podle věty o aritmetice limit pro funkce (Věta 4.2.1) platí

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a}\Big(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)+f(a)\Big)\\ &= f'(a)\cdot 0 + f(a) = f(a),\end{aligned}$$

neboť $f'(a)$ existuje vlastní. Funkce f je tedy v a spojitá. ■

5.1.16. Tvrzení obdobné Větě 5.1.15 platí i pro jednostranné derivace: existuje-li vlastní $f'_+(a)$, pak funkce f je spojitá zprava v bodě a a existuje-li vlastní $f'_-(a)$, pak funkce f je spojitá zleva v bodě a. Důkaz lze provést obdobně jako důkaz předchozí věty.

5.1.17. Věta (aritmetika derivací)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$ a f, g jsou funkce, které mají v bodě a derivaci.

(a) Pak platí
$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$
je-li výraz na pravé straně definován.

(b) Nechť alespoň jedna z funkcí f a g je spojitá v bodě a. Potom platí
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$
je-li výraz na pravé straně definován.

(c) Nechť funkce g je spojitá v bodě a. Potom platí
$$\Big(\frac{f}{g}\Big)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)},$$
je-li výraz na pravé straně definován.

Důkaz. (a) Je-li výraz $f'(a) + g'(a)$ definován, pak podle definice derivace a věty o aritmetice limit pro funkce (Věta 4.2.1) máme

$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= \lim_{h\to 0}\tfrac{1}{h}\big(f(a+h)+g(a+h)-f(a)-g(a)\big)\\ &= \lim_{h\to 0}\tfrac{1}{h}\big(f(a+h)-f(a)\big) + \lim_{h\to 0}\tfrac{1}{h}\big(g(a+h)-g(a)\big)\\ &= f'(a)+g'(a).\end{aligned}$$

(b) Předpokládejme, že funkce g je spojitá v bodě a a výraz $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ je definován. Potom $\lim_{h\to 0} g(a+h) = g(a)$ a díky této rovnosti dostaneme pomocí definice derivace a věty o aritmetice limit pro funkce

$$\begin{aligned}(fg)'(a) &= \lim_{h\to 0}\tfrac{1}{h}\big(f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)\big)\\ &= \lim_{h\to 0}\tfrac{1}{h}\big(f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a+h) + f(a)g(a+h) - f(a)g(a)\big)\\ &= \lim_{h\to 0}\tfrac{1}{h}\Big(\big(f(a+h)-f(a)\big)g(a+h) + f(a)\big(g(a+h)-g(a)\big)\Big)\\ &= \lim_{h\to 0}\tfrac{1}{h}\big(f(a+h)-f(a)\big)g(a+h) + \lim_{h\to 0}\tfrac{1}{h}f(a)\big(g(a+h)-g(a)\big)\\ &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a).\end{aligned}$$

V případě, že je v bodě a spojitá funkce f, postupujeme obdobně.

(c) Předpokládejme, že výraz na pravé straně dokazované rovnosti je definován. Potom $g(a) \neq 0$ a můžeme počítat

$$
\begin{aligned}
\Big(\frac{f}{g}\Big)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(\frac{f(a+h)}{g(a+h)} - \frac{f(a)}{g(a)}\Big) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(a+h)g(a)}\Big(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}g(a) - f(a)\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\Big) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(a+h)g(a)} \cdot \Big(\lim_{x\to a} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}g(a) - \lim_{x\to a} f(a)\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\Big) \\
&= \frac{1}{g^2(a)} \cdot \big(f'(a)g(a) - f(a)g'(a)\big).
\end{aligned}
$$

Při výpočtu jsme využili větu o aritmetice limit a vztah $\lim_{h\to 0} g(a+h) = g(a)$, neboli spojitost funkce g v bodě a. ■

5.1.18. Tvrzení Věty 5.1.17 platí obdobně i pro jednostranné derivace.

5.1.19. Pokud jsou derivace funkcí f a g v bodě a vlastní, pak jsou splněny předpoklady platnosti vztahů v bodech (a) a (b) předchozí věty. Pokud navíc $g(a) \neq 0$, pak jsou splněny i předpoklady pro bod (c).

5.1.20. Pomocí matematické indukce můžeme rozšířit platnost tvrzení (a) a (b) z předchozí věty následovně. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ a $f_1, \dots, f_n$ jsou funkce, které mají v bodě a derivaci.

(a) Pak platí

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} f_j\Big)'(a) = \sum_{j=1}^{n} f_j'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

(b) Nechť jsou funkce $f_1, \dots, f_n$ spojité v bodě a. Potom platí

$$\Big(\prod_{j=1}^{n} f_j\Big)'(a) = \sum_{k=1}^{n}\Big(f_k'(a) \cdot \prod_{j=1, j\neq k}^{n} f_j(a)\Big),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

5.1.21. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ a $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Vzorec plyne z Příkladů 5.1.11, 5.1.12 a Věty 5.1.17(a),(b). ♣

5.1.22. Příklad. Definujme funkce f a g předpisy

$$f(x) = \operatorname{sign} x \qquad \text{a} \qquad g(x) = \begin{cases} -\operatorname{sign} x & \text{pro } x \neq \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \frac{1}{2} & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Dokažte, že $f'(0)$ a $g'(0)$ existují, ale $(f+g)'(0)$ neexistuje.

Řešení. Z Příkladu 5.1.14 víme, že $f'(0) = \infty$, a podobně spočteme $g'(0) = -\infty$. Dále platí

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \frac{1}{2} & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Opět snadno vypočítáme, že $(f + g)'_+(0) = -\infty$ a $(f + g)'_-(0) = \infty$. Tedy podle Věty 5.1.9 $(f + g)'(0)$ neexistuje. ♣

5.1.23. Předcházející příklad ukazuje, že z existence derivací funkcí f a g v bodě a obecně neplyne existence derivace funkce $f + g$ v bodě a. Funkce uvedené v tomto příkladu ovšem nesplňují podmínku Věty 5.1.17(a), totiž že výraz $f'(a) + g'(a)$ má být definován, tento předpoklad Věty 5.1.17(a) tedy nelze vynechat. Obdobné příklady vztahující se k částem (b) a (c) jsou uvedeny v oddílu 5.9.

5.1.24. Věta (derivace složené funkce)**.** Nechť funkce g je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$, má v tomto bodě derivaci a funkce f má derivaci v bodě $g(a)$. Pak platí

$$(f \circ g)'(a) = f'\big(g(a)\big) \cdot g'(a), \tag{5.3}$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Důkaz. Označme $b = g(a)$. Definujme pomocnou funkci φ předpisem

$$\varphi(y) = \frac{f(y) - f(b)}{y - b}, \quad y \in \mathcal{D}(f) \setminus \{b\}.$$

Díky existenci $f'(b)$ platí $\lim_{y \to b} \varphi(y) = f'(b)$. Důkaz nyní rozdělíme na dva případy podle toho, zda je $g'(a)$ různá od 0, nebo rovna 0.

Případ $g'(a) \neq 0$. Podle Věty 4.2.8(a) nalezneme $\eta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(a, \eta) \colon \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \neq 0.$$

Odtud plyne

$$\forall x \in P(a, \eta) \colon g(x) \neq g(a). \tag{5.4}$$

Potom podle předpokladu platí $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$. Nyní použijeme Větu 4.2.20(P) pro složení vnější funkce φ s vnitřní funkcí g. Podmínka (P) je splněna díky (5.4). Dostaneme

$$\lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \to a} (\varphi \circ g)(x) = \lim_{y \to b} \varphi(y) = f'(b). \tag{5.5}$$

Odtud podle věty o limitě součinu (Věta 4.2.1(b)) dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} &= \lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= f'(b) \cdot g'(a), \end{aligned}$$

přičemž jsme využili (5.5), předpoklad existence $g'(a)$ a také předpoklad, že výraz $f'(b) \cdot g'(a)$ je definován.

Případ $g'(a) = 0$. Protože výraz na pravé straně (5.3) je definován, je $f'(b)$ vlastní. Podle Věty 4.1.23 nalezneme $C > 0$ a $\delta > 0$ taková, že pro každé $y \in P(b, \delta)$ platí $|\varphi(y)| < C$. Odtud plyne

$$\forall y \in B(b, \delta) \colon |f(y) - f(b)| \le C|y - b|. \tag{5.6}$$

Nerovnost v (5.6) platí i pro $y = b$, neboť na obě strany nerovnosti jsou nulové. Zvolme $\varepsilon > 0$. Z definice derivace nalezneme $\varrho_1 > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in P(a, \varrho_1) \colon \left|\frac{g(x) - g(a)}{x - a}\right| < \varepsilon. \tag{5.7}$$

Díky spojitosti g v a existuje $\varrho_2 \in (0, \varrho_1)$ takové, že platí

$$\forall x \in B(a, \varrho_2) \colon g(x) \in B(b, \delta). \tag{5.8}$$

Pro každé $x \in P(a, \varrho_2)$ pak platí $g(x) \in B(b, \delta)$ a podle (5.6), (5.7) máme

$$\begin{aligned}\left|\frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a}\right| &= \frac{|f(g(x)) - f(b)|}{|x - a|} \le \frac{C|g(x) - b|}{|x - a|} \\ &= C \cdot \left|\frac{g(x) - g(a)}{x - a}\right| < C \cdot \varepsilon.\end{aligned}$$

Odtud plyne

$$(f \circ g)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} = 0 = f'(b) \cdot g'(a).$$

Tím je důkaz dokončen. ■

5.1.25. Ve Větě 5.1.24 je předpoklad spojitosti funkce g v bodě a automaticky splněn, je-li $g'(a)$ vlastní, jak plyne z Věty 5.1.15.

Předpoklad spojitosti vnitřní funkce ve Větě 5.1.24 nelze obecně vynechat, jak ukazuje následující příklad.

5.1.26. Příklad. Nechť funkce f a g jsou definovány pomocí předpisů

$$f(y) = |y|, \quad y \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ -\frac{1}{2} & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Dokažte, že výraz $f'(g(0)) \cdot g'(0)$ má smysl, ale přesto $(f \circ g)'(0)$ neexistuje.

Řešení. Podobně jako v Příkladu 5.1.14 odvodíme, že $g'(0) = \infty$. Dále zřejmě platí $f'(-\frac{1}{2}) = -1$. Výraz

$$f'(g(0)) \cdot g'(0) = f'\left(-\tfrac{1}{2}\right) \cdot g'(0) = (-1) \cdot \infty = -\infty$$

tedy má smysl. Dále platí

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \frac{1}{2} & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

a tedy $(f \circ g)'_-(0) = -\infty$, $(f \circ g)'_+(0) = \infty$, takže $(f \circ g)'(0)$ neexistuje. ♣

5.1.27. Věta (derivace inverzní funkce)**.** Nechť a je vnitřním bodem intervalu I a f je spojitá a ryze monotónní funkce na I. Označme $b = f(a)$.

(a) Nechť $f'(a)$ existuje a je nenulová. Potom platí

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

(b) Nechť $f'(a) = 0$ a f je rostoucí na I. Potom platí $(f^{-1})'(b) = \infty$.

(c) Nechť $f'(a) = 0$ a f je klesající na I. Potom platí $(f^{-1})'(b) = -\infty$.

Důkaz. Nejprve provedeme několik předběžných úvah, které pak využijeme v důkazech jednotlivých částí věty. Interval I je nedegenerovaný, neboť obsahuje vnitřní bod a. Z Věty 4.3.6 pak vyplývá, že množina $J = f(I)$ je interval. Dle Věty 4.3.13 navíc víme, že inverzní funkce $f^{-1}\colon J \to I$ je spojitá a ryze monotónní. Díky tomu, že a je vnitřním bodem I, nalezneme $\delta > 0$ takové, že $B(a,\delta) \subset I$. Protože a je vnitřním bodem I a f je ryze monotónní, je také b vnitřním bodem J. Nalezneme tedy $\varepsilon > 0$ takové, že $B(b,\varepsilon) \subset J$. Ze spojitosti funkce f v bodě a plyne, že toto δ lze zvolit tak, aby $f\bigl(B(a,\delta)\bigr) \subset B(b,\varepsilon)$. Definujme pomocnou funkci φ předpisem

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad x \in P(a,\delta).$$

Pak platí

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = f'(a). \tag{5.9}$$

Ze spojitosti f^{-1} v bodě b plyne $\lim_{y\to b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b) = a$. Protože je f^{-1} ryze monotónní, můžeme použít Větu 4.2.20(P) pro složení vnitřní funkce f^{-1} s vnější funkcí φ a odvodit z (5.9)

$$\lim_{y\to b} \frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)} = \lim_{y\to b} \bigl(\varphi \circ f^{-1}\bigr)(y) = \lim_{x\to a} \varphi(x) = f'(a). \tag{5.10}$$

(a) Podle věty o limitě podílu (Věta 4.2.1(c)) a (5.10) dostáváme

$$\bigl(f^{-1}\bigr)'(b) = \lim_{y\to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{y\to b} \frac{1}{\frac{y-b}{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}} = \frac{1}{f'(a)}.$$

(b) Definujme pomocnou funkci ψ předpisem

$$\psi(y) = \frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}, \qquad y \in P(b,\varepsilon).$$

Podle (5.10) máme $\lim_{y\to b} \psi(y) = 0$. Funkce ψ je na prstencovém okolí $P(b,\varepsilon)$ kladná, neboť funkce f^{-1} je rostoucí na J. Z Věty 4.2.6 pak plyne

$$\bigl(f^{-1}\bigr)'(b) = \lim_{y\to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{y\to b} \frac{1}{\psi(y)} = \infty.$$

(c) Tvrzení dokázat obdobně jako v předchozím případě. ■

5.1.28. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $g(y) = \sqrt[n]{y}$, $y \in (0, \infty)$. Dokažte, že

$$g'(b) = \frac{\sqrt[n]{b}}{nb}, \quad b \in (0, \infty).$$

Řešení. Definujme funkci f předpisem $f(x) = x^n$, $x \in (0, \infty)$, a označme $I = J = (0, \infty)$. Potom $f: I \to J$ je na I spojitá a rostoucí. Pro funkci $g: J \to I$ platí $g = f^{-1}$. Zvolme $b \in J$. Označme $a = g(b)$, neboli $a = \sqrt[n]{b}$. Pak podle Věty 5.1.27(a) a Příkladu 5.1.12 máme

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{na^{n-1}} = \frac{a}{na^n} = \frac{\sqrt[n]{b}}{nb}.$$

♣

5.1.29. Není těžké ověřit, že je-li $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, a $g(y) = \sqrt[n]{y}$, $y \in [0, \infty)$, pak $g'_+(0) = \infty$.

5.1.30. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ je *liché* a $g(y) = \sqrt[n]{y}$, $y \in \mathbb{R}$. Pak

$$g'(b) = \begin{cases} \frac{\sqrt[n]{b}}{nb} & \text{pro } b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \infty & \text{pro } b = 0. \end{cases}$$

Řešení. Definujme funkci f předpisem $f(x) = x^n, x \in \mathbb{R}$, a označme $I = J = (-\infty, \infty)$. Potom $f: I \to J$ je na I spojitá a rostoucí. Pro funkci $g: J \to I$ platí $g = f^{-1}$. Zvolme $b \in J, b \neq 0$, a $a = g(b)$. Pak podle Věty 5.1.27(a) a Příkladů 5.1.12 a 5.1.11 dostaneme obdobně jako v Příkladu 5.1.28

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{\sqrt[n]{b}}{nb}.$$

Je-li $b = 0$, pak $a = 0$, $f'(a) = 0$, a tedy $g'(0) = \infty$ podle Věty 5.1.27(b). ♣

5.1.31. Věta (nutná podmínka existence extrému)**.** Nechť f je funkce a a je bodem lokálního extrému funkce f. Potom buď $f'(a)$ neexistuje, nebo $f'(a) = 0$.

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že $f'(a)$ existuje a je různá od 0. Uvažujme nejprve případ $f'(a) > 0$. Dle Věty 4.2.8(a) nalezneme $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(a, \delta): \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

Odtud plyne, že pro každé $x \in P_+(a, \delta)$ platí $f(a) < f(x)$ a pro každé $x \in P_-(a, \delta)$ platí $f(a) > f(x)$. Tedy f nemá v a lokální extrém, což je spor. Obdobně lze odvodit, že funkce f nemá v a lokální extrém ani v případě, kdy $f'(a) < 0$. ■

5.1.32. Funkce $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, nabývá svého mimima na $\mathbb{R}$ v bodě 0, ale $f'(0)$ neexistuje podle Příkladu 5.1.13.

5.1.33. Definice. Nechť funkce f má na jistém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. **Druhou derivací** funkce f v bodě a budeme rozumět

$$f^{(2)}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h},$$

pokud limita existuje.

Nechť nyní $n \in \mathbb{N}$ a funkce f má v jistém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ vlastní n-tou derivaci (značíme ji symbolem $f^{(n)}$). Pak $(n+1)$**-ní derivací** funkce f v bodě a budeme rozumět

$$f^{(n+1)}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a)}{h},$$

pokud limita existuje. V této souvislosti první derivací rozumíme již definovaný pojem derivace.

5.1.34. Označení. Druhou a třetí derivaci funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ často značíme po řadě jako $f''(a)$ a $f'''(a)$.

5.1.35. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$. Spočtěte $\sin^{(n)}(x)$ a $\cos^{(n)}(x)$.

Řešení. Funkce sinus. Počítejme

$$\begin{aligned}
\sin'(x) &= \cos(x), \\
\sin''(x) &= \cos'(x) = -\sin(x), \\
\sin'''(x) &= (-\sin)'(x) = -\cos(x), \\
\sin^{(4)}(x) &= (-\cos)'(x) = \sin(x).
\end{aligned}$$

Pokud n zapíšeme ve tvaru $n = 4k + j$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $j \in \{0, 1, 2, 3\}$, snadno pomocí matematické indukce odvodíme

$$\sin^{(4k+j)}(x) = \sin^{(j)}(x).$$

Funkce kosinus. Podobně jako v předchozím případě obdržíme

$$\begin{aligned}
\cos'(x) &= -\sin(x), \\
\cos''(x) &= (-\sin)'(x) = -\cos(x), \\
\cos'''(x) &= (-\cos)'(x) = \sin(x), \\
\cos^{(4)}(x) &= \sin'(x) = \cos(x), \\
\cos^{(4k+j)}(x) &= \cos^{(j)}(x), \qquad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, j \in \{0, 1, 2, 3\}.
\end{aligned}$$

♣

5.2. Věty o střední hodnotě

5.2.1. Věta (Rolle[1]). Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Je-li $f(a) = f(b)$ a f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b), pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f'(c) = 0$.

Důkaz. Podle Věty 4.3.9 nabývá funkce f na intervalu $[a, b]$ svého maxima i minima. Označme $m = \min f\big([a, b]\big)$ a $M = \max f\big([a, b]\big)$. Pak

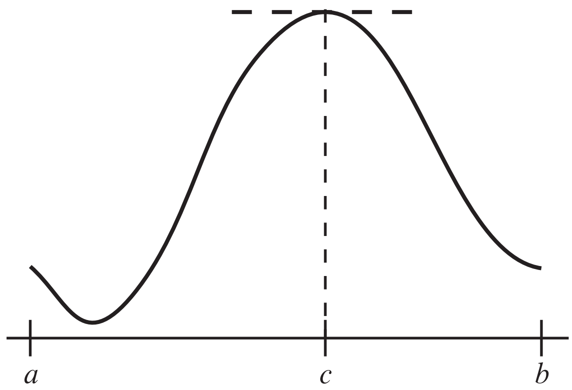
$$m \leq f(a) = f(b) \leq M. \tag{5.11}$$

Jestliže $m = M$, potom je funkce f konstantní na $[a, b]$. Z Příkladu 5.1.11 vyplývá, že $f'(c) = 0$ dokonce v každém bodě $c \in (a, b)$.

Nyní předpokládejme, že $m < M$. Potom musí být alespoň jedna z obou nerovností v (5.11) ostrá. Předpokládejme, že platí $f(b) < M$. Nalezneme $c \in [a, b]$ splňující $f(c) = M$. Potom $c \notin \{a, b\}$, a tedy $c \in (a, b)$. Pak f nabývá v bodě c svého maxima na intervalu $[a, b]$ a existuje v něm derivace podle předpokladu. Podle Věty 5.1.31 tedy platí $f'(c) = 0$.

Jestliže $m < f(a)$, pak lze postupovat obdobně jako v předcházejícím případě. Alternativně je také možné použít již dokázané tvrzení na funkci $-f$. Tím je důkaz hotov. ∎

5.2.2. Geometricky lze interpretovat Větu 5.2.1 tak, že za předpokladů věty graf funkce f obsahuje bod $[c, f(c)]$, kde $c \in (a, b)$, v němž je tečna ke grafu f rovnoběžná s osou x.



OBRÁZEK 2.

[1] Michel Rolle (1652 –1719)

5.2.3. Ve Větě 5.2.1 nelze předpoklad o existenci derivace v bodech intervalu (a, b) vynechat. Například pro funkci $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$, která je na intervalu $[-1, 1]$ spojitá, platí $f(-1) = f(1)$, ale funkce nemá v žádném bodě intervalu $(-1, 1)$ nulovou derivaci.

5.2.4. Věta (Lagrange[2]). Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, která má v každém bodě intervalu (a, b) derivaci. Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Důkaz. Myšlenka důkazu spočívá v převedení problému do situace, ve které bude možné použít Rolleovu větu (Věta 5.2.1). Definujme pomocnou funkci g předpisem

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a), \qquad x \in [a, b].$$

Pak g je spojitá podle Věty 4.2.4 a Příkladu 4.2.5. Přímočarý výpočet navíc dává $g(a) = g(b)$. Protože v každém bodě intervalu (a, b) má funkce

$$x \mapsto \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a), \quad x \in [a, b],$$

vlastní derivaci (Příklad 5.1.12) a funkce f derivaci, existuje podle Věty 5.1.17(a) derivace g v každém bodě intervalu (a, b). Díky Větě 5.2.1 nalezneme bod $c \in (a, b)$ splňující $g'(c) = 0$. Protože pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

dostáváme

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Tedy $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ■

5.2.5. (a) Za předpokladů Věty 5.2.4 můžeme přírůstek funkce f na intervalu $[a, b]$, který je roven $f(b) - f(a)$, vyjádřit takto

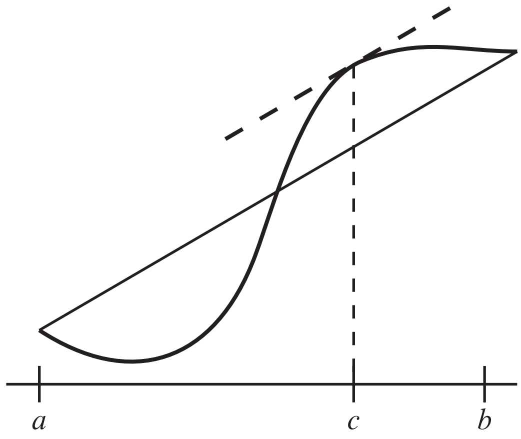
$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a),$$

tedy jako součin přírůstku proměnné x a derivace v jistém bodě c, o jehož poloze víme jen tolik, že patří do (a, b).

(b) Uvědomme si, že ani Věta 5.2.1 ani Věta 5.2.4 neříkají nic o tom, kolik bodů c s danou vlastností existuje. Říkají pouze, že takový bod je alespoň jeden.

(c) Geometricky lze interpretovat Větu 5.2.4 tak, že za uvedených předpokladů obsahuje graf funkce f bod $[c, f(c)]$, v němž je tečna ke grafu f rovnoběžná s přímkou spojující body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$.

[2]Joseph-Louis Lagrange (1736 –1813)



Obrázek 3.

5.2.6. Věta. Nechť f je spojitá funkce na intervalu I, která má v každém vnitřním bodě I nezápornou (respektive kladnou, respektive zápornou, respektive nekladnou) derivaci. Pak f je neklesající (respektive rostoucí, respektive klesající, respektive nerostoucí) na I.

Důkaz. Dokážeme první variantu věty. Předpokládejme, že $a, b \in I, a < b$. Pak je funkce $f|_{[a,b]}$ spojitá na $[a, b]$ a má derivaci v každém vnitřním bodě $[a, b]$. Dle Věty 5.2.4 nalezneme bod $c \in (a, b)$ splňující

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Podle předpokladu o znaménku derivace dostáváme

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \geq 0,$$

což znamená $f(a) \leq f(b)$. Funkce f je tedy neklesající. Všechny zbývající varianty tvrzení věty lze dokázat obdobně. ■

5.2.7. Předpoklad spojitosti lze ve Větě 5.2.6 vynechat, jak uvidíme ve Větě 5.5.7, jejíž důkaz je však o něco obtížnější.

5.2.8. Věta. Nechť f je spojitá funkce na intervalu I, která má v každém vnitřním bodě I nulovou derivaci. Pak f je konstantní na I.

Důkaz. Podle Věty 5.2.6 je funkce f neklesající i nerostoucí na I. Funkce f je tedy konstantní na I. ■

5.2.9. Věta (limita derivace)**.** Nechť funkce f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a existuje $\lim_{x\to a+} f'(x)$. Pak existuje $f'_+(a)$ a platí $f'_+(a) = \lim_{x\to a+} f'(x)$.

Důkaz. Označme $L = \lim_{x\to a+} f'(x)$. Díky existenci této limity nalezneme $\delta_0 > 0$ takové, že pro každé $x \in P_+(a, \delta_0)$ je $f'(x)$ vlastní. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta \in (0, \delta_0)$ takové, že pro každé $z \in P_+(a, \delta)$ platí

$$f'(z) \in B(L, \varepsilon). \tag{5.12}$$

Zvolme $x \in P_+(a, \delta)$. Pak má funkce f vlastní derivaci v každém bodě intervalu (a, x). Dále je f spojitá na intervalu $[a, x]$, neboť spojitost v bodech intervalu $(a, x]$ plyne z Věty 5.1.15 a spojitost v a zprava předpokládáme. Dle Věty 5.2.4 nalezneme $c_x \in (a, x)$ splňující

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x).$$

Protože $c_x \in P_+(a, \delta)$, z (5.12) máme

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in B(L, \varepsilon).$$

Odtud plyne, že $f'_+(a) = L$. ∎

5.2.10. (a) Tvrzení obdobná Větě 5.2.9 platí i pro derivaci zleva i pro oboustrannou derivaci.

(b) Předpoklad spojitosti ve Větě 5.2.9 nelze vynechat. Pro funkci sign platí $\lim_{x\to 0+} \operatorname{sign}'(x) = \lim_{x\to 0+} 0 = 0$, ale $\operatorname{sign}'_+(0) = \infty$.

5.2.11. Věta (Cauchy)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, f a g jsou funkce spojité na intervalu $[a, b]$, f má v každém bodě $x \in (a, b)$ derivaci a g má v každém bodě $x \in (a, b)$ vlastní nenulovou derivaci. Potom $g(a) \neq g(b)$ a existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \tag{5.13}$$

Důkaz. Díky Lagrangeově větě (Věta 5.2.4) nalezneme bod $d \in (a, b)$ takový, že

$$g'(d) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}.$$

Protože $g'(d) \neq 0$, dostáváme $g(a) \neq g(b)$. Položme

$$\varphi(x) = \big(f(x) - f(a)\big) \cdot \big(g(b) - g(a)\big) - \big(g(x) - g(a)\big) \cdot \big(f(b) - f(a)\big), \qquad x \in [a, b].$$

Pak je funkce φ podle Věty 4.2.4 spojitá na $[a, b]$ a podle Věty 5.1.17(a),(b) má v každém bodě intervalu (a, b) derivaci, neboť funkce

$$x \mapsto \big(f(x) - f(a)\big) \cdot \big(g(b) - g(a)\big)$$

má v každém bodě intervalu (a, b) derivaci a funkce

$$x \mapsto \big(g(x) - g(a)\big) \cdot \big(f(b) - f(a)\big)$$

má v každém bodě intervalu (a, b) vlastní derivaci. Navíc $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Díky Větě 5.2.1 nalezneme $c \in (a, b)$ splňující $\varphi'(c) = 0$. Protože pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$\varphi'(x) = f'(x) \cdot \bigl(g(b) - g(a)\bigr) - g'(x) \cdot \bigl(f(b) - f(a)\bigr),$$

pro $x = c$ platí

$$0 = \varphi'(c) = f'(c) \cdot \bigl(g(b) - g(a)\bigr) - g'(c) \cdot \bigl(f(b) - f(a)\bigr).$$

Odtud plyne, že $f'(c)$ je vlastní, a elementární úpravou dostáváme (5.13). ■

5.3. Elementární funkce

Již v první kapitole jsme se zabývali elementárními funkcemi. Uvedli jsme však pouze některé jejich vlastnosti a jejich konstrukcí jsme se nezabývali. Výsledky, které jsme odvodili v předchozích kapitolách, nám nyní umožní elementární funkce zkonstruovat a přesně odvodit jejich základní vlastnosti.

5.3.1. Odmocniny.

5.3.1. Je-li $n \in \mathbb{N}$ liché, pak funkce $x \mapsto x^n$ je spojitá rostoucí funkce na $\mathbb{R}$, a tedy dle Věty 4.3.13 je funkce $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ spojitá a rostoucí funkce na $\mathbb{R}$. Je-li $n \in \mathbb{N}$ sudé, pak funkce $x \mapsto x^n$ je spojitá rostoucí funkce na $[0, \infty)$, a tedy dle Věty 4.3.13 je funkce $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ spojitá a rostoucí na $[0, \infty)$.

V následujících příkladech odvodíme několik základních vlastností odmocniny.

5.3.2. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $x, y \in \mathbb{R}$ jsou nezáporná čísla. Dokažte, že $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$.

Řešení. Označme $a = \sqrt[n]{x}$ a $b = \sqrt[n]{y}$. Potom platí $xy = a^n \cdot b^n = (ab)^n$, a tedy $\sqrt[n]{xy} = ab = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$. ♣

5.3.3. Příklad. Nechť $n, k \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ je nezáporné číslo. Dokažte, že $\sqrt[n]{x^k} = \bigl(\sqrt[n]{x}\bigr)^k$.

Řešení. Plyne snadno z Příkladu 5.3.2 pomocí matematické indukce. ♣

5.3.2. Exponenciální funkce a logaritmus.

5.3.4. Označení. V následující části textu, ale i později, budeme pracovat s nekonečnými řadami tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, kde x i a_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou reálná čísla. Pro $x = 0, n = 0$, pak ale musíme uvažovat výraz $a_0 0^0$. Symbol 0^0 není obecně definován, zde však bude označovat číslo 1. Tato konvence umožňuje místo komplikovanějšího zápisu $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ psát pouze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

5.3.5. Definice. **Exponenciální funkci** exp definujme pro $x \in \mathbb{R}$ předpisem

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{5.14}$$

5.3.6. Věta (základní vlastnosti funkce exp)**.** Funkce $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je dobře definována a splňuje:

(E1) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$,

(E2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$.

Důkaz. Korektnost definice. Z řešení Příkladu 3.9.23 vyplývá, že řada na pravé straně rovnosti (5.14) je absolutně konvergentní pro každé $x \in \mathbb{R}$. Funkce exp je tedy předpisem (5.14) dobře definována na množině $\mathbb{R}$.

Ověření (E1). Zvolme $x, y \in \mathbb{R}$. Potom z binomické věty (Věta 1.5.6) plyne, že

$$\begin{aligned}\exp(x + y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x + y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{n-k} y^k}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{y^k}{k!}.\end{aligned} \tag{5.15}$$

Poslední výraz v (5.15) je Cauchyovým součinem řad $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$ (vizte 3.6.6). Obě tyto řady jsou absolutně konvergentní, takže podle Mertensovy věty (Věta 3.6.2) a 3.6.6 je řada $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}\frac{y^k}{k!}$ konvergentní a platí

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{y^k}{k!} = \Bigl(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\Bigr) \cdot \Bigl(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\Bigr),$$

tedy $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$.

Ověření (E2). Nechť $x \in \mathbb{R}$, $0 < |x| \le 1$. Potom podle (5.14) platí:

$$\Bigl|\frac{\exp(x) - 1}{x} - 1\Bigr| = \Bigl|\frac{\exp(x) - 1 - x}{x}\Bigr| = \Bigl|\frac{1}{x} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\Bigr| = \Bigl|x \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n!}\Bigr|.$$

Protože $|x| \le 1$ a $n-2 \ge 0$ pro každé $n \ge 2$, dostáváme z Věty 3.4.3 a Příkladu 3.8.7, že

$$\Bigl|\frac{\exp(x) - 1}{x} - 1\Bigr| \le |x| \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|x|^{n-2}}{n!} \le |x| \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \le e|x|.$$

Zřejmě platí $\lim_{x\to 0} e|x| = 0$, a tedy dle věty o dvou strážnících (Věta 4.2.8(c)) platí také $\lim_{x\to 0}\bigl|\frac{\exp(x)-1}{x} - 1\bigr| = 0$. Podle Věty 4.1.19 tudíž platí $\lim_{x\to 0}\bigl(\frac{\exp x - 1}{x} - 1\bigr) = 0$. Odtud plyne tvrzení (E2). ∎

5.3.7 (vlastnosti exponenciální funkce)**.** Nyní uvedeme několik vlastností exponenciální funkce, které odvodíme *pouze* z výroků (E1) a (E2). To znamená, že se nebudeme odvolávat na předpis (5.14) ale pouze na (E1) a (E2). Tento přístup nám později umožní dokázat, že exponenciální funkce je svými vlastnostmi (E1) a (E2) jednoznačně určena.

(E3) Platí $\exp(0) = 1$.

Podle (E1) platí $\exp(0) = \exp(0+0) = (\exp(0))^2$. To znamená, že buď $\exp(0) = 1$, nebo $\exp(0) = 0$. Předpokládejme, že $\exp(0) = 0$. Potom pro každé $x \in \mathbb{R}$ podle (E1) platí $\exp(x) = \exp(x + 0) = \exp(x)\exp(0) = 0$. Tedy z (E2) vyplývá, že $1 = \lim_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{x}$, což je spor. Platí tedy $\exp(0) = 1$.

(E4) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\exp'(x) = \exp(x)$.

Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom podle definice derivace a (E1) platí

$$\begin{aligned}\exp'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x+0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x)\exp(h) - \exp(x)\exp(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \exp(x) \cdot \frac{\exp(h) - \exp(0)}{h}.\end{aligned}$$

Odtud podle (E2) a (E3) plyne, že

$$\exp'(x) = \lim_{h\to 0} \exp(x) \cdot \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(x).$$

(E5) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

Z (E1) a (E3) plyne $1 = \exp(0) = \exp(x - x) = \exp(x)\exp(-x)$, odkud již snadno plyne naše tvrzení.

(E6) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\exp(x) > 0$.

Zvolme $x \in \mathbb{R}$. Z (E5) plyne $\exp(x) \neq 0$. Dle (E1) platí

$$\exp(x) = \exp\left(\tfrac{x}{2} + \tfrac{x}{2}\right) = \exp\left(\tfrac{x}{2}\right) \cdot \exp\left(\tfrac{x}{2}\right) = \left(\exp\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)^2 \geq 0,$$

čímž je tvrzení dokázáno.

(E7) Funkce exp je spojitá na $\mathbb{R}$.

Podle (E4) má funkce exp vlastní derivaci v každém bodě $x \in \mathbb{R}$. Tvrzení tedy plyne z Věty 5.1.15.

(E8) Funkce exp je rostoucí na $\mathbb{R}$.

Podle (E4) a (E6) platí $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Tvrzení tedy plyne z Věty 5.2.6.

(E9) Platí $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$ a $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$.

Z (E3) a (E8) plyne $\exp(1) > \exp(0) = 1$. Odtud, z (E1) a Příkladu 2.3.34 dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \exp(n) = \lim_{n\to\infty} \big(\exp(1)\big)^n = \infty.$$

To znamená, že funkce exp není shora omezená. Zároveň je podle (E8) rostoucí, a tedy z věty o limitě monotónní funkce (Věta 4.2.25) plyne, že $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$. Odtud plyne

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0.$$

Podle Věty 4.2.20(P) a (E5) platí

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = \lim_{x\to\infty} \exp(-x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0.$$

Tím jsou dokázána obě požadovaná tvrzení.

(E10) Platí $\mathcal{H}(\exp) = (0, \infty)$.

Podle (E7) a Věty 4.3.6 je množina $\mathcal{H}(\exp)$ interval. Podle (E6) pak platí $\mathcal{H}(\exp) \subset (0, \infty)$. Díky (E9) pak dostáváme $\mathcal{H}(\exp) = (0, \infty)$.

5.3.8. Věta. Existuje právě jedna funkce definovaná na $\mathbb{R}$ splňující podmínky (E1) a (E2).

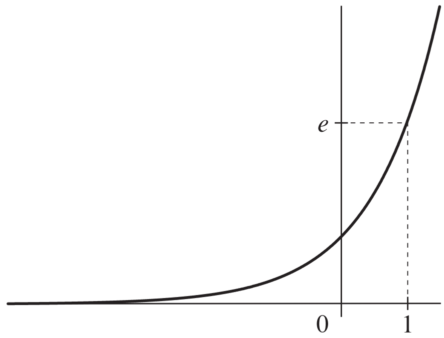
Důkaz. Existence funkce splňující podmínky (E1) a (E2) plyne z Definice 5.3.5 a Věty 5.3.6. Dokážeme nyní její jednoznačnost.

Předpokládejme, že funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňují podmínky (E1) a (E2), kde je exp nahrazeno f, respektive g. Ukážeme, že pak již nutně platí $f = g$.

Z 5.3.7 vyplývá, že funkce f splňuje všechny podmínky (E3)–(E10), neboť k jejich odvození jsme využili pouze podmínky (E1) a (E2). Obdobně je tomu pro funkci g. Platí tedy $f(0) = g(0) = 1$ podle (E3) a pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f'(x) = f(x)$ a $g'(x) = g(x)$ podle (E4). Z podmínky (E6) vyplývá, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $g(x) \neq 0$. Pomocí Věty 5.1.17(c) tudíž dostáváme pro každé $x \in \mathbb{R}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{g(x)^2} = 0.$$

Podle Věty 5.2.8 je funkce $\frac{f}{g}$ konstantní na $\mathbb{R}$, tedy existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\frac{f(x)}{g(x)} = c$. Protože $\frac{f(0)}{g(0)} = 1$, platí $c = 1$. Odtud plyne, že $f = g$. ∎



Obrázek 4. Graf exponenciální funkce

5.3.9. Podle Příkladu 3.8.7 platí $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Ze vzorce (5.14) tedy plyne

$$\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

5.3.10. Definice.

(a) Funkce $\log\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ je definována jako inverzní funkce k funkci exp. Nazývá se (**přirozeným**) **logaritmem**.

(b) Je-li $a \in (0,\infty) \setminus \{1\}$, pak definujeme funkci $\log_a\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

Funkci $\log_a$ nazýváme **logaritmem o základu** a. V případě $a = e$ píšeme pouze log místo $\log_e$.

(c) Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, a $b \in \mathbb{R}$. Potom definujeme reálné číslo a^b předpisem $a^b = \exp(b \log a)$.

(d) Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Potom funkci $x \mapsto a^x$, $x \in \mathbb{R}$, nazýváme **obecnou mocninou**.

5.3.11 (vlastnosti přirozeného logaritmu)**.**

(L1) Platí $\mathscr{D}(\log) = (0,\infty)$.

Platí $\mathscr{D}(\log) = \mathscr{H}(\exp)$, a proto tvrzení plyne z (E10).

(L2) Platí $\mathscr{H}(\log) = \mathbb{R}$.

Tvrzení plyne z faktu $\mathscr{H}(\log) = \mathscr{D}(\exp)$.

(L3) Funkce log je rostoucí na $(0,\infty)$.

Funkce exp je rostoucí, a proto je podle Věty 4.3.13 rostoucí i funkce log.

(L4) Funkce log je spojitá na $(0, \infty)$.

Tvrzení plyne z Věty 4.3.13.

(L5) Pro každá $x, y \in (0, \infty)$ platí $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

Zvolme $x, y \in (0, \infty)$ a označme $a = \log x$ a $b = \log y$. Pak

$$xy = \exp(a)\exp(b) = \exp(a + b) = \exp(\log(x) + \log(y)),$$

a tedy $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

(L6) Pro každé $a \in (0, \infty)$ a $b \in \mathbb{R}$ platí $\log a^b = b \log a$.

Pro příslušná a, b platí podle definice obecné mocniny

$$\log a^b = \log\bigl(\exp(b \log a)\bigr) = b \log a.$$

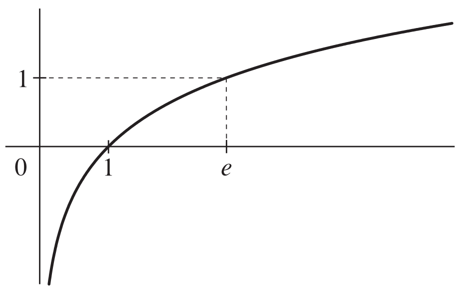
(L7) Pro každé $x \in (0, \infty)$ platí $\log'(x) = \frac{1}{x}$.

Podle věty o derivaci inverzní funkce (Věta 5.1.27(a)) a (E4) platí pro $x \in (0, \infty)$ vztah

$$\log'(x) = \frac{1}{\exp'(\log x)} = \frac{1}{\exp(\log x)} = \frac{1}{x}.$$

(L8) Platí $\lim_{x \to 0_+} \log x = -\infty$ a $\lim_{x \to \infty} \log x = \infty$.

Podle (L3) je funkce log rostoucí, takže z věty o limitě monotónní funkce (Věta 4.2.25(a)) plyne $\lim_{x \to 0_+} \log x = \inf \mathcal{H}(\log)$ a $\lim_{x \to \infty} \log x = \sup \mathcal{H}(\log)$. Z (L2) pak vyplývá naše tvrzení.



Obrázek 5. Graf funkce logaritmus

5.3.12 ((ne)soulad definic mocniny)**.** V Definici 5.3.10(c) jsme provedli rozšíření výrazu a^b na všechny reálné exponenty b za předpokladu, že základ a je větší než 0. Doposud jsme měli korektně definován výraz a^b, $a > 0$, pouze pro případ, kdy b bylo číslo celé. Nová definice dává podle vlastnosti (L6) v tomto případě totéž, a je tedy rozšířením definice původní. Výraz a^b máme tedy definován v těchto případech:

- $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, a $b \in \mathbb{R}$ libovolné,
- $a \in \mathbb{R}$ libovolné a $b \in \mathbb{N}$,
- $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, a $b \in \mathbb{Z}$, $b < 0$.

5.3.13. (a) Místo $\exp(x)$ často píšeme e^x, neboť podle definice obecné mocniny jsou si tyto výrazy rovny.

(b) Nechť f a g jsou reálné funkce definované na množině $M \subset \mathbb{R}$, přičemž $f\colon M \to (0,\infty)$. Potom symbolem $f(x)^{g(x)}$ budeme označovat funkci definovanou na množině M předpisem $x \mapsto \exp\bigl(g(x)\log f(x)\bigr)$.

5.3.3. Goniometrické funkce.

5.3.14 (goniometrické funkce v geometrii a matematické analýze)**.**

Při odvozování některých vlastností elementárních funkcí v tomto oddílu využijeme následující lemma.

5.3.15. Lemma. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom existuje kladné $C \in \mathbb{R}$ (závisející na x) takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $h \in (-1,1)$ platí

$$\bigl|(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}\bigr| \le h^2 C^n. \tag{5.16}$$

Důkaz. Položme $C = 2(|x|+1)$. Pokud $n = 1$, pak tvrzení triviálně platí. Z binomické věty pro $n \ge 2$ a $h \in (-1,1)$ dostáváme

$$(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k.$$

Využitím nerovností $|x| \le |x|+1$, $1 \le |x|+1$ a $|h| < 1$ obdržíme

$$\begin{aligned} |(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}| &\le \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k}|h|^k \le \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (|x|+1)^n h^2 \\ &\le h^2(|x|+1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

Podle Příkladu 1.8.5 platí $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$. Pak dostáváme

$$|(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}| \le h^2(|x|+1)^n 2^n = h^2 C^n.$$

Tím je důkaz dokončen. ■

5.3.16. Definice. Funkci **sinus**, značíme sin, a **kosinus**, značíme cos, definujeme předpisy

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{5.17}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{5.18}$$

5.3.17. Věta (základní vlastnosti sinu a kosinu)**.** Funkce sinus a kosinus jsou dobře definované a splňují

(G1) pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y),$$

(G2) pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y),$$

(G3) sin je lichá funkce a cos je sudá funkce,

(G4) existuje právě jedno kladné reálné číslo π takové, že sin je rostoucí na $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(0) = 0$ a $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$,

(G5) $\sin'(0) = 1$.

Důkaz. Podle řešení Příkladu 3.9.24 obě řady konvergují pro každé $x \in \mathbb{R}$. Funkce sin a cos jsou tedy dobře definovány.

Nejprve dokážeme, že platí

$$\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin'(x) = \cos(x). \tag{5.19}$$

Zvolme pevné $x \in \mathbb{R}$. Pro $h \in \mathbb{R}$ díky Důsledku 3.1.19 platí

$$\begin{aligned} &\sin(x+h) - \sin(x) - h\cos(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Big(\frac{(x+h)^{2n+1} - x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{hx^{2n}}{(2n)!} \Big) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \big((x+h)^{2n+1} - x^{2n+1} - h(2n+1)x^{2n} \big). \end{aligned} \tag{5.20}$$

Podle Lemmatu 5.3.15 nalezneme pro $x \in \mathbb{R}$ kladné C takové, že pro každé $h \in \mathbb{R}, |h| < 1$, platí

$$|(x+h)^{2n+1} - x^{2n+1} - h(2n+1)x^{2n}| \le C^{2n+1}h^2. \tag{5.21}$$

Odtud a z (5.20) dostáváme, že pro každé $h \in P(0,1)$ platí

$$\begin{aligned} |\sin(x+h) - \sin(x) - h\cos(x)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C^{2n+1}}{(2n+1)!} h^2 \\ &= \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big) h^2. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C^{2n+1}}{(2n+1)!}$ konverguje podle podílového kritéria. Odtud pak plyne

$$\lim_{h\to 0} \Big| \frac{\sin(x+h) - \sin(x) - h\cos(x)}{h} \Big| = 0,$$

neboli

$$\sin'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \cos(x).$$

Obdobně lze odvodit vztah

$$\forall x \in \mathbb{R}\colon \ \cos'(x) = -\sin(x). \tag{5.23}$$

Nyní ověříme vlastnosti (G1)–(G5).

(G1) a (G2) Zvolme $a \in \mathbb{R}$ a pro $x \in \mathbb{R}$ definujme

$$\begin{aligned} \psi(x) = {} & \big(\sin(x+a) - \sin(x)\cos(a) - \sin(a)\cos(x)\big)^2 \\ & + \big(\cos(x+a) - \cos(x)\cos(a) + \sin(a)\sin(x)\big)^2. \end{aligned}$$

Přímočarý výpočet spolu s (5.19) a (5.23) dává, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\psi'(x) = 0$. Protože

$$\psi(0) = (\sin(a) - \sin(a))^2 + (\cos(a) - \cos(a))^2 = 0,$$

dostáváme $\psi(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, a tedy také dokazované vztahy z (G1) a (G2).

(G3) Ze vztahu (5.17) plyne, že funkce sin je lichá. Podobně z (5.18) plyne, že funkce cos je sudá.

(G4) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ díky Příkladu 3.8.16 platí

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} - \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!} \Big) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} \Big(1 - \frac{x^2}{(4n+2)(4n+3)} \Big). \end{aligned}$$

Pokud $x \in (0,2)$, potom jsou členy předchozí řady kladné a platí $\sin(x) > 0$. Podle Věty 5.2.6 a (5.23) je funkce cos klesající na intervalu $(0,2)$. Ze vztahu

$$\begin{aligned}\cos(x) &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} + \frac{x^{4n+4}}{(4n+4)!}\Big)\\ &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!}\Big(1 - \frac{x^2}{(4n+3)(4n+4)}\Big)\end{aligned}$$

plyne

$$\cos(2) < 1 - \frac{2^2}{2!}\Big(1 - \frac{2^2}{3\cdot 4}\Big) = -\frac{1}{3} < 0.$$

Díky této nerovnosti, vztahu $\cos(0) > 0$ a spojitosti funkce kosinus existuje podle Věty 4.3.4 právě jedno $\alpha \in (0,2)$ takové, že $\cos(\alpha) = 0$. Tedy funkce cos je na intervalu $(0,\alpha)$ kladná. Odtud a z (5.19) plyne, že funkce sin je rostoucí na $[0,\alpha]$ (Věta 5.2.6). Položme nyní $\pi = 2\alpha$. Podle (G2) a (G3) platí

$$1 = \cos(0) = \cos\big(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{2}\big) = \cos\big(\tfrac{\pi}{2}\big)\cos\big(-\tfrac{\pi}{2}\big) - \sin\big(\tfrac{\pi}{2}\big)\sin\big(-\tfrac{\pi}{2}\big) = 0 + \sin^2\big(\tfrac{\pi}{2}\big),$$

a tedy $\sin^2(\frac{\pi}{2}) = 1$. Poněvadž $\sin\big(\frac{\pi}{2}\big) > 0$, platí $\sin\big(\frac{\pi}{2}\big) = 1$. Podle (5.17) snadno ověříme, že $\sin(0) = 0$. Tím jsou vlastnosti popsané v (G4) ověřeny.

(G5) Podle (5.18) máme $\cos(0) = 1$, a tedy podle (5.19) platí $\sin'(0) = \cos(0) = 1$. ■

5.3.18 (vlastnosti sinu a kosinu)**.** K odvození vlastností funkcí sinus a kosinus použijeme *pouze* vlastnosti (G1)–(G5).

(G6) Platí $\cos(0) = 1$.

Z (G1) a (G4) dostáváme

$$\begin{aligned}1 &= \sin\big(\tfrac{\pi}{2}\big) = \sin\big(\tfrac{\pi}{2} + 0\big) = \sin\big(\tfrac{\pi}{2}\big)\cos(0) + \cos\big(\tfrac{\pi}{2}\big)\sin(0)\\ &= 1\cdot\cos(0) + \cos\big(\tfrac{\pi}{2}\big)\cdot 0 = \cos(0).\end{aligned}$$

(G7) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

Z (G2) a (G3) máme pro každé $x \in \mathbb{R}$

$$1 = \cos(x - x) = \cos(x)\cos(-x) - \sin(x)\sin(-x) = \cos^2(x) + \sin^2(x).$$

(G8) Platí $\cos\big(\frac{\pi}{2}\big) = 0$.

Tvrzení plyne z (G4) a (G7).

(G9) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$ a $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$.

Podle (G1), (G2), (G4) a (G8) platí

$$\begin{aligned}
\sin(x+\pi) &= \sin\bigl(x+\tfrac{\pi}{2}\bigr)\cos\bigl(\tfrac{\pi}{2}\bigr) + \cos\bigl(x+\tfrac{\pi}{2}\bigr)\sin\bigl(\tfrac{\pi}{2}\bigr)\\
&= \cos\bigl(x+\tfrac{\pi}{2}\bigr) = \cos(x)\cos\bigl(\tfrac{\pi}{2}\bigr) - \sin(x)\sin\bigl(\tfrac{\pi}{2}\bigr) = -\sin(x),\\
\cos(x+\pi) &= \cos\bigl(x+\tfrac{\pi}{2}\bigr)\cos\bigl(\tfrac{\pi}{2}\bigr) - \sin\bigl(x+\tfrac{\pi}{2}\bigr)\sin\bigl(\tfrac{\pi}{2}\bigr)\\
&= -\sin\bigl(x+\tfrac{\pi}{2}\bigr) = -\sin(x)\cos\bigl(\tfrac{\pi}{2}\bigr) - \cos(x)\sin\bigl(\tfrac{\pi}{2}\bigr) = -\cos(x).
\end{aligned}$$

(G10) Funkce sin a cos jsou 2π-periodické.

Zvolme $x \in \mathbb{R}$. Potom podle (G9) platí $\sin(x+2\pi) = -\sin(x+\pi) = \sin x$ a $\cos(x+2\pi) = -\cos(x+\pi) = \cos(x)$.

(G11) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\sin'(x) = \cos(x)$.

Spočteme nejprve dvě limity, které budeme potřebovat při odvození derivace funkce sin. Podle (G4) a (G5) platí

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)-\sin(0)}{h} = \sin'(0) = 1.$$

Podle vztahu (G2) platí pro každé $h \in \mathbb{R}$ rovnost $\cos(h) = \cos^2\bigl(\frac{h}{2}\bigr) - \sin^2\bigl(\frac{h}{2}\bigr)$. Podle (G7) pak obdržíme vztah $\cos(h) = 1 - 2\sin^2\bigl(\frac{h}{2}\bigr)$. Tento vztah použijeme v následujícím výpočtu

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h^2} = \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin^2\bigl(\frac{h}{2}\bigr)}{h^2} = -\frac{1}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin\bigl(\frac{h}{2}\bigr)}{\frac{h}{2}}\right)^2 = -\frac{1}{2}.$$

Pro $x \in \mathbb{R}$ počítejme

$$\begin{aligned}
\sin'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\bigl(\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)\bigr)\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h^2}h + \cos(x)\frac{\sin(h)}{h}\right)\\
&= \sin(x)\cdot\tfrac{-1}{2}\cdot 0 + \cos(x)\cdot\sin'(0) = \cos(x).
\end{aligned}$$

(G12) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí podle (G1), (G4) a (G8) vztah $\sin\bigl(\frac{\pi}{2}-x\bigr) = \cos(x)$, a tedy také $\cos\bigl(\frac{\pi}{2}-x\bigr) = \sin(x)$. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ máme podle věty o derivaci složené funkce

$$\cos'(x) = \Bigl(\sin\bigl(\tfrac{\pi}{2}-x\bigr)\Bigr)' = \cos\bigl(\tfrac{\pi}{2}-x\bigr)\cdot(-1) = -\sin(x).$$

(G13) Funkce sin a cos jsou spojité na $\mathbb{R}$.

Funkce sin a cos mají v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci, a tedy jsou podle Věty 5.1.15 v x spojité.

(G14) Platí $\sin(x) = 0$ právě tehdy, když $x = k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$.

Funkce sin je 2π-periodická podle (G10). Stačí tedy určit nulové body v intervalu $[0, 2\pi)$. Podle (G4) platí, že $\sin(0) = 0$ a funkce sin je kladná na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Odtud, podle Věty 5.2.6 a podle (G12) je cos klesající na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$. Díky (G8) dostáváme, že funkce cos je na intervalu $[0, \frac{\pi}{2})$ kladná. Ze vztahů $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$ a $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$ dostáváme, že funkce sin je nulová v intervalu $[0, 2\pi)$ právě v bodech 0 a π.

(G15) Platí $\cos(x) = 0$ právě tehdy, když $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$.

Tvrzení plyne z (G14) a vztahu $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$.

5.3.19. Věta. Trojice $(\sin, \cos, \pi)$ je vlastnostmi (G1)–(G5) určena jednoznačně.

Důkaz. Předpokládejme, že trojice $(\sin^*, \cos^*, \pi^*)$ splňuje vlastnosti (G1)–(G5). Položme

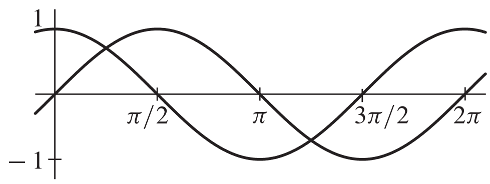
$$\varphi(x) = \left(\sin(x) - \sin^*(x)\right)^2 + \left(\cos(x) - \cos^*(x)\right)^2, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= 2\left(\sin(x) - \sin^*(x)\right) \cdot \left(\cos(x) - \cos^*(x)\right)\\ &\quad + 2\left(\cos(x) - \cos^*(x)\right) \cdot \left(-\sin(x) + \cos^*(x)\right) = 0.\end{aligned}$$

Tedy je dle Věty 5.2.8 funkce φ konstantní na $\mathbb{R}$. V bodě 0 je však nulová, a tedy $\varphi(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Proto je $\sin = \sin^*$ a $\cos = \cos^*$. Odtud a díky (G4) platí $\pi = \pi^*$ a důkaz je hotov. ■

5.3.20. Poznámka. Vzhledem k tomu, že již bylo zavedeno číslo π a obecná mocnina, máme zavedeno také reálné číslo π^π, o němž jsme se zmínili v 1.1.2.



Obrázek 6. Grafy funkcí sinus a kosinus

5.3.21. Definice. Funkce **tangens**, značíme ji tg, a **kotangens**, značíme ji cotg, definujeme předpisy

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\tfrac{1}{2}\pi + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\},$$
$$\operatorname{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Funkce sinus, kosinus, tangens a kotangens nazýváme **goniometrickými funkcemi**.

5.3.22 (vlastnosti funkce tangens)**.**

(G16) Funkce tg je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

Plyne z (G13) pomocí Věty 4.2.4.

(G17) Funkce tg je lichá.

Plyne z (G3).

(G18) Funkce tg je π-periodická.

Je-li $x \in \mathcal{D}(\operatorname{tg})$, pak také $x+\pi \in \mathcal{D}(\operatorname{tg})$ a $x-\pi \in \mathcal{D}(\operatorname{tg})$ podle (G15). Pro $x \in \mathcal{D}(\operatorname{tg})$ pak máme podle (G9)

$$\operatorname{tg}(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \operatorname{tg}(x).$$

(G19) Pro každé $x \in \mathcal{D}(\operatorname{tg})$ platí $\operatorname{tg}'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.

Podle věty o derivaci podílu (Věta 5.1.17(c)), (G7), (G11) a (G12) dostaneme pro každé $x \in \mathcal{D}(\operatorname{tg})$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}'(x) &= \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos(x)\cos(x) + \sin(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)}.\end{aligned}$$

(G20) Funkce tg je rostoucí na $\left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$.

Funkce cos je na intervalu $\left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$ kladná, a tedy je derivace funkce tg na tomto intervalu kladná. Z Věty 5.2.6 pak plyne, že funkce tg je rostoucí na $\left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$.

(G21) Platí $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 1$.

Díky (G2), (G7, a (G8) dostáváme $0 = \cos(\frac{\pi}{2}) = 1 - 2\sin^2(\frac{\pi}{4})$. Odtud plyne $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, neboť podle (G4) je $\sin(\frac{\pi}{4}) > 0$. Podobně obdržíme $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Odtud již plyne dokazovaný vztah.

(G22) Platí $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg}(x) = \infty$ a $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg}(x) = -\infty$.

Tvrzení plyne z poznámky za Větou 4.2.6 a vlastností funkcí sinus a kosinus.

(G23) Platí $\mathcal{H}(\operatorname{tg}) = \mathbb{R}$.

Funkce tg je spojitá na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a zobrazuje tento interval opět na interval (Věta 4.3.6), který podle předchozího tvrzení není omezený ani shora ani zdola. Musí tedy být $\operatorname{tg}\left((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\right) = \mathbb{R}$, čímž je tvrzení dokázáno.

5.3.23 (vlastnosti funkce kotangens)**.** Při důkazu následujících vlastností lze postupovat stejně jako v případě funkce tangens, a proto odvození již uvádět nebudeme.

(G21) Funkce cotg je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

(G22) Funkce cotg je lichá.

(G23) Funkce cotg je periodická s periodou π.

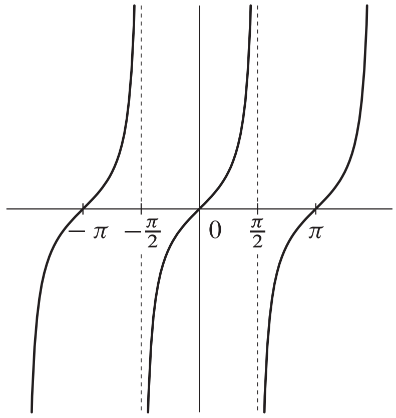
(G24) Funkce cotg je klesající na intervalu $(0, \pi)$.

(G25) Platí $\lim_{x\to 0+} \operatorname{cotg}(x) = \infty$.

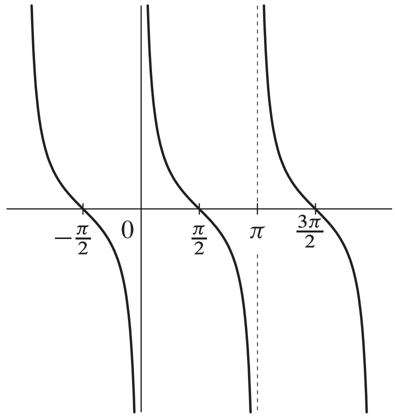
(G26) Platí $\lim_{x\to \pi-} \operatorname{cotg}(x) = -\infty$.

(G27) Platí $\operatorname{cotg}\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 1$.

(G28) Platí $\mathcal{H}(\operatorname{cotg}) = \mathbb{R}$.



Obrázek 7. Graf funkce tangens



Obrázek 8. Graf funkce kotangens

5.3.4. Cyklometrické funkce.

5.3.24. Žádná z goniometrických funkcí nemá funkci inverzní, protože goniometrické funkce nejsou prosté. Pokud však uvažujeme zúžení těchto funkcí na vhodné intervaly, pak můžeme k těmto zúženým funkcím definovat funkce inverzní.

5.3.25. Definice. Cyklometrické funkce arkussinus (arcsin), **arkuskosinus** (arccos), **arkustangens** (arctg) a **arkuskotangens** (arccotg) definujeme následujícím způsobem

$$\begin{aligned} \arcsin &= \left(\sin|_{[-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi]}\right)^{-1}, \\ \arccos &= \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}, \\ \operatorname{arctg} &= \left(\operatorname{tg}|_{(-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi)}\right)^{-1}, \\ \operatorname{arccotg} &= \left(\operatorname{cotg}|_{(0,\pi)}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

5.3.26 (vlastnosti arkussinu)**.**

(AS1) Platí $\mathcal{D}(\arcsin) = [-1, 1]$ a $\mathcal{H}(\arcsin) = \left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$.

(AS2) Funkce arcsin je lichá, rostoucí a spojitá na $[-1, 1]$.

(AS3) Následující rovnosti plynou z .

$$\arcsin(-1) = -\tfrac{1}{2}\pi, \qquad \arcsin(0) = 0,$$
$$\arcsin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \tfrac{1}{4}\pi, \qquad \arcsin(1) = \tfrac{1}{2}\pi.$$

(AS4) Platí $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$.

Funkce arcsin je prostá, a proto $\arcsin x \neq 0$ pro každé $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$. Užitím Věty 4.2.20(P) a vlastnosti funkce sinus dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\arcsin x)}{\arcsin x} = 1.$$

Odtud po algebraické úpravě plyne

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\arcsin x} = 1.$$

Dokazovaný vztah nyní plyne z Věty 4.2.1(c) o limitě podílu.

(AS5) Pro každé $y \in (-1,1)$ platí $\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Pro dané $y \in (-1,1)$ nalezneme $x \in \left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$ splňující $\sin(x) = y$. Podle Věty 5.1.27 platí

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

(AS6) Platí $\arcsin'_+(-1) = \infty$ a $\arcsin'_-(1) = \infty$.

V bodě 1 počítejme dle Věty 5.2.9

$$\arcsin'_-(1) = \lim_{y\to 1_-} \arcsin'(y) = \lim_{y\to 1_-} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \infty.$$

Obdobně odvodíme $\arcsin'_+(-1) = \infty$.

(AS7) Pro každé $x \in [-1,1]$ platí $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Vezměme libovolné $x \in [-1,1]$ a označme $y = \arcsin x$. Potom platí $x = \sin y = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - y\right)$. Protože $y \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, je $\frac{1}{2}\pi - y \in [0,\pi]$, a tedy $\arccos x = \frac{1}{2}\pi - y = \frac{1}{2}\pi - \arcsin x$, odkud již plyne dokazovaná rovnost.

5.3.27 (vlastnosti arkuskosinu)**.**

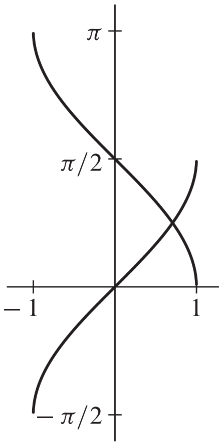
(AC1) Platí $\mathcal{D}(\arccos) = [-1,1]$ a $\mathcal{H}(\arccos) = [0,\pi]$.

(AC2) Funkce arccos je klesající a spojitá na $[-1,1]$.

(AC3) Následující rovnosti plynou ze známých vlastností funkcí sin a cos.

$$\begin{aligned} \arcsin(-1) &= -\tfrac{1}{2}\pi, & \arccos(-1) &= \pi, \\ \arcsin(0) &= 0, & \arccos(0) &= \tfrac{1}{2}\pi, \\ \arcsin\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) &= \tfrac{1}{4}\pi, & \arccos\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) &= \tfrac{1}{4}\pi, \\ \arcsin(1) &= \tfrac{1}{2}\pi, & \arccos(1) &= 0. \end{aligned}$$

(AC4) Pro každé $y \in (-1, 1)$ platí $\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.



Obrázek 9. Grafy funkcí arkussinus a arkuskosinus

5.3.28 (vlastnosti funkce akustangens)**.**

(ATa1) Platí $\mathcal{D}(\operatorname{arctg}) = \mathbb{R}$ a $\mathcal{H}(\operatorname{arctg}) = \left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$.

(ATa2) Funkce arctg je spojitá, rostoucí a lichá na $\mathbb{R}$.

(ATa3) Platí $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{1}{2}\pi$, $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{1}{2}\pi$.

(ATa4) Platí $\operatorname{arctg}(0) = 0$, $\operatorname{arctg}(1) = \frac{1}{4}\pi$, $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{1}{4}\pi$.

(ATa5) Platí $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$.

(ATa6) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\displaystyle\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}$.

5.3.29 (vlastnosti funkce arkuskotangens)**.**

(ACo1) Platí $\mathcal{D}(\operatorname{arccotg}) = \mathbb{R}$ a $\mathcal{H}(\operatorname{arccotg}) = (0, \pi)$.

(ACo2) Funkce arccotg je spojitá a klesající funkce na $\mathbb{R}$.

(ACo3) Platí $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arccotg}(x) = 0$ a $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arccotg}(x) = \pi$.

(ACo4) Platí $\operatorname{arccotg}(0) = \frac{1}{2}\pi$ a $\operatorname{arccotg}(1) = \frac{1}{4}\pi$.

(ACo5) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{1}{2}\pi$.

(ACo6) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\operatorname{arccotg}' x = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

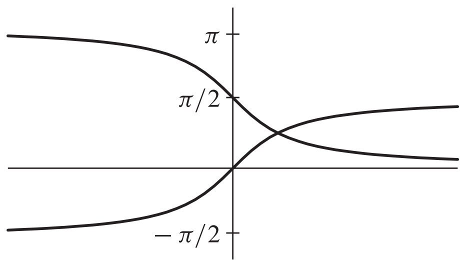
Nechť $I = (0, \pi)$ a nechť $f(y) = \operatorname{cotg} y$, $y \in (0, \pi)$. Potom inverzní funkce f^{-1} je definována na $\mathbb{R}$ a splňuje $f^{-1}(x) = \operatorname{arccotg}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Pro každé $y \in (0, \pi)$ platí

$$f'(y) = \frac{-1}{\sin^2(y)} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 y),$$

a tedy f je spojitá a klesající na I. Nechť $x \in \mathbb{R}$ a $y = \operatorname{arccotg}(x)$. Potom $y \in (0, \pi)$ a $x = \operatorname{cotg}(y)$. Podle věty o derivaci inverzní funkce (Věta 5.1.27(a)) tedy pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\operatorname{arccotg}'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{-1}{1 + \operatorname{cotg}^2(y)} = \frac{-1}{1 + x^2},$$

což jsme chtěli dokázat.



Obrázek 10. Grafy funkcí arkustangens a arkuskotangens

5.4. L'Hôpitalovo pravidlo

5.4.1. Věta (L'Hôpitalovo[3] pravidlo)**.** Nechť $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, f, g jsou funkce, existuje

$$\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

a platí

(a) $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0$, nebo
(b) $\lim_{x \to a+} |g(x)| = \infty$.

Potom platí

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Důkaz. Označme

$$L = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{5.24}$$

Dokažme nejprve následující pomocné tvrzení.

Pomocné tvrzení.

(i) Jestliže $\alpha \in \mathbb{R}$ splňuje $\alpha > L$, pak existuje $\delta > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P_+(a, \delta) \colon \frac{f(x)}{g(x)} < \alpha.$$

(ii) Jestliže $\beta \in \mathbb{R}$ splňuje $\beta < L$, pak existuje $\delta' > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P_+(a, \delta') \colon \frac{f(x)}{g(x)} > \beta.$$

Důkaz pomocného tvrzení. (i) Zvolme $r \in (L, \alpha)$. Díky předpokladu existence limity v (5.24) nalezneme $\delta_1 > 0$ takové, že funkce f a g jsou definované na $P_+(a, \delta_1)$, f zde má vlastní derivaci, g zde má vlastní nenulovou derivaci a platí

$$\forall x \in P_+(a, \delta_1) \colon \frac{f'(x)}{g'(x)} < r. \tag{5.25}$$

Vezměme nyní libovolná $x, y \in P_+(a, \delta_1), x < y$. Podle Cauchyovy věty (Věta 5.2.11) aplikované na f a g na intervalu $[x, y]$ existuje $c \in (x, y)$ splňující

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{5.26}$$

Pro každé $x, y \in P_+(a, \delta_1), x < y$, tedy podle (5.25) a (5.26) platí

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} < r. \tag{5.27}$$

[3] Guillaume François Antoine de L'Hôpital (1661–1704)

Je splněna podmínka (a). Potom pro pevné $y \in P_+(a, \delta_1)$ dostaneme podle (5.27)

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f(y)}{g(y)} \leq r < \alpha.$$

Nyní stačí položit $\delta = \delta_1$.

Je splněna podmínka (b). Zvolme pevně $\tilde{y} \in P_+(a, \delta_1)$. Potom platí

$$\lim_{x \to a+} r\Big(1 - \frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\Big) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} = r + 0 = r < \alpha. \tag{5.28}$$

Existuje tedy $\delta_2 \in (0, \delta_1)$, takové, že

$$\forall x \in P_+(a, \delta_2) \colon r\Big(1 - \frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\Big) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} < \alpha. \tag{5.29}$$

Navíc díky podmínce (b) můžeme požadovat, aby platilo

$$\forall x \in P_+(a, \delta_2) \colon \frac{g(\tilde{y})}{g(x)} < 1. \tag{5.30}$$

Nechť $x \in P_+(a, \delta_2)$. Pak můžeme psát

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x) - f(\tilde{y})}{g(x)} + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} \\ &= \frac{f(x) - f(\tilde{y})}{g(x) - g(\tilde{y})} \cdot \frac{g(x) - g(\tilde{y})}{g(x)} + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} \\ &= \frac{f(x) - f(\tilde{y})}{g(x) - g(\tilde{y})}\Big(1 - \frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\Big) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)}. \end{aligned} \tag{5.31}$$

S pomocí (5.29), (5.30) a (5.31) odhadneme

$$\frac{f(x)}{g(x)} < r\Big(1 - \frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\Big) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} < \alpha.$$

Nyní stačí položit $\delta = \delta_2$.

(ii) Podle (5.24) platí $\lim_{x \to a+} \frac{-f(x)}{g(x)} = -L$. Předpokládejme, že $\beta \in \mathbb{R}$ splňuje $\beta < L$. Potom platí $-\beta > -L$. Již dokázanou část (i) použijeme pro $\alpha = -\beta$ a nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P_+(a, \delta) \colon \frac{-f(x)}{g(x)} < -\beta.$$

Nyní stačí položit $\delta' = \delta$ a tvrzení je dokázáno. ■

Vlastní důkaz. Pokud $L = -\infty$, respektive $L = \infty$, tvrzení věty plyne okamžitě z (i), respektive z (ii). Nechť $L \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Použijeme (i) pro $\alpha = L + \varepsilon$ a obdržíme příslušné $\delta > 0$. Dále použijeme (ii) pro $\beta = L - \varepsilon$ a obdržíme příslušné $\delta' > 0$. Pro každé $x \in P_+(a, \min\{\delta, \delta'\})$ dostaneme

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in (\beta, \alpha) = (L - \varepsilon, L + \varepsilon) = B(L, \varepsilon),$$

což dokazuje naši větu. ■

5.4.2. Věta 5.4.1 platí i pro limity zleva a oboustranné limity.

5.4.3. Příklad. Spočtěte $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3}$.

Řešení. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $(x - \sin(x))' = 1 - \cos(x)$, $(x - \sin(x))'' = \sin(x)$ a $(x^3)' = 3x^2$, $(x^3)'' = 6x$. Protože $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{6x} = \frac{1}{6}$, dostáváme použitím l'Hospitalova pravidla 5.4.1(a) rovnost

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{6x} = \frac{1}{6}.$$

Dalším použitím l'Hospitalova pravidla 5.4.1(a) obdržíme

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{3x^2} = \frac{1}{6}.$$

♣

5.4.4. Příklad. Dokažte, že pro každé $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$, platí vztahy

$$\lim_{x\to 0_+} x^\alpha \log x = 0 \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to\infty} e^{-x} x^\alpha = 0.$$

Řešení. Použijeme l'Hospitalovo pravidlo 5.4.1(b) a dostaneme

$$\lim_{x\to 0_+} x^\alpha \log x = \lim_{x\to 0_+} \frac{\log x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0_+} \frac{x^{-1}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\to 0_+} \frac{x^\alpha}{-\alpha} = 0.$$

Pro výpočet druhé limity nalezneme $n \in \mathbb{N}$ splňující $\alpha < n$. Pak n-násobné užití Věty 5.4.1(b) dává

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} x^n = \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} = \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

Protože $0 \le e^{-x} x^\alpha \le e^{-x} x^n$ pro každé $x \in \mathbb{R}, x \ge 1$, platí $\lim_{x\to\infty} e^{-x} x^\alpha = 0$ dle Věty 4.2.8(c). ♣

5.4.5. Obecně není pravda, že z existence $\lim_{x\to a_+} \frac{f(x)}{g(x)}$ můžeme něco usoudit o $\lim_{x\to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Například platí

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x + \sin(x)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{1 + \frac{\sin(x)}{x}} = -\infty,$$

ale

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{1 + \cos(x)}$$

neexistuje, neboť funkce $x \mapsto \frac{2x}{1+\cos(x)}$ není definována na žádném okolí bodu $-\infty$.

5.4.6. L'Hospitalovo pravidlo není vždy vhodným nástrojem pro výpočet limity. Přímočaré použití l'Hospitalova pravidla pro limitu

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$$

vede k limitě

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}}{1} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}.$$

Výpočet poslední limity není však snazší než výpočet původní limity.

5.4.7. Poznámka. Uvažujme

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\sin(2x) \qquad \text{a} \qquad g(x) = f(x)e^{\sin(x)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pak $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{\sin(x)}} \tag{5.32}$$

neexistuje. Na druhou stranu, počítáme-li pomocí l'Hospitalova pravidla (Věta 5.4.1), dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)e^{\sin(x)} + f(x)e^{\sin(x)}\cos(x)} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\cos(x)}{e^{\sin(x)}\,(\cos(x) + f(x))} = 0, \end{aligned} \tag{5.33}$$

což nesouhlasí s (5.32). Chybné použití l'Hospitalova pravidla spočívá v tom, že výraz $\frac{f'}{g'}$ není definovaný na žádném okolí ∞, tj. $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ z definice neexistuje. Druhá rovnost ve výpočtu (5.33) je tedy chybná.

5.5. Monotónní funkce

5.5.1. Definice. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je

- **rostoucí v bodě** a, pokud existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in P_-(a,\delta)$ platí $f(x) < f(a)$ a pro každé $x \in P_+(a,\delta)$ platí $f(x) > f(a)$,
- **klesající v bodě** a, pokud existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in P_-(a,\delta)$ platí $f(x) > f(a)$ a pro každé $x \in P_+(a,\delta)$ platí $f(x) < f(a)$,
- **neklesající v bodě** a, pokud existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in P_-(a,\delta)$ platí $f(x) \le f(a)$ a pro každé $x \in P_+(a,\delta)$ platí $f(x) \ge f(a)$,
- **nerostoucí v bodě** a, pokud existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in P_-(a,\delta)$ platí $f(x) \ge f(a)$ a pro každé $x \in P_+(a,\delta)$ platí $f(x) \le f(a)$.

Podobně definujeme, že funkce f je **rostoucí v** a **zprava** apod.

5.5.2. Je-li funkce $f : I \to \mathbb{R}$ rostoucí na intervalu I, pak je zřejmě rostoucí v každém vnitřním bodě intervalu I a rostoucí zprava či zleva v eventuálních krajních bodech intervalu I.

5.5.3. Lemma. Nechť $a \in \mathbb{R}$ a funkce f splňuje $f'_+(a) > 0$. Pak je f rostoucí v a zprava.

Důkaz. Dle Věty 4.2.8(i) existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in P_+(a, \delta)$ platí

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

Pak zřejmě pro každé $x \in P_+(a, \delta)$ platí $f(x) > f(a)$, takže je f rostoucí zprava v a. ■

5.5.4. Zřejmé modifikace výše uvedené věty platí pro derivaci zleva, oboustrannou derivaci i případy, kdy je příslušná derivace menší než 0.

5.5.5. Je-li funkce f rostoucí v bodě $a \in \mathbb{R}$, pak obecně nemusí existovat $\delta > 0$ takové, že f je monotónní na intervalu $(a - \delta, a + \delta)$. Stačí vzít

$$f(x) = 2 \cdot \operatorname{sign} x + D(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

kde D je Dirichletova funkce (vizte 4.4.11), a uvažovat bod $a = 0$. Potom pro každé $x < 0$ platí $f(x) = -2 + D(x) \leq -1 < 0 = f(0)$ a podobně pro každé $x > 0$ platí $f(x) = 2 + D(x) \geq 2 > f(0)$. Funkce f je tedy rostoucí v 0. Díky chování Dirichletovy funkce není f monotónní na žádném neprázdném otevřeném intervalu.

5.5.6. Lemma. Nechť I je interval a $f : I \to \mathbb{R}$ je funkce.

(a) Nechť f je funkce rostoucí v každém vnitřním bodě I, rostoucí zleva v pravém krajním bodě I, pokud patří do I, a rostoucí zprava v levém krajním bodě I, pokud patří do I. Potom je f rostoucí na I.

(b) Nechť f je funkce neklesající v každém vnitřním bodě I, neklesající zleva v pravém krajním bodě I, pokud patří do I, a neklesající zprava v levém krajním bodě I, pokud patří do I. Potom je f neklesající na I.

Důkaz. (a) Nechť $a, b \in I$, $a < b$. Chceme dokázat, že $f(a) < f(b)$. Definujme množinu $M = \{c \in (a, b];\ f(c) > f(a)\}$. Pak M je shora omezená, neboť b je horní závorou M. Funkce f je rostoucí zprava v bodě a, a proto existuje $\delta_1 > 0$ takové, že pro každé $x \in P_+(a, \delta_1)$ platí $f(x) > f(a)$. Pak $(a, b] \cap P_+(a, \delta_1) \subset M$, a tedy $M \neq \emptyset$. Položme $s = \sup M$. Pak zřejmě $a < s \leq b$. Funkce f je rostoucí v bodě s zleva, a proto můžeme nalézt $\delta_2 > 0$ takové, že pro každé $x \in P_-(s, \delta_2)$ platí $f(x) < f(s)$. Podle definice suprema existuje $t \in M \cap P_-(s, \delta_2)$. Pak máme $f(a) < f(t) < f(s)$, a tedy $s \in M$.

Dokážeme nyní, že $s = b$. Pro spor předpokládejme $s < b$. Funkce f je rostoucí v bodě s zprava, a proto můžeme nalézt $\delta_3 > 0$ takové, že pro každé $x \in P_+(s, \delta_3)$ platí $f(x) > f(s)$. Pak tedy libovolné $u \in P_+(s, \delta_3) \cap (s, b)$ splňuje $f(a) < f(s) < f(u)$, což znamená $u \in M$. To je ale spor s faktem $s = \sup M$. Tím je rovnost $s = b$ dokázána.

Poněvadž $s \in M$, máme $f(b) = f(s) > f(a)$. Tím je nerovnost $f(a) < f(b)$ dokázána.

(b) Nechť $a, b \in M$, $a < b$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Definujme pomocnou funkci předpisem

$$g(x) = f(x) + \varepsilon x, \qquad x \in I.$$

Funkce g splňuje předpoklady v již dokázaném tvrzení (a), a je tedy rostoucí na I. Pak platí $f(a) + \varepsilon a = g(a) < g(b) = f(b) + \varepsilon b$. Jelikož ε je libovolné, platí $f(a) \leq f(b)$. Tím je důkaz dokončen. ∎

Následující věta ukazuje vztah monotonie a znaménka derivace a narozdíl od Věty 5.2.6 nepracuje s předpokladem spojitosti.

5.5.7. Věta. Nechť I je interval a funkce $f : I \to \mathbb{R}$ má v každém bodě I kladnou (respektive nezápornou, zápornou, nekladnou) derivaci, přičemž v krajních bodech I, pokud patří do I, uvažujeme příslušné jednostranné derivace. Pak f je rostoucí (respektive neklesající, klesající, nerostoucí) na I.

Důkaz. Dokážeme pouze první variantu věty, důkazy ostatních jsou obdobné. Podle Lemmatu 5.5.3 a 5.5.4 je funkce f v každém vnitřním bodě I rostoucí, v levém krajním bodě je rostoucí zprava, pokud tento bod patří do I, v pravém krajním bodě je rostoucí zleva, pokud tento bod patří do I. Z Lemmatu 5.5.6 pak plyne, že f je rostoucí na I. ∎

5.6. Konvexní a konkávní funkce

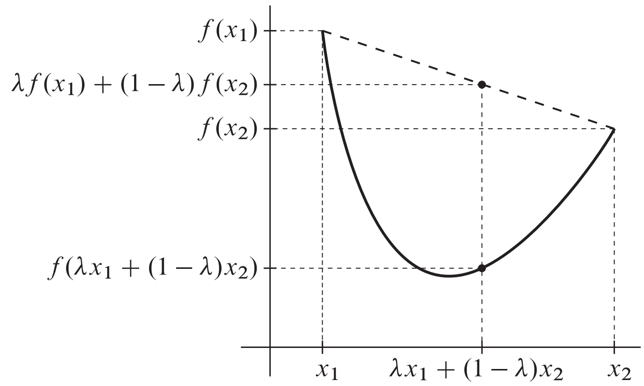
V tomto oddílu se seznámíme s dalšími pojmy, které jsou vhodné pro popsání průběhu funkce.

5.6.1. Definice. Nechť I je interval a f je funkce definovaná alespoň na I. Řekneme, že f je

- **konvexní** na I, jestliže
  $$\forall x, y \in I\ \forall \lambda \in (0,1)\colon f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$
- **konkávní** na I, jestliže
  $$\forall x, y \in I\ \forall \lambda \in (0,1)\colon f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$
- **ryze konvexní** na I, jestliže
  $$\forall x, y \in I, x \neq y\ \forall \lambda \in (0,1)\colon f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$
- **ryze konkávní** na I, jestliže
  $$\forall x, y \in I, x \neq y\ \forall \lambda \in (0,1)\colon f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

5.6.2. Přímo z definice jsou vidět následující tvrzení. Funkce f je konkávní na I, právě když je funkce $-f$ konvexní na I. Funkce f je ryze konkávní na I, právě když je funkce $-f$ ryze konvexní na I.

5.6.3 (geometrický smysl konvexity)**.** Funkce f konvexní na I je taková, že vedeme-li libovolnými dvěma body $[x_1, f(x_1)]$, $[x_2, f(x_2)]$, $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, přímku, leží každý bod množiny $\{[x, f(x)] \in \mathbb{R}^2;\ x \in [x_1, x_2]\}$ pod touto přímkou nebo na ní.



Obrázek 11.

V dalším lemmatu popíšeme konvexitu poněkud jinak než v předchozí definici.

5.6.4. Lemma (ekvivalentní podmínky pro konvexitu)**.** Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f : I \to \mathbb{R}$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:

(i) f je konvexní na I,

(ii) $\forall x_1, x_2, x_3 \in I,\ x_1 < x_2 < x_3\colon \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$,

(iii) $\forall x_1, x_2, x_3 \in I,\ x_1 < x_2 < x_3\colon \dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$,

(iv) $\forall x_1, x_2, x_3 \in I,\ x_1 < x_2 < x_3\colon \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$.

Obdobné charakterizace platí pro konkávní, ryze konvexní a ryze konkávní funkce.

Důkaz. Předpokládejme, že $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$. Položme $\lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$. Pak platí $\lambda \in (0, 1)$ a $x_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_3$. Označme $c = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_3)$. Přímočarým výpočtem pak obdržíme

$$\frac{c - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} = \frac{f(x_3) - c}{x_3 - x_2}. \tag{5.34}$$

Pokud platí $f(x_2) \leq c$, pak pomocí (5.34) dostáváme

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \tag{5.35}$$

Pokud platí jedna z nerovností v (5.35) nebo nerovnost

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

pak podle (5.34) platí nerovnost $f(x_2) \leq c$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Předpokládejme, že $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$. Při označení z předchozího odstavce dostaneme $f(x_2) \leq c$, neboť f je konvexní. Pak podle (5.34) dostáváme nerovnost

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Předpokládejme, že $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$, a c je definováno stejně jako v úvodním odstavci. Potom podle předpokladu platí

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1},$$

takže $c \geq f(x_2)$. Tím je podmínka z definice konvexity ověřena.

Ekvivalenci (i) $\Leftrightarrow$ (iii) a (i) $\Leftrightarrow$ (iv) lze pomocí úvah prvního odstavce ověřit obdobně. ■

5.6.5 (geometrická interpretace)**.** Předchozí lemma poskytuje ekvivalentní popis konvexity pomocí jisté monotonie směrnic sečen grafu funkce f. Následující obrázky ukazují směrnice kterých sečen porovnáváme v bodech (ii), (iii) a (iv).

5.6.6. Pokud budeme v bodech (ii)–(iv) požadovat ostré nerovnosti mezi směrnicemi obdržíme charakterizaci ryzí konvexity. Zřejmou modifikací můžeme dále získat charakterizaci konkávnosti a ryzí konkávnosti.

5.6.7. Věta (konvexita a jednostranné derivace)**.** Nechť f je konvexní funkce na nedegenerovaném intervalu I a $a \in I$.

(a) Je-li a vnitřní bod I, potom existují *vlastní* jednostranné derivace $f'_+(a)$, $f'_-(a)$, které splňují $f'_-(a) \leq f'_+(a)$.
(b) Je-li a pravý krajní bod I, pak $f'_-(a)$ existuje.
(c) Je-li a levý krajní bod I, pak $f'_+(a)$ existuje.

Důkaz. (a) Nechť a je vnitřní bod I. Nalezneme $\delta > 0$ splňující $B(a,\delta) \subset I$ a definujeme funkce

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad x \in P_+(a,\delta), \\ \psi(y) &= \frac{f(y) - f(a)}{y - a}, \quad y \in P_-(a,\delta). \end{aligned}$$

Pro body $y_1, y_2, x_1, x_2 \in P(a,\delta)$ splňující $y_2 < y_1 < a < x_1 < x_2$ dostáváme z Lemmatu 5.6.4

$$\varphi(x_1) = \frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} \leq \frac{f(x_2) - f(a)}{x_2 - a} = \varphi(x_2)$$

a

$$\psi(y_2) = \frac{f(y_2) - f(a)}{y_2 - a} \leq \frac{f(y_1) - f(a)}{y_1 - a} = \psi(y_1).$$

Tedy φ je neklesající na $P_+(a,\delta)$ a ψ je neklesající na $P_-(a,\delta)$. Z Lemmatu 5.6.4 dále pro každé $x \in P_+(a,\delta)$ a $y \in P_-(a,\delta)$ plyne

$$\psi(y) = \frac{f(a)-f(y)}{a-y} \leq \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \varphi(x). \tag{5.36}$$

Tedy φ je zdola omezená na $P_+(a,\delta)$ a ψ je shora omezená na $P_-(a,\delta)$.

Z Věty 4.2.25 plyne, že

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a_+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a_+} \varphi(x)$$

a

$$f'_-(a) = \lim_{y\to a_-} \frac{f(y)-f(a)}{y-a} = \lim_{y\to a_-} \psi(y)$$

existují vlastní.

Navíc z (5.36) a Věty 4.2.25 plyne pro každé $x \in P_+(a,\delta)$

$$f'_-(a) = \lim_{y\to a_-} \psi(y) \leq \varphi(x).$$

Po dalším použití Věty 4.2.25 dostáváme

$$f'_-(a) \leq \lim_{x\to a_+} \varphi(x) = f'_+(a).$$

Tím je důkaz dokončen.

(b) Nechť a je pravý koncový bod I. Vzhledem k tomu, že I není degenerovaný, existuje $\delta > 0$ splňující $B_-(a,\delta) \subset I$. Na tomto prstencovém okolí uvažujme funkci ψ z předchozí části důkazu. Pro ni i zde platí, že je na $P_-(a,\delta)$ neklesající, a proto $f'_-(a)$ existuje.

(c) Důkaz lze provést obdobně jako v části (b). ■

5.6.8. (a) Jednostranné derivace konvexní funkce f na intervalu I se nemusí v bodě $a \in \operatorname{Int} I$ rovnat, a nemusí tedy existovat $f'(a)$. Příkladem je funkce $f(x) = |x|$ a bod $a = 0$.

(b) Jednostranné derivace v tvrzení (b) a (c) předchozí věty mohou být nevlastní, vizte např. funkci sign uvažovanou na intervalu $[-1,0]$.

5.6.9. Věta (konvexita a spojitost)**.** Nechť I je interval, a je vnitřní bod I a $f\colon I \to \mathbb{R}$ je konvexní funkce na I. Potom je f je spojitá v a.

Důkaz. Díky Větě 5.6.7(a) existují $f'_-(a)$ a $f'_+(a)$ vlastní. Podle 5.1.16 je f spojitá zleva i zprava v a, tedy je spojitá v a. ■

5.6.10. Funkce sign, která je na intervalu $(-1,0]$ konvexní, není spojitá v bodě 0. Z konvexity funkce f tedy nevyplývá spojitost ve všech bodech intervalu I, na němž je funkce f definována.

5.6.11. Věta (druhá derivace a konvexita)**.** Nechť I je nedegenerovaný interval, $f\colon I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce na I, která má v každém vnitřním bodě I vlastní derivaci.

(a) Nechť funkce f' je neklesající na svém definičním oboru. Potom je f konvexní na I.
(b) Nechť pro každý vnitřní bod x intervalu I platí $f''(x) \geq 0$. Potom je f konvexní na I.

Důkaz. (a) Vezměme libovolné body $x_1 < x_2 < x_3$ z intervalu I. Podle předpokladů je funkce f spojitá na intervalu $[x_1, x_3]$ a v bodech intervalu (x_1, x_3) má derivaci. Díky Lagrangeově větě (Věta 5.2.4) existují body $c \in (x_1, x_2)$ a $d \in (x_2, x_3)$ splňující

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \qquad \text{a} \qquad \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(d).$$

Z předpokladu na f' obdržíme

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \leq f'(d) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Dle Lemmatu 5.6.4((i)$\Leftrightarrow$(iv)) je tedy f konvexní.

(b) Funkce f' je neklesající na svém definičním oboru (Věta 5.5.7), a tedy f je konvexní díky části (a). ■

5.6.12. Obdobná tvrzení platí pro ryzí konvexitu, konkávnost a ryzí konkávnost.

5.6.13. Příklad. Dokažte, že pro každé $h \in [0, \frac{\pi}{2}]$ platí $\sin h \geq \frac{2}{\pi} h$.

Řešení. Funkce sinus má druhou derivaci rovnou funkci $-\sin$, která je na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$ menší nebo rovna 0. Funkce sinus je tedy na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$ konkávní. Pro $h \in [0, \frac{\pi}{2}]$ položme $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$ a $\lambda = \frac{2}{\pi} h$. Podle definice konkávní funkce platí

$$\sin h = \sin\bigl(\lambda x + (1 - \lambda) y\bigr) \geq \lambda \sin x + (1 - \lambda) \sin y = \lambda = \tfrac{2}{\pi} h.$$

♣

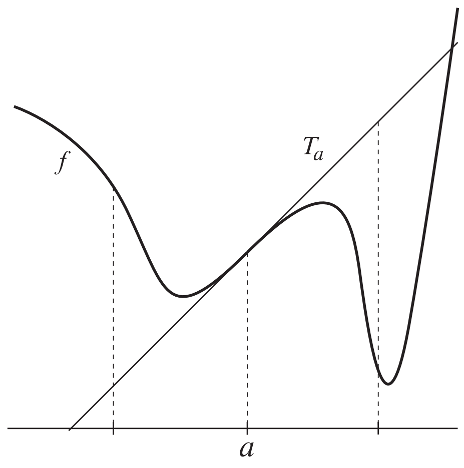
5.6.14. Definice. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě a **inflexi** nebo také že a je **inflexním bodem** funkce f, jestliže existuje vlastní $f'(a)$ a existuje $\delta > 0$ takové, že buď

$$\begin{aligned} &\forall x \in P_-(a, \delta)\colon\ f(x) > f(a) + f'(a)(x - a) \qquad \text{a} \\ &\forall x \in P_+(a, \delta)\colon\ f(x) < f(a) + f'(a)(x - a), \end{aligned}$$

nebo

$$\begin{aligned} &\forall x \in P_-(a, \delta)\colon\ f(x) < f(a) + f'(a)(x - a) \qquad \text{a} \\ &\forall x \in P_+(a, \delta)\colon\ f(x) > f(a) + f'(a)(x - a). \end{aligned}$$

5.6.15 (geometrická interpretace)**.** Graf funkce v oblasti inflexního bodu přechází z jedné strany tečny na druhou, buď je v levém prstencovém okolí bodu a nad tečnou a v pravém prstencovém okolí bodu a pod tečnou, nebo je v levém prstencovém okolí bodu a pod tečnou a v pravém prstencovém okolí bodu a nad tečnou. Tuto poznámku ilustruje následující obrázek.



Obrázek 12.

5.6.16. Věta (nutná podmínka inflexe)**.** Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a $f''(a)$ existuje a je různá od nuly. Potom a není inflexním bodem funkce f.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $f''(a) > 0$. Z definice limity najdeme $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in P(a, \delta)$ platí

$$\frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} > 0.$$

Dostáváme tedy, že

$$\begin{aligned} &\forall x \in P_-(a, \delta)\colon f'(x) < f'(a) \qquad \text{a} \\ &\forall x \in P_+(a, \delta)\colon f'(x) > f'(a). \end{aligned} \tag{5.37}$$

Vezměme nyní libovolné $x \in P_-(a, \delta)$. Protože f je spojitá na $B(a, \delta)$ dle Věty 5.1.15, pomocí Lagrangeovy věty (Věta 5.2.4) najdeme $c_x \in (x, a)$ splňující

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} = f'(c_x).$$

Protože díky (5.37) máme $f'(c_x) < f'(a)$, obdržíme $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < f'(a)$. Úpravou dostáváme $f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$.

Je-li $x \in P_+(a, \delta)$, jako výše nalezneme $d_x \in (a, x)$ splňující

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(d_x) > f'(a).$$

Tedy máme $f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$. Jinými slovy, bod $[x, f(x)]$ leží nad tečnou f v bodě a na levém i pravém okolí a. Tedy a není inflexním bodem f. Obdobně bychom postupovali v případě $f''(a) < 0$. ■

5.6.17. Rovnost $f''(a) = 0$ ještě nezaručuje, že a je inflexním bodem f. Příkladem je funkce $f(x) = x^4$, $x \in \mathbb{R}$. Pak $f''(0) = 0$, ale bod 0 není inflexním bodem f, protože graf funkce f leží nad tečnou v bodě 0.

5.6.18. Věta (postačující podmínka pro inflexi)**.** Nechť funkce f má spojitou první derivaci na intervalu (a, b), $c \in (a, b)$ a platí

$$\forall x \in (a, c)\colon f''(x) > 0 \quad \text{a} \quad \forall x \in (c, b)\colon f''(x) < 0 \tag{5.38}$$

nebo

$$\forall x \in (a, c)\colon f''(x) < 0 \quad \text{a} \quad \forall x \in (c, b)\colon f''(x) > 0. \tag{5.39}$$

Pak c je inflexním bodem f.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že f splňuje (5.38). Z Věty 5.2.6 plyne, že f' je rostoucí na $(a, c]$ a je klesající na $[c, b)$. Pro dané $x \in (a, c)$ použijeme Lagrangeovu větu 5.2.4 k nalezení $c_x \in (x, c)$ splňujícího

$$\frac{f(c) - f(x)}{c - x} = f'(c_x) < f'(c).$$

Tedy $f(x) > f(c) + f'(c)(x - c)$.

Podobně pro $x \in (c, b)$ najdeme $d_x \in (c, x)$ splňující

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(d_x) < f'(c).$$

Úpravou obdržíme $f(x) < f(c) + f'(c)(x - c)$. Tedy c splňuje první variantu v Definici 5.6.14, tj. c je inflexním bodem f.

Obdobně bychom ověřili, že funkce splňující (5.39) splňuje v c druhou možnost v definici inflexního bodu. ■

5.7. Asymptota funkce

Při zkoumání vlastností funkcí nás může zajímat chování funkce v ∞ nebo $-\infty$. Často postačí výpočet limity, ale někdy potřebujeme mít přesnější představu o chování funkce. Asymptota je jedním z možných nástrojů, pomocí kterého lze toto chování popsat.

5.7.1. Definice. Asymptotou funkce f v bodě ∞ rozumíme afinní funkci l splňující

$$\lim_{x\to\infty} \bigl(f(x) - l(x)\bigr) = 0. \tag{5.40}$$

Obdobně definujeme asymptotu funkce f v bodě $-\infty$.

5.7.2 (komentář k definici)**.**

5.7.3. Věta (tvar asymptoty)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Funkce f má v bodě ∞ asymptotu $x \mapsto ax + b$ právě tehdy, když platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to\infty} \big(f(x) - ax\big) = b \in \mathbb{R}. \tag{5.41}$$

Obdobné tvrzení platí pro asymptotu v bodě $-\infty$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Díky Větě 4.2.1 dostáváme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - ax - b}{x} + \lim_{x\to\infty} \big(a + \tfrac{b}{x}\big) = 0 + a = a,$$

a

$$\lim_{x\to\infty} \big(f(x) - ax\big) = \lim_{x\to\infty} \big(f(x) - ax - b\big) + \lim_{x\to\infty} b = b.$$

$\Leftarrow$ S pomocí (5.41) dostáváme

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - ax - b) = b - b = 0.$$

Tedy $x \mapsto ax + b$ je asymptotou funkce f v ∞. ∎

5.7.4. Příklad. Funkce e^x má v $-\infty$ asymptotu $x \mapsto 0$ a v bodě ∞ asymptotu nemá, neboť první limita ve Větě 5.7.3 je nevlastní.

5.7.5. Příklad. Funkce $f(x) = \sqrt{2x^2 + x + 1}$ má v bodě ∞ asymptotu $x \mapsto \sqrt{2}x + \frac{1}{2\sqrt{2}}$. To plyne z

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + x + 1}}{x} = \sqrt{2}$$

a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \big(f(x) - \sqrt{2}x\big) &= \lim_{x\to\infty} \big(\sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{2}x\big) \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{2x^2 + x + 1} + \sqrt{2}x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

5.7.6. Příklad. Funkce tangens nemá v bodě ∞ asymptotu, protože není definovaná na žádném jeho okolí.

5.7.7. Příklad. Funkce sinus nemá v bodě ∞ asymptotu, ačkoli první z obou limit ve Větě 5.7.3 existuje a je rovna nule, neexistuje však limita $\lim_{x\to\infty}(f(x) - 0 \cdot x)$.

5.8. Průběh funkce

5.8.1. *Vyšetření průběhu funkce* je neformálně zadaná úloha, kde zkoumáme jisté vlastnosti uvažované funkce. Volba těchto vlastností závisí na cíli našeho zkoumání. Při vyšetřování průběhu funkce získáváme zejména následující informace:

- definiční obor, spojitost, limity v krajních bodech definičního oboru a limity v bodech nespojitosti,
- symetrie funkce, např. sudost, lichost nebo periodicita,

- definiční obor derivace, derivace, případně jednostranné derivace,
- intervaly monotonie a extrémy (lokální i globální),
- obor hodnot,
- definiční obor druhé derivace, druhá derivace, konvexita a konkávnost, inflexní body,
- asymptoty.

Na základě těchto informací pak zpravidla již získáme poměrně přesnou představu o chování funkce.

5.8.2. Příklad.

5.9. Teoretické příklady k derivaci funkce

Následující příklad ilustruje důležitost předpokladu spojitosti alespoň jedné z uvažovaných funkcí ve Větě 5.1.17(b).

5.9.1. Příklad. Nechť funkce f je definována předpisem

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \frac{1}{2} & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Dokažte, že výraz $f'(0) \cdot f(0) + f(0) \cdot f'(0)$ má smysl, ale přesto $\left(f^2\right)'(0)$ neexistuje.

Řešení. Vynásobíme-li funkci f se sebou samou, dostaneme

$$f^2(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \frac{1}{4} & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Podobně jako v Příkladu 5.1.14 dostaneme $f'(0) = \infty$. Výraz $f'(0) \cdot f(0) + f(0) \cdot f'(0)$ má smysl, protože

$$f'(0) \cdot f(0) + f(0) \cdot f'(0) = \infty \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \infty = \infty.$$

Snadno odvodíme $\left(f^2\right)'_+(0) = \infty$ a $\left(f^2\right)'_-(0) = -\infty$, a proto $\left(f^2\right)'(0)$ neexistuje. ♣

Také ve Větě 5.1.17(c) je předpoklad spojitosti funkce g podstatný.

5.9.2. Příklad. Definujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Pak $f'(x)$ existuje vlastní pro každé $x \in \mathbb{R}$, ale funkce f' není spojitá v 0.

Řešení. Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ podle Věty 5.1.17 platí

$$f'(x) = 2x \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\tfrac{1}{x}\right).$$

V bodě 0 máme

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) = 0$$

dle Věty 4.2.13. Uvažujme posloupnost $\{a_n\} = \{\frac{1}{2\pi n}\}$. Tato posloupnost konverguje k 0, ale

$$\lim_{n\to\infty} f'(a_n) = \lim_{n\to\infty} \bigl(-\cos(2\pi n)\bigr) = -1.$$

Tedy dle Heineovy věty (Věta 4.2.14) není pravda, že $\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$, tj. f' není spojitá v bodě 0. ♣

5.9.3. Poznámka. Doplňme k předchozímu příkladu ještě následující neformální komentář. Funkce v předchozím příkladu má derivaci v bodě 0 rovnou nule, protože jsou její oscilace tlumeny funkcí $x \mapsto x^2$. Přesto však blízko bodu 0 jsou intervaly, kde funkce rychle roste, a intervaly, kde funkce rychle klesá. Derivace je na těchto intervalech blízko hodnotě 1, respektive -1. Odtud pak pramení nespojitost funkce f' v bodě 0. Podívejte se na následující obrázek.

Obrázek 13. Graf funkce z Příkladu 5.9.2

5.9.4. Příklad. Nechť

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ukažte, že f je rostoucí v bodě 0, má vlastní derivaci pro každé $x \in \mathbb{R}$, ale není rostoucí na žádném okolí bodu 0.

Řešení. Díky Příkladu 5.9.2 máme

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Z 5.5.4 plyne, že f je rostoucí v bodě 0.

Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $x_n = \frac{1}{2\pi n}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $f'(x_n) = -\frac{1}{2}$, a tedy f je klesající v bodě x_n. Protože posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k 0, funkce f není monotónní na žádném okolí 0. ♣

5.9.5. Příklad. Nechť funkce f je definována předpisem

$$f(x) = \begin{cases} x^5\bigl(2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\bigr) & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Pak f má v 0 inflexi, ale neexistuje okolí 0, kde by byly splněny předpoklady Věty 5.6.18.

Řešení. Protože $f'(0) = 0$ (vizte výpočet v Příkladu 5.9.2), tečna funkce f v bodě 0 je dána jako

$$t(x) = f(0) + f'(0)x = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Je-li $x < 0$, pak $f(x) < 0 = t(x)$, a pro $x > 0$ máme $f(x) > 0 = t(x)$. Tedy f má v 0 inflexní bod.

Vypočteme první a druhou derivaci funkce f:

$$f'(x) = \begin{cases} 10x^4 + 5x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

a

$$f''(x) = \begin{cases} x\Big(20x^2(2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)) + 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{x}\right)\Big) & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Označme

$$g(x) = 20x^2\big(2 + \sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\big) + 2x\cos\left(\tfrac{1}{x}\right), \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Pak dle Věty 4.2.13 platí $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$. Tedy výraz $g(x) - \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ nabývá kladných i záporných hodnot na libovolném okolí 0. Protože

$$f''(x) = x\big(g(x) - \sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\big), \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

nabývá druhá derivace f kladné i záporné hodnoty na libovolném okolí bodu 0.

♣

5.9.6. Příklad. Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci a posloupnosti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ splňují $\lim_{n \to \infty}(y_n - x_n) = 0$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $x_n \le a \le y_n$, $y_n - x_n > 0$. Dokažte, že potom platí

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(a).$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $0 \le a - x_n \le y_n - x_n$. Odtud díky předpokladu $\lim(y_n - x_n) = 0$ dostaneme $\lim x_n = a$. Podobně odvodíme $\lim y_n = a$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in P(a, \delta)$ platí

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right| < \varepsilon.$$

Odtud plyne, že pro každé $x \in B(a, \delta)$ (i pro $x = a$) máme

$$|f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)| \le \varepsilon |x - a|. \tag{5.42}$$

Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \ge n_0$ platí $x_n, y_n \in B(a, \delta)$. Díky (5.42) a trojúhelníkové nerovnosti pro každé $n \ge n_0$ platí

$$\begin{aligned} &|f(y_n) - f(x_n) - f'(a)(y_n - x_n)| \\ &\qquad \le |f(y_n) - f(a) - f'(a)(y_n - a)| + |f(a) - f(x_n) - f'(a)(a - x_n)| \\ &\qquad = |f(y_n) - f(a) - f'(a)(y_n - a)| + |f(x_n) - f(a) - f'(a)(x_n - a)| \\ &\qquad \le \varepsilon|y_n - a| + \varepsilon|x_n - a| = \varepsilon(y_n - x_n). \end{aligned}$$

S pomocí předpokladu $y_n - x_n > 0$ dostáváme pro každé $n \geq n_0$ nerovnost

$$\left| \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} - f'(a) \right| \leq \varepsilon.$$

Odtud již plyne dokazované tvrzení. ♣

5.9.7. Příklad. Ukažte, že *spojitá* funkce f z Příkladu 4.4.13 nemá v žádném bodě vlastní derivaci.

Řešení. Nechť $a \in \mathbb{R}$ je libovolný bod. Ukážeme za pomoci Příkladu 5.9.6, že $f'(a)$ neexistuje vlastní. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $x_n = [4^n a] \cdot 4^{-n}$ a $y_n = \big([4^n a] + 1\big) \cdot 4^{-n}$. Podle definice celé části máme $x_n \leq a < y_n$. Nechť f_n jsou funkce zkonstruované v Příkladu 4.4.13. Pozorování 2 z Příkladu 4.4.13 pro každé $m \geq n$ dává $f_m(x_n) = f_m(y_n) = 0$. Máme tedy

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{f_m(y_n) - f_m(x_n)}{y_n - x_n}.$$

Podle téhož pozorování pro každé $m \in \{1, \dots, n-1\}$ platí $|f_m(y_n) - f_m(x_n)| = |y_n - x_n|$. Každý člen v předchozí sumě je tedy roven 1, nebo -1, a proto

$$\sum_{m=1}^{n-1} \frac{f_m(y_n) - f_m(x_n)}{y_n - x_n} \quad \text{je} \quad \begin{cases} \text{liché celé číslo, pokud je } n \text{ sudé,} \\ \text{sudé celé číslo, pokud je } n \text{ liché.} \end{cases}$$

Limita

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}$$

tedy nemůže existovat vlastní, protože uvažovaná posloupnost nesplňuje Bolzanovu-Cauchyovy podmínku 2.4.26. Poněvadž

$$\lim_{n \to \infty} (y_n - x_n) = \lim_{n \to \infty} 4^{-n} = 0,$$

dostáváme podle Příkladu 5.9.6, že $f'(a)$ neexistuje vlastní. ♣

5.9.8. Příklad. Dokažte, že pro každé $x \in (0, \infty)$ platí

$$\frac{x-1}{x} \leq \log x \leq x - 1 \tag{5.43}$$

(srovnejte s 1.7.14). Rovnosti v (5.43) navíc platí právě tehdy, když $x = 1$.

Řešení. První nerovnost. Definujme pomocnou funkci $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) = \log x - \frac{x-1}{x}, \qquad x \in (0, \infty).$$

Vypočteme

$$f'(x) = \frac{x-1}{x^2}, \qquad x \in (0, \infty).$$

Podle Věty 5.5.7 je tedy f klesající na $(0, 1]$ a rostoucí na $[1, \infty)$. Funkce f má tedy v bodě 1 minimum. Vzhledem k tomu, že $f(1) = 0$, dostáváme první nerovnost v (5.43). Navíc $f(x) = 0$ právě tehdy, když $x = 1$, tj. v první nerovnosti v (5.43) platí rovnost právě tehdy, když $x = 1$.

Druhá nerovnost. Definujme pomocnou funkci $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$g(x) = x - 1 - \log x, \qquad x \in (0,\infty).$$

Vypočteme

$$g'(x) = \frac{x-1}{x}, \qquad x \in (0,\infty).$$

Podle Věty 5.5.7 je tedy g je tedy rostoucí na $[1,\infty)$ a klesající na $(0,1]$. Má tedy v bodě 1 minimum. Vzhledem k tomu, že $g(1) = 0$, dostáváme první nerovnost v (5.43). Navíc $g(x) = 0$ právě tehdy, když $x = 1$, tj. v druhé nerovnosti v (5.43) platí rovnost právě tehdy, když $x = 1$. ♣

Následující příklad je zobecněním Bernoulliovy nerovnosti na intervalu $(-1,\infty)$ (vizte Příklad 1.8.10).

5.9.9. Příklad. Dokažte, že pro každé $\alpha \in [1,\infty)$ a $x \in (-1,\infty)$ platí

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x.$$

Řešení. Definujme pomocnou funkci $f\colon (-1,\infty) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) = (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x.$$

Vypočteme

$$f'(x) = \alpha\big((1+x)^{\alpha-1} - 1\big), \qquad x \in (-1,\infty).$$

Odtud plyne, že platí $f'(x) \leq 0$ pro $x \in (-1,0)$ a $f'(x) \geq 0$ pro $x \in (0,\infty)$. Tedy f je nerostoucí na intervalu $(-1,0]$ a neklesající na intervalu $[0,\infty)$ podle Věty 5.5.7. Tudíž f nabývá svého minima v bodě 0. Protože $f(0) = 0$, je f nezáporná na $(-1,\infty)$. Odtud plyne dokazovaná nerovnost. ♣

5.9.10. Příklad (Young[4]). Nechť $a,b \in [0,\infty)$, $p,q \in (1,\infty)$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom platí

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Řešení. Definujme pomocnou funkci $\varphi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\varphi(x) = \frac{a^p}{p} + \frac{x^q}{q} - ax.$$

Funkce φ je spojitá na svém definičním oboru a platí

$$\varphi'(x) = x^{q-1} - a, \qquad x \in (0,\infty).$$

Vyšetřením znaménka derivace obdržíme díky Větě 5.2.6, že funkce φ je klesající na intervalu $\big[0, a^{\frac{1}{q-1}}\big]$, rostoucí na intervalu $\big[a^{\frac{1}{q-1}}, \infty\big]$ a v bodě $a^{\frac{1}{q-1}}$ nabývá svého

[4]William Henry Young (1863–1942)

minima. Pro každé $b \in [0, \infty)$ tedy platí $\varphi(b) \geq \varphi(a^{\frac{1}{q-1}})$. Použijeme rovnost $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ a pro každé $b \in [0, \infty)$ obdržíme

$$\begin{aligned}\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab = \varphi(b) \geq \varphi(a^{\frac{1}{q-1}}) &= \frac{a^p}{p} + \frac{a^{\frac{q}{q-1}}}{q} - aa^{\frac{1}{q-1}} \\ &= \frac{a^p}{p} + \frac{a^p}{q} - a^p = 0.\end{aligned}$$

Odtud plyne dokazovaná nerovnost. ♣

5.9.11. Příklad (Hölder[5]). Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ a $p, q \in (1, \infty)$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom platí

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j b_j| \leq \Big(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\Big)^{1/p} \cdot \Big(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^q\Big)^{1/q}.$$

Řešení. Označme $A = \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\right)^{1/p}$ a $B = \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^p\right)^{1/p}$. Pokud $A = 0$ nebo $B = 0$, pak nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že $A > 0$ a $B > 0$. Pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ díky Příkladu 5.9.10 platí

$$\frac{|a_j|}{A} \cdot \frac{|b_j|}{B} \leq \frac{1}{p}\Big(\frac{|a_j|}{A}\Big)^p + \frac{1}{q}\Big(\frac{|b_j|}{B}\Big)^q.$$

Odtud plyne

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{|a_j||b_j|}{AB} \leq \sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{1}{p}\frac{|a_j|^p}{A^p} + \frac{1}{q}\frac{|b_j|^q}{B^q}\Big) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

což dokazuje Hölderovu nerovnost. ♣

5.9.12. Příklad (Minkowski[6]). Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ a $p \in (1, \infty)$. Potom platí

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} |a_j + b_j|^p\Big)^{1/p} \leq \Big(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^p\Big)^{1/p}.$$

Řešení. Pokud $\sum_{j=1}^{n} |a_j + b_j|^p = 0$, pak dokazovaná nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že $\sum_{j=1}^{n} |a_j + b_j|^p \neq 0$. V následující sérii odhadů použijeme trojúhelníkovou nerovnost a dvakrát Hölderovu nerovnost (Příklad 5.9.11), kde

[5] Ludwig Otto Hölder (1859 –1937)
[6] Hermann Minkowski (1864 –1909)

za q vezmeme číslo $\frac{p}{p-1}$. Platí

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^p &= \sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|\cdot|a_j+b_j|^{p-1}\\
&\le \sum_{j=1}^{n}(|a_j|+|b_j|)\cdot|a_j+b_j|^{p-1}\\
&= \sum_{j=1}^{n}|a_j|\cdot|a_j+b_j|^{p-1}+\sum_{j=1}^{n}|b_j|\cdot|a_j+b_j|^{p-1}\\
&\le \Bigl(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^p\Bigr)^{\frac{1}{p}}\cdot\Bigl(\sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^{(p-1)\cdot\frac{p}{p-1}}\Bigr)^{\frac{p-1}{p}} \qquad \text{(Hölderova nerovnost)}\\
&\quad+\Bigl(\sum_{j=1}^{n}|b_j|^p\Bigr)^{\frac{1}{p}}\cdot\Bigl(\sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^{(p-1)\cdot\frac{p}{p-1}}\Bigr)^{\frac{p-1}{p}}\\
&= \Bigl(\Bigl(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^p\Bigr)^{\frac{1}{p}}+\Bigl(\sum_{j=1}^{n}|b_j|^p\Bigr)^{\frac{1}{p}}\Bigr)\cdot\Bigl(\sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^p\Bigr)^{\frac{p-1}{p}}.
\end{aligned}$$

Vydělením obou stran kladným členem $\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}$ obdržíme dokazovanou nerovnost. ♣

5.9.13. Příklad. Ukažte, že $3<\pi<4$.

Řešení. Podle odvození vlastnosti (G4) platí $\frac{\pi}{2}\in(0,2)$ a $\cos\bigl(\frac{\pi}{2}\bigr)=0$. Zjevně tedy $\pi<4$. Abychom dokázali nerovnost $\pi>3$, stačí ověřit, že $\cos(\frac{3}{2})>0$, dle vlastnosti (G4) je totiž kosinus klesající na intervalu $(0,2)$.

Označme $\beta=\frac{3}{2}$ a $a_n=\frac{\beta^{2n}}{(2n)!}$, $n\in\mathbb{N}$. Pak pro každé $n\in\mathbb{N}$ máme $a_{n+1}\le a_n$, a tedy dle Věty 3.3.1 platí

$$\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^n a_n=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=4}^{k}(-1)^n a_n\ge 0.$$

Tedy

$$\begin{aligned}
\cos\beta &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\beta^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{\beta^2}{2!}+\frac{\beta^4}{4!}-\frac{\beta^6}{6!}+\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^n a_n\\
&\ge 1-\frac{\beta^2}{2!}+\frac{\beta^4}{4!}-\frac{\beta^6}{6!}=\frac{359}{5\cdot 2^{10}}>0
\end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. ♣

V následujícím příkladu ukážeme, že pomocí věty o derivaci inverzní funkce je možné v některých případech spočítat derivaci určité funkce, ačkoli pro tuto funkci nemáme k dispozici explicitní vyjádření.

5.9.14. Příklad. Nechť funkce f je definována předpisem $f(x) = x^3+\sin x$, $x \in \mathbb{R}$. Ukažte, že f je na $\mathbb{R}$ prostá a $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$ a pro její inverzní funkci $g = f^{-1}$ spočtěte $g'(b)$ a $g''(b)$, kde $b = f(1)$.

Řešení. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f'(x) = 3x^2 + \cos x \qquad \text{a} \qquad f''(x) = 6x - \sin x.$$

Pro každé $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ platí $3x^2 + \cos x > 0$. Pro každé $x \in [\frac{\pi}{2}, \infty)$ máme díky Příkladu 5.9.13 odhad

$$3x^2 + \cos x \geq 3\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^2 - 1 \geq 3\left(\tfrac{3}{2}\right)^2 - 1 = \tfrac{23}{4} > 0.$$

Protože je f' sudá funkce, je $f'(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Tedy funkce f je spojitá a rostoucí na $\mathbb{R}$. Protože $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, dostáváme z Věty 4.3.4, že $\mathcal{H}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. K funkci f tedy existuje inverzní funkce $g = f^{-1} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Podle věty o derivaci inverzní funkce (Věta 5.1.27(a)) platí

$$g'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

Použijeme Věty 5.1.17 a 5.1.24 a pro každé $y \in \mathbb{R}$ obdržíme

$$g''(y) = -\frac{1}{\big(f'(g(y))\big)^2} \cdot f''(g(y)) \cdot g'(y) = -\frac{f''(g(y))}{\big(f'(g(y))\big)^3}.$$

Pro $b = f(1) = 1 + \sin 1$ máme $g(b) = 1$,

$$g'(b) = \frac{1}{3 + \cos 1} \qquad \text{a} \qquad g''(b) = -\frac{6 - \sin 1}{(3 + \cos 1)^3}.$$

♣

5.9.15. Příklad. Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$, $f \colon (a, b) \to \mathbb{R}$ je konvexní na $(a, c]$ a na $[c, b)$. Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní.

(i) Funkce f je konvexní na (a, b).
(ii) Platí $f'_-(c) \leq f'_+(c)$.

Řešení. (i) $\Rightarrow$ (ii) Tvrzení plyne z Věty 5.6.7(a).

(ii) $\Rightarrow$ (i) Odvoďme nejprve následující pozorování.

Pozorování. Nechť $u, v, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $0 < u$, $0 < v$, a je splněna nerovnost

$$\frac{\alpha}{u} \leq \frac{\beta}{v}. \tag{5.44}$$

Pak platí

$$\frac{\alpha}{u} \leq \frac{\alpha + \beta}{u + v}. \tag{5.45}$$

Důkaz pozorování. V (5.44) vynásobíme oba členy kladným výrazem uv a obdržíme $\alpha v \leq \beta u$. Odtud plyne $\alpha u + \alpha v \leq \alpha u + \beta u$. Oba členy vydělíme kladným výrazem $u(u + v)$ a obdržíme (5.45). ∎

Funkce f je konvexní na intervalu $(a, c]$, a proto podle Lemmatu 5.6.4 je funkce
$$t \mapsto \frac{f(c) - f(t)}{c - t}$$
neklesající na intervalu (a, c). Platí tedy
$$f'_-(c) = \sup\left\{\frac{f(c) - f(t)}{c - t};\ t \in (a, c)\right\}. \tag{5.46}$$
Podobně máme
$$f'_+(c) = \inf\left\{\frac{f(t) - f(c)}{t - c};\ t \in (c, b)\right\}. \tag{5.47}$$
Konvexitu funkce f dokážeme ověřením podmínky (ii) z Lemmatu 5.6.4. Nechť $x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$, $x_1 < x_2 < x_3$. Pokud $c \le x_1$, nebo $x_3 \le c$, pak je dokazovaná nerovnost v podmínce (ii) splněna díky konvexitě f na $(a, c]$ a $[c, b)$. Pokud $x_1 < c < x_3$, rozlišíme dva případy.

Případ $x_2 \le c$. Pak platí
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(c) - f(x_1)}{c - x_1} \le f'_-(c) \le f'_+(c) \le \frac{f(x_3) - f(c)}{x_3 - c}. \tag{5.48}$$
Položme $\alpha = f(c) - f(x_1)$, $\beta = f(x_3) - f(c)$, $u = c - x_1$, $v = x_3 - c$. S pomocí Pozorování a (5.48) obdržíme
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(c) - f(x_1)}{c - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}.$$
Případ $x_2 > c$. Díky (5.46) a (5.47) máme
$$\frac{f(c) - f(x_1)}{c - x_1} \le f'_-(c) \le f'_+(c) \le \frac{f(x_2) - f(c)}{x_2 - c}.$$
Odtud pomocí Pozorování a Lemmatu 5.6.4 obdržíme
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(c)}{x_2 - c} \le \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$
Opět pomocí Pozorování pak máme
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}.$$
Tím je podle Lemmatu 5.6.4 dokázána konvexita f na (a, b). ♣

5.9.16. Příklad. Nechť f je konvexní funkce na intervalu (a, b). Pak množina bodů nediferencovatelnosti funkce f je nejvýše spočetná.

Řešení. Z Věty 5.6.11 víme, že v každém bodě $x \in (a, b)$ existují vlastní jednostranné derivace a platí $f'_-(x) \le f'_+(x)$. Ukažme nyní, že pro body $x, y \in (a, b)$, $x < y$, platí $f'_-(x) \le f'_+(x) \le f'_-(y)$. K tomuto účelu vezmeme body u, v splňující $x < u < v < y$. Díky konvexitě f (vizte Lemma 5.6.4) pak máme
$$\frac{f(u) - f(x)}{u - x} \le \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \le \frac{f(v) - f(y)}{v - y}.$$

Tedy pro každé $v \in (x, y)$ platí dle Věty 4.2.8(b)

$$f'_+(x) = \lim_{u \to x+} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} \leq \frac{f(v) - f(y)}{v - y}.$$

Opětovným použitím Věty 4.2.8(b) máme

$$f'_+(x) \leq \lim_{v \to y-} \frac{f(v) - f(y)}{v - y} = f'_-(y).$$

Tedy jsem ukázali, že f'_- je neklesající funkce na (a, b). Podle Příkladu 4.4.5 je tedy f'_- spojitá všude na (a, b) s výjimkou nejvýše spočetné množiny D. Máme-li nyní bod $x \in (a, b) \setminus D$, platí

$$f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq \lim_{y \to x+} f'_-(y) = f'_-(x).$$

Odtud plyne, že $f'_-(x) = f'_+(x)$. Dle Věty 5.1.9 tudíž existuje $f'(x)$. ♣

5.9.17. Příklad. Nechť $D \subset (0, 1)$ je spočetná množina. Nalezněte konvexní funkci $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, která nemá derivaci právě v bodech množiny D.

Řešení. Pokud je množina D konečná, pak je řešení příkladu snadné. Stačí položit

$$f(x) = \sum_{a \in D} |x - a|, \qquad x \in (0, 1).$$

Předpokládejme tedy, že D je nekonečná. Nalezneme prostou posloupnost $\{x_n\}$ takovou, že $D = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme funkci $f_n(x) = 2^{-n}|x - x_n|$, $x \in (0, 1)$. Pak funkce f_n má následující vlastnosti:

(a) $\forall x \in (0, 1) \colon 0 \leq f_n(x) \leq 2^{-n}$,
(b) $\forall x, y \in (0, 1) \colon |f_n(x) - f_n(y)| \leq 2^{-n}|x - y|$,
(c) f_n je konvexní,
(d) $(f_n)'_-(x_n) = -2^{-n}$, $(f_n)'_+(x_n) = 2^{-n}$,
(e) pro každé $x \in (0, 1) \setminus \{x_n\}$ platí, že $f'_n(x) = 2^{-n} \operatorname{sign}(x - x_n)$.

Definice funkce f. Položme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in (0, 1).$$

Díky vlastnosti (a) je f dobře definovaná funkce na $(0, 1)$, neboť pro každé $x \in (0, 1)$ je $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergentní.

Konvexita f. Zvolme $x, y \in (0, 1)$ a $\lambda \in (0, 1)$. Díky (c) platí pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f_n(x) + (1 - \lambda) f_n(y).$$

Odtud dostáváme

$$\begin{aligned} f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \le \sum_{n=1}^{\infty}\big(\lambda f_n(x) + (1-\lambda) f_n(y)\big) \\ &= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) + (1-\lambda)\sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y). \end{aligned}$$

Tak jsme obdrželi požadovanou nerovnost z definice konvexity.

Pro každé $x \in (0,1)$ platí

$$f'_+(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n)'_+(x), \tag{5.49}$$

$$f'_-(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n)'_-(x). \tag{5.50}$$

Nechť $x \in (0,1)$. Díky (d) a (e) jsou nekonečné řady v (5.49) a (5.50) konvergentní. Dokážeme (5.49). Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon$. Počítejme

$$\begin{aligned} &\limsup_{h\to 0_+} \Big|\tfrac{1}{h}\big(f(x+h) - f(x)\big) - \sum_{n=1}^{\infty}(f_n)'_+(x)\Big| \\ &\qquad = \limsup_{h\to 0_+} \Big|\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{h}\big(f_n(x+h) - f_n(x)\big) - \sum_{n=1}^{\infty}(f_n)'_+(x)\Big| \\ &\qquad = \limsup_{h\to 0_+} \Big|\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\tfrac{1}{h}\big(f_n(x+h) - f_n(x)\big) - (f_n)'_+(x)\Big)\Big| \\ &\qquad \le \limsup_{h\to 0_+} \sum_{n=1}^{\infty}\Big|\tfrac{1}{h}\big(f_n(x+h) - f_n(x)\big) - (f_n)'_+(x)\Big| \\ &\qquad \le \limsup_{h\to 0_+} \sum_{n=1}^{n_0}\Big|\tfrac{1}{h}\big(f_n(x+h) - f_n(x)\big) - (f_n)'_+(x)\Big| \\ &\qquad\qquad + \limsup_{h\to 0_+} \sum_{n=n_0+1}^{\infty}\Big|\tfrac{1}{h}\big(f_n(x+h) - f_n(x)\big) - (f_n)'_+(x)\Big| \\ &\qquad \le 0 + \limsup_{h\to 0_+} \sum_{n=n_0+1}^{\infty}\Big(\big|\tfrac{1}{h}\big(f_n(x+h) - f_n(x)\big| + \big|(f_n)'_+(x)\big|\Big) \\ &\qquad \le \limsup_{h\to 0_+} \sum_{n=n_0+1}^{\infty}\big(2^{-n} + 2^{-n}\big) < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$\limsup_{h\to 0+}\left|\tfrac{1}{h}\big(f(x+h)-f(x)\big)-\sum_{n=1}^{\infty}(f_n)'_+(x)\right|=0,$$

což dává vztah (5.49). Důkaz (5.50) lze provést obdobně.

Diferencovatelnost f v bodech $(0,1)\setminus D$. Nechť $x\in(0,1)\setminus D$. Pak díky vlastnosti (e) platí $(f_n)'_-(x)=(f_n)'_+(x)$ pro každé $n\in\mathbb{N}$. Z (5.49) a (5.50) pak plyne

$$f'_-(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(f_n)'_-(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(f_n)'_+(x)=f'_+(x),$$

a tedy $f'(x)$ existuje vlastní.

Nediferencovatelnost f v bodech D. Nechť $x\in D$. Pak nalezneme $j\in\mathbb{N}$ takové, že $x=x_j$. Pak díky vlastnostem (d) a (e) platí $(f_n)'_-(x)=(f_n)'_+(x)$ pro každé $n\in\mathbb{N}, n\neq j$, a $(f_j)'_-(x)\neq(f_j)'_+(x)$. Z (5.49) a (5.50) pak plyne $f'_-(x)\neq f'_+(x)$, a tedy $f'(x)$ neexistuje. ♣

Hyperbolické funkce.

5.9.18. Definice. Funkce **hyperbolický sinus**, **hyperbolický kosinus**, **hyperbolický tangens** a **hyperbolický kotangens** jsou po řadě značeny a definovány takto:

$$\begin{aligned}
\sinh x&=\frac{e^x-e^{-x}}{2}, && x\in\mathbb{R},\\
\cosh x&=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, && x\in\mathbb{R},\\
\operatorname{tgh} x&=\frac{\sinh x}{\cosh x}, && x\in\mathbb{R},\\
\operatorname{cotgh} x&=\frac{\cosh x}{\sinh x}, && x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.
\end{aligned}$$

Tyto funkce nazýváme **hyperbolické**.

Vlastnosti hyperbolických funkcí

(H1) Pro každé $x,y\in\mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}
\sinh(x+y)&=\sinh x\cosh x+\cosh x\sinh y,\\
\cosh(x+y)&=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y.
\end{aligned}$$

Plyne dosazením do vzorců, například první identita se odvodí pomocí

$$\begin{aligned}
\sinh x\cosh x+\cosh x\sinh y&=\frac{(e^x-e^{-x})(e^y+e^{-y})}{4}+\frac{(e^x+e^{-x})(e^y-e^{-y})}{4}\\
&=\tfrac14(2e^{x+y}-2e^{-x-y})=\sinh(x+y).
\end{aligned}$$

(H2) Funkce sinh je lichá a funkce cosh je sudá.

Plyne z definice.

(H3) Funkce sinh a cosh jsou spojité na $\mathbb{R}$.

Plyne z definice.

(H4) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\sinh'(x) = \cosh(x)$ a $\cosh'(x) = \sinh(x)$.

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}\sinh'(x) &= \left(\tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)' = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x),\\ \cosh'(x) &= \left(\tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right)' = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh(x).\end{aligned}$$

(H5) Platí $\sinh(0) = 0$ a $\cosh(0) = 1$.

Tvrzení plyne snadno s definice.

(H6) Platí $\lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} \sinh(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} \cosh(x) = \infty$ a $\lim_{x\to\infty} \cosh(x) = \infty$.

Platí

$$\lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = \lim_{x\to-\infty} \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \tfrac{1}{2} \cdot (0 - \infty) = -\infty$$

díky větě o aritmetice limit (Věta 4.2.1). Ostatní limity lze vypočítat obdobně.

(H7) Funkce sinh je rostoucí na $\mathbb{R}$, cosh je rostoucí na $[0, \infty)$ a klesající na $(-\infty, 0]$.

Funkce cosh je podle definice kladná funkce. Díky (H4) a Větě 5.5.7 pak platí, že sinh rostoucí na $\mathbb{R}$. Dále $\sinh(0) = 0$, a tedy sinh je záporná na $(-\infty, 0)$ a kladná na $(0, \infty)$. Opět s pomocí (H4) a Věty 5.5.7 dostáváme, že cosh je klesající na $(-\infty, 0]$ a rostoucí na $[0, \infty)$.

(H8) Platí $\mathcal{H}(\sinh) = \mathbb{R}$ a $\mathcal{H}(\cosh) = [1, \infty)$.

Tvrzení plyne z (H3), (H6), (H7) a Bolzanovy věty o nabývání mezihodnot (vizte Větu 4.3.4).

(H9) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

Podle definice máme pro každé $x \in \mathbb{R}$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \tfrac{1}{4}\left((e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2\right) = 1.$$

Doplnit obrázek.

Obrázek 14. Grafy hyperbolického sinu a hyperbolického kosinu

(H10) Platí $\mathscr{D}(\operatorname{tgh}) = \mathbb{R}$ a $\mathscr{D}(\operatorname{cotgh}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Plyne z definice.

(H11) Funkce tgh a cotgh jsou liché a na svých definičních oborech spojité.

Plyne z definice a Věty 4.2.4.

(H12) Platí $\operatorname{tgh}(0) = 0$.

Výsledek obdržíme dosazením do definičního vztahu.

(H13) Platí $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{tgh}(x) = -1$, $\lim_{x\to\infty} \operatorname{tgh}(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{cotgh}(x) = -1$, $\lim_{x\to 0_-} \operatorname{cotgh} x = -\infty$, $\lim_{x\to 0_+} \operatorname{cotgh}(x) = \infty$ a $\lim_{x\to\infty} \operatorname{cotgh}(x) = 1$.

Počíteme

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{tgh}(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -1.$$

Ostatní limity spočteme obdobně.

(H14) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\operatorname{tgh}'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$ a pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí $\operatorname{cotgh}'(x) = \frac{-1}{\sinh^2(x)}$.

Z (H4) a (H9) máme

$$(\operatorname{tgh})' = \left(\frac{\sinh}{\cosh}\right)' = \frac{1}{\cosh^2}(\cosh^2 - \sinh^2) = \frac{1}{\cosh^2}.$$

Obdobně se ověří druhé tvrzení.

(H15) Funkce tgh roste na $\mathbb{R}$, cotgh klesá na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.

Tvrzení plyne z (H14) a Věty 5.2.6.

(H16) Platí $\mathscr{H}(\operatorname{tgh}) = (-1, 1)$ a $\mathscr{H}(\operatorname{cotgh}) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Tvrzení plyne z (H15), (H12) a spojitosti obou funkcí.

Doplnit obrázek.

Obrázek 15. Grafy hyperbolického tangensu a hyperbolického kotangensu

5.9.19. Příklad. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá periodická nekonstantní funkce. Pak nemá ani v ∞ ani v $-\infty$ asymptotu.

Řešení. Nechť $a > 0$ je perioda funkce f, tj. $f(x) = f(x+a)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Nejprve si rozmysleme, že f je omezená funkce. To plyne z faktu, že f je v absolutní hodnotě omezená na $[0,a]$ nějakou konstantou M (viz Věta 4.3.11), a tedy je omezená M i na každém intervalu tvaru $[ka,(k+1)a]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Dostáváme proto, že

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Předpokládáme-li nyní existenci asymptoty například v ∞, existuje $b \in \mathbb{R}$ splňující $\lim_{x\to\infty}(f(x)-b) = 0$. Najdeme $x \in (0,a)$ splňující $f(x) \neq f(a)$. Z Věty 4.2.16 nyní plyne, že

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x+na) = b = \lim_{n\to\infty} f(na) = f(0),$$

což je spor. Tím je důkaz dokončen. ♣

5.10. Početní příklady k derivaci funkce

5.10.1. Limity funkcí.

5.10.1. Příklad. Dokažte, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1.$$

Řešení. (a) Protože $\exp'(0) = \exp(0) = 1$ (vlastnosti (E2) a (E4)), platí dle Definice 5.1.1 rovnost

$$1 = \exp'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

(b) Z definice logaritmu a vlastnosti (E3) plyne $\log(1) = 0$. Z vlastnosti (L7) pak dostáváme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - \log(1+0)}{x-0} = \big(\log(1+x)\big)'_{x=0} \\ &= \left(\tfrac{1}{1+x}\right)_{x=0} = 1.\end{aligned}$$

(c) Položme

$$f(y) = \frac{\log(1+y)}{y},\ y \in (-1,\infty) \setminus \{0\}, \qquad g(x) = x-1,\ x \in \mathbb{R},$$

$x_0 = 1$ a $y_0 = 0$. Pak platí

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0, \qquad \lim_{y\to y_0} f(y) = 1$$

a pro každé $x \in P(x_0,1)$ máme $g(x) \neq y_0$. Tedy z Věty 4.2.20(P) plyne

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = \lim_{x\to x_0} (f\circ g)(x) = \lim_{y\to 0} f(y) = 1.$$

♣

5.10.2. Příklad. Dokažte, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Řešení. Z vlastnosti sinu (G5) víme, že $\sin'(0) = 1$. Dále platí $\sin(0) = 0$ (vizte (G4)). Tedy z Definice 5.1.1 plyne

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \sin'(0) = 1.$$

♣

5.10.3. Příklad. Dokažte, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Řešení. Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí

$$\begin{aligned} \frac{1-\cos x}{x^2} &= \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x} \\ &= \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos x}. \end{aligned}$$

Jelikož kosinus je spojitá funkce (vizte (G13)) a $\cos(0) = 1$ (vizte (G6)), plyne z Příkladu 5.10.2 a Věty 4.2.1 rovnost

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

♣

5.10.4. Příklad. Spočtěte $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{x}$.

Řešení. Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí

$$\frac{\sin(5x)}{x} = 5 \cdot \frac{\sin(5x)}{5x}.$$

Položme

$$f(y) = \frac{\sin(y)}{y},\ y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad g(x) = 5x,\ x \in \mathbb{R},$$

$x_0 = 0$ a $y_0 = 0$. Pak $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$, $\lim_{y\to y_0} f(y) = 1$ a pro každé $x \in P(c, \eta)$ platí $g(x) \neq y_0$. Z Věty 4.2.20(P) a Příkladu 5.10.2 tedy plyne, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{5x} = \lim_{x\to x_0} (f \circ g)(x) = \lim_{y\to y_0} f(y) = 1.$$

Z Věty 4.2.1(b) máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{x} = \lim_{x\to 0} 5 \cdot \frac{\sin(5x)}{5x} = 5.$$

♣

5.10.5. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}.$$

Řešení. Pro každé x z definičního oboru funkce, jejíž limitu počítáme, platí

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}} &= \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}\cdot\frac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}\\
&= \frac{x^2}{1-\cos x+x\sin x}\cdot\left(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}\right)\\
&= \frac{1}{\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\sin x}{x}}\cdot\left(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}\right).
\end{aligned}$$

Funkce $x\mapsto\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}$ je spojitá v bodě 0. Pak pomocí Příkladů 5.10.2 a 5.10.3 dostáváme díky Větě 4.2.1 rovnost

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}} = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}\cdot(1+1) = \frac{4}{3}.$$

♣

5.10.6. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}(2x)\cdot\operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{4}-x\right).$$

Řešení. Pro každé x z definičního oboru funkce, jejíž limitu počítáme, platí

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(2x)\cdot\operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{4}-x\right) &= \frac{\sin(2x)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\frac{\pi}{4}-x}\cdot\frac{\frac{\pi}{4}-x}{\cos(2x)}\\
&= \frac{\sin(2x)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\frac{\pi}{4}-x}\cdot\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}.
\end{aligned}\tag{5.51}$$

Položme

$$f(y)=\frac{\sin y}{y},\quad y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\qquad\text{a}\qquad g(x)=\frac{\pi}{4}-x,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Potom platí $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} g(x)=0$, $\lim_{y\to 0} f(y)=1$ a pro každé $x\in P(0,1)$ máme $g(x)\neq 0$. Díky Větě 4.2.20(P) dostaneme

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\frac{\pi}{4}-x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f\circ g(x) = 1.$$

Podobně obdržíme

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\pi}{2}-2x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)} = 1.$$

Tedy máme z (5.51)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}(2x)\cdot\operatorname{tg}\bigl(\tfrac{\pi}{4}-x\bigr) = \frac{1}{1}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

♣

5.10.7. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{\cos(x+\frac{\pi}{6})}.$$

Řešení. Pro každé x z definičního oboru funkce, jejíž limitu počítáme, platí

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{\cos(x+\frac{\pi}{6})} &= \frac{x-\frac{\pi}{3}}{\sin\bigl(\frac{\pi}{2}-x-\frac{\pi}{6}\bigr)}\cdot\frac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{x-\frac{\pi}{3}}\\ &= \frac{x-\frac{\pi}{3}}{\sin\bigl(\frac{\pi}{3}-x\bigr)}\cdot\frac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{x-\frac{\pi}{3}}.\end{aligned}\tag{5.52}$$

Protože

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{x-\frac{\pi}{3}} = 1,$$

konverguje první část výrazu v (5.52) k číslu -1. Dále máme

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{x-\frac{\pi}{3}} &= \frac{\sin x}{\cos^3 x}\cdot\frac{\sin^2 x - 3\cos^2 x}{x-\frac{\pi}{3}}\\ &= \frac{\sin x}{\cos^3 x}\cdot\frac{4\sin^2 x - 3}{x-\frac{\pi}{3}}\\ &= \frac{\sin x}{\cos^3 x}\cdot\frac{\bigl(2\sin x-\sqrt{3}\bigr)\cdot\bigl(2\sin x+\sqrt{3}\bigr)}{x-\frac{\pi}{3}}\\ &= \frac{\sin x}{\cos^3 x}\cdot 2\cdot\frac{(\sin x-\sin\frac{\pi}{3})\cdot(2\sin x+\sqrt{3})}{x-\frac{\pi}{3}}.\end{aligned}\tag{5.53}$$

Protože

$$\frac{\sin x-\sin\frac{\pi}{3}}{x-\frac{\pi}{3}} = \frac{\cos\bigl(\frac{1}{2}(x+\frac{\pi}{3})\bigr)\cdot\sin\bigl(\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{3})\bigr)}{\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{3})},$$

dostáváme

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x-\sin\frac{\pi}{3}}{x-\frac{\pi}{3}} = \cos\bigl(\tfrac{\pi}{3}\bigr) = \tfrac{1}{2}.$$

Z (5.52) a (5.53) pak máme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{\cos(x+\frac{\pi}{6})} &= -1 \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{x-\frac{\pi}{3}} \\ &= -1 \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\right) \\ &= -24.\end{aligned} \tag{5.54}$$

♣

5.10.8. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sin\left(\sqrt{x+1}\right) - \sin\left(\sqrt{x}\right)\right).$$

Řešení. Pro každé $x > 0$ platí

$$\begin{aligned}&\sin\left(\sqrt{x+1}\right) - \sin\left(\sqrt{x}\right) \\ &\qquad = 2 \cdot \cos\left(\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)\right) \cdot \sin\left(\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)\right) \\ &\qquad = 2 \cdot \cos\left(\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)}\right).\end{aligned} \tag{5.55}$$

Dále platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)} = 0.$$

Ze spojitosti sinu a Věty 4.2.20(S) plyne

$$\lim_{x\to\infty} \sin\left(\frac{1}{2\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)}\right) = 0.$$

Funkce $x \mapsto 2\cos\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)\right)$ je omezená na intervalu $(0, \infty)$, a tedy

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sin\left(\sqrt{x+1}\right) - \sin\left(\sqrt{x}\right)\right) = 0$$

dle Věty 4.2.13. ♣

5.10.9. Příklad. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n.$$

Řešení. Definujme

$$f(x) = \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x, \quad x \in (|a|, \infty).$$

Pak f je dobře definovaná funkce splňující

$$f(x) = \exp\left(x \log\left(1 + \tfrac{a}{x}\right)\right), \quad x \in (|a|, \infty).$$

Protože

$$\lim_{x\to\infty} x \log\left(1 + \tfrac{a}{x}\right) = \begin{cases} \lim_{x\to\infty} a \cdot \frac{\log(1+\frac{a}{x})}{\frac{a}{x}} = a & \text{pro } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \lim_{x\to\infty} 0 = 0 = a & \text{pro } a = 0. \end{cases}$$

platí
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \exp(a).$$
Z Heineovy věty 4.2.14 plyne, že
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \exp(a).$$
Srovnejte s Příkladem 2.4.5. ♣

5.10.10. Příklad. Spočtěte limitu
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Řešení. Jako v předchozích příkladech je třeba spočítat
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\log\left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}\right).$$
Snadno spočteme
$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x2^x}{1+x3^x} = 1.$$
Dle Věty 4.2.8(a) existuje $\eta > 0$ takové, že
$$\forall x \in B(0,\eta)\colon \frac{1+x2^x}{1+x3^x} > 0.$$
Dále máme pro každé $x \in B(0,\eta)$
$$\frac{1+x2^x}{1+x3^x} = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$
Platí tedy
$$\forall x \in P(0,\eta)\colon \frac{1+x2^x}{1+x3^x} \neq 1.$$
Z Věty o limitě složené funkce 4.2.20(P) tedy plyne rovnost
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)}{\frac{1+x2^x}{1+x3^x}-1} = \lim_{y\to 1}\frac{\log y}{y-1} = 1.$$
Pro každé $x \in B(0,\eta)$ platí
$$\frac{1}{x^2}\log\left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}\right) = \frac{1}{x^2}\cdot\frac{\log\left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)}{\frac{1+x2^x}{1+x3^x}-1}\cdot\left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}-1\right).$$
a také
$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2}\left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}-1\right) &= \frac{1}{x}\cdot\frac{2^x-3^x}{1+x3^x}\\ &= \frac{(e^{x\log 2}-1)-(e^{x\log 3}-1)}{x}\cdot\frac{1}{1+x3^x}\\ &= \left(\frac{e^{x\log 2}-1}{x\log 2}\cdot\log 2 - \frac{e^{x\log 3}-1}{x\log 3}\cdot\log 3\right)\cdot\frac{1}{1+x3^x}.\end{aligned}$$

Snadno ověříme předpoklady Věty 4.2.20(P) pro okolí $P(0,\eta)$ a dostaneme tak

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\Big(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}-1\Big)=(1\cdot\log 2-1\cdot\log 3)\cdot 1=\log(\tfrac{2}{3}).$$

Dohromady tedy máme

$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}\Big)^{\frac{1}{x^2}}=\exp\big(\log\tfrac{2}{3}\big)=\frac{2}{3}.$$

♣

5.10.11. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x^2-x+1)}{\log(x^{10}+x+1)}.$$

Řešení. Pro každé $x>1$ z definičního oboru funkce, jejíž limitu počítáme, platí

$$\begin{aligned}\frac{\log(x^2-x+1)}{\log(x^{10}+x+1)}&=\frac{\log\big(x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})\big)}{\log\big(x^{10}(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}})\big)}\\&=\frac{2\log x+\log(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{10\log x+\log\big(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}}\big)}\\&=\frac{2+\frac{\log\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\log x}}{10+\frac{\log\left(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}}\right)}{\log x}}.\end{aligned}\tag{5.56}$$

Protože je logaritmus spojitá funkce na $(0,\infty)$ (vizte (L4)) a

$$\lim_{x\to\infty}\big(1-\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{x^2}\big)=1,$$

máme z Věty 4.2.20(S)

$$\lim_{x\to\infty}\log\big(1-\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{x^2}\big)=0.$$

Obdobně odvodíme, že

$$\lim_{x\to\infty}\log\big(1+\tfrac{1}{x^9}+\tfrac{1}{x^{10}}\big)=0.$$

Z (5.56) pak plyne díky Větě 4.2.1 rovnost

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x^2-x+1)}{\log(x^{10}+x+1)}=\frac{1}{5}.$$

♣

5.10.12. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2(\pi 2^x)}{\log\cos(\pi 2^x)}.$$

Řešení. Označme

$$f(y) = \frac{\sin^2 y}{\log \cos y}, \qquad y \in P(2\pi, \tfrac{\pi}{2}).$$

Počítejme limitu $\lim_{y\to 2\pi} f(y)$. Pak máme

$$f(y) = \frac{\sin^2 y}{(y-2\pi)^2} \cdot \frac{\cos y - 1}{\log \cos y} \cdot \frac{(y-2\pi)^2}{\cos y - 1}. \tag{5.57}$$

Položme

$$h(z) = \frac{\sin z}{z}, \qquad z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad \text{a} \qquad g(y) = y - 2\pi,\ y \in \mathbb{R}.$$

Protože pro každé $y \in P(2\pi, 1)$ platí $g(y) \neq 0$, plyne z Věty 4.2.20(P)

$$\lim_{y\to 2\pi} \frac{\sin(y-2\pi)}{y-2\pi} = \lim_{y\to 2\pi} (h \circ g)(y) = \lim_{z\to 0} h(z) = 1.$$

Analogicky odvodíme rovnosti

$$\lim_{y\to 2\pi} \frac{\cos y - 1}{\log \cos y} = 1 \qquad \text{a} \qquad \lim_{y\to 2\pi} \frac{\cos y - 1}{(y-2\pi)^2} = -\frac{1}{2}.$$

Z (5.57) a Věty 4.2.1 tak plyne

$$\lim_{y\to 2\pi} f(y) = 1 \cdot 1 \cdot (-2) = -2.$$

Nakonec označme

$$u(x) = \pi 2^x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Pak $\lim_{x\to 1} u(x) = 2\pi$ a pro každé $x \in P(1,1)$ platí $u(x) \neq 2\pi$, a tedy z Věty 4.2.20(P) plyne

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin^2(\pi 2^x)}{\log \cos(\pi 2^x)} = \lim_{x\to 1} (f \circ u)(x) = \lim_{y\to 2\pi} f(y) = -2.$$

♣

5.10.13. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{(e^x - 1)^2}.$$

Řešení. Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí

$$\frac{\sin x}{(e^x-1)^2} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x^2}{(e^x-1)^2} \cdot \frac{1}{x}.$$

Označíme

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x^2}{(e^x-1)^2}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

Potom platí $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Protože

$$\lim_{x\to 0_+} \tfrac{1}{x} = \infty \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to 0_-} \tfrac{1}{x} = -\infty,$$

z jednostranné verze věty o aritmetice limit funkcí (vizte Větu 4.2.1 a 4.2.3), dostáváme

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{(e^x-1)^2} = \infty, \qquad \lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{(e^x-1)^2} = -\infty.$$

Zadaná limita tedy neexistuje dle Věty 4.1.18. ♣

5.10.14. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\tfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right).$$

Řešení. Přímočarým použitím Věty 4.2.24(P) obdržíme

$$\lim_{y\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2}-y}{\cos y} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

Pak máme

$$\lim_{y\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} y \cdot \left(\tfrac{\pi}{2} - y\right) = \lim_{y\to\frac{\pi}{2}} \sin y \cdot \frac{\frac{\pi}{2}-y}{\cos y} = 1.$$

Označíme

$$f(y) = \operatorname{tg} y \cdot \left(\tfrac{\pi}{2} - y\right),\ y \in (0, \tfrac{\pi}{2}), \qquad \text{a} \qquad g(x) = \operatorname{arctg} x,\ x \in \mathbb{R}.$$

Platí $\lim_{x\to\infty} g(x) = \frac{\pi}{2}$ a pro každé $x \in \mathbb{R}$ máme $g(x) \neq \frac{\pi}{2}$. Pak z Věty 4.2.24(P) plyne

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\tfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = \lim_{x\to\infty} f\circ g(x) = \lim_{y\to\frac{\pi}{2}} f(y) = 1.$$

♣

5.10.15. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{\sqrt{1-x}}.$$

Řešení. Označme

$$f(y) = \frac{\frac{\pi}{2}-y}{\sqrt{1-\sin y}},\ y \in (0, \tfrac{\pi}{2}), \qquad \text{a} \qquad g(x) = \arcsin x,\ x \in [-1, 1].$$

Naším úkolem je spočítat limitu $\lim_{x\to 1-} f\circ g(x)$. Nejprve spočteme

$$\begin{aligned}\lim_{y\to\frac{\pi}{2}-} f(y) &= \lim_{y\to\frac{\pi}{2}-} \frac{\frac{\pi}{2}-y}{\sqrt{1-\sin y}} = \lim_{y\to\frac{\pi}{2}-} \frac{\frac{\pi}{2}-y}{\sqrt{1-\sin y}} \cdot \frac{\sqrt{1+\sin y}}{\sqrt{1+\sin y}} \\ &= \lim_{y\to\frac{\pi}{2}-} \frac{\frac{\pi}{2}-y}{\sqrt{\cos^2 y}} \cdot \frac{1}{1+\sin y} = \lim_{y\to\frac{\pi}{2}-} \frac{\frac{\pi}{2}-y}{\cos y} \cdot \frac{1}{1+\sin y} = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

V předposlední rovnosti jsme využili vztah $\sqrt{\cos^2 y} = \cos y$, který platí pro každé $y \in (0, \frac{\pi}{2})$. Ze spojitosti funkce arcsin na svém definičním oboru plyne $\lim_{x\to 1-} g(x) = \frac{\pi}{2}$. Dále pro každé $x \in (-1, 1)$ platí $g(x) < \frac{\pi}{2}$. Odtud podle varianty Věty 4.2.24(P) plyne $\lim_{x\to 1-} f\circ g(x) = \sqrt{2}$. ♣

5.10.16. Příklad. Spočtěte
$$\lim_{x\to\infty} x\Big(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Big).$$

Řešení. Označme
$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}},\ x \in \mathbb{R}.$$
Funkce g na $P(\infty, 1)$ nenabývá hodnoty 1, $\lim_{x\to\infty} g(x) = 1$ a
$$\lim_{y\to 1_-} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin y}{\sqrt{1-y}} = \sqrt{2}$$
dle Příkladu 5.10.15. Z věty o limitě složené funkce 4.2.24(P) tedy máme
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}} = \sqrt{2}.$$
Dále pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí
$$\begin{aligned} x\cdot\sqrt{1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} &= \frac{x}{\sqrt[4]{x^2+1}\sqrt{\sqrt{x^2+1}+x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^2}}\sqrt{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}}. \end{aligned}$$
Tedy
$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty} x\Big(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Big) \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^2}}\sqrt{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}} \\ &= \sqrt{2}\cdot\frac{1}{1\cdot\sqrt{1+1}} = 1. \end{aligned}$$

♣

5.10.17. Příklad. Nechť $a, b \in (0, \infty)$. Spočtěte limity
$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\log^a x}{x^b}.$$

Řešení. Z Příkladu 5.4.4 a Věty 4.2.6 plyne, že pro každé $\alpha \in (0, \infty)$ platí
$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \infty.$$
Máme tedy
$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{ax}}{(ax)^b}\cdot a^b = \infty.$$

Protože

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{(e^x)^b} = 0,$$

pomocí Věty 4.2.24 dostáváme

$$0 = \lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^a}{\left(e^{\log x}\right)^b} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log^a x}{x^b}.$$

♣

5.10.2. Derivace funkce. Při výpočtu derivace dané funkce f nejprve určíme definiční obor této funkce. V těch bodech definičního oboru, ve kterých je to možné, pak vypočteme hodnotu derivace pomocí vzorců pro derivace elementárních funkcí a vět z odstavce 5.1, zejména věty o aritmetice derivací (Věta 5.1.17) a věty o derivaci složené funkce (Věta 5.1.24). V bodech definičního oboru funkce f, v nichž tento postup z nějakého důvodu selhává, se pokusíme vypočítat jednostranné derivace podle Definice 5.1.1, případně pomocí věty o limitě jednostranných derivací (Věta 5.2.9). Máme přitom na paměti, že definiční obor derivace může být vlastní podmnožinou definičního oboru funkce.

5.10.18 (značení derivace)**.** Při počítání často používáme pro označení derivace funkce f v bodě x symbol $(f(x))'$ místo $f'(x)$. Například píšeme $(x^2)' = 2x$, čímž rozumíme $f'(x) = 2x$, kde $f(x) = x^2$. Při správné interpretaci tato notační konvence nepůsobí nedorozumění a zjednodušuje zápis.

5.10.19. Příklad. Spočtěte derivaci funkce $h(x) = x^4 + \sin x$.

Řešení. Funkce h má definiční obor roven $\mathbb{R}$ a je součtem funkcí $f(x) = x^4$ a $g(x) = \sin x$. Podle Příkladu 5.1.12 a (G11) platí pro každé $x \in \mathbb{R}$ rovnosti $f'(x) = 4x^3$ a $g'(x) = \cos x$. Potom podle Věty 5.1.17(a) máme

$$h'(x) = 4x^3 + \cos x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

♣

5.10.20. Příklad. Spočtěte derivaci funkce $u(x) = x^4 \sin x$.

Řešení. Funkce u má definiční obor roven $\mathbb{R}$ a je součinem funkcí f a g z předchozího příkladu. Potom podle Věty 5.1.17(a) máme

$$u'(x) = 4x^3 \sin x + x^4 \cos x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

♣

5.10.21. Příklad. Spočtěte derivaci funkce $v(x) = \frac{x^2-1}{1+x^2}$.

Řešení. Funkce v má definiční obor roven $\mathbb{R}$ a je podílem funkcí $f(x) = x^2 - 1$ a $g(x) = 1 + x^2$. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f'(x) = 2x$ a $g'(x) = 2x$. Potom podle

Věty 5.1.17(c) máme

$$\begin{aligned}
v'(x) &= \frac{(x^2-1)'(x^2+1)-(x^2-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)2x}{(x^2+1)^2}, \\
&= \frac{4x}{(x^2+1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

♣

5.10.22. Příklad. Spočtěte derivaci funkce $h(x) = e^{x^2+2}$.

Řešení. Položme

$$g(x) = x^2 + 2, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \text{a} \qquad f(y) = e^y, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Potom $\mathcal{D}(h) = \mathbb{R}$, neboť $h = f \circ g$. Snadno spočteme derivace

$$\begin{aligned}
f'(y) &= e^y, \qquad y \in \mathbb{R}, \\
g'(x) &= 2x + 0 = 2x, \qquad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Protože je g spojitá v každém bodě $\mathbb{R}$, dostaneme podle věty o derivaci složené funkce (Věta 5.1.24) pro každé $x \in \mathbb{R}$

$$h'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{x^2+2} \cdot 2x.$$

♣

5.10.23. Příklad. Spočtěte derivaci funkce $h(x) = \log\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$.

Řešení. Položme

$$f(y) = \log y, \quad y \in (0, \infty) \qquad \text{a} \qquad g(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Vzhledem k tomu, že $\mathcal{D}(\log) = (0, \infty)$, platí $x \in \mathcal{D}(h)$ právě tehdy, když $\frac{x^2-1}{x^2+1} > 0$. Vyřešením příslušné nerovnice dostáváme $\mathcal{D}(h) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Pro derivace f a g platí

$$\begin{aligned}
f'(y) &= \frac{1}{y}, \quad y \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty), \\
g'(x) &= \frac{4x}{(x^2+1)^2}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{(vizte Příklad 5.10.21).}
\end{aligned}$$

Pomocí věty o derivaci složené funkce dostáváme pro $x \in \mathcal{D}(f)$

$$h'(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} \cdot \frac{4x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{x^4-1}.$$

Platí tedy $\mathcal{D}(h') = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Definiční obor funkce $x \mapsto \frac{4x}{x^4-1}$ je sice roven $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, nicméně definiční obor derivace je menší. ♣

5.10.24. Příklad. Spočtěte derivaci funkce $f(x) = x^{\log x}$, $x \in (0, \infty)$.

Řešení. Podle definice obecné mocniny (Definice 5.3.10(c)) platí pro každé $x \in (0, \infty)$ vztah $f(x) = e^{\log x \cdot \log x} = e^{\log^2 x}$. Derivaci spočteme pomocí věty o derivaci složené funkce (Věta 5.1.24), tedy

$$f'(x) = e^{\log^2 x} \cdot \left(\log^2 x\right)' = e^{\log^2 x} \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x}, \quad x \in (0, \infty).$$

Pro definiční obor derivace platí $\mathcal{D}(f') = (0, \infty)$. ♣

5.10.25. Příklad. Spočtěte derivaci funkce $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$.

Řešení. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $1 - e^{-x^2} \geq 0$, a proto $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Derivaci funkce f v každém bodě $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ spočteme dvojnásobným užitím věty o derivaci složené funkce:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}} \left(1 - e^{-x^2}\right)' = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}} (-e^{-x^2})(-2x) \\ &= \frac{x e^{-x^2}}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}. \end{aligned}$$

V bodě 0 dopočítáme jednostranné derivace přímo podle definice:

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h \to 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{\sqrt{1 - e^{-h^2}} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \to 0+} \sqrt{\frac{e^{-h^2} - 1}{-h^2}} = \sqrt{1} = 1. \end{aligned}$$

Obdobně lze spočítat derivaci zleva za použití vztahu $h = -\sqrt{h^2}$ pro $h < 0$. Dostaneme

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0-} \frac{\sqrt{1 - e^{-h^2}} - 0}{h} = \lim_{h \to 0-} -\sqrt{\frac{e^{-h^2} - 1}{-h^2}} = -1\ .$$

Platí tedy $\mathcal{D}(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$, a tedy $f'(0)$ neexistuje, neboť $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ (vizte Větu 5.1.9). ♣

5.10.26. Příklad. Spočtěte derivaci funkce $f(x) = \min\{x, x^3\}$.

Řešení. Funkci f můžeme vyjádřit ve tvaru

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{pro } x \in (-\infty, -1] \cup [0, 1], \\ x & \text{pro } x \in (-1, 0) \cup (1, \infty). \end{cases}$$

Tedy zřejmě platí

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{pro } x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1), \\ 1 & \text{pro } x \in (-1, 0) \cup (1, \infty). \end{cases}$$

Zbývá vyšetřit derivaci v bodech $x \in \{0, 1, -1\}$. Protože funkce f je spojitá v bodě -1, platí podle věty o limitě derivací (Věta 5.2.9)

$$f'_-(-1) = \lim_{x \to -1_-} 3x^2 = 3, \quad f'_+(-1) = \lim_{x \to -1_+} 1 = 1.$$

Odtud plyne, že $f'(-1)$ neexistuje. Podobně lze odvodit, že $f'(0)$ a $f'(1)$ neexistují a že platí

$$f'_-(0) = 1, \quad f'_+(0) = 0, \quad f'_-(1) = 3, \quad f'_+(1) = 1.$$

♣

5.10.27. Příklad. Spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Řešení. Zřejmě platí $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí, že funkce f je na jistém okolí bodu x definována předpisem $x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$. Derivace v bodě je lokální pojem (vizte 5.1.3(c)), a proto pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(x^2\right)' \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + x^2 \left(\sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' \\ &= 2x \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + x^2 \cos \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{-1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}. \end{aligned}$$

V bodě 0 spočteme derivaci podle definice

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{h}} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = 0. \end{aligned}$$

Poslední rovnost plyne z Věty 4.2.13, neboť funkce sinus je omezená. Platí tedy $\mathcal{D}(f') = \mathbb{R}$. ♣

5.10.28. Příklad. Spočtěte derivaci funkce $f(x) = \arccos\left(1 - x^2\right)$.

Řešení. Vzhledem k tomu, že $\mathcal{D}(\arccos) = [-1, 1]$ a reálné číslo x splňuje nerovnosti

$$-1 \leq 1 - x^2 \leq 1$$

právě tehdy, když $x \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$, je $\mathcal{D}(f) = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$. Podle věty pro derivaci složené funkce (Věta 5.1.24), kterou lze použít pro každé $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \setminus \{0\}$, dostáváme

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1 - (1 - x^2)^2}} \cdot (1 - x^2)' = \frac{-1}{\sqrt{2x^2 - x^4}}(-2x) \\ &= \frac{2 \operatorname{sign} x}{\sqrt{2 - x^2}}, \qquad x \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Funkce f je na svém definičním oboru spojitá, a proto se můžeme pokusit jednostranné derivace v bodech množiny $\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$ počítat jako limity jednostranných derivací podle věty o limitě derivací (Věta 5.2.9). Dostaneme tak

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x\to 0_+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{2\operatorname{sign} x}{\sqrt{2-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \\ f'_-(0) &= \lim_{x\to 0_-} f'(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{2\operatorname{sign} x}{\sqrt{2-x^2}} = -\sqrt{2}, \\ f'_+(-\sqrt{2}) &= \lim_{x\to -\sqrt{2}_+} f'(x) = \lim_{x\to -\sqrt{2}+} \frac{2\operatorname{sign} x}{\sqrt{2-x^2}} = -\infty, \\ f'_-(\sqrt{2}) &= \lim_{x\to \sqrt{2}_-} f'(x) = \lim_{x\to \sqrt{2}-} \frac{2\operatorname{sign} x}{\sqrt{2-x^2}} = \infty. \end{aligned}$$

Definičním oborem f' je tedy množina $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \setminus \{0\}$, přičemž hodnoty jednostranných derivací ve zbývajících bodech definičního oboru f jsou uvedeny výše. ♣

5.10.29. Příklad. Dokažte, že pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí

$$\operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}\left(\tfrac{1}{x}\right) = \tfrac{\pi}{2} \operatorname{sign} x.$$

Řešení. Definiční obor funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

je $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Na každém z těchto dvou intervalů platí

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Zadaná funkce je tedy na intervalu $(0, \infty)$ konstantní podle Věty 5.2.8 a dosazením bodu $x = 1$ dostaneme

$$f(1) = \operatorname{arctg}(1) + \operatorname{arctg}(1) = \tfrac{\pi}{2}.$$

Funkce f je tedy rovna $\frac{\pi}{2}$ na celém intervalu $(0, \infty)$. Analogicky dosazením bodu $x = -1$ dostaneme, že f je rovna $-\frac{\pi}{2}$ na intervalu $(-\infty, 0)$. ♣

5.10.30. Příklad. Nechť funkce f je definována na $\mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $f^{(n)}(0) = 0$.

Řešení. Dokážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existuje polynom P_n takový, že

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} P_n\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

(zde využíváme úmluvu $f^{(0)} = f$). Toto tvrzení zřejmě platí pro $n = 0$. Předpokládejme nyní, že platí pro nějaké $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ máme

$$f^{(n+1)}(x) = \Big(-\tfrac{1}{x^2} P_n'\big(\tfrac{1}{x}\big) + \tfrac{2}{x^3} P_n\big(\tfrac{1}{x}\big)\Big) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Označme pro $y \in \mathbb{R}$

$$P_{n+1}(y) = -y^2 P_n'(y) + 2y^3 P_n(y).$$

Pak P_{n+1} je polynom a platí

$$f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\big(\tfrac{1}{x}\big) e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Pišme nyní polynom P_n jako $P_n(y) = \sum_{k=0}^{m} a_k y^k$, kde $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$.

Nechť $l \in \mathbb{N}$. Z Příkladu 5.4.4 plyne $\lim_{y\to\infty} \frac{y^{l/2}}{e^y} = 0$. Odtud použitím Věty 4.2.20(P), kde za vnitřní funkcí bereme $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, dostáváme

$$\lim_{x\to 0} x^{-l} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Potom platí

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \tfrac{1}{x} P_n\big(\tfrac{1}{x}\big) e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x\to 0} \sum_{k=0}^{m} a_k x^{-k-1} e^{-\frac{1}{x^2}} = \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot \lim_{x\to 0} x^{-k-1} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0. \end{aligned}$$

Tím je ověřen indukční krok, a tedy i celé tvrzení. ♣

5.10.3. l'Hospitalovo pravidlo.

5.10.31. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(1+x) - \operatorname{arctg}(1-x)}{x}.$$

Řešení. Označme

$$f(x) = \operatorname{arctg}(1+x) - \operatorname{arctg}(1-x) \qquad \text{a} \qquad g(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pak $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Můžeme se tedy pokusit spočítat zadanou limitu pomocí l'Hospitalova pravidla 5.4.1(a). Dokážeme-li totiž existenci limity $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, můžeme z výše uvedeného l'Hospitalova pravidla usoudit na existenci limity $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$, a navíc obdržíme $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Výpočtem obdržíme

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+(1+x)^2}(1+x)' - \frac{1}{1+(1-x)^2}(1-x)'}{1} \\ &= \lim_{x\to 0} \Big(\frac{1}{1+(1+x)^2} - \frac{-1}{1+(1-x)^2}\Big) = \frac{1}{1+1} - \frac{-1}{1+1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Zadaná limita je tedy rovna 1. ♣

5.10.32. Příklad. Spočtěte limitu funkce

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}.$$

Řešení. Postupnou aplikací l'Hospitalova pravidla dostáváme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x + e^x \cos x - 1 - 2x}{3x^2}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x + e^x \cos x + e^x \cos x - e^x \sin x - 2}{6x}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2e^x \cos x - 2e^x \sin x}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

♣

5.10.33. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\Big).$$

Řešení. Zadaný výraz upravíme jako

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - x^2}{x^4} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x}. \tag{5.58}$$

Opakovanou aplikací l'Hospitalova pravidla obdržíme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x \cos x - 2x}{4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos^2 x - 2\sin^2 x - 2}{12x^2}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-8\cos x \sin x}{24x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{3},\end{aligned}$$

z (5.58) máme

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) = -\frac{1}{3}.$$

♣

5.10.34. Příklad. Spočtěte limitu funkce

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Řešení. Máme

$$\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2}\log(\frac{\operatorname{arctg} x}{x})}, \tag{5.59}$$

a

$$\frac{1}{x^2}\log\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} - 1\right)\frac{\log(\frac{\operatorname{arctg} x}{x})}{\frac{\operatorname{arctg} x}{x} - 1}.$$

Ukažme, že $\operatorname{arctg} x \neq x$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Označíme-li totiž $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$, pak

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} > 0,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Funkce f je tedy rostoucí na $\mathbb{R}$, a proto z vlastnosti $f(0) = 0$ plyne

$$f(x) > 0,\ x \in (0, \infty), \quad f(x) < 0,\ x \in (-\infty, 0).$$

Proto $f(x) \neq 0$ na libovolném $P(0, \eta)$, a tedy $\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \neq 1$ na libovolném $P(0, \eta)$. Z Věty o limitě složené funkce 4.2.20 a vlastnosti (C5) tedy dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\frac{\operatorname{arctg} x}{x})}{\frac{\operatorname{arctg} x}{x} - 1} = 1.$$

Dále máme pomocí l'Hospitalova pravidla

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \frac{\operatorname{arctg} x - x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-x^2}{1+x^2}}{3x^2} = -\frac{1}{3}\,.$$

Z (5.59) tedy plyne

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{3}}.$$

♣

5.10.35. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{\log x - x + 1}.$$

Řešení. Upravíme zadaný výraz na

$$\begin{aligned}\frac{x^x - x}{\log x - x + 1} &= \frac{e^{x\log x} - e^{\log x}}{\log x - x + 1} \\ &= e^{\log x} \frac{e^{(x-1)\log x} - 1}{(x-1)\log x} \cdot \frac{\log x}{x-1} \cdot \frac{(x-1)^2}{\log x - x + 1}.\end{aligned}$$

Dále plyne z l'Hospitalova pravidla 5.4.1

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{\log x - x + 1} = \lim_{x\to 1} \frac{2(x-1)}{\frac{1}{x} - 1} = \lim_{x\to 1} -2x = -2.$$

Z Věty 4.2.20 a 4.2.1 tedy máme

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{\log x - x + 1} = -2.$$

♣

5.10.36. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\log(x + \sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\log(1+x)}.$$

Řešení. Upravme zadaný výraz do tvaru

$$\frac{1}{\log(x+\sqrt{1+x^2})}-\frac{1}{\log(1+x)}$$
$$=\frac{\log(1+x)-\log(x+\sqrt{x^2+1})}{x(x+\sqrt{x^2+1}-1)}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2+1}-1}{\log(x+\sqrt{x^2+1})}\cdot\frac{x}{\log(1+x)}.$$

Zřejmě platí

$$x+\sqrt{x^2+1}-1=0\Leftrightarrow x=0,$$

a tedy

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sqrt{x^2+1}-1}{\log(x+\sqrt{x^2+1})}=1.$$

Zjevně $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\log(1+x)}=1$. Dále

$$\frac{\log(1+x)-\log(x+\sqrt{x^2+1})}{x(x+\sqrt{x^2+1}-1)}$$
$$=\frac{\log\frac{x+1}{x+\sqrt{x^2+1}}}{\frac{x+1}{x+\sqrt{x^2+1}}-1}\cdot\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{1}{x(x+\sqrt{x^2+1}-1)}$$
$$=\frac{\log\frac{x+1}{x+\sqrt{x^2+1}}}{\frac{x+1}{x+\sqrt{x^2+1}}-1}\cdot\frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})(1+\sqrt{x^2+1})}\cdot\frac{-x^2}{x(x+\sqrt{x^2+1}-1)}.$$

Protože

$$\frac{x+1}{x+\sqrt{x^2+1}}=1\Leftrightarrow x=0,$$

platí

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\frac{x+1}{x+\sqrt{x^2+1}}}{\frac{x+1}{x+\sqrt{x^2+1}}-1}=1.$$

Nakonec dostaneme z l'Hospitalova pravidla 5.4.1 rovnost

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x(x+\sqrt{x^2+1}-1)}&=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x+\sqrt{x^2+1}-1}\\&=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}\\&=-1.\end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\log(x+\sqrt{1+x^2})}-\frac{1}{\log(1+x)}\right)=-\frac{1}{2}.$$

♣

5.10.37. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\log(e^x+x)}{x}\right).$$

Řešení. Nejprve upravme zadaný výraz na

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\log(e^x+x)}{x}\right)\\=&\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\cdot\frac{\log(e^x+x)}{x}\right)\\&-\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\right)\cdot\frac{\log(e^x+x)}{x}\end{aligned}$$

První část dále upravíme

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\cdot\frac{\log(e^x+x)}{x}\right)\\&=\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\left(1-\frac{\log(e^x+x)}{x}\right)\\&=\frac{\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}}{x}\left(x-\log e^x-\log(1+xe^{-x})\right)\\&=\frac{\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}}{x}\left(-\log(1+xe^{-x})\right).\end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\cdot\frac{\log(e^x+x)}{x}\right)=0.$$

Dále máme pro $a=\sqrt{x^2+x+1}$, $b=\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}$ rovnost

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\right)\cdot\frac{\log(e^x+x)}{x}\\&=\frac{a^6-b^6}{a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5}\cdot\frac{\log(e^x+x)}{x}\\&=\frac{(x^2+x+1)^3-(x^3+x^2+x+1)^2}{a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5}\cdot\frac{\log(e^x+x)}{x}\\&=\frac{x+\sum_{i=1}^4 c_ix^i}{a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5}\cdot\frac{\log(e^x+x)}{x}\end{aligned}$$

(zde c_i, $i\in\{1,\dots,4\}$, jsou reálná čísla). Platí

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(e^x+x)}{x}=\lim_{x\to\infty}1+\frac{\log(1+xe^{-x})}{x}=1$$

a

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} \frac{-x + \sum_{i=1}^{4} c_i x^i}{a^5 + a^4 b + a^3 b^2 + a^2 b^3 + ab^4 + b^5} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \sum_{i=1}^{4} c_i x^{i-1}}{\frac{a^5}{x} + \frac{a^4 b}{x} + \frac{a^3 b^2}{x} + \frac{a^2 b^3}{x} + \frac{ab^4}{x} + \frac{b^5}{x}} \\
&= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1} \cdot \frac{\log(e^x + x)}{x} \right) = -\frac{1}{6}.$$

♣

5.10.38. Příklad. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} \left((x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{a}{x+a}} \right).$$

Řešení. Je-li $a = 0$, zadaná limita se zřejmě rovná 0. V dalším výpočtu tedy předpokládejme, že $a \neq 0$.

Označme pro $x \in (|a|, \infty)$ funkce

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \log(x+a), \quad g(x) = \frac{x+a+1}{x+a} \log x.$$

Spočtěme nejdříve limitu $\lim_{x\to\infty}(f(x) - g(x))$. Máme totiž

$$\begin{aligned}
f(x) - g(x) &= \frac{1}{x(x+a)} \big((x+a)(x+1) \log(x+a) - x(x+a+1) \log x \big) \\
&= \frac{1}{x(x+a)} \big(x^2 (\log(x+a) - \log x) + x(a+1)(\log(x+a) - \log x) \\
&\qquad + a \log(x+a) \big) \\
&= \frac{1}{x(x+a)} \left(x^2 \log(1 + \frac{a}{x}) + x(a+1) \log(1 + \frac{a}{x}) + a \log(x+a) \right) \\
&= \frac{x}{x+a} \log(1 + \frac{a}{x}) + \frac{a+1}{x+a} \log(1 + \frac{a}{x}) + \frac{a}{x(x+a)} \log(x+a).
\end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - g(x) = 0.$$

Označme dále pro $x \in (|a|, \infty)$

$$h(x) = x^2 \log(1 + \frac{a}{x}) + x(a+1) \log(1 + \frac{a}{x}) + a \log(x+a).$$

Pak

$$h(x) = x \left(\frac{\log(1 + \frac{a}{x})}{\frac{a}{x}} \cdot a + (a+1) \log(1 + \frac{a}{x}) + a \cdot \frac{\log(x+a)}{x} \right).$$

Tedy

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \begin{cases} \infty, & a > 0, \\ -\infty, & a < 0. \end{cases}$$

V obou případech tak existuje $\eta \in (|a|, \infty)$ takové, že $h(x) \neq 0$ na (η, ∞). Tedy i

$$f(x) - g(x) = \frac{h(x)}{x(x+a)} \neq 0, \quad x \in (\eta, \infty).$$

Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} (x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}} &= e^{\frac{x+1}{x}\log(x+a)} - e^{\frac{x+a+1}{x+a}\log x} \\ &= e^{f(x)} - e^{g(x)} \\ &= e^{g(x)} \cdot \frac{e^{f(x)-g(x)} - 1}{x} \cdot (f(x) - g(x)). \end{aligned} \tag{5.60}$$

Dále

$$\begin{aligned} e^{g(x)}(f(x) - g(x)) &= xe^{\frac{\log x}{x+a}} \frac{1}{x(x+a)} h(x) \\ &= e^{\frac{\log x}{x+a}} \frac{h(x)}{x+a} \\ &= e^{\frac{\log x}{x+a}} \Big(\frac{x}{x+a} \frac{\log(1+\frac{a}{x})}{\frac{a}{x}} a + \frac{x}{x+a}(a+1)\log(1+\frac{a}{x}) \\ &\qquad + \frac{1}{x+a} a \log(x+a) \Big). \end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{x\to\infty} e^{g(x)}(f(x) - g(x)) = a.$$

Z (5.60) tedy plyne

$$\lim_{x\to\infty} \left((x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{a}{x+a}} \right) = a.$$

♣

5.10.4. Aplikace na vyšetřování konvergence číselných řad.

5.10.39. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Řešení. Označme $a_n = \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Pokud $\alpha \leq 0$, posloupnost $\{a_n\}$ podle Příkladu 5.10.17 a Věty 4.2.14 nekonverguje k 0, a tedy řada $\sum a_n$ diverguje. Předpokládejme tedy, že $\alpha > 0$.

Položíme-li $f(x) = \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta}$, $x \in (2, \infty)$, dostaneme pro $x \in (2, \infty)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^{2\alpha}(\log x)^{2\beta}} \left[-\alpha x^{\alpha-1}(\log x)^\beta - \beta x^\alpha (\log x)^{\beta-1} x^{-1} \right] \\ &= \frac{x^{\alpha-1}(\log x)^\beta}{x^{2\alpha}(\log x)^{2\beta}} \left[-\alpha - \beta(\log x)^{-1} \right]. \end{aligned}$$

Jelikož

$$\lim_{x\to\infty} \left(-\alpha - \beta(\log x)^{-1}\right) = -\alpha < 0,$$

je funkce f na jistém okolí ∞ klesající. Lze tedy k vyšetření konvergence dané řady použít kondenzační kritérium (Věta 3.2.17). Máme

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} 2^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2^{\alpha-1})^n\, n^\beta (\log 2)^\beta}.$$

Je-li $\alpha > 1$, platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(2^{\alpha-1}\right)^n n^\beta (\log 2)^\beta}{(2^{\alpha-1})^{n+1}\,(n+1)^\beta (\log 2)^\beta}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^\beta 2^{1-\alpha} = 2^{1-\alpha} < 1,$$

a tedy řada $\sum 2^n a_{2^n}$ konverguje. Pokud $\alpha = 1$, řada $\sum 2^n a_{2^n}$ konverguje právě tehdy, když $\beta > 1$ (viz Větu 3.2.18).

Z výše uvedených úvah tedy vyplývá, že řada $\sum a_n$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$ a $\beta \in \mathbb{R}$, nebo když $\alpha = 1$ a $\beta > 1$. ♣

5.10.40. Věta. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel, nechť $A, B \in \mathbb{R}^*$ a nechť $\lim a_n = A$. Nechť f je funkce definovaná alespoň na nějakém prstencovém okolí bodu A splňující $\lim_{y\to A} f(y) = B$. Předpokládejme, že je splněna alespoň jedna z následujících dvou podmínek:

(P) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \neq A$,

(S) $A \in \mathbb{R}$ a funkce f je v bodě A spojitá.

Potom

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = B.$$

5.10.41. Příklad. Vyšetřete konvergenci číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arccotg}(2n)}{\sqrt[3]{n+4}}.$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označme

$$a_n = \frac{\operatorname{arccotg}(2n)}{\sqrt[3]{n+4}}.$$

Podle l'Hospitalova pravidla, verze $\frac{0}{0}$, platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arccotg}(2x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-2}{1+4x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{1+4x^2} = \frac{1}{2}.$$

Z Heineovy věty (Věta 4.2.14) tedy dostáváme rovnost

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arccotg}(2n)}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Dále platí
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n+4}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n}{n+4}}=1.$$
Odtud a z věty o aritmetice limit (Věta 4.2.1) plyne, že
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\operatorname{arccotg}(2n)}{\sqrt[3]{n+4}}}{\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}=\frac{1}{2}.$$
Zadaná řada má zřejmě všechny členy kladné a platí $\frac{1}{2}\in(0,\infty)$. Z limitního srovnávacího kritéria (Věta 3.2.5) tedy vyplývá, že zadaná řada konverguje právě tehdy, když konverguje řada
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}.$$
Tato řada ale konverguje podle Věty 3.2.18, neboť $\frac{4}{3}>1$. Tedy zadaná řada také konverguje. ♣

5.10.42. Příklad. Vyšetřete konvergenci číselné řady
$$\sum_{n=2}^{\infty}\log\left(\frac{n^2+4}{n(n-1)}\right).$$

Řešení. Pro každé $x\in\mathbb{R}$, $x\geq 2$, platí
$$\log\left(\frac{x^2+4}{x(x-1)}\right)=\log\left(\frac{x^2-x+x+4}{x^2-x}\right)=\log\left(1+\frac{x+4}{x^2-x}\right).$$
Podle Příkladu 5.10.1
$$\lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y}=1,$$
navíc
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+4}{x^2-x}=0$$
a pro každé $x\in P(\infty,2)$ platí
$$\frac{x+4}{x^2-x}\neq 0.$$
Tudíž podle věty o limitě složené funkce (Věta 4.2.20) máme
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log\left(1+\frac{x+4}{x^2-x}\right)}{\frac{x+4}{x^2-x}}=1.$$
Podle Heineovy věty (Věta 4.2.14) tedy platí
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(1+\frac{n+4}{n^2-n}\right)}{\frac{n+4}{n^2-n}}=1.$$

Navíc zřejmě pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x > 4$, platí

$$\log\left(1 + \frac{x+4}{x^2 - x}\right) > 0,$$

takže pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$, platí $a_n > 0$. Můžeme tedy použít limitní srovnávací kritérium (Věta 3.2.5). Podle tohoto kritéria, varianty (a), konverguje řada

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(\frac{n^2+4}{n(n-1)}\right).$$

právě tehdy, když konverguje řada

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-n}.$$

Protože

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+4}{n^2-n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4n}{n^2-n} = 1$$

a řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje podle Příkladu 3.1.15, diverguje podle limitního srovnávacího kritéria také zadaná řada. ♣

5.10.43. Příklad. Vyšetřete konvergenci číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n) \arccos(\log(e - \frac{1}{n})).$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\cos(\pi n) = (-1)^{n+1}$. Zadanou řadu tedy můžeme přepsat ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \arccos(\log(e - \frac{1}{n})).$$

Platí

$$\lim_{x\to\infty} (e - \frac{1}{x}) = e,$$

přičemž pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $e - \frac{1}{x} \neq e$. Z věty o limitě složené funkce (Věta 4.2.20, varianta (P)) tedy dostáváme, že

$$\lim_{x\to\infty} \log(e - \frac{1}{x}) = 1.$$

Podle (C2) a (C3) platí $\lim_{y\to 1-} \arccos(y) = 0$ a navíc pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\log(e - \frac{1}{n}) \neq 1$. Z Věty 5.10.40 tedy vyplývá, že

$$\lim_{n\to\infty} \arccos(\log(e - \frac{1}{n})) = 0.$$

Posloupnost $\{e - \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ je zřejmě rostoucí. Funkce log je na $(0, \infty)$ rostoucí podle (L3) a funkce arccos je na $[-1, 1]$ klesající podle (C2). Posloupnost $\{\arccos(\log(e - \frac{1}{n}))\}_{n=1}^{\infty}$ je tudíž klesající. Zadaná řada tedy konverguje podle Leibnizova kritéria (Věta 3.3.1). ♣

5.10.44. Příklad. Vyšetřete konvergenci číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arccotg}(n)(-1-\frac{1}{n})^n.$$

Řešení. Přepíšeme zadanou řadu ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arccotg}(n)(1+\frac{1}{n})^n.$$

Víme, že posloupnost $\{\operatorname{arccotg}(n)\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající a že platí $\lim_{n\to\infty} \operatorname{arccotg}(n) = 0$. Z Leibnizova kritéria konvergence konvergence číselných řad (Věta 3.3.1) tedy plyne, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arccotg}(n)$$

konverguje. Z Příkladu 2.4.5 víme, že posloupnost $\{(1+\frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená a rostoucí. Z Abelova kritéria konvergence číselných řad (Věta 3.3.5(A)) plyne, že i zadaná řada konverguje. ♣

5.10.45. Příklad. Vyšetřete konvergenci číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cos(5n) \frac{\operatorname{tg}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})}{n+3}.$$

Řešení. Jak víme z Příkladu 3.3.8(b), řada $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(5n)$ má omezené částečné součty. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$a_n = \sqrt{n+2}-\sqrt{n}, \quad b_n = \operatorname{tg}(a_n) \quad \text{a} \quad c_n = \frac{n}{n+3}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n = \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}.$$

Odtud plyne, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající posloupnost kladných reálných čísel splňující $\lim a_n = 0$. Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$0 < a_n \le a_1 = \frac{2}{1+\sqrt{3}} < 1 < \frac{\pi}{2},$$

takže pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme $a_n \in (0, \frac{\pi}{2})$. Protože funkce tangens je rostoucí na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ (viz (G20)), je posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ klesající. Podle (G4) je funkce tangens spojitá v bodě 0, tedy $\lim_{x\to 0} \operatorname{tg}(x) = 0$. Navíc pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme $a_n \neq 0$. Podle Věty 5.10.40, varianta (P) tudíž platí

$$\lim b_n = \lim \operatorname{tg}(a_n) = 0.$$

Dle Dirichletova kritéria konvergence číselných řad (Věta 3.3.5, varianta (D)) je tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(5n) \operatorname{tg}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$$

konvergentní. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$c_n = \frac{n}{n+3} = \frac{n+3-3}{n+3} = 1 - \frac{3}{n+3},$$

a tedy je posloupnost $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ rostoucí. Navíc je omezená, neboť zřejmě pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{4} \le c_n < 1.$$

Podle Abelova kritéria konvergence číselných řad (Věta 3.3.5, varianta (A)) je tedy zadaná řada konvergentní. ♣

5.10.46. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, kde

$$a_n = \frac{\sqrt[3]{n^2+1}\log(100n)}{\sqrt[4]{n^3+n} + \sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Řešení. Položme

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2+1}\log(100x)}{\sqrt[4]{x^3+x} + \sqrt{x}}, \quad x \in (0, \infty).$$

Pak pro $x \in (0, \infty)$ platí

$$\begin{aligned}
f'(x) = {} & \frac{1}{\left((x^3+x)^{\frac14} + x^{\frac12}\right)^2} \cdot \\
& \left[\left(\frac13 \left(x^2+1\right)^{-\frac23} (2x+1)\log(100x) + (x^2+1)^{\frac13} \frac{100}{100x}\right)\left((x^3+x)^{\frac14} + x^{\frac12}\right)\right. \\
& \left. - \left((x^2+1)^{\frac13} \log(100x) \left(\frac14 (x^3+x)^{-\frac34}(3x^2+1) + \frac12 x^{-\frac12}\right)\right)\right] \\
= {} & \frac{x^{\frac{5}{12}}\log(100x)}{\left((x^3+x)^{\frac14} + x^{\frac12}\right)^2} \\
& \cdot \left[\left(\frac13 \left(1+x^{-2}\right)^{-\frac23} 2\left(1+x^{-1}\right) + \frac{\left(1+x^{-2}\right)^{\frac13} \cdot x^{\frac23 - 1 + 1 - \frac43}}{\log(100x)}\right)\left(\left(1+x^{-2}\right)^{\frac14} + x^{\frac12 - \frac34}\right)\right. \\
& \left. - \left(1+x^{-2}\right)^{\frac13} \left(\frac14 \left(1+x^{-2}\right)^{-\frac34} 3\left(1+(3x)^{-1}\right) + \frac12 x^{-\frac12 - \frac94 + 2}\right)\right].
\end{aligned}$$

Označíme-li

$$g(x) = \left[\left(\frac{1}{3} \left(1 + x^{-2}\right)^{-\frac{2}{3}} 2\left(1 + x^{-1}\right) + \frac{\left(1 + x^{-2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}-1+1-\frac{4}{3}}}{\log(100x)} \right) \left(\left(1 + x^{-2}\right)^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}} \right) \right.$$
$$\left. - \left(1 + x^{-2}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{4} \left(1 + x^{-2}\right)^{-\frac{3}{4}} 3\left(1 + (3x)^{-1}\right) + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}-\frac{9}{4}+2} \right) \right].$$

obdržíme

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \left(\frac{2}{3} + 0\right)(1 + 0) - 1\left(\frac{3}{4} + 0\right) = -\frac{1}{12}.$$

Existuje tedy $y \in (0, \infty)$ takové, že pro $x \in (y, \infty)$ je $f'(x) < 0$, a tedy f je klesající na intervalu (y, ∞). Dále máme

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1 + x^{-2}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\log(100x)}{x^{\frac{1}{12}}}}{(1 + x^{-2})^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}}} = 0,$$

(použili jsme Příklad 5.4.4).

Na základě těchto výpočtů tedy vidíme, že posloupnost $\{a_n\}$ od indexu n_0 splňujícího $n_0 > y$ konverguje monotónně k 0. Dle Věty 3.3.1 tedy zadaná řada konverguje.

Řada $\sum |(-1)^n a_n| = \sum a_n$ však nekonverguje, což snadno ověříme srovnáním z řadou $\sum \frac{\log n}{n^{\frac{1}{12}}}$ (tj. použijeme Větu 3.2.5 a Příklad 5.10.39). ♣

5.10.47. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde

$$a_n = \left(\operatorname{cotg} \frac{n\pi}{4n-2} - \sin \frac{n\pi}{2n+1}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Řešení. Položme

$$f(x) = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{4-2x} - \sin \frac{\pi}{2+x}, \quad x \in (-1, 1).$$

Jelikož $0 < \frac{\pi}{4-2x} < \pi$ a $2+x \neq 0$ pro $x \in (-1, 1)$, je f dobře definovaná. Počítejme

$$f'(x) = \frac{-\pi}{\left(\sin \frac{\pi}{4-2x}\right)^2} \cdot \frac{2}{(4-2x)^2} - \cos \frac{\pi}{2+x} \cdot \frac{-\pi}{(2+x)^2}, \quad x \in (-1, 1).$$

Pak $\lim_{x\to 0} f'(x) = \frac{-\pi}{4}$.

Dle Věty 5.4.1 proto platí

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{f'(x)}{1} = -\frac{\pi}{4}. \tag{5.61}$$

Existuje tedy okolí $P_+(0, \delta)$ takové, že $f(x) < 0$.

Z Heineovy věty 4.2.16 plyne, že pro $n > (\delta)^{-1}$ jsou čísla $-a_n$ kladná a platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-a_n}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{8}.$$

Srovnáním s řadou $\sum \frac{1}{n}$ (viz Věta 3.2.5) odvodíme pomocí Věty 3.2.18 divergenci řady $\sum(-a_n)$. Zadaná řada tedy diverguje. ♣

5.10.5. Průběh funkce. Vyšetřením průběhu zadané funkce rozumíme postupné zjištění všech důležitých informací o dané funkci, díky nimž bychom na konci měli být schopni načrtnout graf funkce. Při vyšetřování průběhu funkce zjišťujeme zejména následující její vlastnosti (uvedené pořadí je pouze orientační):

- definiční obor,
- symetrie (zjistíme, zda je funkce sudá, lichá nebo periodická),
- spojitost (případně jednostranná) ve všech bodech definičním oboru,
- průsečíky s oběma souřadnými osami,
- jednostranné limity v v krajních bodech definičního oboru (což mohou být i $\pm\infty$) a ve všech bodech nespojitosti,
- hodnota první derivace, případně jednostranné první derivace ve všech bodech definičního oboru, v nichž existuje,
- intervaly monotonie,
- lokální a globální extrémy,
- obor hodnot,
- hodnota druhé derivace, případně jednostranné druhé derivace ve všech bodech definičního oboru, v nichž existuje,
- intervaly konvexity a konkavity,
- inflexní body,
- asymptoty,
- náčrt grafu.

5.10.48. Příklad. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \arccos\left(\frac{|4x|}{4+x^2}\right)$$

Řešení. Definičním oborem funkce arccos je interval $[-1,1]$. Definičním oborem funkce f je tedy množina

$$\{x \in \mathbb{R};\ -1 \leq \frac{|4x|}{4+x^2} \leq 1\}.$$

Platí tedy $x \in \mathcal{D}(f)$ právě tehdy, když platí následující dvě nerovnosti:

$$-1 \leq \frac{|4x|}{4+x^2} \leq 1.$$

První z nerovností platí právě tehdy, když

$$x^2 + |4x| + 4 \geq 0$$

a podobně druhá nerovnost platí právě tehdy, když

$$x^2 - |4x| + 4 \geq 0.$$

Vzhledem k tomu, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$x^2 \pm |4x| + 4 = (|x| \pm 2)^2 \geq 0,$$

dostáváme $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.

Funkce $\frac{|4x|}{4+x^2}$ je spojitá na $\mathbb{R}$ a funkce arccos je spojitá na intervalu $[-1, 1]$. Odtud a z věty o spojitosti složené funkce plyne, že f je spojitá na $\mathbb{R}$.

Spočítáme limity funkce f v krajních bodech jejího definičního oboru, tedy v bodech $\pm\infty$. Jest

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{|4x|}{4+x^2} = 0,$$

funkce arccos je spojitá v bodě 0 a platí $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$. Dle věty o limitě složené funkce, varianta (S), tedy platí

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Protože $f(0) = \frac{\pi}{2}$, je průsečíkem grafu funkce s osou y bod $[0, \frac{\pi}{2}]$. Pro určení průsečíků grafu funkce s osou x musíme vyřešit rovnici $f(x) = 0$, tedy nalézt kořeny funkce f. Protože jediným kořenem funkce arccos je bod 1, platí $f(x) = 0$ právě tehdy, když $\frac{|4x|}{4+x^2} = 1$. To nastane právě tehdy, když $(|x| - 2)^2 = 0$, tedy $x = \pm 2$. Funkce f má tedy právě dva průsečíky s osou x, a to v bodech $[-2, 0]$ a $[2, 0]$.

Funkce f je zřejmě sudá. Není lichá, neboť například není splněna podmínka $f(0) = 0$. Není ani periodická, neboť například $f(-2) = f(2) = 0$, ale žádné další kořeny funkce nemá.

Vypočítáme první derivaci funkce f. Pro $x \in (0, 2) \cup (2, \infty)$ jest

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{16x^2}{(4+x^2)^2}}} \cdot \frac{4(4+x^2) - 2x \cdot 4x}{(4+x^2)^2} \\ &= \frac{x^2-4}{\sqrt{(x^2-4)^2}} \cdot \frac{4}{4+x^2} \\ &= \begin{cases} -\frac{4}{4+x^2} & \text{pro } x \in (0, 2) \\ \frac{4}{4+x^2} & \text{pro } x \in (2, \infty). \end{cases} \end{aligned}$$

Uvedený výpočet není možné použít pro $x = 2$. V tomto bodě musíme spočítat jednostranné derivace. Jak už víme, funkce f je v bodě 2 spojitá, a tedy podle věty o limitě derivací platí

$$f'_-(2) = \lim_{x\to 2_-} \frac{-4}{4+x^2} = -\frac{1}{2}$$

a

$$f'_+(2) = \lim_{x\to 2_+} \frac{4}{4+x^2} = \frac{1}{2}.$$

Protože $f'_-(2) \neq f'_+(2)$, funkce f nemá v bodě 2 derivaci.

Pro $x \in (-\infty, 0)$ spočítáme $f'(x)$ podobně jako výše. Obdržíme tak

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{4}{4+x^2} & \text{pro } x \in (-\infty, -2), \\ \frac{4}{4+x^2} & \text{pro } x \in (-2, 0). \end{cases}$$

a
$$f'_-(-2) = -\frac{1}{2}, \quad f'_+(-2) = \frac{1}{2}.$$
Funkce f nemá tedy v bodě -2 derivaci.

Posledním bodem, v němž jsme dosud nevyšetřili hodnoty derivace (či jednostranných derivací) funkce f, je bod 0. Funkce f je v bodě 0 spojitá, a tedy podle věty o limitě derivací platí
$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0_-} \frac{4}{4+x^2} = 1$$
a
$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0_+} \frac{-4}{4+x^2} = -1.$$
Protože $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, funkce f nemá v bodě 0 derivaci.

Definičním oborem funkce f' je tedy množina $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$.

Vyšetříme intervaly monotonie funkce f. Z výše uvedeného výpočtu plyne, že
$$\begin{aligned}
&\forall x \in (-\infty, -2)\colon\ f'(x) < 0,\\
&\forall x \in (-2, 0)\colon\ f'(x) > 0,\\
&\forall x \in (0, 2)\colon\ f'(x) < 0,\\
&\forall x \in (2, \infty)\colon\ f'(x) > 0.
\end{aligned}$$
Podle věty o vztahu derivace a monotonie je tedy funkce f

- klesající na $(-\infty, -2]$,
- rostoucí na $[-2, 0)$,
- klesající na $[0, 2]$,
- rostoucí na $[2, \infty)$.

Vyšetříme lokální a globální extrémy funkce f. Z výše uvedených intervalů monotonie vyplývá, že funkce f má lokální maximum v bodě 0, přičemž hodnota tohoto maxima je rovna $\frac{\pi}{2}$, a lokální minima v bodech ± 2, přičemž hodnota obou těchto minim je rovna 0. Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$ existuje $f'(x)$ a platí $f'(x) \neq 0$. Odtud vyplývá, že v těchto bodech není splněna nutná podmínka existence extrému, a tedy funkce f nemá žádné jiné extrémy než výše uvedené body $-2, 0, 2$. Z tohoto pozorování a z intervalů monotonie dále plyne, že všechny tři uvedené lokální extrémy jsou ve skutečnosti globální.

Nyní určíme obor hodnot funkce f. Z globality extrémů $[0, \frac{\pi}{2}]$ a $[\pm 2, 0]$ vyplývá, že $\mathcal{H}(f) \subset [0, \frac{\pi}{2}]$. Protože f je spojitá na $[0, 2]$, $f(0) = \frac{\pi}{2}$ a $f(2) = 0$, plyne z Bolzanovy věty o nabývání mezihodnot, že $[0, \frac{\pi}{2}] \subset \mathcal{H}(f)$. Kombinací obou inkluzí dostáváme, že $\mathcal{H}(f) = [0, \frac{\pi}{2}]$.

Vypočítáme nyní druhou derivaci funkce f. Protože $\mathcal{D}(f') = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$, víme, že f'' neexistuje (ani jednostranná) v bodech $2, 0, 2$. Nechť $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$. Potom platí
$$f''(x) = \begin{cases} \frac{8x}{(4+x^2)^2} & \text{pro } x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2),\\ \frac{-8x}{(4+x^2)^2} & \text{pro } x \in (-2, 0) \cup (2, \infty). \end{cases}$$

Tedy jest

$$\begin{aligned}
&\forall x \in (-\infty, -2)\colon\ f''(x) < 0,\\
&\forall x \in (-2, 0)\colon\ f''(x) > 0,\\
&\forall x \in (0, 2)\colon\ f''(x) > 0,\\
&\forall x \in (2, \infty)\colon\ f''(x) < 0.
\end{aligned}$$

Podle věty o vztahu druhé derivace a konvexity je tedy funkce f

- ryze konkávní na $(-\infty, -2]$,
- ryze konvexní na $[-2, 0)$,
- ryze konvexní na $[0, 2]$,
- ryze konkávní na $[2, \infty)$.

Z těchto výsledků ovšem nevyplývá, zda je nebo není funkce f konvexní na celém intervalu $[-2, 2]$. Tuto otázku musíme vyšetřit. Povšimneme si, že platí $f(-2) = f(2) = 0$ a zároveň $f(0) > 0$. Dosadíme-li $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ a $x_3 = 2$ do podmínky (ii) Lemmatu 5.6.4, zjistíme, že tato podmínka není splněna, neboť by muselo platit

$$\frac{f(0) - f(-2)}{2} \leq \frac{f(2) - f(0)}{2},$$

a tedy $\frac{\pi}{4} \leq -\frac{\pi}{4}$. Tato podmínka je ale podle lemmatu ekvivalentní konvexitě funkce f na intervalu $[-2, 2]$, takže jsme dokázali, že f na tomto intervalu není konvexní. (Příklad 5.9.15 nabízí alternativní postup ukazující, že f není konvexní na intervalu $[-2, 2]$.)

Z výpočtu druhé derivace funkce f vyplývá, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ buď $f''(x)$ neexistuje nebo existuje a $f''(x) \neq 0$. V žádném bodě $x \in \mathbb{R}$ tedy není splněna nutná podmínka existence inflexního bodu. To znamená, že funkce f nemá žádné inflexní body.

Zbývá vyšetřit asymptoty funkce f. Jest

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

a

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - 0 \cdot x) = \frac{\pi}{2}.$$

Funkce f má tedy v $-\infty$ i v ∞ asymptotu $\frac{\pi}{2}$ (konstantní funkci). ♣

5.10.49. Příklad. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = |x| + \operatorname{arctg}(|x - \sqrt{3}|).$$

Řešení. Definičním oborem funkce arctg je množina $\mathbb{R}$, takže $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.

Funkce arctg i funkce $|\cdot|$ (absolutní hodnota) jsou spojité na $\mathbb{R}$. Odtud, z věty o aritmetice spojitostí a z věty o spojitosti složené funkce vyplývá, že funkce f je spojitá na $\mathbb{R}$.

Funkce f není lichá například proto, že $f(0) = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \neq 0$. Funkce f není ani sudá, neboť například $f(-\sqrt{3}) = \sqrt{3} + \operatorname{arctg}(2\sqrt{3})$, ale $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$, a tedy $f(-\sqrt{3}) \neq -f(\sqrt{3})$. Periodicitu funkce f vyšetříme později.

Protože $f(0) = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$, je průsečíkem grafu funkce s osou y bod $[0, \frac{\pi}{3}]$. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom buď platí $x = 0$ a $f(0) = \frac{\pi}{3} > 0$ nebo $x \neq 0$ a $f(x) \geq |x| > 0$. Platí tedy $f(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, takže graf funkce f nemá žádné průsečíky s osou x.

Zřejmě platí

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Vypočítáme první derivaci funkce f v bodech, ve kterých existuje. Nechť nejprve $x \in (-\infty, 0)$. Potom $f(x) = -x - \operatorname{arctg}(x - \sqrt{3})$, a tedy

$$f'(x) = -1 - \frac{1}{1 + (x - \sqrt{3})^2} = \frac{-2 - (x - \sqrt{3})^2}{1 + (x - \sqrt{3})^2}.$$

Nyní nechť $x \in (0, \sqrt{3})$. Potom $f(x) = x - \operatorname{arctg}(x - \sqrt{3})$, a tedy

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1 + (x - \sqrt{3})^2} = \frac{(x - \sqrt{3})^2}{1 + (x - \sqrt{3})^2}.$$

Konečně nechť $x \in (\sqrt{3}, \infty)$. Potom $f(x) = x + \operatorname{arctg}(x - \sqrt{3})$, a tedy

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{1 + (x - \sqrt{3})^2} = \frac{2 + (x - \sqrt{3})^2}{1 + (x - \sqrt{3})^2}.$$

Nyní vyšetříme existenci derivace v bodech 0 a $\sqrt{3}$, pro které jsme nemohli použít přímý výpočet. Spočteme jednostranné derivace v těchto bodech. Funkce f je v obou těchto bodech spojitá, a tedy podle věty o limitě derivací platí

$$\begin{aligned}
f'_-(0) &= \lim_{x \to 0_-} f'(x) = \lim_{x \to 0_-} \frac{-2 - (x - \sqrt{3})^2}{1 + (x - \sqrt{3})^2} = -\frac{5}{4}, \\
f'_+(0) &= \lim_{x \to 0_+} f'(x) = \lim_{x \to 0_+} \frac{(x - \sqrt{3})^2}{1 + (x - \sqrt{3})^2} = \frac{3}{4}, \\
f'_-(\sqrt{3}) &= \lim_{x \to \sqrt{3}_-} f'(x) = \lim_{x \to \sqrt{3}_-} \frac{(x - \sqrt{3})^2}{1 + (x - \sqrt{3})^2} = 0, \\
f'_+(\sqrt{3}) &= \lim_{x \to \sqrt{3}_+} f'(x) = \lim_{x \to \sqrt{3}_+} \frac{2 + (x - \sqrt{3})^2}{1 + (x - \sqrt{3})^2} = 2.
\end{aligned}$$

Z uvedených výsledků vyplývá, že funkce f nemá první derivaci v bodech 0 a $\sqrt{3}$. Definičním oborem funkce f' je tedy množina $\mathbb{R} \setminus \{0, \sqrt{3}\}$.

Vyšetříme intervaly monotonie funkce f. Z výše uvedeného výpočtu plyne, že

$$\forall x \in (-\infty, 0)\colon\ f'(x) < 0,$$
$$\forall x \in (0, \sqrt{3})\colon\ f'(x) > 0,$$
$$\forall x \in (\sqrt{3}, \infty)\colon\ f'(x) > 0.$$

Podle věty o vztahu derivace a monotonie je tedy funkce f

- klesající na $(-\infty, 0]$,
- rostoucí na $[0, \sqrt{3}]$,
- rostoucí na $[\sqrt{3}, \infty)$.

Vyšetříme lokální a globální extrémy funkce f. Z výše uvedených intervalů monotonie vyplývá, že funkce f má globální minimum v bodě 0, přičemž hodnota tohoto minima je rovna $\frac{\pi}{3}$. Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \sqrt{3}\}$ existuje $f'(x)$ a platí $f'(x) \neq 0$. Odtud vyplývá, že v těchto bodech není splněna nutná podmínka existence extrému. Zbývá vyšetřit bod $x = \sqrt{3}$. V tomto bodě ale funkce f nemá lokální extrém, protože f je rostoucí na pravém okolí tohoto bodu a klesající na levém okolí tohoto bodu. Tudíž funkce f nemá žádné jiné extrémy než výše uvedený bod $\sqrt{3}$.

Vzhledem k tomu, že funkce f má jen jedno globální minimum, nemůže být periodická.

Nyní určíme obor hodnot funkce f. Z globality minima $[0, \frac{\pi}{3}]$ vyplývá, že $\mathcal{H}(f) \subset [\frac{\pi}{3}, \infty)$. Protože f je spojitá na $[0, \infty]$, $f(0) = \frac{\pi}{3}$ a $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, plyne z Bolzanovy věty o nabývání mezihodnot, že $[\frac{\pi}{3}, \infty) \subset \mathcal{H}(f)$. Kombinací obou inkluzí dostáváme, že $\mathcal{H}(f) = [\frac{\pi}{3}, \infty)$.

Vypočítáme nyní druhou derivaci funkce f. Protože $\mathcal{D}(f') = \mathbb{R} \setminus \{0, \sqrt{3}\}$, víme, že f'' neexistuje (ani jednostranná) v bodech $0, \sqrt{3}$. Nechť $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \sqrt{3}\}$. Potom platí

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2(x-\sqrt{3})}{(1+(x-\sqrt{3})^2)^2} & \text{pro } x \in (-\infty, 0) \cup (0, \sqrt{3}), \\ \frac{-2(x-\sqrt{3})}{(1+(x-\sqrt{3})^2)^2} & \text{pro } x \in (\sqrt{3}, \infty). \end{cases}$$

Tedy jest

$$\forall x \in (-\infty, 0)\colon\ f''(x) < 0,$$
$$\forall x \in (0, \sqrt{3})\colon\ f''(x) < 0,$$
$$\forall x \in (\sqrt{3}, \infty)\colon\ f''(x) < 0.$$

Podle věty o vztahu druhé derivace a konvexity je tedy funkce f

- ryze konkávní na $(-\infty, 0]$,
- ryze konkávní na $[0, \sqrt{3}]$
- ryze konkávní na $[\sqrt{3}, \infty)$.

Ověřme, že funkce f není konkávní na intervalu $[0,\infty)$. Byla-li by totiž f konkávní na tomto intervalu, platila by podle Příkladu 5.9.15 nerovnost $f'_-(\sqrt{3}) \geq f'_+(\sqrt{3})$. Tak však dle předchozích výpočtů neplatí.

Z výpočtu druhé derivace funkce f vyplývá, že pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{D}(f')$ buď $f''(x)$ neexistuje nebo existuje a $f''(x) \neq 0$. V žádném bodě $x \in \mathbb{R}$ tedy není splněna nutná podmínka existence inflexního bodu. To znamená, že funkce f nemá žádné inflexní body.

Zbývá vyšetřit asymptoty funkce f. Jest

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x - \operatorname{arctg}(x-\sqrt{3})}{x} = -1$$

a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} (f(x) - (-1)\cdot x) &= \lim_{x\to-\infty} (-x - \operatorname{arctg}(x-\sqrt{3}) + x)\\ &= \lim_{x\to-\infty} (-\operatorname{arctg}(x-\sqrt{3})) = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Funkce f má tedy v $-\infty$ asymptotu $-x + \frac{\pi}{2}$. Podobně platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x + \operatorname{arctg}(x-\sqrt{3})}{x} = 1$$

a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} (f(x) - 1\cdot x) &= \lim_{x\to\infty} (x + \operatorname{arctg}(x-\sqrt{3}) - x)\\ &= \lim_{x\to\infty} (\operatorname{arctg}(x-\sqrt{3})) = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Funkce f má tedy v ∞ asymptotu $x + \frac{\pi}{2}$. ♣

5.10.50. Příklad. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \log(4+x^2) + 3\operatorname{arccotg}(\frac{2}{x}).$$

Řešení. Definičním oborem funkce log je interval $(0,\infty)$ a pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $4+x^2 \in (0,\infty)$. Definičním oborem funkce arccotg je $\mathbb{R}$. Definičním oborem funkce $x \mapsto \frac{2}{x}$ je množina $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tedy celkem platí $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Podle věty o spojitosti složené funkce je funkce f spojitá na svém definičním oboru, tedy na množině $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Spočítáme limity funkce f v krajních bodech jejího definičního oboru. Jest

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to0_-} f(x) = \log(4) + 3\pi,\\ &\lim_{x\to0_+} f(x) = \log(4), \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.\end{aligned}$$

Z výše uvedených limit funkce f v bodech $\pm\infty$ vyplývá, že funkce není periodická ani lichá. Z jednostranných limit v bodě 0 dále vyplývá, že funkce f není ani sudá.

Vzhledem k tomu, že $0 \notin \mathcal{D}(f)$, funkce f nemá průsečík s osou y. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $4 + x^2 > 1$. Protože je funkce log je na intervalu $(0,\infty)$ rostoucí, platí pro každé $x \in \mathbb{R}$ také $\log(4+x^2) > \log(1) = 0$. Dále víme, že $\mathcal{H}(\operatorname{arccotg}) = (0,\pi)$. Celkem tedy pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ dostáváme

$$f(x) \geq \log(4+x^2) > 0.$$

Odtud vyplývá, že funkce f nemá žádný průsečík s osou x.

Vypočítáme první derivaci funkce f. Jest

$$f'(x) = \frac{2x}{4+x^2} + \frac{-3}{1+\frac{4}{x^2}} \cdot \frac{-2}{x^2} = \frac{2x+6}{x^2+4} \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Vyšetříme intervaly monotonie funkce f. Z výše uvedeného výpočtu plyne, že

$$\forall x \in (-\infty,-3)\colon f'(x) < 0,$$
$$\forall x \in (-3,0)\colon f'(x) > 0,$$
$$\forall x \in (0,\infty)\colon f'(x) > 0.$$

Podle věty o vztahu derivace a monotonie je tedy funkce f

- klesající na $(-\infty,-3]$,
- rostoucí na $[-3,0)$,
- rostoucí na $(0,\infty)$.

Vyšetříme lokální a globální extrémy funkce f. Z výše uvedených intervalů monotonie vyplývá, že funkce f má lokální minimum v bodě $x = -3$, přičemž hodnota tohoto minima je rovna $\log(13) + 3\operatorname{arccotg}(\frac{-2}{3})$. Toto minimum není globální, protože $\lim_{x\to 0+} f(x) < f(-3)$, a tedy na pravém prstencovém okolí bodu 0 existuje bod y takový, že $f(y) < f(-3)$. Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,-3\}$ existuje $f'(x)$ a platí $f'(x) \neq 0$. Odtud vyplývá, že v těchto bodech není splněna nutná podmínka existence extrému. Tudíž funkce f nemá žádné jiné lokální extrémy než výše uvedený bod -3. Globální extrémy tedy tato funkce nemá vůbec.

Nyní určíme obor hodnot funkce f. Z výše uvedených intervalů monotonie vyplývá, že

$$f(x) \in (f(-3),\infty) \quad \text{pro } x \in (-\infty,0)$$

a

$$f(x) \in (\log(4),\infty) \quad \text{pro } x \in (0,\infty).$$

Protože $f(-3) > \log(4)$, vyplývá odtud, že $\mathcal{H}(f) \subset (\log(4),\infty)$. Protože f je spojitá na $(0,\infty)$, $\lim_{x\to 0_+} f(x) = \log(4)$ a $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, plyne z Bolzanovy věty o nabývání mezihodnot, že $(\log(4),\infty) \subset \mathcal{H}(f)$. Kombinací obou inkluzí dostáváme, že $\mathcal{H}(f) = (\log(4),\infty)$.

Vypočítáme nyní druhou derivaci funkce f. Jest

$$f''(x) = -2 \cdot \frac{x^2+6x-4}{(x^2+4)^2} \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Bude užitečné si uvědomit, že

$$x^2+6x-4 = (x-x_1)(x-x_2), \quad \text{kde } x_1 = -3-\sqrt{13},\ x_2 = -3+\sqrt{13},$$

a že

$$x_1 < -3 < 0 < x_2.$$

Tedy jest

$$\begin{aligned} &\forall x \in (-\infty, x_1)\colon\ f''(x) < 0,\\ &\forall x \in (x_1, 0)\colon\ f''(x) > 0,\\ &\forall x \in (0, x_2)\colon\ f''(x) > 0,\\ &\forall x \in (x_2, \infty)\colon\ f''(x) < 0. \end{aligned} \tag{5.62}$$

Podle věty o vztahu druhé derivace a konvexity je tedy funkce f

- ryze konkávní na $(-\infty, x_1]$,
- ryze konvexní na $[x_1, 0)$,
- ryze konvexní na $(0, x_2]$,
- ryze konkávní na $[x_2, \infty)$.

Z výpočtu druhé derivace funkce f vyplývá, že pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, 0, x_2\}$ platí $f''(x) \neq 0$. V žádném bodě $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, 0, x_2\}$ tedy není splněna nutná podmínka existence inflexního bodu. Zbývá vyšetřit body x_1 a x_2. Víme, že existují vlastní derivace $f'(x_1)$ a $f'(x_2)$ a f' je zjevně spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Z nerovností (5.62) vidíme, že jsou splněny podmínky Věty 5.6.18 (postačující podmínky pro inflexi). Oba body x_1 a x_2 jsou tudíž inflexními body funkce f. Z výše uvedené analýzy vyplývá, že jiné inflexní body funkce f nemá.

Zbývá vyšetřit asymptoty funkce f. Jest

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

a

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - 0 \cdot x) = \infty.$$

Funkce f tedy nemá asymptotu v $-\infty$ ani v ∞.

Závěrem ještě určíme jednostranné limity funkce f' v bodě 0. Tato informace se bude při náčrtu grafu funkce f hodit. Jest

$$\lim_{x\to 0_-} f'(x) = \frac{3}{2} \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0_+} f'(x) = \frac{3}{2}.$$

♣

5.10.51. Příklad. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = (x^2 - x + 2)e^{|x+3|-3}.$$

Řešení. Zřejmě platí $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.

Z věty o aritmetice spojitostí a z věty o spojitosti složené funkce vyplývá, že funkce f je spojitá na $\mathbb{R}$.

Protože $f(0) = 2$, je průsečíkem grafu funkce s osou y bod $[0, 2]$. Rovnice $x^2 - x + 2 = 0$ nemá žádné reálné řešení a navíc pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $e^{|x+3|-3} > 0$, takže graf funkce f nemá žádné průsečíky s osou x.

Zřejmě platí

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

Z toho vyplývá, že f není ani periodická, ani lichá. Není ani sudá, neboť například $f(-3) = 14e^{-3}$, ale $f(3) = 8e^3$, a tedy $f(-1) \neq -f(1)$.

Vypočítáme první derivaci funkce f v bodech, ve kterých existuje. Nechť nejprve $x \in (-\infty, -3)$. Potom $f(x) = (x^2 - x + 2)e^{-x-6}$, a tedy

$$f'(x) = (-x^2 + 3x - 3)e^{-x-6}.$$

Nyní nechť $x \in (-3, \infty)$. Potom $f(x) = (x^2 - x + 2)e^x$, a tedy

$$f'(x) = (x^2 + x + 1)e^x.$$

Zbývá vyšetřit existenci derivace v bodě $x = -3$, pro který jsme nemohli použít přímý výpočet. Spočteme jednostranné derivace v tomto bodě. Funkce f je v bodě $x = -3$ spojitá, a tedy podle věty o limitě derivací platí

$$\begin{aligned} f'_-(-3) &= \lim_{x\to-3_-} f'(x) = \lim_{x\to-3_-} (x^2 - x + 2)e^{-x-6} = -21e^{-3}, \\ f'_+(-3) &= \lim_{x\to-3_+} f'(x) = \lim_{x\to-3_+} (x^2 - x + 2)e^{x} = 7e^{-3}. \end{aligned}$$

Protože $f'_-(-3) \neq f'_+(-3)$, funkce f nemá první derivaci v bodě -3. Definičním oborem funkce f' je tedy množina $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

Vyšetříme intervaly monotonie funkce f. Protože ani jeden z mnohočlenů $(-x^2 + 3x - 3)$ a $(x^2 + x + 1)$ nemá žádný reálný kořen, plyne z výše uvedeného výpočtu, že

$$\begin{aligned} &\forall x \in (-\infty, -3)\colon f'(x) < 0, \\ &\forall x \in (-3, \infty)\colon f'(x) > 0. \end{aligned}$$

Podle věty o vztahu derivace a monotonie je tedy funkce f

- klesající na $(-\infty, -3]$,
- rostoucí na $[-3, \infty)$.

Vyšetříme lokální a globální extrémy funkce f. Z výše uvedených intervalů monotonie vyplývá, že funkce f má globální minimum v bodě -3, přičemž hodnota tohoto minima je rovna $14e^{-3}$. Z těchto intervalů monotonie též plyne, že f nemá jiné globální a ani lokální extrémy.

Vzhledem k tomu, že funkce f má jen jedno globální minimum, nemůže být periodická.

Nyní určíme obor hodnot funkce f. Z globality minima $[-3, 14e^{-3}]$ vyplývá, že $\mathcal{H}(f) \subset [14e^{-3}, \infty)$. Protože f je spojitá na $(-\infty, -3]$, $f(-3) = 14e^{-3}$ a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, plyne z Bolzanovy věty o nabývání mezihodnot, že $[14e^{-3}, \infty) \subset \mathcal{H}(f)$. Kombinací obou inkluzí dostáváme, že $\mathcal{H}(f) = [14e^{-3}, \infty)$.

Vypočítáme nyní druhou derivaci funkce f. Protože $\mathcal{D}(f') = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, víme, že f'' neexistuje (ani jednostranná) v bodě -3. Nechť $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Potom platí

$$f''(x) = \begin{cases} e^{-x-6}(-2x + 3) & \text{pro } x \in (-\infty, -3), \\ e^x(x + 2)(x + 1) & \text{pro } x \in (-3, \infty). \end{cases}$$

Tedy jest

$$\begin{aligned} &\forall x \in (-\infty,-3)\colon\ f''(x) > 0,\\ &\forall x \in (-3,-2)\colon\ f''(x) > 0,\\ &\forall x \in (-2,-1)\colon\ f''(x) < 0,\\ &\forall x \in (-1,\infty)\colon\ f''(x) > 0. \end{aligned} \tag{5.63}$$

Podle věty o vztahu druhé derivace a konvexity je tedy funkce f

- ryze konvexní na $(-\infty,-3]$,
- ryze konvexní na $[-3,-2]$,
- ryze konkávní na $[-2,-1]$,
- ryze konvexní na $[-1,\infty)$.

Protože $f'_-(-3) \leq f'_+(-3)$, je f dle Příkladu 5.9.15 ryze konvexní na intervalu $(-\infty,-2]$.

Nechť $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2,-1\}$. Potom buď $x = -3$ a neexistuje $f'(-3)$ nebo $x \neq -3$ a platí $f''(x) \neq 0$. V žádném bodě $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2,-1\}$ tedy není splněna nutná podmínka existence inflexního bodu. Zbývá vyšetřit body $x_1 = -2$ a $x_2 = -1$. Víme, že f' existuje a spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Díky (5.63) jsou splněny podmínky Věty 5.6.18 (postačující podmínky pro inflexni). Oba body x_1 a x_2 jsou tudíž inflexními body funkce f a z výše uvedené analýzy vyplývá, že jiné inflexní body funkce f nemá.

Zbývá vyšetřit asymptoty funkce f. Vzhledem k tomu, že

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty,$$

funkce f nemá v ∞ ani v $-\infty$ asymptotu. ♣

5.10.52. Příklad. Vyštřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{x \cdot \sqrt[9]{x}}{\sqrt{3}\,\sqrt[3]{x} - 3}.$$

Řešení. Zadaná funkce je zřejmě dobře definovaná na $\mathbb{R}\setminus\{27\}$. Dále je díky Větám 4.2.4 a 4.3.3 na svém definičním oboru spojitá. Při výpočtu limit v krajních bodech definičního oboru dostáváme

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{1 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}}} = \infty,\\ &\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{1 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}}} = -\infty,\\ &\lim_{x\to 27_+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to 27_-} f(x) = -\infty. \end{aligned} \tag{5.64}$$

Vzhledem k tomu, že $\mathcal{D}(f)$ není symetrický a ani periodický, funkce není ani sudá, ani lichá, či periodická.

Při výpočtu první derivace funkce f můžeme v bodech $\mathcal{D}(f) \setminus \{0\}$ použít Větu 5.1.17 a obdržíme

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^{\frac{10}{3}}}{\left(x^{\frac{1}{3}} - 3\right)^{\frac{1}{3}}} \right)' \\ &= \frac{\frac{10}{9} x^{\frac{1}{9}} (x^{\frac{1}{3}} - 3)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{10}{9}} \frac{1}{3} \left(x^{\frac{1}{3}} - 3\right)^{-\frac{2}{3}} \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}}{(x^{\frac{1}{3}} - 3)^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{x^{\frac{1}{9}}}{3(x^{\frac{1}{3}} - 3)^{\frac{4}{3}}} \left(3x^{\frac{1}{3}} - 10\right), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 27\}. \end{aligned}$$

V bodě 0 dostaneme

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(x)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{\frac{1}{9}}}{\left(x^{\frac{1}{3}} - 3\right)^{\frac{1}{3}}} = 0.$$

Tedy jest

$$\begin{aligned} &\forall x \in (-\infty, 0) \colon f'(x) > 0, \\ &\forall x \in (0, 27) \colon f'(x) < 0, \\ &\forall x \in (27, \frac{1000}{27}) \colon f'(x) < 0, \\ &\forall x \in (\frac{1000}{27}, \infty) \colon f'(x) > 0. \end{aligned}$$

Podle věty o vztahu derivace a monotonie je tedy funkce f

- rostoucí na $(-\infty, 0]$,
- klesající na $[0, 27)$,
- klesající na $(27, \frac{1000}{3}]$,
- rostoucí na $[\frac{1000}{3}, \infty)$.

Vyšetříme lokální a globální extrémy funkce f. Vzhledem k (5.64) nemá f globální extrémy. Z výše uvedených intervalů monotonie vyplývá, že funkce f má lokální maximum v bodě 0, přičemž hodnota tohoto maxima je rovna 0, a má lokální minimum v bodě $\frac{1000}{27}$, přičemž hodnota tohoto minima je $\frac{1000}{27} \sqrt[3]{10}$. Z těchto intervalů též vyplývá, že f jiných lokálních extrémů nemá.

Určíme nyní $\mathcal{H}(f)$. Jelikož je f spojitá na intervalu $(-\infty, 27)$ i na intervalu $(27, \infty)$, dostáváme kombinací Věty 4.3.6, (5.64) a znalosti lokálních extrémů f, že

$$\mathcal{H}(f) = (-\infty, 0] \cup [\frac{1000}{27} \sqrt[3]{10}, \infty).$$

Druhou derivaci funkce f spočteme v bodech $\mathcal{D}(f) \setminus \{0\}$. Pro tyto body platí

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \left(\frac{3x^{\frac{4}{9}} - 10x^{\frac{1}{9}}}{3(x^{\frac{1}{3}} - 3)^{\frac{4}{3}}} \right)' \\
&= \frac{\left(\frac{12}{9}x^{-\frac{5}{9}} - \frac{10}{9}x^{-\frac{8}{9}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}} - 3\right)^{\frac{4}{3}} - \left(3x^{\frac{4}{9}} - 10x^{\frac{1}{9}}\right)\frac{4}{3}\left(x^{\frac{1}{3}} - 3\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{3(x^{\frac{1}{3}} - 3)^{\frac{8}{3}}} \\
&= \frac{\left(x^{\frac{1}{3}} - 3\right)^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{8}{9}}}{3(x^{\frac{1}{3}} - 3)^{\frac{8}{3}}} \left(\left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{9}} - \frac{10}{3} \right) \left(x^{\frac{1}{3}} - 3\right) - \frac{4}{9}x^{\frac{2}{9}} \left(3x^{\frac{4}{9}} - 10x^{\frac{1}{9}}\right) \right) \\
&= \frac{\left(x^{\frac{1}{3}} - 3\right)^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{8}{9}}}{3\left(x^{\frac{1}{3}} - 3\right)^{\frac{8}{3}}} \left(-2x^{\frac{1}{3}} + 10\right).
\end{aligned}$$

Tedy jest

$$\begin{aligned}
&\forall x \in (-\infty, 0)\colon\ f''(x) < 0, \\
&\forall x \in (0, 27)\colon\ f''(x) < 0, \\
&\forall x \in (27, 125)\colon\ f''(x) > 0, \\
&\forall x \in (125, \infty)\colon\ f''(x) < 0.
\end{aligned} \tag{5.65}$$

Podle Věty 5.6.11 je tedy funkce f

- ryze konkávní na $(-\infty, 0]$,
- ryze konkávní na $[0, 27)$,
- ryze konvexní na $(27, 125]$,
- ryze konkávní na $[125, \infty)$.

Jelikož je $f'(0) = 0$, je podle Příkladu 5.9.15 f ryze konkávní na $(-\infty, 27)$. Dále z Věty 5.6.18 plyne, že bod 125 je inflexním bodem funkce f. Vzhledem k (5.65) funkce f jiných inflexních bodů nemá.

Zbývá vyšetřit asymptoty funkce f. Jest

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\left(1 - 3x^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}} = 1$$

a

$$\begin{aligned}\lim_{y\to\infty}\left(\frac{y^3\cdot y^{\frac{1}{3}}}{(y-3)^{\frac{1}{3}}}-y^3\right)&=\lim_{y\to\infty}\frac{y^3\cdot y^{\frac{1}{3}}-y^3\,(y-3)^{\frac{1}{3}}}{(y-3)^{\frac{1}{3}}}\\&=\lim_{y\to\infty}\frac{y^3\,(y-(y-3))}{(y-3)^{\frac{1}{3}}\left(y^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\,(y-3)^{\frac{1}{3}}+(y-3)^{\frac{2}{3}}\right)}\\&=\lim_{y\to\infty}\frac{3y^2}{(1-3y^{-1})^{\frac{1}{3}}\left(1+(1-3y^{-1})^{\frac{1}{3}}+(1-3y^{-1})^{\frac{2}{3}}\right)}=\infty.\end{aligned}$$

Z této limity a Věty 4.2.20 nyní plyne

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3\cdot\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(x^{\frac{1}{3}}-3\right)^{\frac{1}{3}}}-x\right)=\infty.$$

Z těchto výpočtů plyne, že f nemá v ∞ asymptotu.

Obdobně obdržíme, že

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\left(1-3x^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}}=1,$$

dále

$$\lim_{y\to-\infty}\left(\frac{y^3\cdot y^{\frac{1}{3}}}{(y-3)^{\frac{1}{3}}}-y^3\right)=\infty,$$

a tedy

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\infty.$$

Ani v $-\infty$ tedy funkce f asymptotu nemá. ♣

5.10.53. Příklad. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x)=\begin{cases}x\cdot e^{-\frac{1}{\log^2 x}}, & x\in(0,1)\cup(1,\infty),\\ 0, & x\in\{0,1\}.\end{cases}$$

Řešení. Vzhledem k tomu, že $\mathcal{D}(f)=[0,\infty)$, nemůže být f ani sudá, lichá či periodická. Vzhledem k tomu, že

$$\lim_{x\to 0_+}f(x)=0,\quad \lim_{x\to 1}f(x)=0,$$

je f spojitá v bodech 0 a 1. Zřejmě je též spojitá v bodech množiny $(0,1)\cup(1,\infty)$, a tedy je spojitá na $\mathcal{D}(f)$. Limita v nekonečnu je

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}x\cdot\lim_{x\to\infty}e^{-\frac{1}{\log^2 x}}=\infty.$$

Počítáme-li první derivaci funkce f, obdržíme

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-\frac{1}{\log^2 x}} + xe^{-\frac{1}{\log^2 x}} \cdot \frac{2}{x} \cdot (\log x)^{-3} \\ &= e^{-\frac{1}{\log^2 x}} (\log x)^{-3} \left[\log^3 x + 2\right], \quad x \in (0,1) \cup (1,\infty). \end{aligned}$$

Přímo z definice spočítáme

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0_+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{1}{\log^2 x}} = 1.$$

Konečně díky Větě 5.2.9 dostáváme

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} f'(x) = \lim_{x\to 1} \left(\log^3 x + 2\right) \cdot \lim_{x\to 1} \left(\frac{\log^{-4} x}{e^{\log^{-2} x}} \log^{-3} x \log^4 x \right) = 0.$$

(Při výpočtu jsme použili Větu 4.2.20 a fakt $\lim_{y\to\infty} \frac{y^2}{e^y} = 0$, viz Příklad 5.10.17.)

Tedy jest

$$\begin{aligned} &\forall x \in (0, e^{-\sqrt[3]{2}})\colon\ f'(x) > 0, \\ &\forall x \in (e^{-\sqrt[3]{2}}, 1)\colon\ f'(x) < 0, \\ &\forall x \in (1, \infty)\colon\ f'(x) > 0. \end{aligned}$$

Podle věty o vztahu derivace a monotonie je tedy funkce f

- rostoucí na $[0, e^{-\sqrt[3]{2}}]$,
- klesající na $[e^{-\sqrt[3]{2}}, 1]$,
- rostoucí na $[1, \infty)$.

V bodech 0 a 1 má tedy funkce f globální minimum o hodnotě 0, v bodě $e^{-\sqrt[3]{2}}$ má lokální maximum. Vzhledem k tomu, že $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, funkce f nemá globální maximum.

Z těchto úvah a Věty 4.3.4 plyne, že $\mathcal{H}(f) = [0, \infty)$.

Pro $x \in (0,1) \cup (1,\infty)$ spočteme

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{-\frac{1}{\log^2 x}} \left(2\log^{-3} x \cdot \frac{1}{x}\right) \left(1 + 2\log^{-3} x\right) + e^{-\frac{1}{\log^2 x}} \log^{-4} x \frac{-6}{x} \\ &= e^{-\frac{1}{\log^2 x}} \frac{2}{x} \log^{-6} x \left[\log^3 x + 2 - 3\log^2 x\right]. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že

$$y^3 - 3y^2 + 2 = (y-1)(y^2 - 2y + 2) = (y-1)\left(y - (1+\sqrt{3})\right)\left(y - (1-\sqrt{3})\right),$$

máme

$$
\begin{aligned}
&\forall x \in (0, e^{1-\sqrt{3}})\colon\ f''(x) < 0,\\
&\forall x \in (e^{1-\sqrt{3}}, 1)\colon\ f''(x) > 0,\\
&\forall x \in (1, e)\colon\ f''(x) > 0,\\
&\forall x \in (e, e^{1+\sqrt{3}})\colon\ f''(x) < 0,\\
&\forall x \in (e^{1+\sqrt{3}}, \infty)\colon\ f''(x) > 0.
\end{aligned}
\tag{5.66}
$$

Podle věty o vztahu druhé derivace a konvexity je tedy funkce f

- ryze konkávní na $[0, e^{1-\sqrt{3}}]$,
- ryze konvexní na $[e^{1-\sqrt{3}}, 1]$,
- ryze konvexní na $[1, e]$,
- ryze konkávní na $[e, e^{1+\sqrt{3}}]$,
- ryze konvexní na $[e^{1+\sqrt{3}}, \infty)$.

Díky Příkladu 5.9.15 je funkce f ryze konvexní na $[e^{1-\sqrt{3}}, e]$. Z Věty 5.6.18 plyne, že $e^{1-\sqrt{3}}, e, e^{1+\sqrt{3}}$ jsou inflexní body funkce f. V bodě 1 má tečna ke grafu funkce f tvar $t(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, z čehož přímo z definice plyne, že 1 není inflexní bod f. Konečně můžeme z (5.66) usoudit, že jiné než výše uvedené inflexní body funkce f nemá.

Zjistíme nyní, zdali má funkce f v nekonečnu asymptotu. Vzhledem k tomu, že

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{1}{\log^2 x}} = 1$$

a

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x\to\infty} x \left(\frac{e^{-\log^{-2} x} - 1}{-\log^{-2} x} \right) (-\log^{-2} x)\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-\log^{-2} x} - 1}{-\log^{-2} x} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{\log^{-2} x} = -\infty,
\end{aligned}
$$

funkce f nemá v nekonečnu asymptotu. (Při výpočtu jsme užili Příklad 5.10.17.)

♣

5.10.54. Příklad. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{6 \sin x}.$$

Řešení. Definiční obor funkce f je množina

$$\mathcal{D}(f) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (k\pi, (1+k)\pi)$$

a f je zjevně na $\mathcal{D}(f)$ spojitá.

Vzhledem k tomu, že sinus je lichá funkce, je f též lichá. Navíc je periodická s periodou 2π. Omezíme se tedy při vyšetřování průběhu f na množinu $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$. Cenným vodítkem nám přitom bude právě lichost zadané funkce.

Máme

$$\lim_{x \to -\pi_-} f(x) = \lim_{x \to 0_-} f(x) = -\infty \qquad \text{a} \qquad \lim_{x \to 0_+} f(x) = \lim_{x \to \pi_-} f(x) = \infty. \quad (5.67)$$

Platí

$$f'(x) = \cos x - \frac{\cos x}{6 \sin^2 x} = \frac{\cos x}{\sin^2 x} \left(\sin^2 x - \frac{1}{6} \right), \quad x \in \mathcal{D}(f).$$

Označme $\alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{6}}$ a nechť

$$x_1 = -\pi + \alpha, \quad x_2 = -\alpha, \quad x_3 = \alpha, \quad x_4 = \pi - \alpha.$$

Tedy

- $f' > 0$ na intervalech $(-\pi, x_1)$, $(-\frac{\pi}{2}, x_2)$, $(x_3, \frac{\pi}{2})$, (x_4, π) a
- $f' < 0$ na intervalech $(x_1, -\frac{\pi}{2})$, $(x_2, 0)$, $(0, x_3)$, $(\frac{\pi}{2}, x_4)$.

Podle věty o vztahu derivace a monotonie je tedy funkce f

- rostoucí na intervalech $(-\pi, x_1]$, $[-\frac{\pi}{2}, x_2]$, $[x_3, \frac{\pi}{2}]$, $[x_4, \pi]$ a
- klesající na $[x_1, -\frac{\pi}{2}]$, $[x_2, 0)$, $(0, x_3]$, $[\frac{\pi}{2}, x_4]$.

V bodech $-\frac{\pi}{2}, x_3, x_4$ má lokální minima, přičemž $f(x_3) = f(x_4) = \sqrt{\frac{2}{3}}$ a $f(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{7}{6}$, a v bodech $x_1, x_2, \frac{\pi}{2}$ má lokální maxima, přičemž $f(x_1) = f(x_2) = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ a $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{7}{6}$.

Z právě provedených úvah, Věty 4.3.4 a (5.67) plyne, že

$$\mathcal{H}(f) = (-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}] \cup [\sqrt{\frac{2}{3}}, \infty).$$

Druhá derivace funkce f je pak pro $x \in \mathcal{D}(f)$ rovna

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\cos x \left(1 - \frac{1}{6 \sin^2 x} \right) \right)' \\ &= (-\sin x) \left(1 - \frac{1}{6 \sin^2 x} \right) + \cos x \frac{-2}{6} (\sin x)^{-3} \cos x \\ &= \frac{-6 \sin^4 x \sin^2 x + 2 \cos^2 x}{6 \sin^3 x} \\ &= \frac{-6 \sin^4 x - \sin^2 x + 2}{6 \sin^2 x}. \end{aligned}$$

Jelikož rovnice

$$-6y^2 - y + 2 = 0$$

má kořeny $-\frac{2}{3}$ a $\frac{1}{2}$, hledáme ta čísla x, pro která $\sin^2 x = \frac{1}{2}$. Zajímá nás tedy množina $\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\}$. Protože je

- $f'' > 0$ na intervalech $(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4})$, $(0, \frac{\pi}{4})$, $(\frac{3\pi}{4}, \pi)$ a

- $f'' < 0$ na intervalech $(-\pi, -\frac{3\pi}{4})$, $(-\frac{\pi}{4}, 0)$, $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$,

je podle Věty 5.6.11 funkce f

- ryze konvexní na intervalech $[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}]$, $(0, \frac{\pi}{4}]$, $[\frac{3\pi}{4}, \pi)$ a
- ryze konkávní na intervalech $(-\pi, -\frac{3\pi}{4}]$, $[-\frac{\pi}{4}, 0)$, $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$.

Dle Věty 5.6.18 jsou body $-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ inflexními body funkce f. Vzhledem ke znaménku druhé derivace jiných inflexních bodů funkce f nemá, viz Věta 5.6.16.

Asymptoty zřejmě nemá smysl vyšetřovat, a tedy zbývá pouze načrtnout graf. ♣

5.10.55. Příklad. Vyšetřete průběh funkce zdané parametricky rovnicemi

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Přesněji se požaduje následující úvaha. Ukažte, že funkce $\varphi(t) = t - \sin t$, $t \in \mathbb{R}$, je rostoucí a zobrazuje $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$. Existuje proto její inverzní funkce $\varphi^{-1} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $\psi(t) = 1 - \cos t$, $t \in \mathbb{R}$.

Řešení. Funkce φ i ψ jsou nekonečně diferencovatelné a platí

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty, \quad \lim_{t\to-\infty} \varphi(t) = -\infty.$$

Dále

$$\varphi'(t) = 1 - \cos t, \quad t \in \mathbb{R},$$

a tedy $\varphi' > 0$ na intervalech $(2k\pi, 2\pi(k+1))$, $k \in \mathbb{Z}$, přičemž v bodech $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, má derivaci rovnou 0. Funkce φ je proto rostoucí na $\mathbb{R}$ a díky Větě 4.3.4 je $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Tím je zaručena existence funkce $\varphi^{-1} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Navíc je φ^{-1} spojitá díky Větě 4.3.13.

Ukažme, že f je 2π-periodická. Nechť $x \in \mathbb{R}$ je libovolné a $t \in \mathbb{R}$ splňuje $\varphi(t) = x$. Pak též

$$\varphi(t + 2\pi) = (t + 2\pi) - \sin(t + 2\pi) = (t + 2\pi) - \sin t = x + 2\pi.$$

Tedy

$$f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x)) = \psi(t) = \psi(t + 2\pi) = \psi(\varphi^{-1}(x + 2\pi)) = f(x + 2\pi).$$

Stačí tedy vyšetřit průběh funkce na intervalu $[0, 2\pi]$.

Podle Věty 5.1.27 spočteme

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\psi(\varphi^{-}(x)))' = \psi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1}(x))' \\ &= \sin(\varphi^{-1}(x)) \frac{1}{1 - \cos(\varphi^{-1}(x))}, \quad x \in (0, 2\pi). \end{aligned}$$

Ozančíme-li $t = \varphi^{-1}(x)$, je výraz $\frac{\sin t}{1-\cos t}$ kladný pro $t \in (0, \pi)$, záporný pro $t \in (\pi, 2\pi)$ a nulový pro $t = \pi$. Tedy $f' > 0$ na intervalu $(0, \pi)$, $f' < 0$ na intervalu

$(\pi, 2\pi)$ a $f'(x) = 0$ pro $x = \pi$. Jelikož f je spojitá, můžeme použít Větu 5.2.9 a odvodit pomocí Věty 4.2.24

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x\to 0_+} f'(x) = \lim_{x\to 0_+} \sin(\varphi^{-1}(x)) \frac{1}{1-\cos(\varphi^{-1}(x))} \\ &= \lim_{t\to 0_+} \frac{\sin t}{1-\cos t} = \lim_{t\to 0_+} \frac{\sin t}{t} \cdot \frac{t^2}{1-\cos t} \cdot \frac{1}{t} = \infty. \end{aligned}$$

Obdobně odvodíme (například podle Věty 5.4.1)

$$f'_-(2\pi) = \lim_{t\to 2\pi_-} \frac{\sin t}{1-\cos t} = \lim_{t\to 2\pi_-} \frac{\cos t}{\sin t} = -\infty.$$

Z těchto výpočtů nyní vidíme, že f roste na intervalu $[0, \pi]$ a klesá na intervalu $[\pi, 2\pi]$. Dále má v bodě π globální maximum o hodnotě 2. Vzhledem k tomu, že f je kladná na inttervalu $(0, 2\pi)$, má f v bodech 0 a 2π globální minima splňující $f(0) = f(2\pi) = 0$.

Vzhledem k tomu, že f je jakožto složení spojitých funkcí spojitá, dostáváme z Věty 4.3.4, že $\mathcal{H}(f) = [0, 2]$.

K výpočtu f'' opět použijeme Větu 5.1.27. Nejprve označme $\omega(t) = \frac{\sin t}{1-\cos t}$, $t \in (0, 2\pi)$. Pak

$$\omega'(t) = \frac{-1}{1-\cos t}, \quad t \in (0, 2\pi).$$

Tedy máme

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{\sin(\varphi^{-1}(x))}{1-\cos(\varphi^{-1}(x))}\right)' = \left(\omega(\varphi^{-1}(x))\right)' \\ &= \omega'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1}(x))' = \frac{-1}{1-\cos(\varphi^{-1}(x))} \cdot \frac{1}{1-\cos(\varphi^{-1}(x))} \\ &= \frac{-1}{(1-\cos(\varphi^{-1}(x)))^2}, \quad x \in (0, 2\pi). \end{aligned}$$

Tedy $f'' < 0$ na $(0, 2\pi)$, a tedy je f ryze konkávní na $[0, 2\pi]$ (viz Věta 5.6.11).

Vzhledem k její periodicitě nemá asymptoty, viz Příklad 5.9.19. ♣

5.10.56. Příklad. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$.

Řešení. Podívejme se nejdříve na funkci

$$g(x) = \frac{2x}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pak $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ a funkce g má vlastní první i druhou derivaci v každém bodě $x \in \mathbb{R}$. Zřejmě

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0, \tag{5.68}$$

g je lichá a kladná na $(0, \infty)$. Počítejme

$$g'(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}\left(2(x^2+1) - 4x^2\right) = \frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tedy $g' > 0$ na intervalu $(-1, 1)$ a $g' < 0$ na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$. Dle Věty 5.2.6 g roste na $[-1, 1]$ a klesá na intervalech $(-\infty, -1]$ a $[1, \infty)$. Tedy g má minimum v bodě -1 a maximum v 1. Protože $g(-1) = -1$ a $g(1) = 1$, z Věty 4.3.4 plyne $\mathcal{H}(f) = [-1, 1]$.

Jelikož $\mathcal{D}(\arcsin) = [-1, 1]$, je funkce f definovaná na $\mathbb{R}$ a je zde spojitá (jelikož g i arcsin jsou spojité, plyne tvrzení z Poznámky 4.2.22(b)). Díky (5.68) a spojitosti funkce arcsin v 0 dostáváme použitím Věty 4.2.20

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = f(0) = 0.$$

Po dosazení vidíme $f(-x) = -f(x)$, tj. f je lichá.

Při výpočtu derivace dostáváme za pomoci Věty 5.1.17 a vlastnosti (C5)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2}\right)^{-1} \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\,|1-x^2|}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}. \end{aligned}$$

V bodech -1 a 1 použijeme Větu 5.2.9 k odvození

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x\to1_+} f'(x) = \lim_{x\to1_+} \frac{-2}{x^2+1} = -1, \\ f'_-(1) &= \lim_{x\to1_-} f'(x) = \lim_{x\to1_-} \frac{2}{x^2+1} = 1, \\ f'_+(-1) &= \lim_{x\to-1_+} f'(x) = \lim_{x\to-1_+} \frac{2}{x^2+1} = 1, \\ f'_-(-1) &= \lim_{x\to-1_-} f'(x) = \lim_{x\to-1_-} \frac{-2}{x^2+1} = -1. \end{aligned}$$

Tedy derivace v bodech -1 a 1 neexistuje.

Máme $f' > 0$ na $(-1, 1)$ a $f' < 0$ na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$. Z Věty 5.2.6 plyne, že f roste na $[-1, 1]$ a klesá na intervalech $(-\infty, -1]$ a $[1, \infty)$. Dále, f má maximum v bodě 1 a minimum v bodě -1, přičemž $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$ a $f(1) = \frac{\pi}{2}$. Díky spojitosti funkce f dostáváme za použití Věty 4.3.4 $\mathcal{H}(f) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Počítáme-li druhou derivaci, dostáváme

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-4x}{(x^2+1)^2} & \text{pro } x \in (-1, 1), \\ \frac{4x}{(x^2+1)^2} & \text{pro } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty). \end{cases}$$

Tedy $f''(x) = 0$ právě v bodě $x = 0$, $f'' > 0$ na $(-1, 0) \cup (1, \infty)$ a $f'' < 0$ na $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$. Z Věty 5.6.11 odvodíme, že f je ryze konvexní na intervalech $[-1, 0]$ a $[1, \infty)$ a je ryze konkávní na intervalech $(-\infty, -1]$ a $[0, 1]$. Dále má f v 0 inflexní bod dle Věty 5.6.18.

Pro výpočet asymptot můžeme použít Větu 5.7.3, což dává

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

a
$$\lim_{x\to\infty} f(x) - 0 \cdot x = \lim_{x\to-\infty} f(x) - 0 \cdot x = 0.$$
Tedy přímka $t(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, je asymptotou funkce f v ∞ i $-\infty$.

Nyní již zbývá pouze načrtnout graf funkce f. ♣

KAPITOLA 6

Taylorův polynom

V této kapitole budeme studovat otázku aproximace obecné funkce polynomem. K dané funkci f a danému bodu $a \in \mathbb{R}$ budeme hledat vhodný polynom, jehož hodnoty v blízkosti a v jistém dobře definovaném smyslu aproximují hodnoty funkce f. Budeme se přitom snažit, aby odchylka funkce od polynomu byla dostatečně malá. Ukážeme si také několik způsobů jak odchylku shora odhadnout.

6.1. Základní vlastnosti

6.1.1. Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$ a nechť existuje vlastní $f'(a)$. Potom existuje tečna ke grafu funkce f v bodě a ve smyslu Definice 5.1.5. Označme funkci, která definuje tuto tečnu, symbolem t, tedy položme

$$t(x) = f(a) + f'(a)(x-a), \quad x \in \mathbb{R}.$$

O této funkci můžeme říci, že v jistém smyslu *aproximuje* chování f v blízkosti bodu a, neboť platí

$$\lim_{x\to a} \frac{|f(x)-t(x)|}{|x-a|} = 0. \tag{6.1}$$

To plyne z výpočtu

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{f(x)-t(x)}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a} = \\ &= \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right) = 0\end{aligned}$$

a z Věty 4.1.19. Neformálně řečeno, pro hodnoty x dostatečně blízké k bodu a je výraz $|f(x)-t(x)|$ podstatně menší než $|x-a|$.

Pokud místo afinní funkce, což je polynom stupně nejvýše 1, použijeme vhodný polynom P obecně vyššího stupně, můžeme doufat v lepší aproximaci, např.

$$\lim_{x\to a} \frac{|f(x)-P(x)|}{|x-a|^n} = 0 \tag{6.2}$$

pro jisté $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Takový polynom P by skutečně aproximoval f s větší přesností, neboť výraz $|x-a|^n$ je pro x dostatečně blízké bodu a podstatně menší než $|x-a|$, přesněji řečeno, platí

$$\lim_{x\to a}\frac{|x-a|^n}{|x-a|}=0.$$

Při hledání vhodného polynomu bude užitečné si povšimnout, že funkce t splňuje $f(a)=t(a)$ a $f'(a)=t'(a)$. Budeme hledat polynom P tak, aby pro každé $j\in\{0,1,\dots,n\}$ platilo $f^{(j)}(a)=P^{(j)}(a)$. Ukážeme, že polynom, který je zaveden následující definicí, splňuje tento požadavek i (6.2).

6.1.2. Definice. Nechť f je reálná funkce, $a\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Pak polynom $T_n^{f,a}$, definovaný pro každé $x\in\mathbb{R}$ předpisem

$$T_n^{f,a}(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\dots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n,$$

nazýváme **Taylorovým polynomem**[1] **funkce** f **v bodě** a **řádu** n.

6.1.3. Nechť f je reálná funkce, $a\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Potom pro každé $j\in\{0,\dots,n-1\}$ existuje vlastní $f^{(j)}(x)$ na nějakém okolí bodu a. Speciálně odtud vyplývá, že Taylorův polynom $T_n^{f,a}$ je dobře definován. Zřejmě platí $T_1^{f,a}=t$.

6.1.4. Úmluva. V dalším textu budeme symbol tvaru $(x-a)^0$ chápat jako 1, a to i tehdy, jestliže $x=a$. Symbolem $f^{(0)}$ (tedy „nultou derivací“ funkce f) budeme rozumět samotnou funkci f.

6.1.5. Nechť f je reálná funkce, $a\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Z definice Taylorova polynomu je zřejmé, že platí $\operatorname{st}(T_n^{f,a})\le n$. Tato nerovnost ovšem může být ostrá. To nastává právě tehdy, když platí $f^{(n)}(a)=0$. Položíme-li například $f=\sin$, $a=0$ a $n=2$, dostaneme

$$T_2^{\sin,0}(x)=\sin(0)+\sin'(0)\cdot x+\frac{1}{2}\sin''(0)\cdot x^2=x,\quad x\in\mathbb{R},$$

takže $\operatorname{st}\big(T_2^{\sin,0}\big)=1$.

6.1.6. Nechť f je reálná funkce, $a\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Označme $T=T_n^{f,a}$. Pak pro každé $x\in\mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}
T'(x)&=f'(a)+f''(a)(x-a)+\dots+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(a)(x-a)^{n-1},\\
T''(x)&=f''(a)+f'''(a)(x-a)+\dots+\frac{1}{(n-2)!}f^{(n)}(a)(x-a)^{n-2},\\
&\ \,\vdots\\
T^{(n-1)}(x)&=f^{(n-1)}(a)+f^{(n)}(a)(x-a),\\
T^{(n)}(x)&=f^{(n)}(a).
\end{aligned}$$

[1] Brook Taylor (1685 –1731)

Dosadíme-li $x = a$, dostaneme vztahy

$$T(a) = f(a),\ T'(a) = f'(a),\ T''(a) = f''(a), \dots,\ T^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

6.1.7. Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Potom pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $(T_n^{f,a})'(x) = T_{n-1}^{f',a}(x)$. Toto tvrzení bezprostředně vyplývá z Definice 6.1.2 a 6.1.6.

6.1.8. Příklad. Spočtěte Taylorův polynom třetího řádu v bodě 0 pro funkce sinus a kosinus.

Řešení. Protože platí

$$\sin 0 = 0,\ \sin' 0 = \cos 0 = 1,\ \sin'' 0 = -\sin 0 = 0,\ \sin''' 0 = -\cos 0 = -1,$$

dostáváme

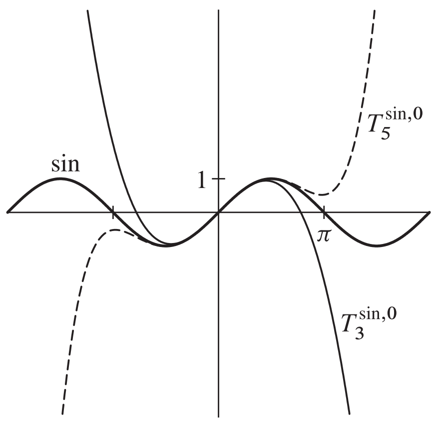
$$T_3^{\sin,0}(x) = x - \frac{1}{6}x^3.$$

Podobně lze odvodit vztah

$$T_3^{\cos,0}(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2.$$

♣

6.1.9. Na následujícím obrázku jsou zachyceny grafy funkce sinus a Taylorových polynomů $T_3^{\sin,0}$ a $T_5^{\sin,0}$.



Obrázek 1. Taylorovy polynomy funkce sinus

6.1.10. Budeme studovat otázku, jak kvalitní je aproximace funkce jejím Taylorovým polynomem. Kvalitu přiblížení obvykle měříme velikostí „chyby aproximace“, tedy veličiny $|f(x) - T_n^{f,a}(x)|$ v daném bodě x. Tuto chybu je možné jen málokdy spočítat přesně, uvedeme ale pro ni několik velmi efektivních odhadů. Chybu aproximace budeme v dalším textu nazývat „zbytkem“. Důležitou charakteristikou kvality aproximace je popis a nebo alespoň horní odhad velikosti zbytku v závislosti na bodu x, jestliže se tento bod blíží k bodu a.

6.1.11. Věta (Peanův tvar zbytku)**.** Nechť f je reálná funkce, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Potom

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Důkaz. Použijeme matematickou indukci podle n. Nechť $n = 1$. Potom podle 6.1.3 a (6.1) platí

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_1^{f,a}(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - t(x)}{x-a} = 0.$$

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Předpokládejme, že existuje vlastní $f^{(n)}(a)$ a tvrzení věty platí pro $n-1$. To znamená, že pro každou funkci g takovou, že existuje vlastní $g^{(n-1)}(a)$, platí

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x) - T_{n-1}^{g,a}(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0.$$

Tento předpoklad využijeme pro $g = f'$. Víme, že funkce f' v bodě a vlastní $(n-1)$-ní derivaci, neboť $(f')^{(n-1)}(a) = f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Podle indukčního předpokladu tedy platí

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f',a}(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0. \tag{6.3}$$

Funkce f je spojitá v bodě a, neboť existuje vlastní $f'(a)$. Funkce $T_n^{f,a}$ je polynom, a tedy je také spojitá v bodě a. Z toho plyne, že můžeme využít L'Hospitalova pravidla (viz Větu 5.4.1(a)). Dostaneme

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{\big(f(x) - T_n^{f,a}(x)\big)'}{\big((x-a)^n\big)'}.$$

Podle 6.1.6 platí $\big(T_n^{f,a}\big)' = T_{n-1}^{f',a}$. Tudíž z (6.3) vyplývá, že

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f',a}(x)}{n(x-a)^{n-1}} = 0.$$

Tím je tvrzení dokázáno. ■

6.1.12. Lemma. Nechť $n \in \mathbb{N}$, Q je polynom, st $Q \le n$ a $\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$. Pak Q je nulový polynom.

Důkaz. Předpokládejme, že polynom Q není nulový. Polynom Q má zřejmě v bodě a kořen. Pak podle Lemmatu **??** existuje $k \in \{1, \dots, n\}$ a polynom R takový, že

$Q(x) = (x-a)^k R(x)$ a $R(a) \neq 0$. Potom platí

$$0 = \lim_{x \to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{R(x)}{(x-a)^{n-k}}.$$

Poslední limita ale buď neexistuje (je-li $k < n$ a $n-k$ je liché), nebo je nevlastní (je-li $k < n$ a $n-k$ je sudé), nebo je vlastní a nenulová (je-li $k = n$). Ve všech těchto případech dostáváme spor. Tím je tvrzení lemmatu dokázáno. ■

6.1.13. Věta. Nechť f je reálná funkce, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, existuje vlastní $f^{(n)}(a)$ a P je polynom stupně nejvýše n splňující

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Potom $P = T_n^{f,a}$.

Důkaz. Podle Věty 6.1.11 víme, že

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Podle věty o aritmetice limit (Věta 4.2.1) tedy platí

$$\lim_{x \to a} \frac{T_n^{f,a}(x) - P(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{T_n^{f,a}(x) - f(x)}{(x-a)^n} + \lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0 + 0 = 0.$$

Dále platí $\operatorname{st}\left(T_n^{f,a} - P\right) \leq n$, a tedy podle Lemmatu 6.1.12 je $T_n^{f,a} - P$ nulový polynom. To znamená, že $P = T_n^{f,a}$. ■

Věta 6.1.11 udává asymptotický odhad „řádu“ chyby, jíž se dopustíme při nahrazení funkce Taylorovým polynomem, neříká však nic o její skutečné velikosti. V následující větě odvodíme přesnější formuli pro vyjádření chyby, ovšem za silnějších předpokladů na funkci f.

6.1.14. Věta (obecný tvar zbytku). Nechť f je reálná funkce, $n \in \mathbb{N}$, $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$, a f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní derivaci řádu $(n+1)$. Nechť φ je spojitá funkce na $[a, x]$ mající v každém bodě intervalu (a, x) vlastní nenulovou derivaci. Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$

Důkaz. Definujme funkci $F \colon [a, x] \to \mathbb{R}$ předpisem

$$F(t) = f(x) - \left(f(t) + f'(t)(x-t) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(t)(x-t)^n \right).$$

Funkce F je spojitá na $[a, x]$ a má vlastní derivaci v každém bodě intervalu (a, x), neboť všechny funkce vystupující v definici F mají vlastní derivaci v každém bodě

intervalu $[a, x]$. Podle Cauchyovy věty (Věta 5.2.11) tedy existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že
$$\frac{F(x) - F(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \tag{6.4}$$
Nechť $t \in (a, x)$. Potom
$$\begin{aligned} F'(t) &= -\left(f'(t) + f'(t) \cdot (-1) + f''(t)(x-t) + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\right) \\ &= -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n. \end{aligned}$$
Dosadíme-li $t = \xi$, dostaneme
$$F'(\xi) = -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$
Zřejmě platí $F(x) = 0$ a $F(a) = f(x) - T_n^{f,a}(x)$. Odtud a z (6.4) dostáváme
$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$
Tvrzení je dokázáno. ■

6.1.15. Věta 6.1.14 platí i v případě $x < a$. Důkaz je stejný.

6.1.16. Předpoklady Věty 6.1.14 lze mírně zeslabit. Stačí předpokládat, že $f^{(n)}$ je spojitá na $[a, x]$ a $f^{(n+1)}$ existuje (vlastní či nevlastní) na (a, x). I za tohoto předpokladu lze použít postup z uvedeného důkazu.

Větu 6.1.14 nyní využijeme k odvození dvou konkrétních tvarů zbytku Taylorova polynomu. Dosáhneme toho v obou případech vhodnou volbou funkce φ.

6.1.17. Věta (Lagrangeův tvar zbytku)**.** Nechť f je reálná funkce, $n \in \mathbb{N}$, $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$, a f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní derivaci řádu $(n + 1)$. Potom existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že
$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}. \tag{6.5}$$

Důkaz. Položme $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$, $t \in [a, x]$. Pak je funkce φ je spojitá na $[a, x]$ a na otevřeném intervalu (a, x) má vlastní nenulovou derivaci. Podle Věty 6.1.14 tedy existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že
$$\begin{aligned} f(x) - T_n^{f,a}(x) &= \frac{1}{n!} \frac{0 - (x-a)^{n+1}}{(-(n+1)(x-\xi)^n)} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n \\ &= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}. \end{aligned}$$
■

6.1.18. Věta. Nechť f je reálná funkce, I je interval, $n \in \mathbb{N}$ a f má v každém bodě intervalu I vlastní derivaci řádu $(n+1)$. Nechť $M \in \mathbb{R}$ a pro každé $x \in I$ platí $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M$. Potom pro každé $x \in I$ platí

$$|f(x) - T_n^{f,a}(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}\,|x-a|^{n+1}\,.$$

Důkaz. Tvrzení bezprostředně plyne z Věty 6.1.17. ∎

6.1.19. Věta (Cauchyův tvar zbytku)**.** Nechť f je reálná funkce, $n \in \mathbb{N}$, $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$, a f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní derivaci řádu $(n+1)$. Potom existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-a). \tag{6.6}$$

Důkaz. Položme $\varphi(t) = t$, $t \in [a, x]$. Pak je funkce φ je spojitá na $[a, x]$ a na otevřeném intervalu (a, x) má vlastní nenulovou derivaci. Podle Věty 6.1.14 existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!}\frac{x-a}{1} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-a).$$

∎

6.2. Symbol malé o

6.2.1. Z Věty 6.1.11 vyplývá, že za uvedených předpokladů můžeme funkci f na jistém okolí bodu a zapsat ve tvaru $f = T_n^{f,a} + \omega$, kde „chybová funkce“ ω splňuje

$$\lim_{x \to a} \frac{\omega(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

6.2.2. Taylorovy polynomy lze mimo jiné použít k počítání limit funkcí a posloupností a k vyšetřování konvergence číselných řad s nezápornými členy. Ve všech těchto případech většinou počítáme limitu nějaké komplikované funkce. Pro výpočet limity posloupnosti pak obvykle využijeme Heineovu větu a pro vyšetření konvergence řady srovnávací kritérium.

Základní myšlenka výpočtu limity funkce je následující. Funkce, které se objevují ve výrazu, jehož limitu počítáme, vyjádříme jako součet polynomu a chybové funkce. Výpočet limity pak bude sestávat z výpočtu limity obsahující pouze polynomy a chybové funkce. Při vhodném vyjádření funkce ve tvaru „polynom plus chybová funkce“ pak mohou být tyto výpočty velmi jednoduché. Při počítání s chybovými funkcemi totiž nemusíme brát v úvahu jejich přesný tvar, ale pouze odhady velikosti chyby. Hlavní problém výpočtu pak spočívá v tom, jak nalézt k daným funkcím odpovídající polynomy vhodného stupně a chybové funkce. Takové postupy ukážeme v následujícím výkladu.

6.2.3. Definice. Nechť f a g jsou funkce, $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce f je v bodě a **malé** o **od funkce** g (píšeme $f(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$), jestliže platí

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

6.2.4. Výraz „$f(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$" chápeme jako jeden symbol. Znaménko rovnosti zde neznačí standardní rovnost mezi reálnými čísly nebo funkcemi a nelze s ním pracovat samostatně.

6.2.5. Tvrzení Věty 6.1.11 je možné zapsat ve tvaru

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = o\big((x-a)^n\big), x \to a,$$

proto bude v roli funkce g často vystupovat funkce $x \mapsto (x-a)^n$, nebo jen $x \mapsto x^n$ v případě $a = 0$.
(c) Symbol $f(x) = o(1)$, $x \to a$ podle definice znamená, že $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.
(d) Pokud nebude hrozit nedorozumění, budeme symbol $x \to a$ vynechávat.

6.2.6. Věta (aritmetika malého o)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^*$.

(a) Jestliže $f_1(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$ a $f_2(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$, potom $f_1(x) + f_2(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$.

(b) Jestliže $f_1(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ a $f_2(x) = o\big(g_2(x)\big)$, $x \to a$, potom $f_1(x) f_2(x) = o\big(g_1(x) g_2(x)\big)$, $x \to a$.

(c) Jestliže $f_1(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ a f_2 je nenulová na jistém prstencovém okolí bodu a, potom $f_1(x) f_2(x) = o\big(g_1(x) f_2(x)\big)$, $x \to a$.

(d) Jestliže $f(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ a $\lim_{x \to a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ je vlastní, potom $f(x) = o\big(g_2(x)\big)$, $x \to a$.

(e) Jestliže $f(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$ a h je omezená na jistém prstencovém okolí bodu a, potom $h(x) f(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$.

(f) Jestliže $a \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \leq n$, a $f(x) = o\big((x-a)^n\big)$, $x \to a$, potom $f(x) = o\big((x-a)^m\big)$, $x \to a$.

Důkaz. Všechna tvrzení bezprostředně plynou z věty o aritmetice limit (Věta 4.2.1) a Věty 4.2.13. ∎

6.2.7. Věta. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, nechť φ je funkce definovaná na nějakém prstencovém okolí bodu a a nechť f a g jsou funkce definované na nějakém prstencovém okolí bodu b. Předpokládejme, že platí $f(y) = o\big(g(y)\big)$, $y \to b$, a $\lim_{x \to a} \varphi(x) = b$. Nechť dále existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(a, \delta) \colon \varphi(x) \neq b.$$

Potom $f\big(\varphi(x)\big) = o\big(g(\varphi(x)\big)$, $x \to a$.

Důkaz. Tvrzení bezprostředně plyne z věty o limitě složené funkce (Věta 4.2.20(P)). ∎

6.2.8. Příklad. Určete Taylorův polynom řádu 3 funkce tangens v bodě 0.

Řešení. Mohli bychom spočítat derivace funkce tangens až do třetího řádu v bodě 0 a pak sestavit příslušný Taylorův polynom podle definice, jako jsme to učinili v Příkladu 6.1.8. Ukážeme však ještě jiný postup.

Protože má funkce tangens na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ derivace všech řádů, stačí nalézt polynom P takový, že $\operatorname{st}(P) \leq 3$ a $\operatorname{tg} x - P(x) = o(x^3)$, $x \to 0$. Pak totiž podle Věty 6.1.13 již musí platit $P = T_3^{\operatorname{tg},0}$. Označme $P(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3$. Potom

$$\frac{\sin x}{\cos x} - (A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3) = o(x^3), \quad x \to 0,$$

neboli

$$\frac{\sin x}{\cos x} - (A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3) = \omega(x),$$

kde funkce ω je definována na prstencovém okolí bodu 0 a platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\omega(x)}{x^3} = 0.$$

Potom pro každé x z tohoto prstencového okolí platí

$$\sin x = \bigl(A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \omega(x)\bigr)\cos x. \tag{6.7}$$

Funkce sinus a kosinus můžeme vyjádřit podle Příkladu 6.1.8 ve formě

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + \eta(x), \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \zeta(x), \end{aligned}$$

kde funkce η a ζ splňují

$$\lim_{x\to 0} \frac{\eta(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\zeta(x)}{x^3} = 0.$$

Uvedená vyjádření funkcí sinus a kosinus nyní dosadíme do (6.7), pravou stranu roznásobíme a po úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{6}x^3 + \eta(x) &= \bigl(A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \omega(x)\bigr)\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \zeta(x)\right) = \\ &= A_0 + A_1x + \left(A_2 - \frac{1}{2}A_0\right)x^2 + \left(A_3 - \frac{1}{2}A_1\right)x^3 + \tau(x), \end{aligned} \tag{6.8}$$

přičemž

$$\tau(x) = \omega(x) - \frac{1}{2}A_2x^4 - \frac{1}{2}A_3x^5 - \frac{1}{2}\omega(x)x^2 + \bigl(A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \omega(x)\bigr)\zeta(x).$$

Z tvaru funkce τ snadno odvodíme, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tau(x)}{x^3} = 0.$$

Úpravou (6.8) obdržíme

$$A_0 + (A_1 - 1)x + \left(A_2 - \frac{1}{2}A_0\right)x^2 + \left(A_3 - \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{6}\right)x^3 = \eta(x) - \tau(x).$$

Označme symbolem Q polynom na levé straně předchozího vztahu. Potom st $Q \leq 3$ a z tvaru pravé strany plyne, že $Q(x) = o(x^3)$, $x \to 0$. Podle Lemmatu 6.1.12 musí být polynom Q nulový, a tedy musí mít nulové koeficienty, tj.

$$A_0 = 0, \quad A_1 - 1 = 0, \quad A_2 - \frac{1}{2}A_0 = 0, \quad A_3 - \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{6} = 0.$$

Odtud dostaneme $A_0 = 0$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0$, $A_3 = \frac{1}{3}$, neboli

$$T_3^{\mathrm{tg},0}(x) = x + \frac{1}{3}x^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

♣

6.2.9. Při počítání úloh podobného typu, jaký jsme viděli v Příkladu 6.2.8 se často užívá následující konvence. Místo abychom pracovali s jednotlivými chybovými funkcemi – v našem příkladu to byly funkce $\omega, \eta, \zeta, \tau$ – budeme je značit vždy stejným symbolem, který bude obsahovat pouze informaci o přesnosti našeho odhadu. Místo abychom psali například $f(x) = g(x) + \omega(x)$, kde $\omega(x) = o(x^3)$, $x \to 0$, budeme psát rovnou $f(x) = g(x) + o(x^3)$, $x \to 0$. Tento způsob zápisu činí výpočet přehlednější, nicméně je třeba dát pozor na jistá jeho úskalí. Nebudeme se zde snažit dát tomuto zápisu přesný matematický význam. Budeme jej chápat pouze jako zkrácenou verzi zápisu s chybovými funkcemi, který již přesný matematický význam má. Korektnost našeho výpočtu bude dána tím, že jej můžeme zapsat vždy naprosto přesně s použitím chybových funkcí. Výpočet z Příkladu 6.2.8 pak lze zapsat následovně:

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) &= \big(A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + o(x^3)\big) \cdot \big(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + o(x^3)\big) \\ &= A_0 + A_1x + \big(A_2 - \tfrac{1}{2}A_0\big)x^2 + \big(A_3 - \tfrac{1}{2}A_1\big)x^3 \\ &\quad + o(x^3) - \tfrac{1}{2}A_2x^4 - t\frac{1}{2}A_3x^5 - \tfrac{1}{2}x^2o(x^3) \\ &\quad + \big(A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + o(x^3)\big) \cdot o(x^3), \quad x \to 0. \end{aligned}$$

Všimněme si, že

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}A_2x^4 = o(x^3),\ x \to 0 \quad \text{(z definice)}, \\ &-\frac{1}{2}A_3x^5 = o(x^3),\ x \to 0 \quad \text{(z definice)}, \\ &-\frac{1}{2}x^2o(x^3) = o(x^3),\ x \to 0 \quad \text{(Věta 6.2.6(v))}, \\ &\big(A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + o(x^3)\big) \cdot o(x^3) = o(x^3),\ x \to 0 \quad \text{(Věta 6.2.6(e))}. \end{aligned}$$

Odtud plyne podle Věty 6.2.6(a)

$$A_0 + (A_1 - 1)x + \big(A_2 - \frac{1}{2}A_0\big)x^2 + \big(A_3 - \tfrac{1}{2}A_1 + \tfrac{1}{6}\big)x^3 = o(x^3), \quad x \to 0.$$

Závěr výpočtu již nyní proběhne stejně jako v předchozí variantě.

Při zvládnutí této metody lze k výsledku často dospět rychleji než postupným derivováním dané funkce, neboť s odhady chyb lze pracovat velmi efektivně.

6.3. Taylorovy a Maclaurinovy řady elementárních funkcí

Ve Větě 6.1.11 jsme viděli, že s rostoucím řádem Taylorova polynomu dostáváme přesnější aproximaci dané funkce f. Bylo by tedy možné očekávat, že bychom danou funkci mohli jistým způsobem vyjádřit pomocí limity Taylorových polynomů, tedy ve tvaru nekonečné řady. Tato úvaha motivuje následující definici.

6.3.1. Definice. Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a funkce f má v bodě a derivace všech řádů. Potom řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme **Taylorovou řadou funkce f o středu** a. Ve speciálním případě $a = 0$ mluvíme o **Maclaurinově řadě**[2].

6.3.2. Poznámka. V souvislosti s Taylorovou řadou funkce f nás zajímá zejména platnost rovnosti

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n, \tag{6.9}$$

pro nějaké $x \in \mathbb{R}$, tj. zda je nekonečná řada pro dané x konvergentní a eventuálně zda je její součet roven $f(x)$. Samotná konvergence Taylorovy řady pro každé $x \in \mathbb{R}$ však platnost vztahu (6.9) ještě nezaručuje. Příkladem je funkce

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

jejíž všechny derivace v bodě 0 jsou rovny 0 (viz Příklad 5.10.30), takže součet její Taylorovy řady je konstantní nulová funkce, ačkoliv $f(x) \neq 0$ pro $x \neq 0$.

V mnoha případech lze ale funkci vyjádřit jako součet její Taylorovy řady alespoň na jistém intervalu.

Nyní postupně spočteme Taylorovy polynomy a řady některých elementárních funkcí. Budeme se zároveň zabývat otázkou, pro která $x \in \mathbb{R}$ jsou tyto řady konvergentní a zda je jejich součtem původně zadaná funkce. Místo symbolu $T_k^{f,a}$ budeme psát pro přehlednost pouze T_k, neboť z kontextu bude vždy zřejmé, s jakou funkcí f pracujeme. Bod a bude shodou okolností roven vždy 0. Dále budeme značit $R_k = f - T_k$. Platnost rovnosti (6.9) v daném bodě $x \in \mathbb{R}$ je pak ekvivalentní výroku $\lim_{k\to\infty} R_k(x) = 0$. Připomínáme, že i zde budeme využívat úmluvu $f^{(0)} = f$.

[2]Colin Maclaurin (1698 –1746)

6.3.3 (**exponenciální funkce**). Pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí $\exp^{(l)} x = \exp x$. Je tedy $\exp^{(l)} 0 = 1$ pro každé $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Taylorův polynom T_k má pak tvar

$$T_k(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k.$$

Taylorova řada se středem v bodě 0 má potom tvar $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$ a pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$$

podle definice exponenciální funkce (5.14).

6.3.4 (**funkce sinus**). Pro derivace funkce sinus platí podle Příkladu 5.1.35

$$\sin' x = \cos x, \quad \sin'' x = -\sin x, \quad \sin^{(3)} x = -\cos x, \quad \sin^{(4)} x = \sin x$$

a dále se funkce periodicky opakují, tj. $\sin^{(k+4)} x = \sin^{(k)} x$. Tedy

$$\sin 0 = 0, \quad \sin' 0 = 1, \quad \sin'' 0 = 0, \quad \sin^{(3)} 0 = -1, \quad \sin^{(4)} 0 = 0, \ldots$$

Taylorovy polynomy v bodě 0 mají tudíž tvar $T_0(x) = 0$, $T_1(x) = T_2(x) = x$, $T_3(x) = T_4(x) = x - \frac{1}{3!}x^3$. Obecně pak máme pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$T_{2k-1}(x) = T_{2k}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1}.$$

Pro funkci sinus je Taylorův polynom řádu $2k$ v bodě 0 polynomem stupně $2k-1$. Podle (5.17) pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí rovnost

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

6.3.5 (**funkce kosinus**). Podobně jako v předchozím případě dostaneme pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$T_{2k}(x) = T_{2k+1}(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^k\frac{1}{(2k)!}x^{2k}.$$

Z (5.18) pak plyne pro každé $x \in \mathbb{R}$ vztah

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}.$$

6.3.6 (**funkce $x \mapsto \log(1+x)$**). Funkce $f(x) = \log(1+x)$ má na svém definičním oboru $(-1, \infty)$ derivace všech řádů. Snadno lze matematickou indukcí dokázat, že pro každé $l \in \mathbb{N}$ a $x \in (-1, \infty)$ platí

$$f^{(l)}(x) = (-1)^{l-1}\frac{(l-1)!}{(1+x)^l}.$$

Odtud dostáváme

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0!, \quad f''(0) = -1!, \quad \ldots, \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!,$$

a tudíž pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí

$$T_k(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{k}x^k.$$

Zvolme $x \in (0,1]$. Použijeme Lagrangeův tvar zbytku (Věta 6.1.17). Podle této věty pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje číslo $\xi_n \in (0,x)$ takové, že

$$\log(1+x) - \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{x^j}{j} = \frac{1}{(n+1)!}(-1)^n\frac{n!}{(1+\xi_n)^{n+1}}x^{n+1}.$$

Odhadneme

$$\left|\log(1+x) - \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{x^j}{j}\right| \le \frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{1+\xi_n}\right)^{n+1} \le \frac{1}{n+1}.$$

Odtud plyne

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n. \tag{6.10}$$

Uvažujme nyní $x \in (-1,0)$. Pro tyto hodnoty proměnné x využijeme Cauchyův tvar zbytku (Věta 6.1.19). Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme podle této věty číslo $\xi_n \in (x,0)$ takové, že

$$\begin{aligned}\log(1+x) - \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{x^j}{j} &= \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi_n)x(x-\xi_n)^n\\ &= \frac{1}{n!}(-1)^n\frac{n!}{(1+\xi_n)^{n+1}}\cdot x\cdot(x-\xi_n)^n.\end{aligned}$$

Zřejmě platí nerovnost

$$1 - \frac{1+x}{1+\xi_n} \le -x,$$

a tedy můžeme odhadnout

$$\begin{aligned}\left|\log(1+x) - \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{x^j}{j}\right| &\le \frac{(\xi_n - x)^n}{(1+\xi_n)^{n+1}}|x| = \left(\frac{\xi_n - x}{1+\xi_n}\right)^n\frac{|x|}{1+\xi_n}\\ &= \left(1 - \frac{1+x}{1+\xi_n}\right)^n\frac{|x|}{1+\xi_n} \le (-x)^n\frac{|x|}{1+x}\\ &= \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}.\end{aligned}$$

Protože dále platí $\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} = 0$, dostáváme

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n.$$

Pro každé $x \in (-1, 1]$ tedy platí

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n. \tag{6.11}$$

6.3.7. Ze vztahu (6.11) dostaneme dosazením $x = 1$ zajímavou rovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \log 2.$$

Pro $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1]$ řada v (6.11) diverguje, a pro takové x vztah (6.11) neplatí.

6.3.8. Příklad. Napište Maclaurinovu řadu pro funkci $x \mapsto \log\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ na intervalu $(-1, 1)$.

Řešení. Z 6.3.6 plyne, že pro každé $x \in (-1, 1)$ platí

$$\begin{aligned} \log\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) &= \frac{1}{2}\big(\log(1+x) - \log(1-x)\big) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (-x)^n\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{2k-1}. \end{aligned}$$

♣

6.3.9 (funkce $x \mapsto (1+x)^\alpha$). Poslední funkcí, pro kterou Taylorův polynom v bodě 0 odvodíme z definice, bude funkce $f(x) = (1+x)^\alpha$, $x \in (-1, \infty)$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$. Na svém definičním oboru má funkce f derivace všech řádů. Pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \quad f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \quad \dots$$
$$\dots, \quad f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k},$$

a tedy

$$f'(0) = \alpha, \quad f''(0) = \alpha(\alpha-1), \quad \dots, \quad f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1).$$

Taylorův polynom k-tého řádu pro funkci f v bodě 0 má proto tvar

$$T_k(x) = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Definujme pro $\alpha \in \mathbb{R}$ a $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ **zobecněné kombinační číslo** $\binom{\alpha}{j}$ předpisem

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!}.$$

Pro $\alpha \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ a $j \leq \alpha$ tento předpis dává obvyklé kombinační číslo. Nyní můžeme $T_k(x)$ přepsat ve tvaru

$$T_k(x) = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} x + \cdots + \binom{\alpha}{k} x^k. \tag{6.12}$$

Ukážeme, že pro každé $x \in (-1, 1)$ platí

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n. \tag{6.13}$$

Pro $x = 0$ je tvrzení zřejmé. Zvolme tedy $x \in (-1, 1)$, $x \neq 0$, pevně. Podle Cauchyova tvaru zbytku (Věta 6.1.19) nalezneme pro každé $n \in \mathbb{N}$ číslo ξ_n ležící mezi 0 a x takové, že

$$(1+x)^\alpha - \sum_{j=0}^{n} \binom{\alpha}{j} x^j = \frac{1}{n!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\xi_n)^{\alpha-n-1}(x-\xi_n)^n x.$$

Funkce $z \mapsto z^{\alpha-1}$ je na intervalu $(0, \infty)$ monotónní, a tedy

$$(1+\xi_n)^{\alpha-1} \leq \max\{1, (1+x)^{\alpha-1}\}.$$

Můžeme odhadnout

$$\left|(1+x)^\alpha - \sum_{j=0}^{n} \binom{\alpha}{j} x^j\right| \leq \frac{1}{n!}|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)| \cdot \max\{1, (1+x)^{\alpha-1}\} \cdot \left|\frac{x-\xi_n}{1+\xi_n}\right|^n \cdot |x|, \tag{6.14}$$

Vzhledem k tomu, že platí

$$\left|\frac{x-\xi_n}{1+\xi_n}\right| \leq |x|,$$

můžeme dále odhadnout

$$\left|(1+x)^\alpha - \sum_{j=0}^{n} \binom{\alpha}{j} x^j\right| \leq \frac{1}{n!}|\alpha\cdots(\alpha-n)|C \cdot |x|^{n+1}, \tag{6.15}$$

kde $C = \max\{1, (1+x)^{\alpha-1}\}$. Označme $a_n = \frac{1}{n!}|\alpha\cdots(\alpha-n)|C \cdot |x|^{n+1}$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\alpha-n-1}{n+1}\right| \cdot |x| = |x| < 1.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je tedy konvergentní podle d'Alembertova kritéria (Věta 3.2.11), a proto podle Věty ?? nutně platí $\lim a_n = 0$. Odtud a z (6.15) vyplývá platnost (6.13).

Nyní uvedeme několik příkladů na výpočet a použití Taylorova polynomu. Na následujícím příkladu ilustrujeme způsob, jak vypočítat Taylorův polynom bez derivování.

6.3.10. Příklad. Pro funkci $f(x) = \frac{1}{1+x}$ nalezněte Taylorovy polynomy všech řádů v bodě 0.

Řešení. Víme (viz Příklad **??**), že pro každé $x \in (-1,1)$ a $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^k x^k + \sum_{n=k+1}^{\infty}(-1)^n x^n =$$
$$= 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^k x^k + (-1)^{k+1}\frac{x^{k+1}}{1+x}.$$

Dále

$$(-1)^{k+1}\frac{x^{k+1}}{1+x} = o(x^k),\ x \to 0,$$

a tedy $T_k^{f,0}(x) = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^k x^k$ podle Věty 6.1.13. Tento výsledek, který jsme odvodili bez počítání derivací, je ve shodě se vztahem (6.12) pro případ $\alpha = -1$. ♣

6.3.11. Příklad. Nechť $f(x) = \sin(\sin x)$. Spočtěte $T_5^{f,0}$.

Řešení. Podle Věty 6.1.13 platí

$$\sin y = y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{120}y^5 + o(y^5),\ y \to 0.$$

Podle Věty 6.2.7, kde $g(y) = y^5$ a $\varphi(x) = \sin x$, dostáváme

$$\sin(\sin x) = \sin x - \frac{1}{6}\sin^3 x + \frac{1}{120}\sin^5 x + o(\sin^5 x),\ x \to 0. \tag{6.16}$$

Protože $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, je tedy podle Věty 6.2.6(d)

$$\sin(\sin x) = \sin x - \frac{1}{6}\sin^3 x + \frac{1}{120}\sin^5 x + o(x^5),\ x \to 0. \tag{6.17}$$

Spočítejme rozvoje pro funkce $\sin^3 x$ a $\sin^5 x$. S využitím toho, že $-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3) = o(x^2)$, $x \to 0$, dostaneme

$$\begin{aligned}
\sin^3 x &= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^3 = \\
&= x^3 + 3x^2\left(-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) + 3x\left(-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^2 + \\
&\quad + \left(-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^3 = \\
&= x^3 + \left(-\frac{1}{2}x^5 + 3x^2 o(x^3)\right) + 3x\left(o(x^2)\right)^2 + \left(o(x^2)\right)^3 = \\
&= x^3 - \frac{1}{2}x^5 + o(x^5), \quad x \to 0.
\end{aligned}$$

Při odvození posledních dvou rovností jsme využili Větu 6.2.6(a)-(c),(f). Podobně platí

$$\sin^5 x = \big(x + o(x)\big)^5 = x^5 + \sum_{j=1}^{5} \tbinom{5}{j} x^{5-j} \big(o(x)\big)^j = x^5 + o(x^5),\ x \to 0.$$

Všimněme si, že při umocňování Taylorova rozvoje je vhodné stanovit jeho řád pokud možno co nejnižší, abychom si výpočet zbytečně nekomplikovali, ale tak aby výsledný odhad chyby byl požadovaného řádu. Pro rozvoj $\sin^3 x$ s chybou $o(x^5)$ stačilo pracovat s Taylorovým polynomem funkce sinus třetího řádu, a pro rozvoj $\sin^5 x$ s chybou $o(x^5)$ jsme vystačili dokonce s Taylorovým polynomem funkce sinus prvního řádu.

Po dosazení do (6.17) a (6.16) dostaneme

$$\sin(\sin x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + o(x^5),\ x \to 0,$$

takže $T_5^{f,0}(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5$. ♣

6.3.12. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin(\sin x) - \sin(2x)\sqrt[3]{1+x^2}}{x^5}.$$

Řešení. Podle předchozího příkladu platí

$$\sin(\sin x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + o(x^5), \quad x \to 0,$$

a dále podle Věty 6.2.7, Věty 6.2.6(d), (6.17) a 6.12 platí

$$\sin(2x) = (2x) - \frac{1}{6}(2x)^3 + \frac{1}{120}(2x)^5 + o(x^5) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + o(x^5), \quad x \to 0,$$

$$\sqrt[3]{1+x^2} = 1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}(x^2)^2 + o(x^4), \quad x \to 0.$$

Nyní vyjádříme

$$\sin(2x)\sqrt[3]{1+x^2} = \left(2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 + o(x^4)\right) =$$
$$= 2x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^5 + o(x^5), \quad x \to 0.$$

Nakonec spočteme zadanou limitu:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin(\sin x) - \sin(2x)\sqrt[3]{1+x^2}}{x^5} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\big(2x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5)\big) - \big(2x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^5 + o(x^5)\big)}{x^5} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{5}x^5 + o(x^5)}{x^5} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{5} + \frac{o(x^5)}{x^5}\right) = \frac{3}{5}.$$

♣

6.3.13. Příklad. Nalezněte $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takové, aby pro Taylorův polynom T_k funkce exp platil odhad $\left|\exp(x) - T_k(x)\right| < 0{,}001$ pro každé $x \in [0, 1]$.

Řešení. Nechť $x \in [0, 1]$ a $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Podle Lagrangeova tvaru zbytku (Věta 6.1.17) existuje $\xi_k \in (0, 1)$ takové, že

$$\left|\exp x - T_k(x)\right| = e^{\xi_k} \cdot \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \leq \frac{e}{(k+1)!} < \frac{3}{(k+1)!}. \tag{6.18}$$

Pro $k = 6$ platí $\frac{3}{(k+1)!} = \frac{1}{1680} < 0{,}001$. Zadané přesnosti tedy podle odhadu (6.18) dosáhneme na celém intervalu $[0, 1]$ pro $k = 6$, tj. použijeme-li k přibližnému výpočtu hodnoty $\exp x$ polynom

$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6.$$

♣

6.3.14. Poznámka. Teorie aproximací, ve které funkce aproximujeme i jinými objekty než polynomy.

6.4. Teoretické příklady k Taylorovu polynomu

6.4.1. Příklad. Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ má derivace všech řádů v každém bodě intervalu $[a, b]$, přičemž existuje číslo M takové, že $|f^{(n)}(x)| \leq M$ pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a každé $x \in [a, b]$. Pak pro každé x a x_0 v $[a, b]$ platí

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Řešení. Zvolme pevně $x, x_0 \in [a, b]$. Použijeme pro odhad chyby Lagrangeův tvar zbytku (Věta 6.1.17). Z této věty plyne, že existuje ξ ležící mezi x_0 a x splňující

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n,$$

kde

$$r_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Odtud ihned vyplývá odhad

$$|r_n| \leq M\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Proto $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ a platí

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

♣

Následující příklad obsahuje pomocné technické tvrzení, které využijeme v dalším výkladu.

6.4.2. Příklad. Nechť φ je omezená funkce na $\mathbb{R}$ taková, že φ' je omezená na $\mathbb{R}$. Nechť $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dokažte, že potom je funkce

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^k \varphi(n^2 x), \quad x \in \mathbb{R},$$

diferencovatelná a platí

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{k+2} \varphi'(n^2 x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Nechť $C \in \mathbb{R}$ je takové, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$|\varphi(x)| \le C \quad \text{a} \quad |\varphi'(x)| \le C. \tag{6.19}$$

Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^k C$ konverguje, plyne ze srovnávacího kritéria (Věta 3.2.2), že řada $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^k \varphi(n^2 x)$ konverguje absolutně. Podle Věty 3.4.3 tedy tato řada konverguje, takže funkce g je dobře definovaná na $\mathbb{R}$.

Vezměme pevné $x \in \mathbb{R}$ a zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{k+2}$ konverguje, a tedy k tomuto ε lze nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{-n} n^{k+2} < \varepsilon. \tag{6.20}$$

Z Lagrangeovy věty o střední hodnotě (Věta 5.2.4) aplikované na funkci $y \mapsto \varphi(n^2 y)$ vyplývá, že pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ existuje $\xi \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\varphi(n^2 a) - \varphi(n^2 b) = n^2 \varphi'(n^2 \xi)(a-b).$$

Odtud plyne, že

$$|\varphi(n^2 a) - \varphi(n^2 b)| \le C n^2 |a-b|. \tag{6.21}$$

Nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $h \in P(0,\delta)$ a každé $n \in \mathbb{N}$, $n < n_0$, platí

$$\left| \frac{1}{h}(\varphi(n^2(x+h)) - \varphi(n^2 x)) - n^2 \varphi'(n^2 x) \right| < \frac{\varepsilon}{n^k}. \tag{6.22}$$

Pak pro $h \in P(0,\delta)$ máme

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{g(x+h)-g(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{k+2} \varphi'(n^2x)\Big| \\
&= \left|\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^k \left(\frac{1}{h}(\varphi(n^2(x+h)) - \varphi(n^2x)) - n^2\varphi'(n^2x)\right)\right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{n_0-1} 2^{-n} n^k \left|\frac{1}{h}(\varphi(n^2(x+h)) - \varphi(n^2x)) - n^2\varphi'(n^2x)\right| \\
&\quad + \sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{-n} n^k \left(\left|\frac{1}{h}(\varphi(n^2(x+h)) - \varphi(n^2x))\right| + \left|n^2\varphi'(n^2x)\right|\right).
\end{aligned}$$

Odhadneme-li první sumu pomocí (6.22) a druhou pomocí (6.19), (6.20) a (6.21), dostaneme

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{g(x+h)-g(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{k+2} \varphi'(n^2x)\Big| \\
&< \sum_{n=1}^{n_0-1} 2^{-n} n^k \frac{\varepsilon}{n^k} + \sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{-n} n^k 2Cn^2 \\
&\leq \sum_{n=1}^{n_0-1} 2^{-n}\varepsilon + 2C \sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{-n} n^{k+2} \\
&\leq (1+2C)\varepsilon.
\end{aligned}$$

♣

6.4.3. Příklad. Položme $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\cos(n^2x)$, $x \in \mathbb{R}$. Ukažte, že f má derivace všech řádů, avšak její Taylorova řada se středem v bodě 0 diverguje v každém bodě $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Řešení. Funkce kosinus i všechny její derivace jsou omezené funkce. Podle Příkladu 6.4.2 je funkce f dobře definovaná a pro každé $k \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{2k} \cos^{(k)}(n^2x). \tag{6.23}$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ a $y \in \mathbb{R}$ máme $\cos^{(4k)}(y) = \cos y$, a tedy

$$f^{(4k)}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{8k}.$$

Nyní dokážeme, že Taylorova řada funkce f nekonverguje v žádném bodě různém od nuly. Vezměme tedy $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Protože $(4k)! \leq (4k)^{4k}$, pro každé $k, m \in \mathbb{N}$

platí

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{(4k)!} f^{(4k)}(0)x^{4k}\right| &= \frac{1}{(4k)!} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{8k} |x|^{4k} \\ &\geq \frac{1}{(4k)!} 2^{-m} m^{8k} |x|^{4k} \\ &\geq \frac{1}{(4k)^{4k}} 2^{-m} m^{8k} |x|^{4k}. \end{aligned} \tag{6.24}$$

Vezměme libovolné $k \in \mathbb{N}$ splňující $k^2|x|^2 > 2$ a položme $m = 2k$. Potom z (6.24) dostaneme

$$\left|\frac{1}{(4k)!} f^{(4k)}(0)x^{4k}\right| \geq \frac{1}{(4k)^{4k}} 2^{-m} m^{8k} |x|^{4k} = \left(\frac{k^2|x|^2}{2}\right)^{2k} > 1.$$

Taylorova řada funkce f v bodě x se středem v bodě 0 tedy nesplňuje nutnou podmínku konvergence řady, a tudíž podle Věty **??** diverguje. ♣

6.4.4. Příklad. [3][4] Nechť $\sum a_n$ má kladné členy. Dokažte následující tvrzení.

(a) Pokud existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ a $q \in (1, \infty)$ taková, že

$$n \log n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n}\right) \geq q, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq n_0,$$

pak řada $\sum a_n$ konverguje.

(b) Pokud existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$n \log n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n}\right) \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq n_0,$$

pak řada $\sum a_n$ diverguje.

Řešení. (a) Zvolme $p \in (1, q)$ a položme $b_n = \frac{1}{n(\log n)^p}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Pak

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{(n+1)\log^p(n+1)}{n \log^p n} \\ &= 1 + \frac{(n+1)\log^p(n+1) - n\log^p n}{n \log^p n}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \end{aligned}$$

Pro každé $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ použijeme Větu 6.1.17 pro funkci $f(x) = x \log^p x$, $x \in (0, \infty)$, a interval $[n, n+1]$ a nalezneme bod $c_n \in (n, n+1)$ splňující

$$f(n+1) = f(n) + f'(n) + \frac{1}{2} f''(c_n).$$

[3] de Morgan
[4] Bertrand

Obdržíme tedy

$$\begin{aligned}&(n+1)\log^p(n+1)-n\log^p n\\&=\log^p n+p\log^{p-1}n+\frac{p\log^{p-1}c_n+p(p-1)\log^{p-2}c_n}{2c_n}.\end{aligned}$$

Označíme-li

$$\beta_n=\frac{p\log^{p-1}c_n+p(p-1)\log^{p-2}c_n}{2c_n},\quad n\in\mathbb{N}\setminus\{1\},$$

platí podle Příkladu 5.10.17 a Věty 4.2.14

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n=0.$$

Existuje tedy $n_1\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ takové, že

$$\beta_n<(q-p)\log^{p-1}n,\quad n\in\mathbb{N},n\geq n_1.$$

Pro $n_2=\max\{n_0,n_1\}$ pak platí

$$\begin{aligned}\frac{b_n}{b_{n+1}}&=1+\frac{\log^p n+p\log^{p-1}n+\beta_n}{n\log^p n}<1+\frac{1}{n}+\frac{q\log^{p-1}n}{n\log^p n}\\&=1+\frac{1}{n}+\frac{q}{n\log n},\quad n\in\mathbb{N},n\geq n_2.\end{aligned}$$

Pro $n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_2$, pak dostáváme

$$\frac{b_n}{b_{n+1}}<1+\frac{1}{n}+\frac{q}{n\log n}\leq\frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Díky Příkladu 3.8.2 dostáváme konvergenci řady $\sum a_n$, neboť řada $\sum b_n$ konverguje podle Příkladu 5.10.39.

(b) Položme $b_n=\frac{1}{n\log n}$, $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$. Podobně jako výše nalezneme pro každé $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ bod $c_n\in(n,n+1)$ splňující

$$\frac{b_n}{b_{n+1}}=1+\frac{(n+1)\log(n+1)-n\log n}{n\log n}=1+\frac{1}{n\log n}\left(1+\log n+\frac{1}{2c_n}\right).$$

Dostaneme tedy pro $n\in N\setminus\{1\}$, $n\geq n_0$, odhad

$$\frac{b_n}{b_{n+1}}=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\log n}+\frac{1}{2c_n n\log n}>\frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Tedy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}>\frac{b_{n+1}}{b_n},\quad n\in\mathbb{N}\setminus\{1\},n\geq n_0,$$

Vzhledem k tomu, že řada $\sum\frac{1}{n\log n}$ diverguje (viz Příklad 5.10.39), dostáváme díky Příkladu 3.8.2 divergenci řady $\sum a_n$. ♣

6.4.5. Příklad. [5] Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy a $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, \infty)$ a $\{b_n\}$ omezená posloupnost reálných čísel. Předpokládejme, že

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a}{n} + \frac{b_n}{n^{1+\varepsilon}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dokažte, že pokud $a > 1$, řada $\sum a_n$ konverguje, pokud $a \leq 1$, pak řada $\sum a_n$ konverguje.

Řešení. Pokud $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, lze použít Příklad 3.8.1. Díky předpokladu máme

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} \left(a + \frac{b_n}{n^{\varepsilon}} \right) = a,$$

a tedy řada $\sum a_n$ konverguje pro $a > 1$ a diverguje pro $a < 1$.

Pokud $a = 1$, platí díky Příkladu 5.10.17

$$\lim_{n\to\infty} n \log n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n \log n}{n^{\varepsilon}} = 0.$$

Tedy existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$n \log n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n} \right) \leq 1.$$

Z Příkladu 6.4.4 nyní plyne divergence dané řady. ♣

6.5. Početní příklady k Taylorovu polynomu

6.5.1. Příklad. S přesností 10^{-4} vypočítejte $\cos(0{,}1)$.

Řešení. Položíme $f(x) = \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Potom zřejmě pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí $|f^{(k)}(x)| \leq 1$. Podle Věty 6.1.18 tedy pro $a = 0$, $x = 0{,}1$ a $M = 1$ tedy platí

$$|f(0{,}1) - T_n^{f,0}(0{,}1)| \leq \frac{(0{,}1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Pro $n = 3$ tedy platí

$$|f(0{,}1) - T_3^{f,0}(0{,}1)| < 10^{-4}.$$

Přibližnou hodnotu $\cos(0{,}1)$ s požadovanou přesností obdržíme jako hodnotu Taylorova polynomu funkce kosinus řádu 3, tedy

$$T_3^{f,0}(0{,}1) = 1 - \frac{(0{,}1)^2}{2} = 0{,}995.$$

♣

Jak jsme již uvedli výše, Taylorův polynom lze v určitých případech použít k výpočtu limit funkcí či posloupností nebo k vyšetřování konvergence číselných řad. Tyto postupy nyní ilustrujeme na několika příkladech.

[5] Gauss

6.5.2. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4}.$$

Řešení. Podle 6.3.5 platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4) - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4}$$
$$= \lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{24} + \frac{o(x^4)}{x^4}\Big) = \frac{1}{24}.$$

♣

6.5.3. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3} - 1}{\sin x - x}.$$

Řešení. Podle 6.3.3 a 6.3.4 dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3} - 1}{\sin x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x^3 + o(x^3) - 1}{x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) - x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + o(x^3)}{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = -6.$$

♣

6.5.4. Příklad. Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} n^4 \left(\cos(\frac{1}{n}) - e^{-\frac{1}{2n^2}}\right).$$

Řešení. Z Heineovy věty (Věta 4.2.14) vyplývá, že

$$\lim_{n\to\infty} n^4 \left(\cos(\frac{1}{n}) - e^{-\frac{1}{2n^2}}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4},$$

pokud limita vpravo existuje. Stačí tedy spočítat tuto limitu. Z 6.3.5 a 6.3.3 dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) - \Big(1 + \frac{-x^2}{2} + \frac{1}{3!}(-\frac{x^2}{2})^2 + o(x^4)\Big)}{x^4}$$
$$= \frac{1}{24} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{12}.$$

♣

6.5.5. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{cotg}^2 x\right).$$

Řešení. Výraz, jehož limitu počítáme, přepíšeme do tvaru

$$\frac{1}{x^2} - \operatorname{cotg}^2 x = \frac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^4}.$$

Z Příkladu 5.10.2 a věty o aritmetice limit plyne, že $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} = 1$. Pro druhý zlomek využijeme Taylorových rozvojů příslušných funkcí, tedy 6.3.4 a 6.3.5. Dostaneme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3))^2 - x^2(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))^2}{x^4} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) - x^2(1 - x^2 + o(x^2))}{x^4} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Z věty o aritmetice limit tedy vyplývá, že

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{cotg}^2 x\right) = \frac{2}{3}.$$

♣

6.5.6. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2} - \frac{x^2}{6}}{\sin x - x}.$$

Řešení. Podle 6.3.4 platí

$$\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad x \to 0.$$

Dál máme z 6.3.9

$$\begin{aligned}(1+y)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{16}y^3 + o(y^3), \quad y \to 0, \\ (1+y)^{\frac{1}{3}} &= 1 + \frac{1}{3}y - \frac{1}{9}y^2 + \frac{5}{81}y^3 + o(y^3), \quad y \to 0.\end{aligned}$$

V následujícím výpočtu bude symbol $o(x^3)$ uvažován pro $x \to 0$. Podle Věty 6.2.6 platí

$$\begin{aligned}(1 + (x^3 - 2x))^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}(x^3 - 2x) - \frac{1}{8}(x^3 - 2x)^2 + \frac{1}{16}(x^3 - 2x)^3 + o(x^3) \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x^3 - 2x) - \frac{1}{8}(4x^2) + \frac{1}{16}(-8x^3) + o(x^3)\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}(1 + (x^2 - 3x))^{\frac{1}{3}} &= 1 + \frac{1}{3}(x^2 - 3x) - \frac{1}{9}(x^2 - 3x)^2 + \frac{5}{81}(x^2 - 3x)^3 + o(x^3) \\ &= 1 + \frac{1}{3}(x^2 - 3x) - \frac{1}{9}(9x^2 - 6x^3) + \frac{5}{81}(-27x^3) + o(x^3).\end{aligned}$$

Dostáváme tedy

$$\begin{aligned}\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2}-\frac{x^2}{6} &= x\left(-2\frac{1}{2}+3\frac{1}{3}\right)+x^2\left(-\frac{4}{8}-\frac{1}{3}+\frac{9}{9}-\frac{1}{6}\right)\\ &\quad+x^3\left(\frac{1}{2}-\frac{8}{16}-\frac{6}{9}+27\frac{5}{81}\right)\\ &= x^3+o(x^3).\end{aligned}$$

Proto

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2}-\frac{x^2}{6}}{\sin x-x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3+o(x^3)}{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}\right)=-6.$$

♣

6.5.7. Příklad. Nechť

$$f(x)=\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}},\quad x\in(-1,0)\cup(0,\infty).$$

Najděte polynom P třetího stupně, který splňuje

$$f(x)-P(x)=o(x^3),\quad x\to 0.$$

Řešení. V následujícím výpočtu budeme uvažovat symbol o pro $x\to 0$. Platí

$$f(x)=e^{\frac{\log(1+x)}{x}-1}=e^{\frac{\log(1+x)-x}{x}},\quad x\in\mathcal{D}(f).$$

Označme $g(x)=\frac{\log(1+x)-x}{x}$, $x\in\mathcal{D}(f)$. Protože podle 6.3.6 platí

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4),$$

máme

$$\log(1+x)-x=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4),$$

a tedy

$$g(x)=-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3).$$

Protože

$$g(x)=x\left(-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{4}+o(x^2)\right),$$

platí $\lim_{x\to 0}g(x)=0$ a existuje okolí $P(0,\delta)$, na kterém funkce g nenabývá hodnoty 0.

Jelikož dle 6.3.3 platí

$$e^y=1+y+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{6}y^3+o(y^3),$$

dostáváme díky Větě 4.2.20

$$\begin{aligned}
e^{g(x)} &= 1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{6}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) \\
&= 1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4} - 2\frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{6}\left(-\frac{x^3}{8}\right) + o(x^3) \\
&= 1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + o(x^3).
\end{aligned}$$

Požadovaný polynom P je tedy tvaru

$$P(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

♣

6.5.8. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1-x)^{-\frac{1}{x}} + ex}{ex^3}.$$

Řešení. Symbol o opět uvažujeme pro $x \to 0$. Díky Příkladu 6.5.7 máme

$$\begin{aligned}
(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1-x)^{-\frac{1}{x}} + ex &= e\left(\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{e}(1-x)^{-\frac{1}{x}} + x\right) \\
&= e\left(\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3\right) - \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 + \frac{7}{16}x^3\right) + x\right) \\
&= e\left(-\frac{7}{8}x^3 + o(x^3)\right).
\end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1-x)^{-\frac{1}{x}} + ex}{ex^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{7}{8}x^3 + o(x^3)}{x^3} = -\frac{7}{8}.$$

♣

6.5.9. Příklad. Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\log\Bigl(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\Bigr) - \sin\Bigl(\frac{1}{n}\Bigr) - \frac{1}{2n^3}\right) \frac{n^\alpha}{\log^2(n)}$$

v závislosti na parametru α.

Řešení. Podle Příkladu 6.3.8 a dále podle 6.3.6 a 6.3.4 jest pro každé $x \in (-1, 1)$

$$\begin{aligned}
\log\Bigl(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\Bigr) - \sin(x) - \frac{x^3}{2} &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} - \frac{x^3}{2} + o(x^5) \\
&= x^5\Bigl(\frac{1}{5} - \frac{1}{5!}\Bigr) + o(x^5) = \frac{23}{120}x^5 + o(x^5), \quad x \to 0.
\end{aligned}$$

Pro speciální volbu $x = \frac{1}{n}$, kde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, dostáváme

$$\log\Big(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\Big) - \sin(\frac{1}{n}) - \frac{1}{2n^3} = \frac{23}{120}n^{-5} + o(n^{-5}), \quad n \to \infty.$$

Označme pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

$$a_n = \left(\log\Big(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\Big) - \sin(\frac{1}{n}) - \frac{1}{2n^3}\right) \frac{n^\alpha}{\log^2(n)}$$

a

$$b_n = \frac{n^{\alpha-5}}{\log^2 n}.$$

Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} n^5 \left(\frac{23}{120}n^{-5} + o(n^{-5})\right) = \frac{23}{120}. \tag{6.25}$$

Srovnávací posloupnost $\{b_n\}$ volíme tak, aby $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ vyšla konečná a nenulová. Jelikož jsou členy řady $\sum b_n$ kladné, z (6.25) plyne, že řada $\sum a_n$ má od jistého indexu $n_0 \in \mathbb{N}$ kladné členy. Dále z limitního srovnávacího kritéria (Věta 3.2.5(a)) plyne, že řada $\sum_{n=2}^\infty a_n$ je konvergentní právě tehdy, když je konvergentní řada $\sum_{n=2}^\infty b_n$. Stačí tedy vyšetřit konvergenci řady $\sum_{n=2}^\infty b_n$ v závislosti na parametru α.

To jsme však již provedli v Příkladu 5.10.39, podle kterého řada $\sum b_n$ konverguje právě tehdy, když $\alpha \in (-\infty, 4]$. Zadaná řada $\sum a_n$ tedy konverguje právě tehdy, když $\alpha \in (-\infty, 4]$. ♣

6.5.10. Příklad. Pro $p \in (0, \infty)$ vyšetřete konvergenci řady $\sum a_n^p$, kde

$$a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Řešení. Použijeme Raabeovo kritérium 3.8.1. Počítejme tedy pro $n \in \mathbb{N}$ výraz

$$n\left(\frac{a_n^p}{a_{n+1}^p} - 1\right) = n\left(\left(\frac{n+1}{n+\frac{1}{2}}\right)^p - 1\right) = \frac{n\left((n+1)^p - (n+\frac{1}{2})^p\right)}{(n+\frac{1}{2})^p}.$$

Pro funkci $f(x) = x^p$, $x \in (0, \infty)$ a každý interval $[n + \frac{1}{2}, n+1]$ použijeme Větu 6.1.17 a nalezneme tak $c_n \in (n + \frac{1}{2}, n+1)$ splňující

$$(n+1)^p - (n+\frac{1}{2})^p = \frac{p}{2}(n+\frac{1}{2})^{p-1} + \frac{1}{2}p(p-1)c_n^{p-2}\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Vzhledem k tomu, že

$$\frac{(n+\frac{1}{2})^p}{(n+1)^2(n+\frac{1}{2})^p} \leq \frac{c_n^{p-2}}{(n+\frac{1}{2})^p} \leq \frac{(n+1)^p}{(n+\frac{1}{2})^{p+2}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

platí díky Větě 2.2.44 rovnost $\lim n \frac{c_n^{p-2}}{(n+\frac{1}{2})^p} = 0$. Proto máme

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n^p}{a_{n+1}^p} - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{p}{2}n(n+\frac{1}{2})^{p-1}}{(n+\frac{1}{2})^p} + \frac{p(p-1)}{8}\frac{nc_n^{p-2}}{(n+\frac{1}{2})^p}\right) = \frac{p}{2}.$$

Řada $\sum a_n^p$ tedy konverguje pro $p > 2$ a diverguje pro $p < 2$.

Je-li $p = 2$, platí

$$\frac{a_n^2}{a_{n+1}^2} = \left(1 + \frac{\frac{1}{2}}{(n+\frac{1}{2})^2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{4(n+\frac{1}{2})^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Položíme-li $b_n = -\frac{n^2+n}{4n^2+4n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, dostaneme omezenou posloupnost splňující

$$\frac{a_n^2}{a_{n+1}^2} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{b_n}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Podle Příkladu 6.4.5 tedy řada $\sum a_n^2$ diverguje. ♣

6.5.11. Příklad. Nechť $\alpha \in (0, \infty)$. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$, kde

$$a_n = \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right), \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Řešení. Podle Příkladu 6.3.6 platí

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \varphi(x), \quad x \in (-1, 1),$$

kde φ je funkce splňující $\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = 0$. Položme

$$b_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}, \quad c_n = \frac{1}{2n^{2\alpha}} + \varphi(b_n), \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Protože $b_n \in (-1, 1)$ pro $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, platí

$$\log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) = b_n + c_n, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Řada $\sum b_n$ konverguje pro každé $\alpha \in (0, \infty)$ podle Leibnizova kritéria (Věta 3.3.1). Dále díky Větě 4.2.14 platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{\frac{1}{n^{2\alpha}}} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\varphi(b_n)}{b_n^2}\right) = 1.$$

Tedy dle Věty 3.2.5 a řada $\sum c_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$. To ale nastane právě tehdy, když $\alpha > \frac{1}{2}$ (viz Věta 3.2.18).

Platí tedy $\sum a_n = \sum (b_n + c_n)$, přičež $\sum b_n$ vždy konverguje a $\sum c_n$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > \frac{1}{2}$. Řada $\sum a_n$ tedy konverguje právě tehdy, když $\alpha > \frac{1}{2}$. ♣

6.5.12. Příklad. Zjistěte pro která $C \in \mathbb{R}$ má funkce
$$f(x) = \cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} + Cx^4, \quad x \in \mathbb{R},$$
lokální maximum v bodě 0.

Řešení. Symbol o uvažujeme pro $x \to 0$. Díky 6.3.5 a 6.3.3 máme
$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6) \quad \text{a}\\ e^{-\frac{x^2}{2}} &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + o(x^6).\end{aligned}$$
Tedy
$$f(x) = x^4\left(\frac{12C-1}{12}\right) + x^6\left(\frac{14}{6!}\right) + o(x^6).$$
Označme $c = \frac{12C-1}{12}$. Je-li $C > \frac{1}{12}$, tj. $c > 0$, máme
$$f(x) = x^4\left(c + \frac{14}{6!}x^2 + o(x^2)\right).$$
Protože $\lim_{x\to 0}\left(c + \frac{14}{6!}x^2 + o(x^2)\right) = c$, existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že
$$\frac{f(x)}{x^4} > \frac{c}{2}, \quad x \in P(0,\delta).$$
Tedy $f(x) > 0$ pro $x \in P(0,\delta)$. Jelikož $f(0) = 0$, má v tomto případě funkce f v bodě 0 lokální minimum.

Obdobně odvodíme, že pro $C < \frac{1}{12}$ má f v 0 lokální maximum.

Je-li $C = \frac{1}{12}$, dostáváme
$$f(x) = \frac{14}{6!}x^6 + o(x^6) = x^6\left(\frac{14}{6!} + o(1)\right).$$
Zcela analogickou úvahou jako výše obdržíme, že f má v 0 lokální minimum. ♣

6.5.13. Příklad. Zjistěte, zdali je 0 inflexním bodem funkce
$$f(x) = \sin x + \sinh x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Během výpočtu budeme symbol o používat pro $x \to 0$. Pro funkci platí
$$f''(x) = (\cos x + \cosh x)' = -\sin x + \sinh x, \quad x \in \mathbb{R}.$$
Platí tedy $f''(0) = 0$. Jelikož $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, máme díky 6.3.3 a 6.3.4 vztahy
$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5),\\ \sinh x &= \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{n=0}^{5}\frac{x^n}{n!} + o(x^5)\right) - \left(\sum_{n=0}^{5}\frac{(-x)^n}{n!} + o(x^5)\right)\right)\\ &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5).\end{aligned}$$

Dostáváme tak
$$f''(x) = 2\frac{x^3}{3!} + o(x^5) = x^3(\frac{1}{3} + o(x^2)).$$
Z tohoto vztahu dostáváme $\lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{x^3} = \frac{1}{3}$, a tedy existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že $\frac{f''(x)}{x^3} > \frac{1}{6}$ pro $x \in P(0,\delta)$. Platí tedy, že $f''(x) < 0$ pro $x \in (-\delta, 0)$ a $f''(x) > 0$ pro $x \in (0,\delta)$. Podle Věty **??** má f v bodě 0 inflexní bod. ♣

KAPITOLA 7

Mocninné řady

Jak víme z kapitoly o Taylorově polynomu, je v některých případech možné vyjádřit danou funkci ve tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, kde $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Někdy je vhodnější pracovat s uvedeným rozvojem spíše než s původním tvarem funkce.

7.1. Základní vlastnosti

7.1.1. Definice. Mocninnou řadou o středu $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumíme symbol

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \tag{7.1}$$

kde $a_n \in \mathbb{R}$ pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

7.1.2. Pokud za x v (7.1) dosadíme reálné číslo, dostaneme číselnou řadu, přičemž symbolem $a_0(x - x_0)^0$ rozumíme a_0 (vizte Úmluvu 6.1.4). Mocninná řada tedy určuje funkci

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

jejímž definičním oborem je množina těch $x \in \mathbb{R}$, pro která příslušná číselná řada konverguje. Tato řada je konvergentní alespoň pro $x = x_0$. Funkce tohoto tvaru budou nyní předmětem našeho zájmu.

7.1.3. Věta. Uvažujme mocninnou řadu (7.1). Pak existuje právě jeden nezáporný prvek $\varrho \in \mathbb{R}^*$ takový, že

- pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| < \varrho$, je řada (7.1) absolutně konvergentní,
- pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| > \varrho$, je řada (7.1) divergentní.

Prvek ϱ splňuje

$$\varrho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{7.2}$$

kde výrazem $\frac{1}{0}$ rozumíme ∞ a výrazem $\frac{1}{\infty}$ rozumíme 0.

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $x \in \mathbb{R}$ položme $b_n = a_n(x - x_0)^n$. Označme dále $\gamma = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Předpokládejme nejprve, že $\gamma \in (0, \infty)$. Pak

$$\limsup \sqrt[n]{|b_n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}|x - x_0| = \gamma|x - x_0|.$$

Odtud vyplývá, že

$$\limsup \sqrt[n]{|b_n|} < 1$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x - x_0| < \varrho$ a

$$\limsup \sqrt[n]{|b_n|} > 1$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x - x_0| > \varrho$. Podle Cauchyova odmocninového kritéria (Věta 3.4.6(b) a (d)) je tudíž řada (7.1) absolutně konvergentní pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x - x_0| < \varrho$ a divergentní pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x - x_0| > \varrho$.

Je-li $\gamma = 0$, pak podle (7.2) platí $\varrho = \infty$ a obdobným výpočtem jako výše dostaneme

$$\limsup \sqrt[n]{|b_n|} = 0$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$. Daná mocninná řada je tedy absolutně konvergentní podle Cauchyova odmocninového kritéria (Věta 3.2.8(b)) pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Je-li $\gamma = \infty$, pak podle (7.2) platí $\varrho = 0$ a

$$\limsup \sqrt[n]{|b_n|} = \infty$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$. Daná mocninná řada je tedy divergentní podle Cauchyova odmocninového kritéria (Věta 3.2.8(d)) pro všechna $x \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$.

Ve všech třech případech jsme tedy ověřili, že číslo ϱ má požadované vlastnosti.

Dokážeme nyní jednoznačnost prvku ϱ. Předpokládejme, že prvek $\varrho' \in \mathbb{R}^*$ má také uvedené vlastnosti, a přitom $\varrho \neq \varrho'$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\varrho < \varrho'$. Potom by ale pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $\varrho < |x - x_0| < \varrho'$ musela řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ konvergovat a zároveň divergovat, což není možné. Tím je důkaz dokončen. ■

7.1.4. Definice. Uvažujme mocninnou řadu (7.1). Jednoznačně určený prvek ϱ z předchozí věty nazýváme **poloměrem konvergence** řady (7.1).

7.1.5. Věta. Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ je mocninná řada a nechť existuje $\lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$. Potom je tato limita rovna poloměru konvergence uvedené mocninné řady.

Důkaz. Podle Poznámky 3.2.16 platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Tvrzení tudíž plyne z Věty 7.1.3 a Věty 2.4.13. ■

7.1.6. Příklady. Spočtěte poloměry konvergence mocninných řad $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ a určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ uvedené řady konvergují.

Řešení. Podle Příkladu 2.5.7 platí

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0,$$

takže poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ je roven ∞ a řada konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Platí

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty,$$

a tedy poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ je roven 0. Řada konverguje pouze pro $x = 0$.

Díky Příkladu 2.2.47 víme, že

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1,$$

takže poloměr konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ je roven 1. Řada tedy absolutně konverguje pro každé $x \in (-1,1)$ a diverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x| > 1$. Zbývá vyšetřit konvergenci v bodech 1 a -1. Jak víme z Příkladů 3.1.15 a 3.3.2, řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n}$ diverguje, zatímco řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje. Mocninná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ tedy konverguje pro $x \in [-1,1)$ a diverguje pro všechna ostatní $x \in \mathbb{R}$. ♣

7.1.7. Poznámka. Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada a $\varrho \in \mathbb{R}^*$ je její poloměr konvergence. Potom nastane právě jedna z následujících tří možností:

- buď $\varrho = 0$ a řada konverguje pouze pro $x = x_0$,
- nebo $\varrho = \infty$ a řada absolutně konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$,
- nebo $\varrho \in (0,\infty)$ a řada absolutně konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| < \varrho$, diverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| > \varrho$, a může nebo nemusí konvergovat pro $x = x_0 + \varrho$ a pro $x = x_0 - \varrho$.

7.2. Derivace mocninné řady

V dalším textu se nám bude hodit následující pomocné lemma technické povahy. Tvrzení je obdobné Lemmatu 5.3.15, které jsme využili při odvozování elementárních funkcí. Zde však potřebujeme přesnější odhad a obecnější formu výrazu na pravé straně nerovnosti.

7.2.1. Lemma. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ a $h \in (-\delta,\delta)$ platí

$$\left|(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}\right| \le h^2\delta^{-2}(|x|+\delta)^n. \tag{7.3}$$

Důkaz. Pokud $n = 1$, pak tvrzení zřejmě platí, neboť na levé straně nerovnosti je nula a na pravé je nezáporné číslo. Nechť $n \in \mathbb{N}, n \ge 2$. Potom z binomické věty pro každé $h \in (-\delta, \delta)$ dostáváme

$$(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k.$$

Z nerovnosti $|h| < \delta$, z trojúhelníkové nerovnosti pro konečné sumy a ještě jednou z binomické věty pak odvodíme odhad

$$\begin{aligned} |(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}| &\leq \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} |h|^k \leq \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} \delta^{k-2} h^2 \\ &\leq h^2 \delta^{-2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} \delta^k \\ &= h^2 \delta^{-2} (|x| + \delta)^n. \end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. ∎

7.2.2. Věta (derivace mocninné řady)**.** Nechť ϱ je poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$. Potom poloměr konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$ je také roven ϱ. Pro $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x - x_0| < \varrho$ označme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$. Potom má funkce f v každém takovém bodě vlastní derivaci a platí $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$.

Důkaz. Zřejmě platí $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup \sqrt[n]{n|a_n|}$. Dokážeme opačnou nerovnost, tedy $\limsup \sqrt[n]{n|a_n|} \leq \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Jestliže $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, pak tato nerovnost platí zřejmě. Předpokládejme, že $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < \infty$. Víme, že $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $\sqrt[n]{n} < (1+\varepsilon)$. Pro tato $n \in \mathbb{N}$ potom platí

$$\sup_{k \geq n} \sqrt[k]{k|a_k|} \leq (1+\varepsilon) \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{|a_k|},$$

a tedy $\limsup \sqrt[n]{n|a_n|} \leq (1+\varepsilon) \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Protože ε bylo zvoleno libovolně, plyne odtud, že $\limsup \sqrt[n]{n|a_n|} \leq \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Celkem tedy máme $\limsup \sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Odtud a z definice poloměru konvergence mocninné řady vyplývá, že poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-x_0)^n$ je roven ϱ. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$ je zřejmě konvergentní pro $x = x_0$. Jestliže $x \in \mathbb{R}$ splňuje $0 < |x - x_0| < \varrho$, potom platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} = \frac{1}{x-x_0} \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-x_0)^n,$$

a tedy je řada $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$ konvergentní. Obdobnou úvahou lze dokázat, že pro $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x-x_0| > \varrho$ je řada $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$ divergentní. Poloměr konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$ je tedy roven ϱ.

Dokážeme nyní druhou část tvrzení. Jestliže $\varrho = 0$, pak je tvrzení triviální, neboť žádné $x \in \mathbb{R}$ s uvedenou vlastností neexistuje. Předpokládejme, že $\varrho > 0$. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že $x_0 = 0$. Zvolme $x \in (-\varrho, \varrho)$. K důkazu tvrzení stačí dokázat, že

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}. \tag{7.4}$$

Nalezneme $\delta > 0$ splňující $|x| + \delta < \varrho$. Potom pro každé $h \in (-\delta, \delta)$ platí $|x + h| \leq |x| + |h| < |x| + \delta < \varrho$, a tedy je výraz $f(x + h)$ dobře definován. Z Lemmatu 7.2.1 tudíž plyne

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right| \\
&= \frac{1}{|h|} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - h \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right| \\
&= \frac{1}{|h|} \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n ((x+h)^n - x^n - hnx^{n-1}) \right| \\
&\leq \frac{1}{|h|} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \left| (x+h)^n - x^n - hnx^{n-1} \right| \\
&\leq \frac{1}{|h|} h^2 \delta^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| (|x| + \delta)^n \\
&= |h| \delta^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| (|x| + \delta)^n.
\end{aligned}$$

Protože $|x|+\delta < \varrho$, je podle Věty 7.1.3 řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (|x|+\delta)^n$ konvergentní. Odtud vyplývá, že

$$\lim_{h\to 0} |h| \delta^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| (|x| + \delta)^n = 0,$$

a tedy také

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right| = 0.$$

Odtud a z Věty 2.2.24 plyne (7.4). Tvrzení je dokázáno. ■

7.2.3. Věta (vztah mocninné řady a Taylorova polynomu)**.** Nechť $\varrho > 0$ je poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. Pro $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x - x_0| < \varrho$ označme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. Potom

(a) pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a každé $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| < \varrho$, existuje vlastní $f^{(k)}(x)$ a platí

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k},$$

(b) speciálně platí $f^{(k)}(a) = k!\,a_k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

(c) pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in \mathbb{R}$ platí $T_n^{f,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$.

Důkaz. Tvrzení (a) plyne iterováním Věty 7.2.2 k-krát. Tvrzení (b) je speciálním případem tvrzení (a) pro $x = x_0$. Dokážeme tvrzení (c). Podle již dokázaného tvrzení (a) má funkce f na intervalu $(x_0 - \varrho, x_0 + \varrho)$ derivace všech řádů a platí

$$f^{(k)}(a) = k!a_k, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Podle definice Taylorova polynomu tedy máme

$$T_n^{f,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k.$$

Tím je tvrzení dokázáno. ∎

7.2.4. Při derivování mocninné řady (7.1) člen po členu se zachovává poloměr konvergence ϱ. V případech, kdy $\varrho \in (0, \infty)$, se však může stát, že v některém z krajních bodů $x_0 + \varrho$ a $x_0 - \varrho$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ diverguje, přestože původní řada (7.1) v těchto bodech konverguje. Příkladem je řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, která je konvergentní pro $x \in [-1, 1)$, ale řada $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ není konvergentní pro $x = -1$.

7.2.5. Věta. Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ jsou mocninné řady. Jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ obě řady konvergují ke stejnému součtu, potom pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí $a_n = b_n$.

Důkaz. Pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ označme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n.$$

Pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ potom platí $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$. Podle Věty 7.2.3(a) je $f^{(n)}(a) = n!a_n = n!b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy $a_n = b_n$. Rovnost $a_0 = b_0$ plyne ze vztahu $f(a) = a_0 = b_0$. ∎

7.2.6. Věta. Nechť ϱ je poloměr konvergence řady (7.1). Potom poloměr konvergence řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} \tag{7.5}$$

je také roven ϱ. Pro $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x - x_0| < \varrho$ označme

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}.$$

Potom v každém takovém bodě má funkce g vlastní derivaci a platí

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ položme

$$b_n = \begin{cases} 0, & \text{pokud } n = 0, \\ \frac{a_{n-1}}{n}, & \text{pokud } n \geq 1. \end{cases}$$

Potom

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n.$$

Podle Věty 7.2.2 mají řady $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ stejný poloměr konvergence ϱ a pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x - x_0| < \varrho$ platí

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Tím je tvrzení dokázáno. ■

7.2.7. Příklad. Dokažte, že pro každé $x \in (-1, 1)$ platí

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}. \tag{7.6}$$

Řešení. Položme

$$a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{2k+1}, & \text{jestliže } n = 2k + 1,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ 0, & \text{jestliže } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ je sudé.} \end{cases}$$

Chceme dokázat, že pro každé $x \in (-1, 1)$ platí $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Z Příkladu 2.2.47 plyne, že

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{k \to \infty} \sqrt[2k+1]{\frac{1}{2k+1}} = 1,$$

takže poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je roven 1. Pro $x \in (-1, 1)$ položme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Pak dle Věty 7.2.2 a Příkladu **??** platí

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ jest

$$(n+1) a_{n+1} = \begin{cases} (-1)^{2k}, & \text{jestliže } n = 2k,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ 0, & \text{jestliže } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ je liché.} \end{cases}$$

Tudíž

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in (-1,1).$$

Zároveň však pro každé $x \in (-1,1)$ platí $\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}$. Pro $x \in (-1,1)$ položme $g(x) = f(x) - \operatorname{arctg} x$. Pak podle věty o aritmetice derivací (Věta 5.1.17) platí $g'(x) = 0$ pro každé $x \in (-1,1)$. Protože g má v každém bodě intervalu $(-1,1)$ vlastní derivaci, je podle věty o vztahu derivace a spojitosti (Věta 5.1.15) na tomto intervalu spojitá. Tudíž podle Věty 5.2.8 existuje $c \in \mathbb{R}$ splňující $g(x) = c$, $x \in (-1,1)$, tedy $f(x) = \operatorname{arctg} x + c$, $x \in (-1,1)$. Protože $f(0) = 0$, a tedy $g(0) = f(0) - \operatorname{arctg} 0$, je $c = 0$ a $f(x) = \operatorname{arctg} x$. ♣

7.2.8. Příklad. Dokažte, že pro každé $x \in (-1,1)$ platí

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1}. \tag{7.7}$$

Řešení. Rovnost lze dokázat obdobně jako v řešení Příkladu 7.2.7 s použitím vzorce

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n}, \quad x \in (-1,1),$$

jenž vyplývá ze vztahu (6.13) pro $\alpha = -\frac{1}{2}$. ♣

7.3. Abelova věta

Nechť ϱ je poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$. Předpokládejme, že $\varrho \in (0,\infty)$. Označme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ pro $x \in (x_0-\varrho, x_0+\varrho)$. V tomto oddílu se budeme zabývat souvislostí limity $\lim_{x\to(x_0+\varrho)-} f(x)$ a součtu řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n$. Vzniká totiž přirozená otázka, zda je možné platnost vzorců (7.6) a (7.7) rozšířit i na krajní body.

Nejprve si povšimneme, že obecně žádná souvislost mezi uvedenou limitou a řadou neexistuje. Položíme-li například $a_n = (-1)^n$ pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pak $\varrho = 1$ a $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ pro $x \in (-1,1)$. To znamená, že $f(x) = \frac{1}{1+x}$ pro $x \in (-1,1)$, a tedy $\lim_{x\to 1-} f(x) = \frac{1}{2}$. Přitom řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ diverguje.

Ukazuje se, že lze obdržet mnohem příznivější výsledky v případě, kdy je řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n$ konvergentní. Tuto situaci popisuje Abelova věta, kterou nyní zformulujeme a dokážeme. Nejprve uvedeme pomocné tvrzení.

7.3.1. Lemma. Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je konvergentní číselná řada. Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ označme $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Potom jsou pro každé $x \in (-1,1)$ řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$

absolutně konvergentní a platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n.$$

Důkaz. Posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ je podle předpokladu konvergentní, a tedy omezená. Takže existuje $C > 0$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|s_n| \leq C$. Zvolme $x \in (-1, 1)$. Potom

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|s_n||x|^n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{C}|x| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{C}|x| = |x| < 1.$$

Z Cauchyova odmocninového kritéria (Věta 3.4.6(a)) tedy vyplývá, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ je absolutně konvergentní. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je podle předpokladu konvergentní, a tedy podle Věty **??** platí $\lim a_n = 0$. Tudíž také posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je omezená. Odtud pomocí obdobné úvahy jako výše vyplývá, že i řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je absolutně konvergentní. Nechť $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Potom platí

$$\begin{aligned}
(1-x) \sum_{n=0}^{N} s_n x^n &= \sum_{n=0}^{N} s_n x^n - \sum_{n=0}^{N} s_n x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{N} s_n x^n - \sum_{n=1}^{N+1} s_{n-1} x^n \\
&= s_0 + \sum_{n=1}^{N} (s_n - s_{n-1}) x^n - s_N x^{N+1} \\
&= \sum_{n=0}^{N} a_n x^n - s_N x^{N+1}.
\end{aligned}$$

Posloupnost $\{s_N\}_{N=0}^{\infty}$ je omezená a $\lim_{N\to\infty} x^{N+1} = 0$. Podle Věty 2.2.39 tedy platí $\lim_{N\to\infty} s_N x^{N+1} = 0$. Odtud a z věty o aritmetice limit vyplývá, že

$$\begin{aligned}
(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n &= \lim_{N\to\infty} (1-x) \sum_{n=0}^{N} s_n x^n \\
&= \lim_{N\to\infty} \Big(\sum_{n=0}^{N} a_n x^n - s_N x^{N+1} \Big) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.
\end{aligned}$$

Tím je tvrzení dokázáno. ∎

7.3.2. Věta (Abel)**.** Nechť ϱ je poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. Předpokládejme, že $\varrho \in (0, \infty)$.

(a) Jestliže $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n$ konverguje, potom platí

$$\lim_{x \to (x_0+\varrho)-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n.$$

(b) Jestliže $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-\varrho)^n$ konverguje, potom platí

$$\lim_{x \to (x_0-\varrho)+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-\varrho)^n.$$

Důkaz. Dokážeme tvrzení (a). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x_0 = 0$. Předpokládejme nejprve, že $\varrho = 1$. Označme $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ položme $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ a pro $x \in (-1, 1)$ položme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Chceme dokázat, že $\lim_{x \to 1-} f(x) = s$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|s_n - s| < \varepsilon$. Nyní pro tato ε a n_0 nalezneme $\delta \in (0, 1)$ takové, že pro každé $x \in (1 - \delta, 1)$ platí $(1 - x) \sum_{n=0}^{n_0} |s_n - s| < \varepsilon$. Potom podle Lemmatu 7.3.1 pro každé $x \in (1 - \delta, 1)$ platí

$$\begin{aligned}
|f(x) - s| &= \Big| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - s \Big| = \Big| (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n - s \Big| \\
&= \Big| (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n - (1 - x) s \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Big| \leq (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} |s_n - s| x^n \\
&= (1 - x) \sum_{n=0}^{n_0} |s_n - s| x^n + (1 - x) \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |s_n - s| x^n \\
&< (1 - x) \sum_{n=0}^{n_0} |s_n - s| + (1 - x) \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \varepsilon x^n \\
&< \varepsilon + (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon x^n \\
&= \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Tedy $\lim_{x \to 1-} f(x) = s$. Tím je tvrzení dokázáno pro $\varrho = 1$.

Nyní předpokládejme, že $\varrho \in (0, \infty)$. Potom platí

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n| \varrho^n} = \frac{1}{\varrho} \varrho = 1,$$

a tedy je poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n x^n$ roven 1. Z již dokázané části tvrzení a z věty o limitě složené funkce (Věta 4.2.20(P)) tedy plyne, že

$$\lim_{x \to \varrho-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{x \to \varrho-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n \Big(\frac{x}{\varrho}\Big)^n = \lim_{y \to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n y^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n.$$

Větu 4.2.20 jsme mohli použít díky tomu, že vnitřní funkce $x \mapsto \frac{x}{\varrho}$ je rostoucí. Tím je dokázáno tvrzení (a). Tvrzení (b) lze dokázat obdobným způsobem. ∎

7.3.3. Příklad. Dokažte, že pro každé $x \in [-1, 1]$ platí

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Řešení. Dle (7.6) víme, že tvrzení platí pro každé $x \in (-1, 1)$. Dokážeme jeho platnost pro $x = 1$. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ konverguje podle Leibnizovy věty (Věta 3.3.1). Tedy ze spojitosti funkce arctg a z Abelovy věty plyne, že

$$\operatorname{arctg} 1 = \lim_{x \to 1-} \operatorname{arctg} x = \lim_{x \to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Obdobným postupem lze dokázat, že $\operatorname{arctg}(-1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$, neboť řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}(-1)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ také konverguje podle Leibnizovy věty. ♣

7.3.4. Poznámka. V Příkladu 7.3.3 jsme dokázali následující zajímavý vztah

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Pro aproximaci čísla π však není tento vzorec vhodný, protože řada na pravé straně rovnosti konverguje velice pomalu. Například pro určení hodnoty čísla π s přesností, jaká byla známa již Archimédovi, je třeba sečíst více než 300 členů uvedené řady.

7.3.5. Na závěr tohoto oddílu uvedeme ještě důkaz Abelovy věty (Věta 3.6.5).

Věta. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ jsou konvergentní řady, jejichž Cauchyův součin konverguje. Pak platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i \right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m \right).$$

Důkaz. Položme $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ a $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$. Obě tyto řady mají poloměr konvergence větší nebo roven jedné, neboť číselné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou podle předpokladu konvergentní. Odtud vyplývá, že obě řady jsou absolutně konvergentní pro každé $x \in (-1, 1)$. Podle Mertensovy věty (Věta 3.6.2) tedy pro každé $x \in [0, 1)$ platí

$$f(x)g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (\sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} x^{k+1-i} b_i x^i) = \sum_{k=1}^{\infty} (\sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i) x^{k+1}.$$

Z Abelovy věty (Věta 7.3.2) pak plyne

$$\lim_{x \to 1-} f(x)g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{i=1}^{k} a_{k+i-1} b_i).$$

■

7.4. Teoretické příklady na mocninné řady

7.4.1. Příklad (Tauberova[1] věta). Nechť má mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ poloměr konvergence 1 a nechť $L \in \mathbb{R}^*$. Označme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-1, 1)$. Jestliže platí $\lim n a_n = 0$ a $\lim_{x \to 1-} f(x) = L$, pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L$.

Řešení. Protože $\lim n a_n = 0$, platí podle Věty 2.2.24 také $\lim n|a_n| = 0$. Z Věty 3.4.11 pak vyplývá, že i $\lim \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} k|a_k| = 0$.

Označme
$$x_n = 1 - \frac{1}{n}, \ n \in \mathbb{N}.$$
Potom $\lim f(x_n) = L$.

Nechť nejprve $L \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí
$$|f(x_n) - L| < \varepsilon, \tag{7.8}$$
$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} k|a_k| < \varepsilon \tag{7.9}$$
a
$$n|a_n| < \varepsilon. \tag{7.10}$$
Položme $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Potom pro každé $x \in (0, 1)$ a $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí
$$\begin{aligned} s_n - L &= \sum_{k=0}^{n} a_k - L = \sum_{k=0}^{n} a_k - L + f(x) - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k (1 - x^k) + f(x) - L - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k, \end{aligned}$$
a tedy
$$|s_n - L| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k|(1 - x^k) + |f(x) - L| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| x^k.$$
Protože pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ máme
$$(1 - x^k) = (1 - x)(1 + x + \cdots + x^{k-1}) \leq k(1 - x),$$
dostáváme
$$\sum_{k=0}^{n} |a_k|(1 - x^k) \leq (1 - x) \sum_{k=0}^{n} k|a_k|.$$
Nechť nyní $n \in \mathbb{N}$ je zvoleno tak, aby $n \geq n_0$. Potom z (7.10) plyne
$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| x^k < \varepsilon \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \leq \frac{\varepsilon}{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = \frac{\varepsilon x^{n+1}}{n(1 - x)} < \frac{\varepsilon}{n(1 - x)}.$$

[1] Alfred Tauber (1866–1942)

Celkově dostáváme pro každé $x \in (0,1)$ a $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ odhad

$$|s_n - L| \leq (1-x)\sum_{k=0}^{n} k|a_k| + |f(x) - L| + \frac{\varepsilon}{n(1-x)}.$$

Do tohoto odhadu nyní dosadíme hodnotu $x = x_n$. Ze (7.8) a (7.9) pak obdržíme

$$\begin{aligned}|s_n - L| &\leq (1-x_n)\sum_{k=0}^{n} k|a_k| + |f(x_n) - L| + \frac{\varepsilon}{n(1-x_n)} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} k|a_k| + |f(x_n) - L| + \varepsilon < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon,\end{aligned}$$

a tedy $\lim s_n = L$.

Nyní předpokládejme, že $L = \infty$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $x \in (0,1)$ platí

$$\begin{aligned}s_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k + f(x) - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k(1-x^k) + f(x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \\ &\geq f(x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k.\end{aligned}$$

Nyní nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, aby pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platilo $|a_n| \leq \frac{1}{n}$. Pak pro každé takové n dostaneme

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| x^k &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \\ &= \frac{x^{n+1}}{n(1-x)} \leq \frac{1}{n(1-x)}.\end{aligned}$$

Dosadíme-li do tohoto odhadu $x = x_n$, dostaneme $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \leq 1$. Tedy celkem

$$s_n \geq f(x_n) - 1$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Tvrzení nyní plyne z toho, že $\lim f(x_n) = \infty$.

Nechť $L = -\infty$. Položíme $b_n = -a_n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, a $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, $x \in (-1,1)$. Potom zřejmě platí $\lim n b_n = 0$ a $\lim_{x\to 1-} g(x) = \infty$. Z již dokázaného tvrzení tudíž plyne $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \infty$, a tedy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = -\infty$. ♣

7.4.2. Poznámka. V Tauberově větě z Příkladu 7.4.1 lze předpoklad $\lim n a_n = 0$ nahradit předpokladem, že posloupnost $\{n a_n\}$ je omezená. Důkaz tohoto tvrzení, který podal J. E. Littlewood[2], je podstatně obtížnější než důkaz původní Tauberovy věty a zde jej uvádět nebudeme.

[2] John Edensor Littlewood (1885–1977)

7.5. Početní příklady na mocninné řady

7.5.1. Příklad. Nalezněte poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$.

Řešení. Jedná se o mocninnou řadu ve tvaru (7.1) se středem $x_0 = 0$ a koeficienty

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{pro } n = 0, \\ \frac{1}{n^3} & \text{pro } n \geq 1. \end{cases}$$

Platí

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^3}} = 1,$$

a tudíž ze vzorce (7.2) dostaneme $\varrho = 1$.

Poloměr konvergence ϱ lze také vypočítat pomocí Poznámky 3.2.16, neboť platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} = 1.$$

♣

7.5.2. Příklad. Nalezněte poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} x^n$.

Řešení. Jedná se o mocninnou řadu ve tvaru (7.1) se středem $x_0 = 0$ a koeficienty

$$a_n = \frac{n!}{(2n)!} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n!}{(2n)!}}{\frac{(n+1)!}{(2n+2)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1} = \infty.$$

Podle Poznámky 3.2.16 je tedy poloměr konvergence roven $\varrho = \infty$. ♣

7.5.3. Příklad. Nalezněte poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k!}}{k!}$.

Řešení. Jedná se o mocninnou řadu se středem $x_0 = 0$ a koeficienty

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{k!}, & \text{pokud } n = k! \text{ pro nějaké } k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$, a tedy podle Věty 2.4.15 a Příkladu 2.2.47 máme

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

Podle věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.2.30) platí

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k!]{a_{k!}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k!]{\frac{1}{k!}} = 1,$$

a tedy $\limsup \sqrt[n]{a_n} = 1$. Odtud a ze vzorce (7.2) vyplývá, že poloměr konvergence je roven 1. ♣

7.5.4. Příklad. Nechť $0 < a < b$. Nalezněte poloměr konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(na^n + \frac{b^n}{n^2}\right)x^n.$$

Řešení. Jedná se o mocninnou řadu ve tvaru (7.1) se středem $x_0 = 0$ a koeficienty

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{pro } n = 0, \\ na^n + \frac{b^n}{n^2} & \text{pro } n \geq 1. \end{cases}$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí odhady

$$\frac{b^n}{n^2} \leq na^n + \frac{b^n}{n^2} \leq 2nb^n.$$

Pomocí limity z Příkladu 2.2.47 dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{b^n}{n^2}} = b \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2nb^n} = b,$$

a proto podle věty o dvou strážnících (Věta 2.2.44) platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{na^n + \frac{b^n}{n^2}} = b.$$

Podle (7.2) je tedy poloměr konvergence ϱ roven $\frac{1}{b}$. ♣

7.5.5. Příklad. Nechť $c > 0$. Nalezněte poloměr konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{c^{n^2}} x^n.$$

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ označme

$$a_n = \frac{n!}{c^{n^2}}.$$

Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n!}{c^{n^2}}}{\frac{(n+1)!}{c^{(n+1)^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{c^{2n+1}}{n+1} = \begin{cases} 0, & \text{pokud } c \in (0,1], \\ \infty, & \text{pokud } c \in (1,\infty). \end{cases}$$

Podle Poznámky 3.2.16 tedy pro poloměr konvergence ϱ dostáváme

$$\varrho = \begin{cases} 0, & \text{pokud } c \in (0,1], \\ \infty, & \text{pokud } c \in (1,\infty). \end{cases}$$

♣

7.5.6. Příklad. Dokažte, že funkci $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$, $x \in (-1,1)$ lze rozvinout do mocninné řady se středem v bodě 0 a poloměrem konvergence 1. Určete koeficienty této řady.

Řešení. Podle vzorce pro součet geometrické řady a jednoduché úpravy platí pro $x \in (-1,1)$

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x^2+1) \cdot \frac{1}{1-x^2} = -(x^2+1) \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-x^{2n+2} - x^{2n}) = -1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2x^{2n}. \end{aligned}$$

Tedy $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-1,1)$, kde

$$a_n = \begin{cases} -1 & \text{pro } n = 0, \\ 0 & \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ liché}, \\ -2 & \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ sudé}. \end{cases}$$

♣

7.5.7. Příklad. Dokažte, že funkci $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$, $x \in (-1,1)$ lze rozvinout do mocninné řady se středem v bodě 0 a poloměrem konvergence 1. Určete koeficienty této řady.

Řešení. Podle vzorce pro součet geometrické řady pro každé $x \in (-1,1)$ platí

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Dostali jsme mocninnou řadu se středem v bodě 0 a koeficienty

$$a_n = \begin{cases} (-1)^k, & \text{pokud } n = 2k,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ 0, & \text{pokud } n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

Poloměr konvergence této řady je roven 1. Podle Věty 7.1.3 konverguje mocninná řada na intervalu $(-1,1)$ absolutně. Podle Mertensovy věty (Věta 3.6.2) platí

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k a_{n-k} x^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \end{aligned}$$

kde

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mají čísla k a $2n-k$ stejnou paritu, tj. jsou obě lichá nebo obě sudá. Pokud je navíc k sudé, pak platí

$$a_k a_{2n-k} = (-1)^{\frac{k}{2}}(-1)^{n-\frac{k}{2}} = (-1)^n.$$

Pokud je k liché, pak platí $a_k a_{2n-k} = 0 \cdot 0 = 0$. Počet sudých čísel v množině $\{0, 1, \dots, 2n\}$ je roven $n+1$. Máme tedy $b_{2n} = (-1)^n(n+1)$.

Pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mají čísla k a $2n+1-k$ rozdílnou paritu, a proto je právě jedno z čísel a_k a a_{2n+1-k} rovno 0. Odtud plyne, že $b_{2n+1} = 0$.

Výsledná řada má tedy tvar

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^{2n}, \qquad x \in (-1, 1).$$

♣

7.5.8. Příklad. Rozviňte funkci $f(x) = \sin^2 x$ do mocninné řady.

Řešení. Podle vzorce pro sin polovičního úhlu a podle známé mocninné řady pro cos dostáváme

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} .$$

♣

7.5.9. Příklad. Sečtěte řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+3} .$$

Řešení. Zkoumejme mocninnou řadu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+3}x^{2n+3} .$$

Snadno zjistíme, že poloměr konvergence je $R = 1$. Posloupnost $\frac{1}{2n+3}$ monotónně klesá k nule, a tedy podle Leibnizova kritéria (Věta 3.3.1) tato mocninná řada konverguje i pro $x = 1$. Z Abelovy věty tedy dostáváme

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+3} = f(1) = \lim_{x \to 1-} f(x) .$$

Podle věty o derivaci mocninné řady (Věta 7.2.2) platí pro všechna $x \in (-1, 1)$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+2} = \frac{x^2}{1+x^2} ,$$

kde jsme v posledním kroku využili vzorce pro součet geometrické řady. Snadnou integrací dostaneme

$$f(x) = \int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = x - \arctan x + C .$$

Dosazením $x = 0$ dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3} 0^{2n+3} = 0 - \arctan 0 + C \ ,$$

a tedy $C = 0$. Součet zadané řady nyní dopočteme podle Abelovy věty

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3} = \lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} (x - \arctan x) = 1 - \frac{\pi}{4} \ .$$

♣

7.5.10. Příklad. Sečtěte řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2n) \frac{1}{3^n} \ .$$

Řešení. Zkoumejme mocninnou řadu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

pro $x \in (-1, 1)$. Pravou stranu můžeme snadno derivovat, a tedy podle věty o derivaci mocninné řady (Věta 7.2.2) platí pro všechna $x \in (-1, 1)$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \ .$$

První člen řady je nulový, a proto opětovným použitím věty o derivaci mocninné řady dostaneme

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3} \ .$$

Z posledních dvou rovností snadno dostáváme

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2n) x^n &= x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - n) x^{n-2} + 3x \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} \\ &= x^2 f''(x) + 3x f'(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{3x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

pro všechna $x \in (-1, 1)$. Dosazením $x = \frac{1}{3}$ dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2n) \frac{1}{3^n} = \frac{3}{4} + \frac{9}{4} = 3 \ .$$

♣

7.5.11. Příklad. Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} .$$

Řešení. Zkoumejme mocninnou řadu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} x^{2n+1} .$$

Snadno zjistíme, že poloměr konvergence této mocninné řady je $R = 1$ a že tato řada konverguje i pro $x = 1$. Z Abelovy věty (Věta 7.3.2) tedy dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = f(1) = \lim_{x\to 1-} f(x) .$$

Podle věty o derivaci mocninné řady (Věta 7.2.2) platí pro všechna $x \in (-1, 1)$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} x^{2n} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} x^{2n-1} . \tag{7.11}$$

Poslední řadu si označme $g(x)$. Tato řada má poloměr konvergence 1, a z věty o derivaci mocninné řady dostaneme pro všechna $x \in (-1, 1)$

$$g'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} x^{2n-1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} = \frac{1}{1-x^2} ,$$

kde jsme v posledním kroku použili vzorec pro součet geometrické řady. Integrací spočteme

$$g(x) = \int \frac{1}{1-x^2}\, dx = \int \left(\frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)} \right) dx = \frac{1}{2}\log(x+1) - \frac{1}{2}\log(1-x) + C .$$

Dosazením $x = 0$ do řady pro $g(x)$ lehce dopočteme $C = 0$. Z (7.11) máme

$$f'(x) = xg(x) = \frac{1}{2} x \log(x+1) - \frac{1}{2} x \log(1-x) .$$

Standardní integrací pomocí per-partes a rozkladu na parciální zlomky, kterou zde nebudeme detailně rozepisovat, lze z tohoto spočítat

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\log(1+x) + \frac{1}{2}x^2 \log(1+x) \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}\log(1-x) + \frac{1}{2}x^2 \log(1-x) \right) + C_2 \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\log\frac{x+1}{1-x} + \frac{1}{4}x^2 \log\frac{x+1}{1-x} + C_2 . \end{aligned}$$

Dosazením $x = 0$ pak snadno zjistíme, že $C_2 = 0$. Podle Abelovy věty dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}(x^2 - 1)\log\frac{x+1}{1-x} = \frac{1}{2}\,,$$

kde jsme v posledním kroku mimo jiné využili známou limitu $\lim_{x\to 1-}(x-1)\log(1-x) = 0$. ♣

7.5.12. Příklad. Rozhodněte, pro která $k \in \mathbb{N}$ je limita

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{tg} x}{x^k} \tag{7.12}$$

konečná a nenulová.

Řešení. Jest

$$\frac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{tg} x}{x^k} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\operatorname{arctg} x \cos x - \sin x}{x^{k+1}}.$$

Podle 7.6 a 6.3.5 máme

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg} x \cos x &= (x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3))(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))\\ &= x - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^5 + o(x^6)\\ &= x - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3), \quad x \to 0.\end{aligned}$$

Odtud a z 6.3.4 dostaneme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x \cos x - \sin x}{x^k} &= \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)}{x^k}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}{x^k}.\end{aligned}$$

Protože $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$, plyne z věty o aritmetice limit, že pro volbu $k = 3$ je hledaná limita konečná a nenulová, přesněji

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x \cos x - \sin x}{x^3} = -\frac{2}{3}.$$

Opětovným použitím věty o aritmetice limit odtud ihned dostaneme, že pro $k = 1$ nebo $k = 2$ platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x \cos x - \sin x}{x^k} = 0.$$

Konečně pro sudé číslo k, $k > 3$, platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x \cos x - \sin x}{x^k} = \infty$$

a pro liché číslo k, $k > 3$, limita (7.12) neexistuje. ♣

KAPITOLA 8

Integrál

V této kapitole budeme studovat tři důležité pojmy: primitivní funkce, Riemannův integrál a Newtonův integrál. Zavedení Riemannova integrálu je motivováno geometrickou úlohou nalézt obsah dané množiny. Pojem primitivní funkce pak poskytuje efektivní nástroj k výpočtu Riemannova integrálu v cele řadě případů. Oba pojmy pak přirozeně vedou k definici Newtonova integrálu, který je odlišný od Riemannova a v některých situacích je vhodnější než Riemannův. Závěr kapitoly bude věnován aplikacím určitého integrálu: výpočet délky křivky, výpočet objemu a povrchu rotačního tělesa, integrální kritérium konvergence řad a také uvedeme integrální tvar zbytku Taylorova polynomu.

8.1. Primitivní funkce

V tomto oddílu se budeme zabývat úlohou, která je v jistém smyslu opačná k derivování, neboli budeme k zadané funkci f hledat funkci F takovou, že zderivováním F obdržíme f. Jak uvidíme, tento problém je zpravidla komplikovanější než úloha nalézt derivaci zadané funkce.

8.1.1. Definice. Nechť I je neprázdný otevřený interval a $f: I \to \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce $F: I \to \mathbb{R}$ je **primitivní funkce** k funkci f na I, jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

8.1.2. (a) Nechť F je primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I. Potom F je na I spojitá, neboť má dle definice v každém bodě I vlastní derivaci.

(b) Existují funkce, které na jistém intervalu nemají primitivní funkci (vizte 8.1.21).

(c) Primitivní funkce není určena jednoznačně. Nechť F je primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I a $c \in \mathbb{R}$. Potom je funkce $F + c$ také primitivní funkcí k f na I.

(d) Hledání primitivní funkce nazýváme **integrací** a primitivní funkci někdy označujeme jako **neurčitý integrál**.

8.1.3. Věta. Nechť I je otevřený interval, $f, F, G: I \to \mathbb{R}$ a F a G jsou primitivní funkce k funkci f na I. Potom existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in I$ platí $F(x) = G(x) + c$.

Důkaz. Definujme funkci $H : I \to \mathbb{R}$ předpisem $H(x) = F(x) - G(x)$, $x \in I$. Potom $H'(x) = f(x) - f(x) = 0$ pro každé $x \in I$. Podle Věty 5.2.8 je tedy H konstantní na I. ■

8.1.4. Nechť funkce f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci F. Podle 8.1.2(c) a předchozí věty vidíme, že libovolnou primitivní funkci k funkci f na I získáme z jediné primitivní funkce F přičtením vhodné konstantní funkce.

Množinu všech primitivních funkcí k funkci f označujeme symbolem

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pro popis této množiny budeme používat značení

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} F(x), \quad x \in I, \tag{8.1}$$

které znamená, že pro libovolnou primitivní funkci G k funkci f na intervalu I existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že $G = F + c$ na intervalu I. Na levé straně vztahu (8.1) stojí *množina* všech primitivních funkcí k funkci f, zatímco na pravé straně stojí reprezentant této množiny, tedy funkce F, jedna z primitivních funkcí k funkci f na I. Vztah $\stackrel{c}{=}$ tedy není rovností v obvyklém smyslu slova (například není symetrický) a čteme jej jako **rovnost až na konstantu**.

Jednotlivé části symbolu $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ jsou znak **integrálu** $\int$, **integrand** $f(x)$, tedy funkce, k níž hledáme primitivní funkci, a symbol $\mathrm{d}x$ označující proměnnou, vzhledem k níž integrujeme. Symbol $\mathrm{d}x$ uvažovaný samostatně nemá v této kapitole žádný matematický význam a nelze s ním algebraicky manipulovat.

8.1.5. O správnosti následujících vzorců se lze přesvědčit zderivováním:

$\displaystyle\int x^n\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1}$, $x \in \mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$; $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, +\infty)$ pro $n \in \mathbb{Z}$, $n < -1$,

$\displaystyle\int x^\alpha\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $x \in (0, +\infty)$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \log|x|$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, +\infty)$,

$\displaystyle\int e^x\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} e^x$, $x \in \mathbb{R}$,

$\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} -\cos x$, $x \in \mathbb{R}$,

$\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \sin x$, $x \in \mathbb{R}$,

$\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \operatorname{tg} x$, $x \in (-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$\int \frac{-1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \operatorname{cotg} x,\ \ x \in (k\pi, \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z},$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \operatorname{arctg} x,\ \ x \in \mathbb{R},$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \arcsin x,\ \ x \in (-1, 1),$$

$$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \arccos x,\ \ x \in (-1, 1).$$

Následující tvrzení uvedeme zatím bez důkazu, podrobný důkaz bude uveden později (vizte Důsledek 8.2.29).

8.1.6. Věta (existence primitivní funkce)**.** Nechť I je otevřený interval a $f: I \to \mathbb{R}$ je spojitá. Potom f má na I primitivní funkci.

8.1.7. Věta. Nechť funkce f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci F, funkce g má na I primitivní funkci G a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak funkce $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k $\alpha f + \beta g$ na I.

Důkaz. Podle Věty 5.1.17 platí

$$\big(\alpha F(x) + \beta G(x)\big)' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

pro každé $x \in I$. Odtud plyne tvrzení. ■

8.1.8. Definice. Nechť X je reálný vektorový prostor, $A, B \subset X$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom definujeme množiny $A + B$ a cA předpisy

$$A + B = \{a + b;\ a \in A, b \in B\} \quad \text{a} \quad cA = \{ca;\ a \in A\}.$$

Jestliže $x \in X$, potom symbolem $x + A$ značíme množinu $\{x\} + A$.

8.1.9. Nechť I je otevřený interval. Potom systém X všech reálných funkcí na I tvoří vektorový prostor, přičemž pro $f, g \in X$ a $c \in \mathbb{R}$ definujeme výrazy $f + g$ a cf předpisy

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{a} \quad (cf)(x) = cf(x) \quad \text{pro } x \in I.$$

8.1.10. Definice. Nechť I je otevřený interval, X je systém všech reálných funkcí na I a $A \subset X$. Řekneme, že A je **určená až na konstantu**, jestliže existuje funkce $f \in X$ taková, že $A = \{f + c;\ c \in \mathbb{R}\}$.

8.1.11. Lemma. Nechť I je otevřený interval a X je vektorový prostor všech reálných funkcí na I. Nechť neprázdná množina $A \subset X$ je určená až na konstantu a C značí množinu všech konstantních funkcí na I. Pak platí následující tvrzení.

(a) Je-li $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, je cA též určená až na konstantu.
(b) Platí $A = A + C$.

(c) Pokud a_1, a_2 jsou reálná čísla, platí

$$a_1A + a_2A = \begin{cases} (a_1+a_2)A, & a_1+a_2 \neq 0, \\ C, & a_1+a_2 = 0 \text{ a } a_1 \neq 0, \\ \{0\}, & a_1 = a_2 = 0. \end{cases}$$

Důkaz. Tvrzení (a) a (b) ihned plynou z definice.

(c) Nejprve uvažujeme případ $a_1 + a_2 \neq 0$. Nechť $f_1, f_2 \in A$ jsou dány. Jelikož $A = \{f + c : c \in \mathbb{R}\}$ pro nějaké $f \in X$, existují $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ splňující $f_i = f + c_i$, $i = 1, 2$. Pak

$$\begin{aligned} a_1f_1 + a_2f_2 &= (a_1+a_2)f + a_1c_1 + a_2c_2 \\ &= (a_1+a_2)\cdot\left(f + \tfrac{a_1c_1+a_2c_2}{a_1+a_2}\right) \in (a_1+a_2)A. \end{aligned}$$

Nyní předpokládejme, že $g \in (a_1+a_2)A$. Pak platí $g = (a_1+a_2)(f+c)$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$. Tedy

$$g = a_1(f+c) + a_2(f+c) \in a_1A + a_2A.$$

Tím je první případ ověřen.

Pokud $a_1 + a_2 = 0$ a $a_1 \neq 0$, pak pro $f_1, f_2 \in A$ máme jako výše $f_i = f + c_i$, $i = 1, 2$, a tedy

$$a_1f_1 + a_2f_2 = a_1c_1 + a_2c_2 \in C.$$

Je-li $c \in C$ dána, pak $f_1 = f + \frac{c}{a_1}$ a $f_2 = f$ splňují $a_1f_1 + a_2f_2 = c$, a tedy požadovaný vztah platí.

Případ $a_1 = a_2 = 0$ je pak zřejmý. ■

8.1.12. Věta (integrace per partes)**.** Nechť I je otevřený interval a $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá, F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce ke g na I. Pak platí

$$\int g(x)F(x)\,\mathrm{d}x = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\,\mathrm{d}x, \quad x \in I. \tag{8.2}$$

Důkaz. Funkce G je spojitá na I dle 8.1.2(a), takže i funkce fG je spojitá na I. Má tedy primitivní funkci na I dle Věty 8.1.6. Uvažujme nějaký prvek množiny vpravo, tedy funkci tvaru $GF - H$, kde H je primitivní ke Gf. Pak z Věty 5.1.17 máme

$$(GF - H)' = gF + Gf - Gf = gF.$$

Tedy

$$\int gF \overset{c}{=} GF - H.$$

Množina funkcí na pravé straně (8.2) obsahuje funkci $GF - H$, stejně tak i množina funkcí na levé straně (8.2), a proto se obě množiny rovnají (vizte Větu 8.1.3). ■

8.1.13. Příklad. Spočtěte primitivní funkci k funkci arctg na intervalu $(-\infty, \infty)$.

Řešení. Položíme $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $F(x) = \operatorname{arctg} x$, $g(x) = 1$ a $G(x) = x$ pro $x \in \mathbb{R}$. Potom je f spojitá na $\mathbb{R}$, a tedy podle Věty 8.1.12 platí

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x = \int g(x)F(x)\,\mathrm{d}x \\ &= G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &\stackrel{c}{=} x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2),\ x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

♣

8.1.14. Příklad. Spočtěte primitivní funkci k funkci xe^x na $(-\infty, \infty)$.

Řešení. Ve Větě 8.1.12 položme $f(x) = 1$, $F(x) = x$, $g(x) = e^x$ a $g(x) = e^x$. Dostaneme

$$\begin{aligned}\int xe^x \,\mathrm{d}x &= \int g(x)F(x)\ \mathrm{d}x = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= xe^x - \int e^x \,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} e^x(x-1), \quad x \in (-\infty, \infty).\end{aligned}$$

♣

8.1.15. Příklad. Spočtěte primitivní funkci k funkci $\log x$ na $(0, \infty)$.

Řešení. Ve Větě 8.1.12 položme $f(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = \log x$, $g(x) = 1$ a $G(x) = x$. Dostaneme

$$\begin{aligned}\int \log x \,\mathrm{d}x &= \int 1 \cdot \log x \,\mathrm{d}x = \int g(x)F(x)\,\mathrm{d}x \\ &= G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= x\log x - \int 1\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} x(\log x - 1), \quad x \in (0, \infty).\end{aligned}$$

♣

8.1.16. Příklad. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x$. Dokažte, že platí rekurentní formule

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Speciálně tedy platí

$$I_1 \stackrel{c}{=} \operatorname{arctg} x, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

a

$$I_2 \stackrel{c}{=} \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{\operatorname{arctg} x}{2}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Řešení. Z věty o vztahu spojitosti a existence primitivní funkce (Věta 8.1.6) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ má funkce $\frac{1}{(1+x^2)^n}$ primitivní funkci na $\mathbb{R}$. Z Věty 8.1.12 dostaneme

$$\begin{aligned} I_n &= \int 1 \cdot \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x = x\frac{1}{(1+x^2)^n} - \int x(-n)\frac{2x}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\ &= x\frac{1}{(1+x^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\left(\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}. \end{aligned}$$

Z Lemmatu 8.1.11 nyní plyne následujícím způsobem tvrzení.

Nechť C značí množinu konstatních funkcí na $\mathbb{R}$ a nechť $f = \frac{x}{(1+x^2)^n}$. V obdržené rovnici

$$I_n = f + 2nI_n - 2nI_{n+1}$$

přičteme k oběma stranám $-I_n + 2nI_{n+1}$ a obdržíme

$$2nI_{n+1} + I_n - I_n = f + 2nI_n - I_n - 2nI_{n+1} + 2nI_{n+1},$$

tj.

$$2nI_{n+1} + C = f + (2n-1)I_n + C.$$

To ale davá rovnost

$$2nI_{n+1} = f + (2n-1)I_n,$$

z které již požadovaný závěr plyne. ♣

Následující příklad ukazuje, že v některých případech při hledání primitivní funkce metodou per partes musíme vyřešit funkcionální rovnici.

8.1.17. Příklad. Spočtěte primitivní funkci k funkci $e^x \sin x$ na $\mathbb{R}$.

Řešení. Z věty o vztahu spojitosti a existence primitivní funkce (Věta 8.1.6) plyne, že funkce $e^x \sin x$ má na $\mathbb{R}$ primitivní funkci. Dvojím použitím Věty 8.1.12 dostaneme

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x\,\mathrm{d}x &= e^x \sin x - \int e^x \cos x\,\mathrm{d}x \\ &= e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x(-\sin x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Lemma 8.1.11 nyní použijeme pro obdrženou rovnost $A = g - A$, kde $A = \int e^x \sin x\,\mathrm{d}x$ a $g = e^x(\sin x - \cos x)$. Přičtením A k oběma stranám rovnice tak obržíme $2A =$

$g+C$, kde C značí množinu všech konstatních funkcí na intervalu $(-\infty,\infty)$. Z této rovnosti již plyne

$$\int e^x \sin x \, dx \overset{c}{=} \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x), \qquad x \in (-\infty,\infty).$$

♣

8.1.18. Použijme metodu per partes pro výpočet primitivní funkce k funkci tg na intervalu $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. Dostáváme

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg} x \, dx &= \int \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} \, dx = (-\cos x)\frac{1}{\cos x} - \int (-\cos x)\frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx \\ &= -1 + \int \operatorname{tg} x \, dx, \qquad x \in (-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}).\end{aligned}$$

Tato rovnost by mohla svádět k odvození identity $0=-1$. Tento spor je však jen zdánlivý, neboť správně použité Lemma 8.1.11 dává pro $A = \int \operatorname{tg} x \, dx$ rovnost $C = -1+C$, kde C značí množinu všech konstantních funkcí na intervalu $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, která žádný spor nepředstavuje.

8.1.19. Věta (Darboux)**.** Nechť f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci. Potom má f Darbouxovu vlastnost na I, tj. $f(J)$ je interval, kdykoliv $J \subset I$ je interval.

Důkaz. Nechť $J \subset I$ je interval. Předpokládejme, že $y_1, y_2 \in f(J)$, $y_1 < y_2$ a $z \in (y_1,y_2)$. Chceme ukázat, že $z \in f(J)$. To nám postačí k důkazu tvrzení dle Lemmatu 1.5.28.

Nechť F je primitivní k funkci f na I. Definujme funkci

$$H(x) = F(x) - zx, \quad x \in I.$$

Pak H je spojitá na I a pro každé $x \in I$ platí

$$H'(x) = f(x) - z,$$

tj. H má na I vlastní derivaci.

Nalezneme $x_1, x_2 \in J$ taková, že $f(x_1) = y_1$ a $f(x_2) = y_2$. Předpokládejme, že $x_1 < x_2$. (V opačném případě bychom postupovali obdobně.) Protože funkce H nabývá na intervalu $[x_1,x_2]$ minima (Věta **??**), můžeme ho označit jako x_0. Jelikož

$$H'(x_1) = f(x_1) - z < 0,$$

existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P^+(x_1,\delta)\colon H(x) < H(x_1).$$

Tedy $x_0 \neq x_1$. Obdobně odvodíme z faktu $H'(x_2) = f(x_2) - z > 0$, že $x_0 \neq x_2$.

Máme tedy $x_0 \in (x_1,x_2)$, a proto platí $H'(x_0) = 0$ (vizte Větu 5.1.31). Odtud $f(x_0) = z$. ■

8.1.20. Nechť I je otevřený interval a $f\colon I \to \mathbb{R}$. Potom na I platí následující implikace:

$$f \text{ je spojitá} \Rightarrow f \text{ má primitivní funkci} \Rightarrow f \text{ má Darbouxovu vlastnost.}$$

8.1.21. Z Věty 8.1.19 plyne, že funkce sign nemá na intervalu $(-1,1)$ primitivní funkci.

8.1.22. Věta (první věta o substituci)**.** Nechť $a,b,\alpha,\beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$, F je primitivní funkce k f na (a,b), $\varphi\colon (\alpha,\beta) \to (a,b)$ a pro každé $t \in (\alpha,\beta)$ existuje vlastní $\varphi'(t)$. Potom

$$\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \stackrel{c}{=} F\big(\varphi(t)\big), \quad t \in (\alpha,\beta).$$

Důkaz. Podle věty o derivaci složené funkce (Věta 5.1.24) platí

$$\big(F(\varphi(t))\big)' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t), \quad t \in (\alpha,\beta),$$

čímž je tvrzení dokázáno. ∎

V následujících příkladech použijeme právě dokázanou první větu o substituci.

8.1.23. Příklad. Spočtěte

$$\int \sin^4 t \cos t \,\mathrm{d}t.$$

Řešení. Položme $(a,b) = (\alpha,\beta) = (-\infty,\infty)$,

$$f(x) = x^4,\ x \in (a,b) \quad \text{a} \quad \varphi(t) = \sin t,\ t \in (\alpha,\beta).$$

Potom

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \frac{1}{5}x^5, \quad x \in (a,b).$$

Tedy dle první věty o substituci (Věta 8.1.22) platí

$$\int \sin^4 t \cdot \cos t\,\mathrm{d}t = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \stackrel{c}{=} \frac{1}{5}\sin^5 t, \quad t \in (\alpha,\beta).$$

♣

8.1.24. Příklad. Určete primitivní funkci k funkci $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2+5x^2}}$.

Řešení. Daná funkce je spojitá na celém $\mathbb{R}$, existuje k ní tedy primitivní funkce na celém $\mathbb{R}$. Při výpočtu $\int g(x)\,\mathrm{d}x$ použijeme substituci „$t = 2 + 5x^2$“, tj. funkci $\varphi\colon \mathbb{R} \to (0,+\infty)$, $\varphi(x) = 2 + 5x^2$, neboť si všimneme, že $\varphi'(x) = 10x$, a tedy

$$\int \frac{x}{\sqrt{2+5x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{10}\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi(x)}}\,\mathrm{d}x.$$

Podle Věty 8.1.22 je třeba vypočítat

$$\frac{1}{10}\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \stackrel{c}{=} \frac{1}{5}\sqrt{t}, \quad t \in (0,+\infty).$$

Každá funkce

$$x \mapsto \frac{1}{5}\sqrt{2+5x^2} + c,$$

kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta, je tedy primitivní funkcí k funkci g na $\mathbb{R}$. ♣

8.1.25. Příklad. Určete primitivní funkci k funkci $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$.

Řešení. Funkce g je spojitá na svém definičním oboru $(-2/3, 4/3)$, a tedy k ní na tomto intervalu existuje funkce primitivní. Nejprve si funkci g upravíme následujícím způsobem:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{9-(3x-1)^2}} = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3x-1}{3}\right)^2}}.$$

Počítejme tedy

$$\frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1/3)^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Tento integrál připomíná integrál

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \stackrel{c}{=} \arcsin t.$$

Užijeme Větu 8.1.22. Roli funkce φ bude plnit funkce $x \mapsto x - 1/3$, jejíž derivace je rovna 1. Dostáváme tak

$$\frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1/3)^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{1-\varphi^2(x)}}\,\mathrm{d}x.$$

Podle Věty 8.1.22 stačí spočítat

$$\frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \stackrel{c}{=} \frac{1}{3}\arcsin t, \quad t \in (-1,1),$$

takže

$$\frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1/3)^2}}\,\mathrm{d}t \stackrel{c}{=} \frac{1}{3}\arcsin(x-1/3), \quad x \in (-2/3, 4/3).$$

♣

8.1.26. Chceme-li použít Větu 8.1.22 při výpočtu primitivní funkce k funkci g, je třeba nalézt funkce f a φ tak, aby platilo $g = (f \circ \varphi)\cdot\varphi'$. Často postupujeme tak, že nejprve zvolíme funkci φ a k ní pak určíme funkci f. V Příkladech 8.1.24 a 8.1.25 jsme výraz $\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ nahradili výrazem $\mathrm{d}t$ a zbývající část integrandu již byla ve tvaru $f \circ \varphi$. Formálně jsme tedy provedli substituci $\varphi(t) = x$ a $\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$. Poslední vztah, kterému nedáváme žádný matematický význam, je užitečnou pomůckou při výpočtech.

V případě, že se nám nepodařilo tvar funkce f předchozím způsobem nalézt, ale derivace funkce φ je všude kladná (resp. všude záporná), můžeme postupovat následujícím způsobem. Výraz x nahradíme výrazem $\varphi^{-1}(t)$ a výraz $\mathrm{d}x$ výrazem $(\varphi^{-1})'(t)\,\mathrm{d}t$, tak obdržíme výraz $\int g\big(\varphi^{-1}(t)\big)(\varphi^{-1})'(t)\,\mathrm{d}t$. Integrand je potom hledanou funkcí f. Platí totiž

$$f\big(\varphi(x)\big)\cdot\varphi'(x) = g\big(\varphi^{-1}(\varphi(x))\big)\cdot(\varphi^{-1})'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) = g(x),$$

přičemž poslední rovnost plyne z věty o derivaci inverzní funkce (Věta 5.1.27).

8.1.27. Věta (druhá věta o substituci)**.** Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$, $\varphi\colon (\alpha, \beta) \to (a, b)$, pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ existuje $\varphi'(t)$ vlastní a nenulová a $\varphi\bigl((\alpha, \beta)\bigr) = (a, b)$. Nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b) a platí

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \stackrel{c}{=} G(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} G\bigl(\varphi^{-1}(x)\bigr), \quad x \in (a, b).$$

Důkaz. Funkce φ' je definována na (α, β) a podle Věty 8.1.19 platí buď $\varphi'(t) > 0$ pro každé $t \in (\alpha, \beta)$, nebo $\varphi'(t) < 0$ pro každé $t \in (\alpha, \beta)$. Tedy podle Věty 5.5.7 je buď φ klesající na (α, β), nebo je φ rostoucí na (α, β). V obou z těchto případů existuje inverzní funkce $\varphi^{-1}\colon (a, b) \to (\alpha, \beta)$. Pro každé $x \in (a, b)$ pak platí

$$\begin{aligned}(G(\varphi^{-1}(x)))' &= G'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1}(x))' \\ &= f(\varphi(\varphi^{-1}(x)))\varphi'(\varphi^{-1}(x))\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} \\ &= f(x).\end{aligned}$$

Při výpočtu jsme použili větu o derivaci složené funkce (Věta 5.1.24) a větu o derivaci inverzní funkce (Věta 5.1.27). ■

V následujícím příkladu použijeme druhou větu o substituci, kterou jsme právě dokázali.

8.1.28. Příklad. Spočtěte primitivní funkci k $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ na $(-1, 1)$.

Řešení. Položme $(a, b) = (-1, 1)$, $(\alpha, \beta) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a

$$\varphi(t) = \sin t \quad \text{pro } t \in (\alpha, \beta).$$

Pak $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$, pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ je $\varphi'(t) = \cos t \neq 0$ a $\varphi^{-1}(x) = \arcsin x$ pro $x \in (-1, 1)$. Dále platí

$$\begin{aligned}\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t &= \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t, \quad t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).\end{aligned}$$

Tedy podle druhé věty o substituci (Věta 8.1.27) platí

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x), \quad x \in (-1, 1).$$

♣

Uvedeme nyní ještě jednu užitečnou variantu věty o substituci.

8.1.29. Věta. Nechť $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ je spojitá, $\varphi\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ a pro každé $x \in (a, b)$ existuje $\varphi'(x)$ vlastní a nenulová. Potom $\varphi\,((a, b))$ je interval, který označíme (α, β). Definujeme funkci $g\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ předpisem $g(t) = f(\varphi^{-1}(t))(\varphi^{-1})'(t)$. Nechť G je primitivní funkce k g na (α, β). Potom $G \circ \varphi$ je primitivní funkce k f na (a, b).

Důkaz. Funkce φ má na (a,b) vlastní derivaci, tudíž je spojitá, a tedy má Darbouxovu vlastnost. Odtud plyne, že $\varphi((a,b))$ je interval. Podle Věty 8.1.19 platí buď $\varphi'(x) > 0$ pro každé $x \in (a,b)$, nebo $\varphi'(x) < 0$ pro každé $x \in (a,b)$. Tedy podle Věty 5.5.7 je buď φ klesající na (a,b), nebo je φ rostoucí na (a,b). V obou z těchto případů existuje inverzní funkce $\varphi^{-1}\colon (\alpha,\beta) \to (a,b)$. Odtud plyne, že funkce g je dobře definovaná. Potom pro každé $x \in (a,b)$ platí

$$\begin{aligned}(G \circ \varphi)'(x) &= (g \circ \varphi)(x)\varphi'(x) = f(x)(\varphi^{-1})'(\varphi(x))\varphi(x) \\ &= \frac{f(x)}{\varphi'(\varphi^{-1}(\varphi(x)))}\varphi'(x) = f(x).\end{aligned}$$

Odtud plyne tvrzení. ∎

8.1.30. Věta 8.1.6 říká, že spojitá funkce na otevřeném intervalu má vždy primitivní funkci. Ne vždy je ale možno tuto primitivní funkci vyjádřit pomocí elementárních funkcí – přesněji pomocí konečného počtu sčítání, násobení, dělení a skládání elementárních funkcí. Tuto vlastnost má například funkce e^{-x^2}, důkaz však není snadný. Ukážeme nyní některé druhy funkcí, kde tato potíž nevzniká. Základní třídou takových funkcí jsou funkce racionální. Ukážeme také ještě některé další typy funkcí, jejichž integraci je možné převést na integraci racionálních funkcí pomocí vhodné substituce.

Integrace racionálních funkcí.

8.1.31. Definice. Racionální funkcí budeme rozumět podíl dvou polynomů, kde polynom ve jmenovateli není identicky roven nule. Racionální funkce $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je definovaná na libovolné podmnožině $\mathbb{R}$, která neobsahuje žádný kořen polynomu Q.

8.1.32. Nejprve uvedeme některé poznatky z algebry. Všimněme si, že máme-li polynom

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

lze za proměnnou x dosazovat i komplexní čísla, přičemž hodnoty pak budou opět komplexní čísla. Každý polynom tedy můžeme chápat i jako zobrazení z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$. Ve zbytku tohoto oddílu budeme uvažovat i polynomy s komplexními koeficienty, tj. $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Podobně jako v reálném případě, je takový polynom roven nule pro každé $x \in \mathbb{C}$ právě tehdy, když jsou všechny jeho koeficienty nulové. Odtud plyne, že můžeme definovat stupeň takového polynomu stejně jako v reálném případě a budeme jej značit symbolem st P.

8.1.33. Lemma (o dělení polynomů)**.** Nechť P a Q jsou dva polynomy (obecně s komplexními koeficienty), přičemž polynom Q není nulový. Pak existují jednoznačně určené polynomy R a Z splňující:

- $\operatorname{st} Z < \operatorname{st} Q$,
- $P(x) = R(x)Q(x) + Z(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{C}$.

Pokud mají P a Q reálné koeficienty, mají i R a Z reálné koeficienty.

8.1.34. Důsledek. Je-li P polynom a $\lambda \in \mathbb{C}$ jeho **kořen** (tj. $P(\lambda) = 0$), pak existuje polynom R splňující $P(x) = (x - \lambda)R(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{C}$.

Důkaz. Položme $Q(x) = x - \lambda$. Pak dle Lemmatu 8.1.33 existují polynomy R a Z takové, že $P = RQ + Z$, kde $\operatorname{st} Z < \operatorname{st} Q = 1$. Polynom Z je tedy konstantní. Platí $0 = P(\lambda) = R(\lambda)(\lambda - \lambda) + Z(\lambda)$, tedy $Z(\lambda) = 0$. Z toho plyne, že Z je nulový. ■

8.1.35. Věta (rozklad na kořenové činitele)**.** Nechť $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ je polynom stupně $n \in \mathbb{N}$. Pak existují čísla $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ taková, že

$$P(x) = a_n(x - x_1)\cdots(x - x_n), \quad x \in \mathbb{C}. \tag{8.3}$$

Důkaz. Použijeme matematickou indukci. Pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé, neboť $P(x) = a_1\big(x - (-\frac{a_0}{a_1})\big)$ a stačí položit $x_1 = -\frac{a_0}{a_1}$. Nechť tedy $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, a tvrzení platí pro všechny polynomy stupně nejvýše $n-1$. Podle základní věty algebry (Věta **??**) existuje kořen $x_n \in \mathbb{C}$ polynomu P. Dle Důsledku 8.1.34 je $P(x) = (x - x_n)R(x)$ pro nějaký polynom R. Všimněme si, že $\operatorname{st} R = n - 1$ a navíc koeficient u x^{n-1} v polynomu R je roven a_n. Podle indukčního předpokladu tedy existuje rozklad $R(x) = a_n(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$. Tím dostaneme i požadovaný rozklad polynomu P. ■

8.1.36. (a) Pro každý polynom je rozklad (8.3) určený jednoznačně až na pořadí činitelů. Mezi čísly $x_1, \dots, x_n$ se vyskytují všechny kořeny polynomu P. Odtud plyne, že polynom stupně $n \in \mathbb{N}$ má nejvýše n různých kořenů.

(b) Tvrzení Důsledku 8.1.34 lze ještě dále zesílit následujícím způsobem. Je-li P nenulový polynom a $\lambda \in \mathbb{C}$, pak existuje právě jedno $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a jednoznačně určený polynom R splňující $P(x) = (x - \lambda)^k R(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{C}$ a $R(\lambda) \neq 0$.

Platí-li totiž $P(x) = (x - \lambda)^k R(x)$ pro jistý polynom R a $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pak je nutně polynom R nenulový a $k \leq \operatorname{st} P$. Můžeme tedy nalézt největší $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pro které existuje polynom R splňující $P(x) = (x - \lambda)^k R(x)$. Z Důsledku 8.1.34 plyne, že $R(\lambda) \neq 0$, jinak bychom dostali spor s maximalitou k.

Dokažme jednoznačnost. Předpokládejme, že platí $P(x) = (x - \lambda)^l \tilde{R}(x)$ pro nějaké $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a polynom $\tilde{R}$ splňující $\tilde{R}(\lambda) \neq 0$. Všimněme si, že z volby k plyne $l \leq k$. Pak dostáváme $(x - \lambda)^{k-l} R(x) = \tilde{R}(x)$ pro $x \neq \lambda$ a ze spojitosti plyne, že tento vztah je splněn i pro $x = \lambda$. Musí být $k = l$, jinak dosazením $x = \lambda$ dostáváme $\tilde{R}(\lambda) = 0$, což je spor. Potom také $R = \tilde{R}$, čímž je důkaz proveden.

8.1.37. Definice. Nechť P je nenulový polynom, $\lambda \in \mathbb{C}$ a $k \in \mathbb{N}$. Řekneme, že číslo λ je **kořen násobnosti** k polynomu P, jestliže existuje polynom R splňující $R(\lambda) \neq 0$ a $P(x) = (x - \lambda)^k R(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{C}$.

8.1.38. Poznámka. Z poznámky před definicí plyne, že násobnost kořene je určená jednoznačně a je rovna počtu výskytů čísla λ v n-tici $x_1, x_2, \dots, x_n$ z Věty 8.1.35.

8.1.39. Věta. Nechť P je polynom s reálnými koeficienty a $\lambda \in \mathbb{C}$ je kořen polynomu P násobnosti k. Pak i komplexně sdružené číslo $\overline{\lambda}$ je kořen polynomu P násobnosti k.

Důkaz. ∎

8.1.40. Věta. Nechť $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ je polynom stupně n s reálnými koeficienty. Pak existují reálná čísla $x_1, \dots, x_k, \alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_l$ a přirozená čísla $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_l$ taková, že

- $P(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \cdots (x - x_k)^{p_k} (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \cdots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$,
- žádné dva z polynomů $x - x_1, \dots, x - x_k, x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \dots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ nemají společný kořen,
- polynomy $x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \dots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ nemají žádný reálný kořen.

Důkaz. Nechť $x_1, \dots, x_k$ jsou všechny (navzájem různé) reálné kořeny polynomu P s násobnostmi $p_1, \dots, p_k$ a $z_1, \dots, z_l$ jsou kořeny polynomu P s kladnou imaginární složkou s násobnostmi $q_1, \dots, q_l$. Potom jsou též podle Věty 8.1.39 čísla $\overline{z_1}, \dots, \overline{z_l}$ kořeny polynomu P s násobnostmi $q_1, \dots, q_l$. Můžeme tedy psát

$$P(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \cdots (x - x_k)^{p_k} (x - z_1)^{q_1} (x - \overline{z_1})^{q_1} \cdots (x - z_l)^{q_l} (x - \overline{z_l})^{q_l}.$$

Dále platí $(x - z_i)(x - \overline{z_i}) = x^2 + (-z_i - \overline{z_i})x + z_i \overline{z_i}$. Obě čísla $-z_i - \overline{z_i}$, $z_i \overline{z_i}$ jsou reálná, a proto můžeme položit $\alpha_i = -z_i - \overline{z_i}$ a $\beta_i = z_i \overline{z_i}$. Snadno ověříme, že požadované vlastnosti jsou splněny. ∎

8.1.41. Věta (rozklad na parciální zlomky)**.** Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$ a nechť

$$Q(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \cdots (x - x_k)^{p_k} (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \cdots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$$

je rozklad polynomu Q z Věty 8.1.40. Pak existují jednoznačně určená reálná čísla $A_1^1, \dots, A_{p_1}^1, \dots, A_1^k, \dots, A_{p_k}^k, B_1^1, C_1^1, \dots, B_{q_1}^1, C_{q_1}^1, \dots, B_1^l, C_1^l, \dots, B_{q_l}^l, C_{q_l}^l$ taková, že platí

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_1^1}{(x - x_1)} + \dots + \frac{A_{p_1}^1}{(x - x_1)^{p_1}} + \dots + \frac{A_1^k}{(x - x_k)} + \dots + \frac{A_{p_k}^k}{(x - x_k)^{p_k}} + \\ & + \frac{B_1^1 x + C_1^1}{(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)} + \dots + \frac{B_{q_1}^1 x + C_{q_1}^1}{(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1}} + \dots + \\ & + \frac{B_1^l x + C_1^l}{(x^2 + \alpha_l x + \beta_l)} + \dots + \frac{B_{q_l}^l x + C_{q_l}^l}{(x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}}, \ x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_k\}. \end{aligned}$$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že Q je *monický*, tj. jeho vedoucí koeficient je roven 1.

1. Nejprve ukážeme, že tvrzení platí pro případ, kdy $Q(x) = (x - x_1)^n$ nebo $Q(x) = (x^2 + \alpha x + \beta)^n$. Je-li $n = 1$, je výraz $\frac{P}{Q}$ v požadovaném tvaru.

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k < n$, kde $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Nechť nyní Q je tvaru $Q(x) = (x - x_1)^n$. Pak existují polynom A a $r \in \mathbb{R}$ takové, že $P(x) = A(x)(x - x_1) + r$. Tedy

$$\frac{P(x)}{(x - x_1)^n} = \frac{A(x)}{(x - x_1)^{n-1}} + \frac{r}{(x - x_1)^n}.$$

Na první člen vpravo aplikujeme indukční předpoklad a druhý je již v požadovaném tvaru.

Podobně postupujeme v případě $Q(x) = (x^2 + \alpha x + \beta)^n$. Předpokládáme-li platnost tvrzení pro každé $k < n$, kde $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, píšeme $P(x) = A(x)(x^2 + \alpha x + \beta) + R(x)$, kde A je polynom a R je polynom nejvýše stupně 1. Pak

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A(x)}{(x^2 + \alpha x + \beta)^{n-1}} + \frac{R(x)}{(x^2 + \alpha x + \beta)^n}.$$

Opět lze na první člen použít indukční předpoklad, zatímco druhý je v požadovaném tvaru.

Tím je tvrzení dokázáno v případě, kdy Q je polynom typu $(x - x_1)^n$ nebo $(x^2 + \alpha x + \beta)^n$, kde kvadratický člen je nerozložitelný.

2. Dokazujme nyní tvrzení pro případ, kdy Q je součinem n různých typů nerozložitelných prvočinitelů. Pro případ $n = 1$ bylo tvrzení dokázáno v části 1.

Předpokládejme nyní jeho platnost pro všechna $k < n$, kde $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Nechť $Q = GH$ je polynom stupně n, kde G i H jsou monické, nesdílejí žádné netriviální společné dělitele a $\operatorname{st} P < n$. Tedy $\operatorname{st} P < \operatorname{st} G + \operatorname{st} H = n$ a $\min\{\operatorname{st} G, \operatorname{st} H\} \geq 1$. Jelikož nemají G a H žádného netriviálního společného dělitele, dle Lemmatu **??** existují polynomy C a D takové, že $1 = CG + DH$. Pak C nemá společný násobek s H a D nemá společný násobek s G. Pak máme

$$\frac{P}{Q} = \frac{P(CG + DH)}{Q} = \frac{PCG}{Q} + \frac{PDH}{Q} = \frac{PC}{H} + \frac{PD}{G}.$$

Dostali jsme tak součet dvou výrazů, z nichž každý má ve jmenovateli méně než n různých nerozložitelných prvočinitelů. V případě, kdy $\operatorname{st} PC < \operatorname{st} H$ a $\operatorname{st} PD < \operatorname{st} G$, lze aplikovat indukční předpoklad a důkaz ukončit. V opačném případě předpokládejme nejprve, že $\operatorname{st} PC \geq \operatorname{st} H$. Pak $PC = GH + R$ pro nějaké polynomy Q a R, kde $\operatorname{st} R < \operatorname{st} H$. To implikuje, že R nesdílí s H žádného společného dělitele, neboť v opačném případě by společný dělitel H a R byl též dělitelem P (neboť C nemá s H společného dělitele), což by byl spor s podmínkou (vii).

Máme tak

$$\frac{P}{Q} = \frac{P(CG + DH)}{Q} = \frac{(QH + R)G + DHP}{Q} = \frac{RG + (Q + DF)H}{Q}.$$

Jako výše díky podmínce (vii) vidíme, že $Q + DF$ nemá společného dělitele s G. Pak

$$\operatorname{st} RG < \operatorname{st} H + \operatorname{st} G \quad \text{a} \quad \operatorname{st} P < \operatorname{st} H + \operatorname{st} G,$$

a tedy též

$$\operatorname{st}(Q + DF) < \operatorname{st} H + \operatorname{st} G.$$

Tedy $\operatorname{st}(Q + DF) < \operatorname{st} G$ a $\operatorname{st} R < \operatorname{st} H$. Dostáváme tak

$$\frac{P}{Q} = \frac{RG + (Q + DF)H}{Q} = \frac{R}{H} + \frac{Q + DF}{G},$$

přičemž na oba zlomky na pravé straně již lze použít indukční předpoklad.

Důkaz je tak dokončen. ■

8.1.42 (postup při hledání primitivní funkce k funkci racionální)**.** Mějme polynomy P a Q. Máme-li integrovat racionální funkci P/Q, pak postupujeme takto:

V případě, že stupeň P je větší nebo roven stupni Q, vydělíme polynom P polynomem Q (Lemma 8.1.33) a obdržíme rozklad

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{Z(x)}{Q(x)},$$

kde R, Z jsou polynomy a stupeň Z je menší než stupeň Q. Je snadné nalézt primitivní funkci k polynomu R. Pokud je polynom Z nenulový, nebo $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$, zbývá nalézt primitivní funkci k racionální funkci Z/Q, resp. P/Q, kde stupeň čitatele je menší než stupeň jmenovatele. Tuto funkci rozložíme na parciální zlomky podle předchozí věty. Jednotlivé parciální zlomky pak zintegrujeme.

Nyní si ukážeme jak na to. Parciální zlomek odpovídající reálnému kořeni a integrujeme následovně:

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \begin{cases} \frac{1}{1-n}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} & \text{na } (-\infty, a) \text{ a na } (a, +\infty) \text{ pro } n > 1, \\ \log|x-a| & \text{na } (-\infty, a) \text{ a na } (a, +\infty) \text{ pro } n = 1. \end{cases}$$

Parciální zlomek typu

$$\frac{Bx + C}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q},$$

kde $B, C, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{N}$ a polynom $x^2 + \alpha x + \beta$ nemá žádný reálný kořen, integrujeme takto:

$$\int \frac{Bx + C}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q}\,\mathrm{d}x = \frac{B}{2}\underbrace{\int \frac{2x + \alpha}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q}\,\mathrm{d}x}_{I_1} + \\ + \left(C - \frac{B\alpha}{2}\right)\underbrace{\int \frac{1}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q}\,\mathrm{d}x}_{I_2}.$$

Integrály I_1 a I_2 lze spočítat následovně:

$$I_1 \overset{c}{=} \begin{cases} \frac{1}{(1-q)(x^2+\alpha x+\beta)^{q-1}} & \text{na } \mathbb{R} \text{ pro } q > 1, \\ \log(x^2 + \alpha x + \beta) & \text{na } \mathbb{R} \text{ pro } q = 1; \end{cases}$$

$$I_2 = \int \frac{1}{\left((x + \alpha/2)^2 + \beta - \alpha^2/4\right)^q}\,\mathrm{d}x = \\ = \frac{1}{(\beta - \alpha^2/4)^q}\int \frac{1}{\left(\left(\frac{x+\alpha/2}{\sqrt{\beta-\alpha^2/4}}\right)^2 + 1\right)^q}\,\mathrm{d}x.$$

V poslední úpravě využíváme nerovnost $\beta - \alpha^2/4 > 0$, která vyplývá z předpokladu, že polynom $x^2 + \alpha x + \beta$ nemá žádný reálný kořen. Diskriminant rovnice $x^2 + \alpha x +$

$\beta = 0$ je pak totiž záporný. Užitím substituce $t = \frac{x+\alpha/2}{\sqrt{\beta-\alpha^2/4}}$ převedeme úlohu na integraci funkce typu

$$\frac{1}{(1+t^2)^q}.$$

Integraci této funkce jsme si ukázali v Příkladu 8.1.16.

8.1.43. Příklad. Určete primitivní funkci k funkci

$$f(x) = \frac{x}{(x^2+2x+2)^2(x^2+2x-3)}.$$

Řešení. Nejprve určíme definiční obor funkce f. Výraz x^2+2x+2 je vždy kladný, x^2+2x-3 lze rozložit a platí $x^2+2x-3 = (x-1)(x+3)$. Odtud je vidět, že $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$. Funkce f je spojitá na celém D_f. Má tedy primitivní funkci na každém z intervalů $(-\infty, -3)$, $(-3, 1)$ a $(1, +\infty)$.

Protože polynom v čitateli je menšího stupně, než polynom ve jmenovateli, můžeme funkci f rozložit na D_f na parciální zlomky. Rozklad bude mít tvar

$$\begin{aligned}\frac{x}{(x^2+2x+2)^2(x-1)(x+3)} &= \\ &= \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{E}{x-1} + \frac{F}{x+3}.\end{aligned} \tag{8.4}$$

Vynásobením této rovnice jmenovatelem levé strany dostaneme vztah

$$\begin{aligned}x = {}&(Ax+B)(x^2+2x+2)(x-1)(x+3)+ \\ &+ (Cx+D)(x-1)(x+3)+ \\ &+ E(x^2+2x+2)^2(x+3) + F(x^2+2x+2)^2(x-1),\end{aligned} \tag{8.5}$$

který platí pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$. Polynomy jsou však spojité na $\mathbb{R}$, a proto vztah (8.5) platí pro každé $x \in \mathbb{R}$. Nyní můžeme postupovat dvěma způsoby:

a) Porovnáme koeficienty u stejných mocnin x na levé a na pravé straně vztahu (8.5).

$$\begin{aligned}
x^5&: & 0 &= A + E + F, \\
x^4&: & 0 &= 4A + B + 7E + 3F, \\
x^3&: & 0 &= 3A + 4B + C + 20E + 4F, \\
x^2&: & 0 &= -2A + 3B + 2C + D + 32E, \\
x^1&: & 1 &= -6A - 2B - 3C + 2D + 28E - 4F, \\
x^0&: & 0 &= -6B - 3D + 12E - 4F.
\end{aligned}$$

Dostali jsme tak soustavu šesti lineárních rovnic o šesti neznámých.

b) Dosadíme do (8.5) šest různých čísel za x a opět získáme soustavu šesti lineárních rovnic o šesti neznámých. Nejvýhodnější je dosazovat taková čísla, pro která se některé sčítance rovnají 0 (tj. reálné kořeny jmenovatele původního zlomku – v našem případě čísla -3 a 1).

Obvykle obě metody vhodně kombinujeme. Postupným dosazením kořenů 1 a -3 do (8.5) získáme $E = 1/100$ a $F = 3/100$. Tyto hodnoty pak dosadíme do soustavy získané v a). Z první rovnice máme $A = -1/25$, z druhé $B = 0$, z poslední $D = 0$ a konečně ze čtvrté $C = -1/5$. Tím máme určeny koeficienty v rozkladu (8.4), který má tedy tvar

$$f(x) = -\frac{1}{25} \cdot \frac{x}{x^2 + 2x + 2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{x}{(x^2 + 2x + 2)^2} + \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{x - 1} + \frac{3}{100} \cdot \frac{1}{x + 3}.$$

Zbývá nyní provést výpočet primitivních funkcí k jednotlivým parciálním zlomkům.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{x^2 + 2x + 2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{2} \log(x^2 + 2x + 2) - \int \frac{1}{(x + 1)^2 + 1}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \\
&\stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \log(x^2 + 2x + 2) - \operatorname{arctg}(x + 1), \ x \in \mathbb{R}, \\
\int \frac{x}{(x^2 + 2x + 2)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2}{(x^2 + 2x + 2)^2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{(x^2 + 2x + 2)^2}\,\mathrm{d}x = \\
&= -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} - \int \frac{1}{\left((x + 1)^2 + 1\right)^2}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \\
&\stackrel{c}{=} -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} - \frac{1}{2} \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x + 1), \ x \in \mathbb{R}, \\
\int \frac{1}{x - 1}\,\mathrm{d}x &\stackrel{c}{=} \log|x - 1|, \ x \in (-\infty, 1) \text{ a } x \in (1, +\infty), \\
\int \frac{1}{x + 3}\,\mathrm{d}x &\stackrel{c}{=} \log|x + 3|, \ x \in (-\infty, -3) \text{ a } x \in (-3, +\infty).
\end{aligned}$$

Na každém z intervalů $(-\infty, -3)$, $(-3, 1)$ a $(1, +\infty)$ je tak primitivní funkcí k funkci f kterákoliv z funkcí

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{50} \log(x^2 + 2x + 2) + \frac{7}{50} \operatorname{arctg}(x + 1) + \frac{1}{10} \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 2} + \\
+ \frac{1}{100} \log|x - 1| + \frac{3}{100} \log|x + 3| + c, \quad \text{kde } c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

♣

8.1.44. Příklad. Najděte primitivní funkci k $\frac{x^5 - x^3 + 2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1}$.

Řešení. Standardním postupem (dělením polynomů) spočteme

$$\frac{x^5 - x^3 + 2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1} = x^3 + 2 + 3\frac{x + 1}{x^2 - 1} = x^3 + 2 + 3\frac{1}{x - 1}.$$

Tedy

$$\int \frac{x^5 - x^3 + 2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1}\,dx \stackrel{c}{=} \frac{x^4}{4} + 2x + 3\log|x-1|$$
$$\text{na } (-\infty,-1), (-1,1) \text{ a na } (1,\infty).$$

♣

8.1.45. Příklad. Najděte primitivní funkci k $\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x^2+x+1)}$.

Řešení. Obecný rozklad na parciální zlomky má tvar

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1},$$

kde $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Vynásobíme obě strany výrazem $(x+1)^2(x^2+x+1)$ a obdržíme

$$x^2+1 = x^3(B+C) + x^2(A+2B+2C+D) + x(A+2B+2C+2D) + (A+B+D).$$

Dva polynomy se rovnají právě tehdy, když se rovnají všechny jejich koeficienty. Tedy dostaneme tedy soustavu čtyř lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 0 &= B + C \\ 1 &= A + 2B + 2C + D \\ 0 &= A + 2B + C + 2D \\ 1 &= A + B + D. \end{aligned}$$

Jejím řešením je

$$A = 2, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = -1.$$

Tedy

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x^2+x+1)} = \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2+x+1}.$$

Máme

$$\int \frac{2}{(x+1)^2}\,dx \stackrel{c}{=} \frac{-2}{x+1} \quad \text{na } (-\infty,-1) \text{ a } (-1,\infty)$$

a

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2 + 1}\,dx.$$

Ten substitucí $t = \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}$ převedeme na integrál $\int \sqrt{\frac{3}{4}}\frac{1}{t^2+1}\,dt$. Tedy

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} \stackrel{c}{=} \sqrt{\frac{4}{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right) \quad \text{na } \mathbb{R}.$$

Dohromady máme

$$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \frac{-2}{x+1} + \sqrt{\frac{4}{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)$$

$$\text{na } (-\infty,-1) \text{ a } (-1,\infty).$$

♣

Trigonometrické substituce.

8.1.46. Definice. Polynomem dvou proměnných rozumíme funkci

$$[u,v] \mapsto \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} u^i v^j,$$

kde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ pro $i, j \in \{0,\dots,n\}$. **Racionální funkcí** dvou proměnných rozumíme podíl polynomů dvou proměnných, kde polynom ve jmenovateli není identicky roven nule.

8.1.47. Označení. Až do konce tohoto oddílu budeme symbolem R značit racionální funkci dvou proměnných.

8.1.48. Definice. Řekneme, že R je **sudá v první souřadnici**, pokud pro každé $(x,y) \in \mathcal{D}(R)$ platí $(-x,y) \in \mathcal{D}(R)$ a máme $R(-x,y) = R(x,y)$. Analogicky definujeme **lichost v první** a **sudost** a **lichost v druhé souřadnici**.

Funkce R je **sudá**, pokud pro každé $(x,y) \in \mathcal{D}(R)$ platí $(-x,-y) \in \mathcal{D}(R)$ a $R(x,y) = R(-x,-y)$. Analogicky definujeme lichost funkce R.

8.1.49. Nechť R je racionální funkce dvou proměnných a I je otevřený neprázdný interval. Uvažujme integrál tvaru

$$\int R(\sin t, \cos t)\,\mathrm{d}t, \qquad t \in I, \tag{8.6}$$

přičemž integrand je definován na intervalu I. Pro převedení úlohy na integraci racionální funkce lze použít následujících substitucí.

(a) Je-li R lichá ve druhé souřadnici, lze užít substituci $\sin t = x$. Přesněji řečeno: použijeme Větu 8.1.22 pro funkci $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem $\varphi(t) = \sin t$. Příslušnou funkci f lze pak volit jako racionální funkci jedné reálné proměnné. Podobné upřesnění je možné doplnit i v následujících bodech (b)-(d).

(b) Je-li R lichá v první souřadnici, lze užít substituci $\cos t = x$.

(c) Je-li R sudá, lze užít substituci $\operatorname{tg} t = x$.

(d) Vždy lze použít substituci $\operatorname{tg}(t/2) = x$.

8.1.50. Příklad. Určete primitivní funkci k funkci $g(t) = \dfrac{\sin t \cos t}{\sin^4 t + \cos^4 t}$, $t \in \mathbb{R}$.

Řešení. Funkce g je spojitá na $\mathbb{R}$, má tedy na $\mathbb{R}$ primitivní funkci. Označme

$$R(u,v) = \frac{uv}{u^4+v^4}.$$

Potom $g(t) = R(\sin t, \cos t)$ a vidíme, že R je lichá v první i v druhé souřadnici a je také sudá. Pro převod na integraci racionální funkce lze tedy užít jakoukoliv ze substitucí uvedených v 8.1.49.

Vyzkoušejme nejprve substituci $x = \operatorname{tg}(t/2)$ pro $t \in (-\pi, \pi)$. Abychom mohli tuto substituci provést, vypočtěme nejprve

$$\begin{aligned}
\cos t &= \cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2} = \frac{\cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2} + \sin^2\frac{t}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}} = \frac{1-x^2}{1+x^2},\\
\sin t &= 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2} + \sin^2\frac{t}{2}} = \frac{2x}{1+x^2},\\
\mathrm{d}t &= \frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Při určení $\mathrm{d}x$ jsme použili rovnost $x = 2\operatorname{arctg} t$ a 8.1.26.

Substitucí převedeme zadaný integrál na integrál

$$\int \frac{\frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^4 + \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^4}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 4\int \frac{t(1-t^2)(1+t^2)}{16t^4+(1-t^2)^4}\,\mathrm{d}t.$$

Je vidět, že jsme dosáhli svého cíle. Výsledná racionální funkce je ale komplikovaná a navíc bychom museli ještě překonat potíže spojené s tím, že substituci provádíme pouze pro $x \in (-\pi, \pi)$, popřípadě na intervalu vzniklém posunutím o $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Zkusme tedy další substituce.

(a) Substituce $x = \sin t$. V našem případě lze funkci f upravit na tvar

$$f(t) = \frac{\sin t}{\sin^4 t + (1-\sin^2 t)^2}\cdot\cos t.$$

Uvědomíme-li si, že při uvedené substituci je $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$, dostáváme

$$\int \frac{x}{2x^4-2x^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

Užitím substituce $u = x^2$ tento integrál dále převedeme na

$$\int \frac{1}{4u^2-4u+2}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{(2u-1)^2+1}\,\mathrm{d}u \overset{c}{=} \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2u-1),\ u \in \mathbb{R}.$$

Dostáváme tedy

$$\int g(t)\,\mathrm{d}t \overset{c}{=} \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\sin^2 t - 1),\ t \in \mathbb{R}.$$

(b) Substituce $t = \cos x$. Funkci f lze upravit na tvar

$$f(x) = \frac{\cos x}{(1-\cos^2 x)^2 + \cos^4 x}\cdot\sin x.$$

Uvědomíme-li si, že $\mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$, dostáváme

$$-\int \frac{t}{(1-t^2)^2+t^4}\,\mathrm{d}t \stackrel{c}{=} -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2t^2-1),\ t \in \mathbb{R}.$$

(Výpočet je zcela analogický výpočtu v předchozím případě.) Primitivní funkcí k f je na $\mathbb{R}$ kterákoliv z funkcí

$$-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\cos^2 x - 1) + c,$$

kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta.

(c) Zkusme ještě substituci $t = \operatorname{tg} x$, která je v našem případě rovněž použitelná. Vydělíme čitatele i jmenovatele ve vyjádření $f(x)$ výrazem $\cos^2 x$ a dostaneme

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\sin^2 x \operatorname{tg}^2 x + \cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^4 x + 1}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Nyní použijeme vztah $\mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$. Pak je třeba vypočítat

$$\int \frac{t}{t^4+1}\,\mathrm{d}t \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t^2,\ t \in \mathbb{R}.$$

Dostáváme tak primitivní funkci $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$, ale pouze na intervalech $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. My však víme, že funkce f má primitivní funkci na celém $\mathbb{R}$ (je totiž na $\mathbb{R}$ spojitá). Tuto primitivní funkci můžeme nalézt způsobem, který byl popsán v předchozím příkladu.

Pokusme se shrnout: Početně nejjednodušší integrace vyšla při substituci $t = \operatorname{tg} x$. Pak jsme ovšem nezískali primitivní funkci na celém D_f. Tento nedostatek lze překonat „nalepováním“ v bodech, které jsme museli vynechat. Obdobná situace je při užití substituce $t = \operatorname{tg}(x/2)$ - ta však většinou vede na složitější racionální funkce než substituce zbývající. Je tedy lepší - pokud to dovoluje tvar integrované funkce - se jejímu použití vyhnout a použít příslušnou ze zbývajících tří substitucí.

Z výše uvedeného je vidět, že tvar výsledku může podstatně záviset na použité substituci, vždy však jde o funkce, které se liší pouze o konstantu. ♣

8.1.51. Příklad. Určete primitivní funkci k $f(x) = \dfrac{1}{1+3\cos^2 x}$.

Řešení. Funkce f je spojitá na celém $\mathbb{R}$ a má tedy na $\mathbb{R}$ primitivní funkci. Označíme-li

$$R(u,v) = \frac{1}{1+3v^2},$$

potom $f(x) = R(\sin x, \cos x)$. Platí $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$. Lze tedy užít substituci $t = \operatorname{tg} x$ pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Abychom tuto substituci mohli provést, vypočtěme

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}.$$

Dále z rovnosti $x = \operatorname{arctg} t$ dostáváme $\mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ podle poznámky na straně **??**. Substitucí převedeme zadaný integrál na integrál

$$\int \frac{1}{1+3\frac{1}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{4+t^2}\,\mathrm{d}t \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Podle věty o substituci tedy platí

$$\int \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{2}\right), \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}.$$

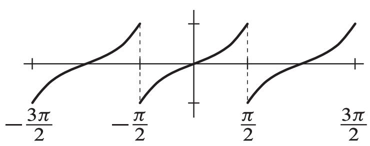
Označíme-li $F(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{2}\right)$, je funkce F primitivní k f na každém z intervalů $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. My ovšem hledáme primitivní funkci na celém $\mathbb{R}$. Každá primitivní funkce G k f na $\mathbb{R}$ je rovna $F + c_k$ na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, kde $k \in \mathbb{Z}$ a $c_k \in \mathbb{R}$ je vhodná konstanta. Protože G je spojitá a platí rovnosti

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+k\pi-} G(x) = \frac{\pi}{4} + c_k \qquad \text{a} \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}+k\pi+} G(x) = -\frac{\pi}{4} + c_{k+1},$$

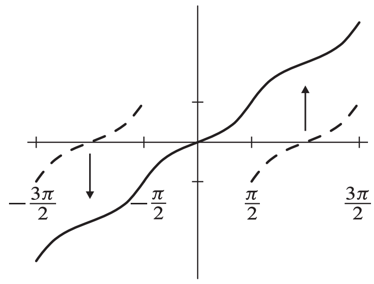
musí platit $c_{k+1} = c_k + \frac{\pi}{2}$ pro $k \in \mathbb{Z}$. Odtud plyne $c_k = c_0 + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Každá primitivní funkce k f má tedy tvar

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{2}\right) + c_0 + k\frac{\pi}{2} & \text{pro } x \in \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right), \\ \frac{\pi}{4} + c_0 + k\frac{\pi}{2} & \text{pro } x = \frac{\pi}{2}+k\pi. \end{cases}$$

Funkce G vznikla tak, že na každém intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ jsme k funkci F přičetli vhodnou konstantu tak, aby výsledná funkce byla spojitá, vizte obrázky. Tomuto postupu se říká „lepení“.



Obrázek 1.



Obrázek 2.

♣

8.1.52. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x \sin^2 x}.$$

Řešení. Zadaná trigonometrická funkce je typu (ii)

♣

8.1.53. Věta. Nechť f, F jsou spojité funkce na otevřeném intervalu I, $c \in I$ a nechť $F'(x) = f(x)$ pro $x \in I \setminus \{c\}$. Pak $F' = f$ na I.

Důkaz. Tvrzení ihned plyne z Věty 5.2.9. ■

8.1.54. Příklad. Spočtěte $\int \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Protože $R(a,b) = \frac{1}{1+a^2}$, použijeme substituci $t = \operatorname{tg} x$. V první větě o substituci (Věta 8.1.22) je pak $\varphi(t) = \operatorname{arctg} t$, $(\alpha,\beta) = (-\infty,\infty)$ a $(a,b) = (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. Zjevně je $\varphi'(t) = \frac{1}{1+t^2}$ nenulová na $(-\infty,\infty)$ a $\varphi((-\infty,\infty)) = (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

Protože $\operatorname{tg} x = t$, máme

$$t^2 = \operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}.$$

Tedy

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Počítáme tedy integrál

$$\int \frac{1}{1+\frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{1+2t^2}\,\mathrm{d}t \overset{c}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}t) \quad \text{na } \mathbb{R}.$$

Z druhé věty o substituci (Věta 8.1.27) tedy plyne, že

$$\int \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x), \quad x \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}). \tag{8.7}$$

Funkce $\frac{1}{1+\sin^2 x}$ je ale spojitá na celém $\mathbb{R}$, a tedy dle Věty **??** má na $\mathbb{R}$ primitivní funkci G. Tu najdeme pomocí již nalezené funkce F z (8.7). Protože

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} F(x) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} F(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

položíme

$$G(x) = \begin{cases} F(x) + k\frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & x \in (k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}), \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + k\frac{\pi}{\sqrt{2}}, & x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Pak G je spojitá funkce a v každém bodě $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ platí $G'(x) = (1+\sin^2 x)^{-1}$. V bodech tvaru $k\pi + \frac{\pi}{2}$ tato rovnost platí díky Větě 8.1.53. ♣

Integrály typu $R\Big(x, \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}}\Big)$**.**

8.1.55. Při integraci funkce $R\Big(x, \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}}\Big)$, kde $q \in \mathbb{N}$ a čísla $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ splňují $ad - bc \neq 0$, lze užít substituci $t = \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ pro převod na integraci racionální funkce.

8.1.56. Věta (Integrály tvaru $\int R(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{q}})$)**.** Nechť $q \in \mathbb{N}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad \neq bc$ a $R(x, y)$ je racionální funkcí dvou proměnných. Nechť I je otevřený interval obsažený v $\mathcal{D}\left(R\left(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{1}{q}}\right)\right)$. Položíme $\varphi(x) = (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{1}{q}}$, $x \in I$. Pak je φ monotónní funkce, $J = \varphi(I)$ je otevřený interval a $t \mapsto R(\varphi^{-1}(t), t)(\varphi^{-1})'(t)$ je racionální spojitá funkce definovaná na J. Je-li F její primitivní funkce na J, je $F \circ \varphi$ primitivní funkce k $R\left(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{1}{q}}\right)$ na I.

Důkaz. Zobrazení $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ je ryze monotónní na každém otevřeném intervalu obsaženém v jeho definičním oboru. Vhledem k monotonii odmocniny pak dostáváme ryzí monotonii funkce $x \mapsto \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{q}}$ na každém otevřeném intervalu obsaženém v definičním oboru této funkce. Proto je φ ryze monotónní funkce a její obor hodnot J je otevřený interval (viz Věta 4.3.6). Inverzní funkce $\varphi^{-1} \colon J \to I$ je určena jako $\varphi^{-1}(t) = \frac{t^q d - b}{a - t^q c}$, z čehož plyne, že $t \mapsto R(\varphi^{-1}(t), t)(\varphi^{-1})'(t)$ je racionální funkce na J. Fakt, že $F \circ \varphi$ je primitivní k $R\left(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{1}{q}}\right)$ na I, nyní plyne z Věty 8.1.27. ■

8.1.57. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Funkce $\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ je definovaná na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$ a je na nich spojitá. Na nich tedy budeme hledat primitivní funkci. Položme $t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$. Pak

$$x = \frac{t^2+1}{t^2-1} = \varphi(t),$$

přičemž $\varphi \colon (0,1) \to (-\infty, -1)$ a $\varphi \colon (1, \infty) \to (1, \infty)$ jsou bijekce s nenulovou derivací

$$\varphi'(t) = \frac{-4t}{(t^2-1)^2}.$$

Podle druhé věty o substituci (Věta 8.1.27) dostaneme integrál

$$I = \int \frac{t^2-1}{t^2+1} t \frac{-4t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{-4t^2}{(t^2+1)(t^2-1)}\,\mathrm{d}t.$$

Rozkladem na parciální zlomky zjistíme, že

$$\frac{4t^2}{(t^2+1)(t^2-1)} = -\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} - \frac{2}{t^2+1}.$$

Tedy

$$I \stackrel{c}{=} \log|t+1| - \log|t-1| - 2\operatorname{arctg} t, \quad \text{na } (0,1) \text{ a } (1,\infty).$$

Závěrem dostáváme

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \log\left|\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1}\right| - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \quad \text{na } (-\infty,-1) \text{ a } (1,\infty).$$

♣

8.1.58. Příklad. Určete primitivní funkci k funkci $f(x) = \dfrac{x-1}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}$.

Řešení. Funkce je na $D_f = (0,+\infty)$ spojitá a má zde tedy primitivní funkci.

Vyskytují-li se v předpisu funkce f výrazy

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}},$$

kde $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $ad-bc \neq 0$, $p_1,\ldots,p_n \in \mathbb{Z}$, $q_1,\ldots,q_n \in \mathbb{N}$, pak užijeme substituci $t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{s}}$, kde s je nejmenší společný násobek čísel $q_1,\ldots,q_n$.

V našem případě máme v předpisu funkce f mocniny $x^{1/2}$ a $x^{2/3}$. Nejmenší společný násobek čísel 2 a 3 je 6. Užijeme tedy substituci $t = x^{1/6}$, $x \in (0,+\infty)$. Odtud odvodíme $\mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t$. Na intervalu $(0,+\infty)$ pak hledáme primitivní funkci

$$\int \frac{t^6-1}{t^6(t^3+t^4)}\cdot 6t^5\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^6-1}{t^5+t^4}\,\mathrm{d}t.$$

Protože v posledním integrovaném výrazu (je to racionální funkce proměnné t) je stupeň čitatele větší než stupeň jmenovatele, musíme nejprve dělit:

$$\begin{aligned}(t^6-1):(t^5+t^4) &= t-1+\frac{t^4-1}{t^4(t+1)} = \\ &= t-1+\frac{(t-1)(t+1)(t^2+1)}{t^4(t+1)} = \\ &= t-1+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^4}.\end{aligned}$$

Nyní již můžeme integrovat

$$6\int\frac{t^6-1}{t^5+t^4}\,\mathrm{d}t \stackrel{c}{=} 3t^2-6t+6\log t+6\frac{1}{t}-3\frac{1}{t^2}+2\frac{1}{t^3}, \quad t\in(0,+\infty).$$

Dle věty o substituci je primitivní funkcí k f na $(0, +\infty)$ každá funkce tvaru

$$3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + \log x + 6\frac{1}{\sqrt[6]{x}} - 3\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 2\frac{1}{\sqrt{x}} + c,$$

kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta. ♣

Integrály typu $\int R\bigl(t, \sqrt{at^2+bt+c}\bigr)\,\mathrm{d}t$.

8.1.59. Také integraci funkce $R\bigl(t, \sqrt{at^2+bt+c}\bigr)$, kde R je racionální funkce dvou proměnných, lze převést na integraci racionální funkce. Nechť tedy $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ a I je neprázdný otevřený interval obsažený v definičním oboru funkce

$$g(t) = R\bigl(t, \sqrt{at^2+bt+c}\bigr).$$

V závislosti na vlastnostech polynomu $q(t) = at^2 + bt + c$ můžeme pro převod použít některý z následujících postupů.

(a) Pokud má q dvojnásobný reálný kořen α. Pak platí $q(t) = a(t-\alpha)^2$. Funkce g má neprázdný definiční obor, a proto $a > 0$. Pak platí

$$\sqrt{q(t)} = \sqrt{a}|t-\alpha|, \qquad t \in \mathbb{R},$$

a g je tedy na každém z intervalů $I_1 = (-\infty, \alpha) \cap I$, $I_2 = (\alpha, \infty) \cap I$ funkcí racionální. Potom na I_1 a I_2 můžeme nalézt primitivní funkci dříve uvedeným postupem. Pokud $\alpha \in I$, pak primitivní funkci na I obdržíme tak, že nalezneme primitivní funkci F_1 na intervalu I_1 a řešení F_2 na intervalu I_2. Potom „slepíme“ F_1 a $F_2 + c$, tak, abychom dostali spojitou funkci na I, která bude primitivní ke g na I.

(b) Pokud $a > 0$ a polynom q nemá dvojnásobný reálný kořen, tj. $b^2 - 4ac \neq 0$, pak lze pro převod na integraci racionální funkce poiužít použít substituci

$$\varphi(t) = \sqrt{at^2+bt+c} - \sqrt{a}t, \quad t \in I. \tag{8.8}$$

Pro $t \in I$ platí

$$\varphi'(t) = \frac{2at+b}{2\sqrt{at^2+bt+c}} - \sqrt{a}$$

a odtud snadno díky předpokladu $b^2 - 4ac \neq 0$ ověříme, že $\varphi'(t) \neq 0$ pro každé $t \in I$. Funkce φ je tedy na I ryze monotónní, $\varphi(I)$ je otevřený interval a inverzní funkce k φ má tvar

$$\varphi^{-1}(x) = \frac{c-x^2}{2\sqrt{a}x-b}, \qquad x \in \varphi(I).$$

Vypočítejme derivaci funkce φ^{-1}. Pro každé $x \in \mathcal{D}(\varphi^{-1})$ platí

$$(\varphi^{-1})'(x) = \frac{-2\sqrt{a}x^2 + 2bx - 2c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}x-b)^2}$$

Odtud plyne, že funkce $(g \circ \varphi^{-1}) \cdot (\varphi^{-1})'$ je racionální funkce definovaná na otevřeném intervalu $\varphi(I)$. Pokud G značí k ní primitivní, je $G \circ \varphi$ primitivní funkce ke g. Substituce (8.8) se většinou zapisuje ve tvaru

$$\sqrt{at^2 + bt + c} = \sqrt{a}t + x,$$

který se i lépe pamatuje.

(c) Pokud $a < 0$ a polynom q nemá dvojnásobný reálný kořen, pak má q dva reálné kořeny, jinak by byl definiční obor g prázdný. Označme kořeny q jako α_1 a α_2, přičemž $\alpha_1 < \alpha_2$. Pro každé $t \in (\alpha_1, \alpha_2)$ platí

$$\sqrt{q(t)} = \sqrt{a(t - \alpha_1)(t - \alpha_2)} = \sqrt{-a}(t - \alpha_1)\sqrt{\frac{\alpha_2 - t}{t - \alpha_1}}.$$

Tato rovnost ukazuje, že funkci g lze na intervalu I, který je podmnožinou (α_1, α_2) psát ve tvaru, který byl uveden v 8.1.55.

8.1.60. Příklad. Spočtěte $\displaystyle\int \frac{1}{t + \sqrt{t^2 + t + 1}}\, \mathrm{d}t$.

Řešení. Integrand označíme g. Funkce g je spojitá na definičním oboru $\mathcal{D}(g) = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$. Výraz pod odmocninou je kladný na celém $\mathbb{R}$, použijeme tedy Eulerovu substituci $\sqrt{t^2 + t + 1} = t + x$. Vypočteme

$$t = \frac{x^2 - 1}{1 - 2x}, \qquad \mathrm{d}t = -2\frac{x^2 - x + 1}{(1 - 2x)^2}\, \mathrm{d}x.$$

Potřebujeme ještě vyjádřit v nové proměnné x výraz $\sqrt{t^2 + t + 1}$, což je jednoduché:

$$\sqrt{t^2 + t + 1} = t + x = \frac{x^2 - 1}{1 - 2x} + x.$$

Nyní provedeme substituci a dostáváme po úpravě

$$\int \frac{2x^2 - 2x + 2}{(x - 2)(2x - 1)}\, \mathrm{d}x.$$

V získané racionální funkci je stupeň polynomu v čitateli stejný jako stupeň polynomu ve jmenovateli, musíme tedy nejprve provést dělení:

$$(2x^2 - 2x + 2) : (2x^2 - 5x + 2) = 1 + \frac{3x}{(x - 2)(2x - 1)}.$$

Druhý sčítanec rozložíme na parciální zlomky a dostaneme

$$\int \frac{2x^2 - 2x + 2}{(x - 2)(2x - 1)}\, \mathrm{d}x = \int 1\, \mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{x - 2}\, \mathrm{d}x - \int \frac{1}{2x - 1}\, \mathrm{d}x \stackrel{c}{=}$$
$$\stackrel{c}{=} x + 2\log|x - 2| - \frac{1}{2}\log|2x - 1|$$

na intervalech $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ a $(2, \infty)$.

Podle Věty 8.1.22) má tedy primitivní funkce k funkci g na každém z intervalů $(-\infty,-1)$ a $(-1,\infty)$ tvar

$$\sqrt{t^2+t+1}-t+2\log\left|\sqrt{t^2+t+1}-t-2\right| \\ -\frac{1}{2}\log\left|2\sqrt{t^2+t+1}-2t-1\right|+c, \quad c\in\mathbb{R}. \quad \clubsuit$$

8.1.61. Příklad. Spočtěte $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Použijeme substituci

$$\sqrt{x^2+1}=x+t.$$

Pak

$$x=\frac{1-t^2}{2t}=\varphi(t)$$

a

$$\varphi'(t)=\frac{1(1-t^2)}{2t^2}.$$

Pak $\varphi:(0,1)\to(0,\infty)$ a $\varphi:(1,\infty)\to(-\infty,0)$ jsou bijekce s nenulovou derivací. Tedy počítáme integrál

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{2t}\frac{1+t^2}{2t}}\frac{-(1+t^2)}{2t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{-2}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = -\left(\int\frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t+\int\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t\right) \\ &\overset{c}{=} -\log\left|t^2-1\right|. \end{aligned}$$

Tedy

$$\int\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x=-\log\left|\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2-1\right| \quad \text{na } (-\infty,0) \text{ a } (0,\infty).$$

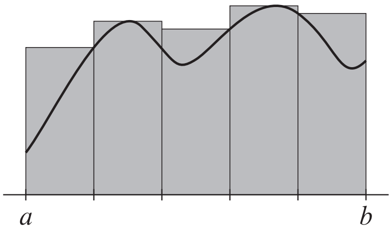
♣

8.2. Riemannův integrál

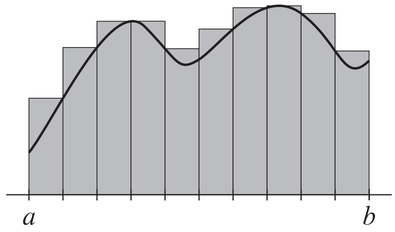
Zavedení Riemannova integrálu je mimo jiné motivováno problémem, jak definovat pojem obsahu i pro komplikovanější množiny v rovině než jsou jednoduché geometrické útvary jako obdélník, trojúhelník, apod.

Mějme tedy omezenou nezápornou funkci f definovanou na omezeném uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$. Chceme definovat, jakou plochu má obrazec pod grafem funkce f tak, aby to bylo v souladu s tím, jak počítáme plochu u jednoduchých geometrických obrazců.

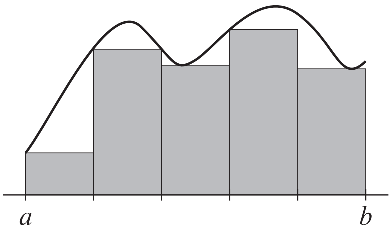
Jednou z možností je aproximovat obrazec pomocí konečných sjednocení obdélníků, jejichž plochu známe, a pak pomocí „limitního přechodu“ dojít k výsledku. Celá myšlenka je patrna z následujících obrázků. V prvních dvou odhadujeme plochu obrazce shora, ve druhých dvou naopak zdola.



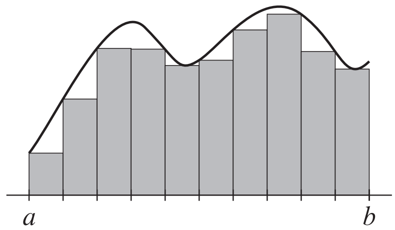
Obrázek 3.



Obrázek 4.



Obrázek 5.



Obrázek 6.

Vyjádřeme tyto intuitivní úvahy matematicky přesnou řečí.

8.2.1. Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom **dělením intervalu** $[a, b]$ nazveme každou konečnou posloupnost $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, pro kterou platí $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Body dělení D nazýváme **dělícími body** D. **Normou dělení** D rozumíme číslo

$$\nu(D) = \max\big\{x_i - x_{i-1};\ i \in \{1, \ldots, n\}\big\}.$$

Řekneme, že dělení D' je **jemnější** než D (nebo že D' **zjemňuje** D), pokud všechny dělící body D jsou obsaženy v D'.

8.2.2. Označení. Nechť f je reálná funkce a $M \subset \mathbb{R}$. Potom symbol $\sup_M f$ značí $\sup\{f(x);\ x \in M\}$ a symbol $\inf_M f$ značí $\inf\{f(x);\ x \in M\}$.

8.2.3. Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je omezená funkce na $[a, b]$. Nechť $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ je nějaké dělení intervalu $[a, b]$. Potom definujeme

$$\overline{S}(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1})$$

a

$$\underline{S}(f,D)=\sum_{i=1}^{n}\inf_{[x_{i-1},x_i]} f\cdot(x_i-x_{i-1}).$$

Hodnotu $\overline{S}(f,D)$ pak nazýváme **horním Riemannovým součtem** funkce f pro dělení D a hodnotu $\underline{S}(f,D)$ **dolním Riemannovým součtem** funkce f pro dělení D.

Dále definujeme **horní Riemannův integrál** funkce f přes interval $[a,b]$ předpisem

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=\inf\{\overline{S}(f,D);\ D \text{ je dělení intervalu } [a,b]\}$$

a **dolní Riemannův integrál** funkce f přes interval $[a,b]$ předpisem

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=\sup\{\underline{S}(f,D);\ D \text{ je dělení intervalu } [a,b]\}.$$

8.2.4. Definice. Nechť $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, a nechť f je omezená funkce na $[a,b]$. Řekneme, že funkce f má na intervalu $[a,b]$ **Riemannův integrál**, pokud $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$. Hodnota Riemannova integrálu funkce f přes interval $[a,b]$ je pak rovna společné hodnotě $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ a značíme ji $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Je-li $a>b$, pak definujeme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$, a je-li $a=b$ položíme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

8.2.5. Označení. Nechť $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. Potom množinu všech funkcí, které mají Riemannův integrál na intervalu $[a,b]$, značíme symbolem $\mathcal{R}(a,b)$.

8.2.6. Omezenost funkce f v definici Riemannova integrálu je nezbytná, protože v opačném případě by hodnoty $\overline{S}(f,D)$ a $\underline{S}(f,D)$ nemusely být vlastní.

8.2.7. Příklady. (a) Nechť $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, a $c\in\mathbb{R}$. Nechť $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ je funkce definovaná předpisem $f(x)=c$, $x\in[a,b]$. Potom $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=c(b-a)$, protože pro každý neprázdný interval $I\subset[a,b]$ platí $\sup_I f=\inf_I f=c$, a tedy $\overline{S}(f,D)=\underline{S}(f,D)=c(b-a)$ pro každé dělení D intervalu $[a,b]$.

(b) Nechť $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. Nechť D je Dirichletova funkce. Potom $\underline{\int_a^b} D(x)\,\mathrm{d}x=0$ a $\overline{\int_a^b} D(x)\,\mathrm{d}x=1$. Riemannův integrál funkce D tedy neexistuje.

(c) Nechť R je Riemannova funkce. Potom $R\in\mathcal{R}(a,b)$ a $\int_a^b R(x)\,\mathrm{d}x=0$ (odvodíme později).

(d) Platí $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$ (odvodíme později).

8.2.8. Poznámka. Nechť $M_1,M_2\subset\mathbb{R}$, $M_1\subset M_2$. Nechť f je funkce definovaná alespoň na M_2. Potom platí

$$\sup_{M_1} f\le\sup_{M_2} f\quad\text{a}\quad\inf_{M_1} f\ge\inf_{M_2} f.$$

8.2.9. Věta (vlastnosti dělení)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je omezená funkce na $[a, b]$.

(a) Nechť D, D' jsou dělení intervalu $[a, b]$, přičemž D' zjemňuje D. Pak platí

$$\underline{S}(f, D) \le \underline{S}(f, D') \le \overline{S}(f, D') \le \overline{S}(f, D).$$

(b) Nechť D_1, D_2 jsou dělení intervalu $[a, b]$. Pak platí

$$\underline{S}(f, D_1) \le \overline{S}(f, D_2).$$

(c) Platí

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. (a) Druhá nerovnost zřejmě platí z definice. Dokažme tedy první. Předpokládáme-li, že $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ a D' obsahuje oproti D právě jeden bod navíc, řekněme z ležící mezi body x_{j-1} a x_j pro nějaké $j \in \{1, \dots, n\}$, pak platí

$$\begin{aligned}\underline{S}(f, D') - \underline{S}(f, D) = &\inf_{[x_{j-1}, z]} f \cdot (z - x_{j-1}) + \inf_{[z, x_j]} f \cdot (x_j - z) \\ &- \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f \cdot (x_j - x_{j-1}).\end{aligned}$$

Protože

$$\inf_{[x_{j-1}, z]} f \ge \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f \quad \text{a} \quad \inf_{[z, x_j]} f \ge \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f,$$

dostáváme

$$\underline{S}(f, D') - \underline{S}(f, D) \ge \left(\inf_{[x_{j-1}, x_j]} f\right)(z - x_{j-1} + x_j - z - x_j + x_{j-1}) = 0.$$

Tím je důkaz prvé nerovnosti proveden pro případ, kdy D' obsahuje oproti D jeden dělící bod navíc. Obecný případ prvé nerovnosti pak snadno odvodíme indukcí.

Důkaz třetí nerovnosti je pak možno vést obdobně jako důkaz nerovnosti prvé.

(b) Máme-li dána dělení D a D', snadno najdeme dělení D'' zjemňující D i D'. Dle bodu (a) pak platí

$$\underline{S}(f, D) \le \underline{S}(f, D'') \le \overline{S}(f, D'') \le \overline{S}(f, D').$$

(c) Je-li D dělení $[a, b]$, pak z (b) máme

$$\underline{S}(f, D) \le \inf\{\overline{S}(f, D'); D' \text{ dělení } [a, b]\} = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tedy i

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\{\underline{S}(f, D); D \text{ dělení } [a, b]\} \le \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tím je důkaz proveden. ■

8.2.10. Důsledek. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je omezená funkce na $[a, b]$. Nechť D_1, D_2 jsou dělení intervalu $[a, b]$. Označme kde $m = \inf_{[a,b]} f$ a $M = \sup_{[a,b]} f$. Pak

$$m(b-a) \leq \underline{S}(f, D_1) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D_2) \leq M(b-a).$$

Důkaz. První a poslední nerovnost plyne z definice horního a dolního součtu pro dělení $D'' = \{a, b\}$. Druhá a čtvrtá nerovnost plynou z definice horního a dolního Riemannova integrálu. Konečně třetí nerovnost plyne z Věty 8.2.9. ■

8.2.11. Věta (aproximace Riemannova integrálu součty přes dělení s malou normou). Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je omezená funkce na $[a, b]$. Pak pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D) < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon$$

a

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \geq \underline{S}(f, D) > \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon.$$

Důkaz. Dokažme nejprve tvrzení týkající se posledních dvou nerovností. Funkce f je omezená, a tedy existuje kladné číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall x \in [a, b] : |f(x)| < K.$$

Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, je dáno. K němu nalezneme dělení $D_0 = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a, b]$ takové, že

$$\overline{S}(f, D_0) < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Položme

$$\mu(D_0) = \min\{x_i - x_{i-1};\ i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

a

$$\delta_1 = \min\{\mu(D_0), \frac{\varepsilon}{4Kn}\}.$$

Nechť nyní D je dělení intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta_1$. Vezmeme dělení P sestávající ze všech dělicích bodů D_0 a D a označme $X = \{x_0, \ldots, x_n\}$ množinu dělicích bodů D_0. Ověřme nejprve, že

$$\overline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, P) + 2Kn\nu(D). \tag{8.9}$$

Označme totiž jako $\mathcal{D}$ všechny intervaly dané dělením D a $\mathcal{P}$ všechny intervaly dané dělením P. Nechť dále $|I|$ značí délku intervalu I. Pak

$$\overline{S}(f, D) = \sum_{I \in \mathcal{D}} \sup_I f \cdot |I| \quad \text{a} \quad \overline{S}(f, P) = \sum_{I \in \mathcal{P}} \sup_I f \cdot |I|$$

Nechť interval $I = [\alpha, \beta]$ splňuje $I \in \mathcal{D}$. Je-li obsažen i v $\mathcal{P}$, příspěvek příslušný tomuto intervalu je v obou horních součtech stejný. Není-li I v $\mathcal{P}$, protíná jeho vnitřek množinu X. Vzhledem k nerovnosti $\nu(D) < \mu(D_0)$ existuje právě jeden index $i \in \{0, \dots, n\}$ takový, že $\alpha < x_i < \beta$. V součtu $\overline{S}(f, D)$ se nyní vyskytuje výraz

$$\sup_{[\alpha,\beta]} f \cdot (\beta - \alpha),$$

zatímco v $\overline{S}(f, P)$ máme součet

$$\sup_{[\alpha,x_i]} f \cdot (x_i - \alpha) + \sup_{[x_i,\beta]} f \cdot (\beta - x_i).$$

Rozdíl těchto výrazů odhadneme jako

$$\begin{aligned}&\left|\sup_{[\alpha,\beta]} f(\beta - \alpha) - \Big(\sup_{[\alpha,x_i]} f(x_i - \alpha) + \sup_{[x_i,\beta]} f(\beta - x_i)\Big)\right| \\ &\le K(\beta - \alpha) + K(x_i - \alpha + \beta - x_i) = 2K(\beta - \alpha) \le 2K\nu(D).\end{aligned}$$

Jelikož je intervalů z $\mathcal{D}$ protínajících X nejvýše n, máme

$$\overline{S}(f, D) - \overline{S}(f, P) \le 2Kn\nu(D),$$

tj. nerovnost (8.9).

Použitím této nerovnosti pak dostáváme díky volbě δ_1 nerovnosti

$$\begin{aligned}\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x &\le \overline{S}(f, D) \le \overline{S}(f, P) + 2Kn\nu(D) \\ &\le \overline{S}(f, D_0) + \frac{\varepsilon}{2} \le \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + 2\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Tedy δ_1 splňuje požadavek daný v tvrzení druhou sérií nerovností.

Analogicky bychom našli $\delta_2 \in \mathbb{R}$, $\delta_2 > 0$, takové, že pro každé dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta_2$ platí

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \ge \underline{S}(f, D) \ge \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon.$$

Kladné číslo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ pak zjevně vyhovuje požadovaným vlastnostem, a důkaz je tedy hotov. ■

8.2.12. Důsledek. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je omezená funkce na $[a, b]$. Nechť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost dělení intervalu $[a, b]$ splňující $\lim \nu(D_n) = 0$. Pak

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n) \quad \text{a} \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n).$$

Důkaz. Dokážeme pouze druhý vztah, první lze dokázat obdobně. Nechť $\varepsilon > 0$. K němu dle Věty 8.2.11 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$\overline{S}(f, D) < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $\nu(D_n) < \delta$. Pak pro každé $n \geq n_0$ platí

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D_n) < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

Tím je důkaz dokončen. ■

8.2.13. Věta. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f je omezená funkce na $[a, b]$ a posloupnost dělení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ intervalu $[a, b]$ splňuje

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n). \tag{8.10}$$

Potom $f \in \mathcal{R}(a, b)$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n). \tag{8.11}$$

Důkaz. Dle Věty 8.2.9 pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\underline{S}(f, D_n) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D_n).$$

Odtud plyne

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n).$$

Díky (8.10) dostáváme $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$. Funkce f je tedy riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$ a platí (8.11). ■

8.2.14. Příklad. Ukažte podle definice Riemannova integrálu, že funkce $f(x) = x^2$ splňuje $f \in \mathcal{R}(0, 1)$ a spočtěte $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme tzv. **ekvidistantní** dělení $D_n = \{\frac{j}{n}\}_{j=0}^{n}$ intervalu $[0, 1]$. Pak $\lim \nu(D_n) = \frac{1}{n} = 0$ a platí

$$\underline{S}(f, D_n) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{j-1}{n}\Big)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{1}{6n^3}(n-1)n(2n-1),$$

$$\overline{S}(f, D_n) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{j}{n}\Big)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{6n^3} n(n+1)(2n+1).$$

Tedy

$$\lim \underline{S}(f, D_n) = \lim \overline{S}(f, D_n) = \frac{1}{3}.$$

Dle Věty 8.2.13 pak máme $f \in \mathcal{R}(0, 1)$ a $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$. ♣

8.2.15. Věta (kritérium existence Riemannova integrálu)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je omezená funkce na $[a, b]$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:

(i) $f \in \mathcal{R}([a,b])$,
(ii) pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje dělení D intervalu $[a,b]$ takové, že

$$\overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) < \varepsilon.$$

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Nechť $f \in \mathcal{R}(a,b)$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existují dělení D_1, D_2 intervalu $[a,b]$ taková, že

$$\overline{S}(f,D_1) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad \underline{S}(f,D_2) > \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nechť D je dělení intervalu $[a,b]$ zjemňující D_1 i D_2. Pak dostaneme díky Větě 8.2.9 nerovnosti

$$\begin{aligned}\overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) &\le \overline{S}(f,D_1) - \underline{S}(f,D_2)\\ &\le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Tedy (ii) platí.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolné. K němu nalezneme dělení D intervalu $[a,b]$ takové, že $\overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) < \varepsilon$. Pak ale máme

$$0 \le \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) < \varepsilon.$$

Tedy $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ a $f \in \mathcal{R}(a,b)$. ∎

8.2.16. Definice. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a f je funkce definovaná alespoň na I. Řekneme, že f je **stejnoměrně spojitá** na I, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x,y \in I\colon \big(|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\big).$$

8.2.17. Je-li funkce f na intervalu I stejnoměrně spojitá, pak je na I spojitá.

Nechť $x_0 \in I$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ z definice stejnoměrné spojitosti pro ε. Tedy jsou-li $x, y \in I$ body splňující $|x-y| < \delta$, je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Je-li nyní $y \in I$, $|x_0 - y| < \delta$, je $|f(y) - f(x_0)| < \varepsilon$. Funkce f je proto spojitá v bodě x_0, respektive je spojitá zleva či zprava v x_0 v závislosti na poloze x_0 v I.

8.2.18. Příklad. Nechť $I = (0,1)$ a $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in I$. Dokažte, že f je spojitá na I, ale není stejnoměrně spojitá na I.

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $x_n = \frac{1}{n}$ a $y_n = \frac{1}{n+1}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ a $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$. Pro $\varepsilon \in (0,1)$ tedy nenalezneme $\delta > 0$ požadované v definici stejnoměrné spojitosti. ∎

8.2.19. Věta (vztah spojitosti a stejnoměrné spojitosti)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je spojitá funkce na $[a,b]$. Potom f je stejnoměrně spojitá na $[a,b]$.

Důkaz. Nechť f není stejnoměrně spojitá na $[a,b]$. Potom platí

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x, y \in [a,b] \colon \big(|x-y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon\big).$$

Mějme tedy kladné $\varepsilon \in \mathbb{R}$ z tohoto výroku. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují $x_n, y_n \in [a,b]$ taková, že

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Posloupnost $\{x_n\}$ je omezená, a proto z ní lze díky Bolzanově-Weierstrassově větě 2.4.7 vybrat podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergující k bodu $x \in \mathbb{R}$. Ten je pak obsažen v $[a,b]$ (Věta 2.2.42). Protože

$$|x - y_{n_k}| \leq |x - x_{n_k}| + |x_{n_k} - y_{n_k}| \leq |x - x_{n_k}| + \frac{1}{n_k},$$

konverguje i posloupnost $\{y_{n_k}\}$ k x.

Podle Heineovy věty (Věta 4.3.2) platí

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}). \tag{8.12}$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$0 \leq \left|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\right| \leq \left|f(x_{n_k}) - f(x)\right| + \left|f(x) - f(y_{n_k})\right|. \tag{8.13}$$

Díky (8.12) platí

$$\lim_{k\to\infty} \big(|f(x_{n_k}) - f(x)| + |f(x) - f(y_{n_k})|\big) = 0.$$

Odtud a z (8.13) dostáváme pomocí věty o dvou strážnících

$$\lim_{k\to\infty} \left|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\right| = 0.$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ však platí $\left|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\right| \geq \varepsilon$, což je spor. ■

8.2.20. Věta (vztah spojitosti a riemannovské integrovatelnosti)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je spojitá funkce na $[a,b]$. Potom $f \in \mathcal{R}(a,b)$.

Důkaz. Funkce f je omezená na $[a,b]$ (Důsledek 4.3.11). Pro ověření riemannovské integrovatelnosti můžeme použít Větu 8.2.15. Nechť $\varepsilon > 0$. Funkce f je stejnoměrně spojitá (Věta 8.2.19), lze tedy nalézt $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x, y \in [a,b] \colon (|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Zvolme nyní dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ intervalu $[a,b]$ takové, že $\nu(D) < \delta$. Pak pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ máme díky stejnoměrné spojitosti

$$\sup_{[x_{i-1},x_i]} f \leq \inf_{[x_{i-1},x_i]} f + \varepsilon,$$

a tedy

$$\begin{aligned}\overline{S}(f,D)-\underline{S}(f,D)&=\sum_{i=1}^{n}\Big(\sup_{[x_{i-1},x_i]}f-\inf_{[x_{i-1},x_i]}f\Big)\cdot(x_i-x_{i-1})\\&\le\sum_{i=1}^{n}\varepsilon(x_i-x_{i-1})=\varepsilon(b-a).\end{aligned}$$

Věta 8.2.15 tedy říká, že f je riemannovsky integrovatelná na $[a,b]$. ■

8.2.21. Věta (vztah monotonie a riemannovské integrovatelnosti)**.** Nechť $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, a f je monotónní funkce na $[a,b]$. Potom $f\in\mathcal{R}(a,b)$.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že f je neklesající. Pak je omezená, neboť

$$\forall x\in[a,b]\colon\ f(a)\le f(x)\le f(b).$$

Opět použijeme Větu 8.2.15. Nechť $\varepsilon>0$. Nalezneme $n\in\mathbb{N}$ takové, že

$$\frac{1}{n}(b-a)\big(f(b)-f(a)\big)<\varepsilon,$$

a zvolíme dělení $D=\{x_i\}_{i=0}^n$, kde $x_i=a+\frac{b-a}{n}i$, $i=0,\dots,n$. Pak platí

$$\begin{aligned}\overline{S}(f,D)-\underline{S}(f,D)&=\sum_{i=1}^{n}\sup_{[x_{i-1},x_i]}f\cdot(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^{n}\inf_{[x_{i-1},x_i]}f\cdot(x_i-x_{i-1})\\&=\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)(x_i-x_{i-1})\\&=\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)\frac{b-a}{n}\\&=\frac{b-a}{n}\big(f(b)-f(a)\big)<\varepsilon.\end{aligned}$$

Podle Věty 8.2.21 tedy platí $f\in\mathcal{R}(a,b)$. ■

8.2.22. Věta (linearita Riemannova integrálu)**.** Nechť $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, $f,g\in\mathcal{R}(a,b)$ a $\alpha\in\mathbb{R}$. Pak $f+g\in\mathcal{R}(a,b)$, $\alpha f\in\mathcal{R}(a,b)$ a platí

$$\int_a^b\big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Funkce f a g jsou riemannovsky integrovatelné funkce na $[a,b]$, a proto jsou na tomto intervalu omezené. Tedy i funkce $f+g$ je omezená na $[a,b]$.

Je-li $I\subset[a,b]$ neprázdný interval, platí

$$\inf_I f+\inf_I g\le\inf_I(f+g)\quad\text{a}\quad\sup_I(f+g)\le\sup_I f+\sup_I g.$$

Proto pro libovolné dělení D intervalu $[a, b]$ máme

$$\underline{S}(f, D) + \underline{S}(g, D) \leq \underline{S}(f + g, D) \leq \overline{S}(f + g, D) \leq \overline{S}(f, D) + \overline{S}(g, D). \qquad (8.14)$$

Zvolme posloupnost dělení $\{D_n\}$ intervalu $[a, b]$, jejichž norma konverguje k 0. Pak dle Důsledku 8.2.12 platí

$$\lim_{n\to\infty} \left(\overline{S}(f, D_n) + \overline{S}(g, D_n)\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\underline{S}(f, D_n) + \underline{S}(g, D_n)\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Ze (8.14) tedy máme podle věty o dvou strážnících

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f + g, D_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f + g, D_n) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Z Důsledku 8.2.12 plyne $f + g \in \mathcal{R}(a, b)$ a

$$\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right) \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Předpokládejme nyní, že platí $f \in \mathcal{R}(a, b)$ a $\alpha \geq 0$. Funkce αf je omezená na $[a, b]$. Dále pro každý interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I \alpha f = \alpha \sup_I f \quad \text{a} \quad \inf_I \alpha f = \alpha \inf_I f.$$

Tedy pro posloupnost $\{D_n\}$ dělení intervalu $[a, b]$ splňující $\lim \nu(D_n) = 0$ máme

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(\alpha f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha \overline{S}(f, D_n) = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(\alpha f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha \underline{S}(f, D_n) = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Z Důsledku 8.2.12 tedy plyne $\alpha f \in \mathcal{R}(a, b)$ a $\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

K dokončení důkazu nyní stačí ověřit požadované tvrzení pro $\alpha = -1$. Pro každý interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I(-f) = -\inf_I f \quad \text{a} \quad \inf_I(-f) = -\sup_I f,$$

a tedy pro posloupnost dělení $\{D_n\}$ intervalu $[a, b]$ splňující $\lim \nu(D_n) = 0$ dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(-f, D_n) = \lim_{n\to\infty} -\underline{S}(f, D_n) = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(-f, D_n) = \lim_{n\to\infty} -\overline{S}(f, D_n) = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jako výše proto platí $-f \in \mathcal{R}(a, b)$ a $\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. ■

8.2.23. Věta (Riemannův integrál a uspořádání)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f, g \in \mathcal{R}(a, b)$ a $f(x) \le g(x)$ pro každé $x \in [a, b]$. Pak platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Nechť $\{D_n\}$ je posloupnost dělení a $\lim \nu(D_n) = 0$. Podle předpokladu pro každý interval $I \subset [a, b]$ platí $\sup_I f \le \sup_I g$, a tedy

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) \le \lim_{n\to\infty} \overline{S}(g, D_n) = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

■

8.2.24. Věta (aditivita Riemannova integrálu)**.** Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$, a f je funkce definovaná na $[a, b]$. Pak platí $f \in \mathcal{R}(a, b)$ právě tehdy, když $f \in \mathcal{R}(a, c)$ a $f \in \mathcal{R}(c, b)$. Je-li $f \in \mathcal{R}(a, b)$, pak platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{8.15}$$

Důkaz. Nechť $\{D_n^1\}$, $\{D_n^2\}$ jsou posloupnosti dělení intervalu $[a, c]$, respektive $[c, b]$, přičemž jejich normy konvergují k 0. Nechť $\{D_n\}$ je dělení sestávající z dělících bodů dělení D_n^1 a D_n^2. Pak platí $\lim \nu(D_n) = 0$.

$\Leftarrow$ Předpokládejme nejprve, že f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, c]$ i na intervalu $[c, b]$. Funkce f je tedy omezená na intervalu $[a, c]$ i na intervalu $[c, b]$, takže je omezená i na intervalu $[a, b]$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ pak platí

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, D_n) &= \overline{S}(f, D_n^1) + \overline{S}(f, D_n^2), \\ \underline{S}(f, D_n) &= \underline{S}(f, D_n^1) + \underline{S}(f, D_n^2). \end{aligned} \tag{8.16}$$

Podle Věty 8.2.12

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^1) &= \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^1) = \overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x, \\ \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^2) &= \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^2) = \overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Tedy máme

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n) &= \lim_{n\to\infty} \left(\underline{S}(f, D_n^1) + \underline{S}(f, D_n^2)\right) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x, \\ \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) &= \lim_{n\to\infty} \left(\overline{S}(f, D_n^1) + \overline{S}(f, D_n^2)\right) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Dle Důsledku 8.2.12 platí $f \in \mathcal{R}(a, b)$ a také (8.15).

$\Rightarrow$ Předpokládejme $f \in \mathcal{R}(a,b)$. Funkce f je tedy omezená na intervalu $[a,b]$. Použijeme posloupnosti dělení definované v předchozí části. Funkce f pak splňuje rovnosti (8.16). Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} 0 &\le \overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1) \\ &\le \big(\overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1)\big) + \big(\overline{S}(f, D_n^2) - \underline{S}(f, D_n^2)\big) \\ &= \overline{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n). \end{aligned}$$

Poněvadž platí $\lim\big(\overline{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n)\big) = 0$, neboť $f \in \mathcal{R}(a,b)$, platí podle věty o dvou strážnících

$$\lim_{n\to\infty}\big(\overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1)\big) = 0.$$

Odtud již plyne z Věty 8.2.12 riemannovská integrovatelnost f na $[a,c]$. Integrovatelnost f na intervalu $[b,c]$ lze dokázat obdobně. Rovnost (8.15) plyne z první části důkazu. ■

8.2.25. Pro libovolná $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x) + \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

pokud alespoň dva z uvedených integrálů existují. Tvrzení plyne z Věty 8.2.24 a konvence $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

8.2.26. Věta. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f \in \mathcal{R}(a,b)$. Pak $|f| \in \mathcal{R}(a,b)$ a platí

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x. \tag{8.17}$$

Důkaz. Funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a,b]$, takže je omezená na $[a,b]$, a tedy i $|f|$ je omezená na $[a,b]$.

Pro libovolný interval $I \subset [a,b]$ platí

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \le \sup_I f - \inf_I f. \tag{8.18}$$

Nerovnost (8.18) ověříme následovně. Zvolme $\eta > 0$. Pak použitím definice suprema a infima nalezneme $x, y \in I$ taková, že

$$|f(y)| \le \inf_I |f| + \eta \quad \text{a} \quad |f(x)| \ge \sup_I |f| - \eta.$$

Pak máme

$$\begin{aligned} \sup_I |f| - \inf_I |f| &\le |f(x)| + \eta - |f(y)| + \eta = |f(x)| - |f(y)| + 2\eta \\ &\le |f(x) - f(y)| + 2\eta \le \sup_I f - \inf_I f + 2\eta. \end{aligned}$$

Tím je nerovnost (8.18) ověřena.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Použijeme Větu 8.2.15 pro funkci f a nalezneme dělení D intervalu $[a,b]$ splňující $\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon$. Z (8.18) plyne, že

$$\overline{S}(|f|, D) - \underline{S}(|f|, D) \le \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

Podle Věty 8.2.15 je tedy $|f| \in \mathcal{R}(a,b)$. Zbývá odvodit neorovnost (8.17).

Pro každé dělení D' intervalu $[a,b]$ platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D') \leq \overline{S}(|f|, D'),$$

a tedy

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x. \tag{8.19}$$

Funkce $-f$ je riemannovsky integrovatelná podle Věty 8.2.22. Použijeme nerovnost (8.19) pro funkci f a pomocí Věty 8.2.22 obdržíme

$$-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (-f(x))\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b |-f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x. \tag{8.20}$$

Z nerovností (8.19) a (8.20) dostáváme (8.17). ■

8.2.27. Lze ukázat, že pokud $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$, pak $fg \in \mathcal{R}([a,b])$. Riemannovsky integrovatelné funkce tak tvoří takzvanou *algebru*. Důkaz tohoto tvrzení ale již provádět nebudeme.

8.2.28. Věta (derivace funkce horní meze)**.** Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval a f je funkce definovaná na J splňující $f \in \mathcal{R}(a,b)$ pro každé $a, b \in J$. Nechť $c \in J$. Definujeme funkci F na J předpisem

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in J.$$

Potom platí:

(a) F je spojitá na J,

(b) jestliže x_0 je vnitřním bodem intervalu J a funkce f je spojitá v x_0, pak $F'(x_0) = f(x_0)$.

Důkaz. (a) Nechť $y_0 \in J$ není pravý krajní bod J. Dokážeme, že

$$\lim_{y \to y_0+} F(y) = F(y_0).$$

Nalezneme $\delta > 0$, takové, že $[y_0, y_0 + \delta] \subset J$. Protože je f riemannovsky integrovatelná na $[y_0, y_0 + \delta]$, je f na tomto intervalu omezená. Nechť K je kladné číslo splňující

$$\forall x \in [y_0, y_0 + \delta] : |f(x)| \leq K.$$

Pro $y \in [y_0, y_0 + \delta]$ pak máme

$$\begin{aligned} |F(y) - F(y_0)| &= \left| \int_c^y f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^{y_0} f(x)\,\mathrm{d}x \right| = \left| \int_{y_0}^y f(x)\,\mathrm{d}x \right| \\ &\leq \int_{y_0}^y |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_{y_0}^y K\,\mathrm{d}x = K(y - y_0). \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$\lim_{y \to y_{0+}} |F(y) - F(y_0)| = 0,$$

neboli
$$\lim_{y\to y_{0+}} F(y) = F(y_0).$$

Spojitost zleva v bodech J, které nejsou levým krajním bodem J, lze dokázat obdobně.

(b) Nechť $x_0 \in J$ je bodem spojitosti f. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ takové, že
$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\colon |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$
Pak pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ platí
$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - f(x_0)\right|.$$
Platí $\int_{x_0}^{x} f(x_0)\,\mathrm{d}t = f(x_0)\cdot(x - x_0)$ pro každé $x \in P(x_0, \delta)$. Pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ pak platí
$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(x_0)\,\mathrm{d}t\right| \\ &= \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int_{x_0}^{x} (f(t) - f(x_0))\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int_{x_0}^{x} \varepsilon\,\mathrm{d}t\right| = \varepsilon.\end{aligned}$$
Výraz $\int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|\,\mathrm{d}t$ z předchozí série nerovností je u veden v absolutní hodnotě, protože pro $x < x_0$ je záporný. Tedy $F'(x_0) = f(x_0)$ a tvrzení je dokázáno. ■

8.2.29. Důsledek (vztah spojitosti a existence primitivní funkce)**.**

(a) Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a f je spojitá funkce na intervalu (a, b). Potom f má na (a, b) primitivní funkci.

(b) Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$ a F je primitivní funkce k funkci f na (a, b). Potom existují vlastní limity $\lim_{x\to a_+} F(x)$ a $\lim_{x\to b_-} F(x)$ a platí
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x).$$

Důkaz. (a) Zvolme $c \in (a, b)$ a položme
$$F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in (a, b).$$
Podle věty o vztahu spojitosti a riemannovské integrovatelnosti (Věta 8.2.20) je funkce f riemannovsky integrovatelná na každém intervalu $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, a proto

je F dobře definovaná funkce. Věta 8.2.28 pak zaručuje platnost vztahu $F' = f$ na (a, b), tj. F je primitivní k f.

(b) Definujme funkci

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(a), & t \in (a-1, a], \\ f(t), & t \in (a, b), \\ f(b), & t \in [b, b+1). \end{cases}$$

Pak je $\tilde{f}$ spojitá na $(a-1, b+1)$. Položme

$$\tilde{F}(x) = \int_a^x \tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in (a-1, b+1).$$

Pak je $\tilde{F}$ primitivní funkce k $\tilde{f}$ na $(a-1, b+1)$, a tedy je na tomto intervalu spojitá (vizte Větu 5.1.15). Protože je $\tilde{F}|_{(a,b)}$ primitivní funkce k funkci f, existuje podle Věty 8.1.3 $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall x \in (a, b) : F(x) = \tilde{F}(x) + c.$$

Tedy

$$\lim_{x \to a_+} F(x) = \tilde{F}(a) + c \quad \text{a} \quad \lim_{x \to b_-} F(x) = \tilde{F}(b) + c.$$

Pak tedy

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t = \tilde{F}(b) = \lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x),$$

neboť $\tilde{F}(a) = 0$. Tím je důkaz dokončen. ■

8.2.30. Věta. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f \in \mathcal{R}(a, b)$. Jestliže g je funkce definovaná alespoň na $[a, b]$, která se v intervalu $[a, b]$ liší od f v konečném počtu bodů, potom $g \in \mathcal{R}(a, b)$ a $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Důkaz. Funkce f je omezená, a proto je omezená i funkce g. Nalezneme kladné číslo $K > 0$ takové, že pro každé $x \in [a, b]$ platí $|f(x)| \leq K$ a $|g(x)| \leq K$. Označme $J = \{x \in [a, b];\ f(x) \neq g(x)\}$. Množina J je podle předpokladu konečná. Pokud je prázdná, pak je tvrzení zřejmé, v opačném případě označme m počet prvků množiny J. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \frac{\varepsilon}{4Km}$ a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

Označme $\mathcal{I}$ systém obsahující všechny intervaly tvaru $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Označme $\mathcal{S}$ systém těch intervalů z $\mathcal{I}$, které mají neprázdný průnik s J. Systém

$\mathcal{S}$ má tedy nejvýše $2m$ prvků, neboť každý bod z J je prvkem nejvýše dvou intervalů z $\mathcal{I}$. Potom platí

$$\begin{aligned}\overline{S}(f,D)-\overline{S}(g,D)&=\sum_{I\in\mathcal{I}}\sup_I f\cdot|I|-\sum_{I\in\mathcal{I}}\sup_I g\cdot|I|\\&=\sum_{I\in\mathcal{S}}(\sup_I f-\sup_I g)\cdot|I|,\end{aligned}\tag{8.21}$$

neboť $\sup_I f=\sup_I g$, pokud $I\in\mathcal{J}\setminus\mathcal{S}$. Můžeme tedy odhadnout

$$\begin{aligned}|\overline{S}(f,D)-\overline{S}(g,D)|&\le\sum_{I\in\mathcal{S}}(|\sup_I f|+|\sup_I g|)\cdot|I|\\&\le\sum_{I\in\mathcal{S}}2K\cdot|I|\le\sum_{I\in\mathcal{S}}2K\cdot\nu(D)\\&\le 2m\cdot 2K\cdot\nu(D)<\varepsilon.\end{aligned}\tag{8.22}$$

Obdobně obdržíme

$$|\underline{S}(f,D)-\underline{S}(g,D)|<\varepsilon.\tag{8.23}$$

Podle (8.21), (8.22) a (8.23) dostáváme

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-2\varepsilon<\underline{S}(f,D)-\varepsilon<\underline{S}(g,D)\le\overline{S}(g,D)&\\<\overline{S}(f,D)+\varepsilon<\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+2\varepsilon.&\end{aligned}\tag{8.24}$$

Odtud podle Věty 8.2.15 plyne, že g je na intervalu $[a,b]$ riemannovsky intergrovatelná. Z odhadu (8.24) pak plyne $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. ■

8.2.31. Věta (charakterizace riemannovské integrovatelnosti)**.** Nechť $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, a f je funkce definovaná na intervalu $[a,b]$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní.

(i) Funkce f je riemannovsky integrovaltelná na intervalu $[a,b]$.

(ii) Existuje $I\in\mathbb{R}$ takové, že pro každé $\varepsilon>0$ existuje $\delta>0$ splňující: je-li $D=\{x_i\}_{i=0}^n$ dělení intervalu $[a,b]$ takové, že $\nu(D)<\delta$, a $t_i\in[x_{i-1},x_i]$, $i=1,\dots,n$, pak

$$\left|\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i-x_{i-1})-I\right|<\varepsilon.$$

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Ukážeme, že podmínka (ii) je splněna pro $I=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Zvolme $\varepsilon>0$. K němu dle Věty 8.2.15 existuje $\delta>0$ takové, že pro každé dělení D splňující $\nu(D)<\delta$ platí

$$I-\varepsilon=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\varepsilon<\underline{S}(f,D)\le\overline{S}(f,D)<\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\varepsilon=I+\varepsilon.$$

Je-li tedy $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ dělení splňující $\nu(D) < \delta$ a $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, pak

$$I - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \le \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \le \overline{S}(f, D) < I + \varepsilon.$$

Výrok (ii) tedy platí.

(ii)$\Rightarrow$(i) Nechť (ii) je splněna pro $I \in \mathbb{R}$. Nejprve ukážeme, že z platnosti (ii) plyne omezenost f. Pro $\varepsilon = 1$ nalezneme $\delta > 0$ podle (ii). Pak pro dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ splňující $\nu(D) < \delta$ máme

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \varepsilon$$

pro každou volbu bodů $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$.

Uvažujme jedno takové pevné dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ a označme

$$\begin{aligned} \eta &= \min\bigl\{x_i - x_{i-1};\ i \in \{1, \dots, n\}\bigr\}, \\ K &= \max\bigl\{|f(x_i)|;\ i \in \{1, \dots, n\}\bigr\}. \end{aligned}$$

Mějme $t \in [a, b]$ dáno libovolné. Nalezneme $j \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $t \in [x_{j-1}, x_j]$. Uvažujme body

$$t_i = \begin{cases} x_i, & i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\} \\ t & i = j. \end{cases}$$

Pak

$$\begin{aligned} \bigl|f(t)(x_j - x_{j-1})\bigr| &= \Bigl| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I + I - \sum_{i \ne j} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \Bigr| \\ &\le \left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| + |I| + \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)(x_i - x_{i-1})| \\ &\le 1 + |I| + \sum_{i=1}^{n} K(x_i - x_{i-1}) = 1 + |I| + K(b - a). \end{aligned}$$

Tedy platí

$$|f(t)| \le \frac{1}{\eta}\bigl(1 + |I| + K(b - a)\bigr)$$

a f je omezená.

Můžeme tedy použít Větu 8.2.15. Nechť $\varepsilon > 0$. Podle (ii) nalezneme příslušné $\delta > 0$. Nechť $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ je libovolné dělení $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$. Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ nalezneme $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ takové, že

$$\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f < f(t_i) + \varepsilon.$$

Pak máme

$$\begin{aligned}\overline{S}(f,D) &= \sum_{i=1}^{n} \sup_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) + \varepsilon)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon(b-a) \le I + \varepsilon + \varepsilon(b-a).\end{aligned}$$

Obdobně odvodíme

$$\underline{S}(f,D) > I - \varepsilon - \varepsilon(b-a).$$

Tedy dostáváme

$$\overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) < 2(1+b-a)\varepsilon.$$

Tedy f je riemannovsky integrovatelná na $[a,b]$. ■

8.2.32. Podívejme se ještě na vztah hodnoty I a hodnoty $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ v předchozí větě. Platí-li (i), pak je pro $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ splněna podmínka (ii). Platí-li (ii), máme z důkazu implikace (ii) $\Rightarrow$ (i), že pro kladné ε existuje kladné δ takové, že pro libovolné dělení D intervalu $[a,b]$ splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$\overline{S}(f,D) < I + \varepsilon(1+b-a).$$

Tedy

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{S}(f,D) < I + \varepsilon(1+b-a).$$

Tedy $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le I$. Obdobně odvodíme $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \ge I$, a tedy $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

8.2.33. Poznámka. Podmínka (ii) Věty 8.2.31 je původní Riemannovou definicí Riemannova integrálu. Náš výklad sledoval alternativní přístup, který náleží Darbouxovi.

8.3. Newtonův integrál

8.3.1. Definice. Nechť $a,b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, f je funkce definovaná na intervalu (a,b). Řekneme, žefunkce f má na intervalu (a,b) **Newtonův integrál**, případně že Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a,b) existuje, jestliže

- f má na (a,b) primitivní funkci F,
- existují limity $\lim_{x\to a_+} F(x)$ a $\lim_{x\to b_-} F(x)$ (nikoli nutně vlastní);
- rozdíl těchto dvou limit je definován jako prvek množiny $\mathbb{R}^*$.

Hodnotou Newtonova integrálu z funkce f na intervalu (a,b) nazýváme prvek množiny $\mathbb{R}^*$ určený výrazem

$$\lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x).$$

Tuto hodnotu pak značíme symbolem $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Pokud $a > b$, položíme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$. Jestliže $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$, pak říkáme, že Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a, b) **konverguje**, v opačném případě říkáme, že **diverguje**.

8.3.2. Označení. Jestliže je potřeba rozlišit mezi Newtonovým a Riemannovým integrálem z funkce f na intervalu s krajními body a a b, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, budeme používat označení

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

8.3.3. (a) Hodnota Newtonova integrálu nezávisí na použité primitivní funkci. To plyne z věty o rovnosti až na konstantu (Věta 8.1.3).

(b) Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b). Pak nastává právě jedna z následujících možností:

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \begin{cases} \text{existuje} \begin{cases} \text{a je roven reálnému číslu, tedy konverguje,} \\ \text{a je roven } \infty \text{ nebo } -\infty\text{, tedy diverguje,} \end{cases} \\ \text{neexistuje.} \end{cases}$$

8.3.4. Označení. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Množinu všech reálných, které mají na intervalu (a, b) konvergentní Newtonův integrál, značíme symbolem $\mathcal{N}(a, b)$.

Nechť funkce F je definovaná na (a, b) a existují (vlastní nebo nevlastní) jednostranné limity $\lim_{x\to a+} F(x)$ a $\lim_{x\to b-} F(x)$. Potom budeme značit $F(a+) = \lim_{x\to a+} F(x)$, $F(b-) = \lim_{x\to b-} F(x)$ a $[F]_a^b = F(b-) - F(a+)$, pokud má rozdíl smysl.

8.3.5. Příklad. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ spočtěte $(N)\int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Platí

$$(N)\int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \left[\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-1, \infty), \\ \left[\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right]_0^1 = \infty, & \alpha \in (-\infty, -1), \\ \left[\log x\right]_0^1 = \infty, & \alpha = -1. \end{cases}$$

♣

8.3.6. Příklad. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ spočtěte $(N)\int_1^\infty x^\alpha\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Platí

$$(N)\int_1^\infty x^\alpha\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \left[\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right]_1^\infty = \infty, & \alpha \in (-1, \infty), \\ \left[\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right]_1^\infty = \frac{-1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-\infty, -1), \\ \left[\log x\right]_1^\infty = \infty, & \alpha = -1. \end{cases}$$

♣

8.3.7. (a) Z předchozího příkladu vidíme, že funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ je na intervalu $(0, 1)$ newtonovsky integrovatelná, ale není na $[0, 1]$ při libovolném dodefinování v krajních bodech riemannovsky integrovalná, neboť na $(0, 1)$ není omezená.

(b) Funkce $f(x) = \operatorname{sign} x$ je intervalu $[-1, 1]$ monotónní, a tedy podle Věty 8.2.21 také riemannovsky integrovatelná, není však na $(-1, 1)$ newtonovsky integrovatelná, protože na $(-1, 1)$ nemá f dle 8.1.21 primitivní funkci.

8.3.8. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je spojitá funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

8.3.9. Věta (linearita Newtonova integrálu)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $f, g \in \mathcal{N}(a, b)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak $f + g \in \mathcal{N}(a, b)$, $\alpha f \in \mathcal{N}(a, b)$ a platí

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x,$$
$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g (a, b). Pak je $F + G$ primitivní k $f + g$ a díky aritmetice limit (Věta 4.2.1) máme $[F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b \in \mathbb{R}$. Tedy

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = [F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Obdobně odvodíme

$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = [\alpha F]_a^b = \alpha[F]_a^b = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

■

8.3.10. Věta (Newtonův integrál a uspořádání)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a $f, g \in \mathcal{N}(a, b)$. Nechť platí $f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in (a, b)$. Pak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g (a, b). Pak platí

$$(G - F)'(x) = g(x) - f(x) \geq 0, \quad x \in (a, b),$$

a tedy $G - F$ je neklesající na (a, b) (vizte Větu 5.5.7). Proto

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = [G - F]_a^b \geq 0.$$

Tedy dle Věty 8.3.9 máme

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

■

8.3.11. Věta (aditivita Newtonova integrálu)**.** Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, $a < c < b$.

(a) Jestliže $f \in \mathcal{N}(a, b)$, potom $f \in \mathcal{N}(a, c) \cap \mathcal{N}(c, b)$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{8.25}$$

(b) Jestliže $f \in \mathcal{N}(a, c) \cap \mathcal{N}(c, b)$ a f je spojitá v c, pak $f \in \mathcal{N}(a, c)$ a platí (8.25).

Důkaz. (a) Nechť F je primitivní funkce k f na intervalu (a, b). Pak je F primitivní k f i na intervalech (a, c) a (c, b). Navíc má funkce F v bodě c, jakožto spojitá funkce na (a, b), vlastní jednostranné limity. Tedy platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F]_a^b = [F]_a^c + [F]_c^b = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(b) Nechť F je primitivní k f na (a, c) a G je primitivní k f na (c, b). Funkce f je spojitá na v bodě c, a proto je omezená na jistém okolí bodu c. Nalezneme tedy $\delta > 0$ a $K > 0$ takové, že $a < c - \delta$ a $|f(x)| \le K$ pro každé $x \in (c - \delta, c)$. Potom podle Věty 8.3.10 pro každé $x \in (c - \delta, c)$ platí

$$-K(x - c + \delta) = \int_{c-\delta}^x (-K)\,\mathrm{d}t \le \int_{c-\delta}^x f(t)\,\mathrm{d}t \le \int_{c-\delta}^x K\,\mathrm{d}t = K(x - c + \delta).$$

Dále platí $\int_{c-\delta}^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(c-\delta)$ pro každé $x \in (c-\delta, c)$, neboť F je spojitá na (a, c). Limita $\lim_{x\to c-} F(x)$ existuje podle předpokladu věty a z výše uvedeného plyne, že tato limita je vlastní. Obdobně platí, že $\lim_{x\to c+} G(x)$ je vlastní. Přičtením vhodné konstanty k funkci G můžeme zařídit, aby

$$\lim_{x\to c_-} F(x) = \lim_{x\to c_+} G(x).$$

Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, c), \\ \lim_{x\to c_-} F(x), & x = c, \\ G(x), & x \in (c, b). \end{cases}$$

Pak je H spojitá na (a, b) a $H'(x) = f(x)$ pro $x \in (a, c) \cup (c, b)$. V bodě c toto platí díky Větě 5.2.9

$$H'(c) = \lim_{x\to c} H'(x) = \lim_{x\to c} f(x) = f(c),$$

neboť f je spojitá v c. Funkce H je tedy primitivní k f na (a, b) a má vlastní limity v krajních bodech (a, b), protože je v příslušných bodech mají funkce F a G. Tedy $f \in \mathcal{N}(a, c)$. ∎

8.3.12. Věta. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $f \in \mathcal{N}(a, b)$ a f je spojitá na (a, b). Pak $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ existuje a

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Funkce $|f|$ má jakožto spojitá funkce na intervalu funkci primitivní dle Věty 8.1.6. Označme ji F. Protože $|f| \geq 0$, je F neklesající (vizte Větu 5.5.7). Tedy existují limity v krajních bodech intervalu (a, b), přičemž $\lim_{x\to b_-} F(x) > -\infty$ a $\lim_{x\to a_+} F(x) < \infty$. Potom je rozdíl $\lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x)$ definován. Je-li tento rozdíl roven ∞, požadovaná nerovnost zjevně platí. Pokud je konečný, pak $|f| \in \mathcal{N}(a, b)$. Můžeme tedy použít Větu 8.3.10. Platí $-f \leq |f|$ i $f \leq |f|$, a tedy

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \max\left\{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right\}\\ &= \max\left\{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x\right\} \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

■

8.3.13. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, F a G jsou funkce definované na (a, b) a existují (vlastní nebo nevlastní) jednostranné limity $F(a+)$, $F(b-)$, $G(a+)$ a $G(b-)$. Potom platí

$$[F - G]_a^b = [F]_a^b - [G]_a^b,$$

jestliže má pravá strana smysl.

8.3.14. Věta (per partes pro Newtonův integrál)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, f a g jsou funkce definované na (a, b). Nechť F je primitivní funkce k funkci f na (a, b) a G je primitivní funkce k funkci g na (a, b). Potom platí

$$\int_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [FG]_a^b - \int_a^b f(x)G(x)\,\mathrm{d}x,$$

jestliže má pravá strana smysl.

Důkaz. Jelikož je pravá strana požadované rovnosti dobře definována, existuje primitivní funkce k funkci fG na (a, b). Označme ji písmenem H. Potom platí

$$(GF - H)' = gF + Gf - fG = gF,$$

tj. $GF - H$ je primitivní funkcí k funkci gF. Rozdíl výrazů $[GF]_a^b$, $\int_a^b G(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ je definován, stejně jako výrazy samotné. Z 8.3.13 plyne, že

$$\begin{aligned}\int_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x &= [FG - H]_a^b = [FG]_a^b - [H]_a^b\\ &= [FG]_a^b - \int_a^b f(x)G(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. ■

8.3.15. Věta (substituce pro Newtonův integrál)**.** Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$, f je funkce definovaná na (a, b) a φ je funkce definovaná na (α, β). Nechť

φ má vlastní nenulovou derivaci na (α, β) a platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Potom

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\left|\varphi'(t)\right|\,\mathrm{d}t, \tag{8.26}$$

jestliže má alespoň jedna strana smysl.

Důkaz. Funkce φ má na intervalu (α, β) vlastní derivaci (funkci φ'). Z Darbouxovy vlastnosti derivace (Věta 8.1.19) tedy plyne, že obraz intervalu (α, β) při zobrazení φ', tedy množina $\varphi'((\alpha, \beta))$, je interval. Z předpokladu víme, že bod 0 není prvkem tohoto intervalu. Z toho vyplývá, že funkce φ' nemění na (α, β) znaménko. Předpokládejme, že φ' je záporná na (α, β). Nyní rozlišíme dvě možnosti. Nejprve budeme předpokládat, že existuje integrál na levé straně rovnosti (8.26) a pak na pravé.

Existuje $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Potom má f na (a, b) primitivní funkci F a existují limity $F(b-)$ a $F(a+)$. Z věty o derivaci složené funkce (Věta 5.1.24) plyne, že také funkce $(f \circ \varphi)(-\varphi')$ má na intervalu (α, β) primitivní funkci, a to funkci $-F \circ \varphi$. Máme

$$\lim_{t \to \beta_-} \varphi(t) = a, \quad \lim_{t \to \alpha_+} \varphi(t) = b$$

a z Věty 4.2.24

$$\lim_{t \to \alpha_+} F(\varphi(t)) = \lim_{x \to b_-} F(x), \quad \lim_{t \to \beta_-} F(\varphi(t)) = \lim_{x \to a_+} F(x).$$

Odtud dostáváme

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t &= \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))(-\varphi'(t))\,\mathrm{d}t = [-F \circ \varphi]_\alpha^\beta \\
&= -\lim_{x \to a_+} F(x) + \lim_{x \to b_-} F(x) \\
&= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Existuje $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$. Označme G primitivní funkci k $(f \circ \varphi)|\varphi'| = -(f \circ \varphi)\varphi'$. Z druhé věty o substituci (Věta 8.1.27) pak plyne, že $-G \circ \varphi^{-1}$ je primitivní funkce k f. Platí

$$\lim_{x \to a_+} \varphi^{-1}(x) = \beta, \quad \lim_{x \to b_-} \varphi^{-1}(x) = \alpha,$$

a tedy

$$\lim_{x \to a_+} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t \to \beta_-} G(t), \quad \lim_{x \to b_-} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t \to \alpha_+} G(t).$$

Odtud máme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-G \circ \varphi^{-1}\right]_a^b = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

■

8.3.16. Věta (Bolzanova-Cauchyova podmínka pro funkce)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ a nechť $\delta_0 \in \mathbb{R}$, $\delta_0 > 0$. Nechť funkce F je definována alespoň na $P(a, \delta_0)$. Potom existuje vlastní $\lim_{x \to a} F(x)$ právě tehdy, když je splněna následující (tzv. Bolzanova-Cauchyova) podmínka:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x, y \in P(a, \delta) \colon |F(x) - F(y)| < \varepsilon.$$

Důkaz. $\Rightarrow$ Předpokládejme nejprve, že $\lim_{x \to a} F(x) = A$ a $A \in \mathbb{R}$. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ je dáno. K němu nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$ kladné, že

$$\forall x \in P(a, \delta) : |F(x) - A| < \varepsilon.$$

Pak pro každou dvojici $x, y \in P(a, \delta)$ máme

$$|F(x) - F(y)| \leq |F(x) - A| + |A - F(y)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

$\Leftarrow$ Nechť platí podmínka věty. Nechť je funkce F definovaná na prstencovém okolí $P(a, \delta_0)$. Je-li $\{x_n\}$ posloupnost obsažená v $P(a, \delta_0)$ taková, že $\lim x_n = a$, splňuje posloupnost $\{F(x_n)\}$ Bolzanovu-Cauchyovu podmínku (viz Věta 2.4.26). Zvolíme-li totiž $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, nechť kladné $\delta \in \mathbb{R}$ je dáno Bolzanovou-Cauchyovou podmínkou. K δ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|x_n - a| < \delta$. Pak pro $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq n_0$, platí

$$|F(x_n) - F(x_m)| < \varepsilon.$$

Zvolme jednu takovou posloupnost $\{x_n\}$ a položme $A = \lim F(x_n)$ (ta existuje díky Větě 2.4.26). Pak $\lim_{x \to a} F(x) = A$. Vezměme totiž libovolnou posloupnost $\{y_n\}$ v $P(a, \delta_0)$ konvergující k a. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ z Bolzanovy-Cauchyovy podmínky. Nechť $n_1 \in \mathbb{N}$ je takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 \colon x_n, y_n \in P(a, \delta).$$

Najdeme ještě $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 \colon |F(x_n) - A| < \varepsilon.$$

Pak pro přirozené číslo $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ platí

$$|F(y_n) - A| \leq |F(y_n) - F(x_n)| + |F(x_n) - A| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Z Heineovy věty 4.2.14 máme proto $\lim_{x \to a} F(x) = A$. ∎

8.3.17. Tvrzení Věty 8.3.16 platí obdobně i pro jednostranné limity.

8.3.18. Věta. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je omezená spojitá funkce na (a, b). Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Důkaz. Podle Věty 8.1.6 má f na (a, b) primitivní funkci F. Ukážeme za pomoci Bolzanovo-Caychyovy podmínky pro funkce, že limity F v krajních bodech existují vlastní. Nechť $K \in \mathbb{R}$ je kladné takové, že

$$\forall x \in (a, b) \colon |f(x)| \leq K.$$

Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ a položme $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$. Pak pro $x, y \in (a, a+\delta)$, $x < y$, platí z Věty **??**(c)

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^y |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq K|y-x| < K\delta \leq \varepsilon.$$

Tedy $\lim_{x\to a_+} F(x)$ existuje vlastní dle Věty 8.3.16.

Existence vlastní limity v b zleva se dokáže obdobně. ■

8.3.19. Pro neomezený interval tvrzení Věty 8.3.18 neplatí. Například funkce $f(x) = 1$, $x \in (0,\infty)$, je spojitá a omezená na $(0,\infty)$, ale $f \notin \mathcal{N}(0,\infty)$. Funkce $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, je na intervalu $\mathbb{R}$ také spojitá a omezená, integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ však dokonce ani neexistuje.

8.3.20. Věta (vztah Riemannova a Newtonova integrálu)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je omezená funkce na $[a,b]$. Je-li $f \in \mathcal{R}(a,b) \cap \mathcal{N}(a,b)$, pak

$$(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Protože funkce f je riemannovsky integrovatelná na $[a,b]$, existuje podle charakterisace riemannovské integrovatelnosti (Věta 8.2.31) $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro libovolné dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ o normě menší než δ a libovolnou volbu bodů $t_i \in [x_i - x_{i-1}]$, $i = 1, \dots, n$ platí

$$\left|\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

Mějme tedy $\varepsilon \in (0,\infty)$ dáno a $\delta \in (0,\infty)$ nalezeno tak, že splňuje tuto podmínku. Vezměme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ o normě menší než δ.

Nechť F je primitivní funkce k f na (a,b). Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a,b) \\ \lim_{x\to b_-} F(x), & x = b \\ \lim_{x\to a_+} F(x), & x = a. \end{cases}$$

Povšimněme si, že H je dobře definovaná spojitá funkce na $[a,b]$ dle Poznámky **??**(a) a faktu $f \in \mathcal{N}(a,b)$. Navíc $H' = f$ na (a,b). Pro každé $i = 1, \dots, n$ použijeme Lagrangeovu větu 5.2.4 k nalezení bodu $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$, který splňuje

$$H(x_i) - H(x_{i-1}) = H'(t_i)(x_i - x_{i-1}) = f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Pak

$$\begin{aligned}(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x) = H(b) - H(a)\\ &= H(x_n) - H(x_0) = \sum_{i=1}^{n}\bigl(H(x_i) - H(x_{i-1})\bigr)\\ &= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot(x_i - x_{i-1}).\end{aligned}$$

Tedy

$$\left|(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

Tím je důkaz dokončen. ■

8.3.21. Důsledek (vztah spojitosti a existence Riemannova a Newtonova integrálu)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je spojitá funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{R}(a, b) \cap \mathcal{N}(a, b)$ a

$$(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Tvrzení plyne z Věty 8.2.20, Věty 8.3.18 a Věty 8.3.20. ■

8.4. Konvergence Newtonova integrálu

8.4.1. Věta (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a funkce $f, g\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ splňují $0 \le f(x) \le g(x)$ pro každé $x \in [a, b)$. Nechť dále je f spojitá na $[a, b)$ a $g \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Důkaz. Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f. Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na (c, b) nezápornou derivaci $g - f$, tedy je na (c, b) neklesající. Protože $(G - F)(c) = 0$, dostáváme $G(x) \ge F(x)$ na (c, b). Dále jsou obě funkce G, F neklesající, jelikož jejich derivace jsou nezáporné. Tedy mají v b limitu zleva (vizte Větu 4.2.25) a platí

$$\lim_{x\to b_-} F(x) \le \lim_{x\to b_-} G(x).$$

Protože $g \in \mathcal{N}(a, b)$, je poslední limita vlastní. Protože je F neklesající, je i $\lim_{x\to b_-} F(x)$ vlastní.

Obě funkce mají vlastní limitu v c, jelikož jsou v tomto bodě spojité. Tedy $f \in \mathcal{N}(c, b)$. Protože f je spojitá na $[a, c]$, platí $f \in \mathcal{N}(a, c)$ podle Věty 8.3.18. Věta **??**(e) nyní dává $f \in \mathcal{N}(a, b)$. ■

8.4.2. Poznámka. Tvrzení Věty 8.4.1 platí s příslušnými úpravami i pro intervaly typu $(a,b]$. Přesněji, jestliže $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, funkce $f, g : (a,b] \to \mathbb{R}$ splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $x \in (a,b]$, f je spojitá na $(a,b]$ a platí $g \in \mathcal{N}(a,b)$, potom také $f \in \mathcal{N}(a,b)$.

8.4.3. Příklad. Dokažte, že $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ konverguje.

Řešení. Zkoumejme konvergenci $\int_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$. Máme totiž pomocí per partes

$$\int \cos\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\cos\frac{1}{x} - \int x(-\sin\frac{1}{x})\frac{-1}{x^2}\,\mathrm{d}x, \quad x \in (0,\infty).$$

Tedy

$$\int \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\cos\frac{1}{x} - \int \cos\frac{1}{x}, \quad x \in (0,\infty).$$

Protože $\int_0^1 \cos\frac{1}{x}$ konverguje (Věta 8.3.18), konverguje i

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left[x\cos\frac{1}{x}\right]_0^1 - \int_0^1 \cos\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Substitucí $\frac{1}{x} = t$ máme konvergenci integrálu

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 t\left(\sin\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{t}\sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

(vizte Větu 8.3.15). ♣

8.4.4. Příklad. Dokažte, že $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$ konverguje.

Řešení. Funkce $\frac{1}{x^4+1}$ je spojitá na intervalu $[0,1]$, a tedy dle Věty 8.3.18 konverguje $\int_0^1 \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$. Dále platí $0 \leq \frac{1}{x^4+1} \leq \frac{1}{x^4}$ na $[1,\infty)$. Protože $x^{-4} \in \mathcal{N}(1,\infty)$ (Příklad 8.3.5(b)), je podle Věty 8.4.1 i $\frac{1}{x^4+1} \in \mathcal{N}(1,\infty)$. Použitím Věty **??**(e) dostáváme $\frac{1}{x^4+1} \in \mathcal{N}(0,\infty)$. ♣

8.4.5. Věta (limitní srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a nechť $a < b$. Nechť f, g jsou spojité nezáporné funkce na $[a,b)$. Jestliže $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0,\infty)$, pak $f \in \mathcal{N}(a,b)$ právě tehdy, když $g \in \mathcal{N}(a,b)$.

Důkaz. Označme $c = \lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ a nechť $f \in \mathcal{N}(a,b)$. Z Věty 4.2.8 existuje $x_0 \in (a,b)$ takové, že

$$\forall x \in [x_0,b) : \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{1}{2}c.$$

Platí tedy

$$\forall x \in [x_0,b) : 0 \leq g(x) \leq \frac{2}{c}f(x).$$

Jelikož $f \in \mathcal{N}(a,b)$, je též $\frac{2}{c} f \in \mathcal{N}(a,b)$. Proto $f \in \mathcal{N}(x_0,b)$ dle Věty **??**(c), a tedy Věta 8.4.1 dává $g \in \mathcal{N}(x_0,b)$. Protože g je spojitá na omezeném intervalu $[a,x_0]$, je zde Newtonovsky integrovatelná. Dle Věty **??**(d) je $g \in \mathcal{N}(a,x_0)$.

Obrácenou implikaci lze dokázat obdobně za pomocí odhadu $\frac{f(x)}{g(x)} < 2c$ na vhodném intervalu (x_0,b). ■

8.4.6. Příklad. Dokažte, že $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{x^3+x^2}\,\mathrm{d}x$ konverguje.

Řešení. Položme pro $x \in [1,\infty)$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{x^3+x^2}, \quad g(x) = x^{-\frac{5}{2}}.$$

Obě funkce jsou spojité nezáporné funkce na $[1,\infty)$ a platí

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{x^3+x^2}}{x^{\frac{-5}{2}}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}{x+1} = 2.\end{aligned}$$

Podle Věty 8.4.5 dostáváme $f \in \mathcal{N}(1,\infty)$, neboť již víme, že $g \in \mathcal{N}(1,\infty)$ (Příklad 8.3.5(b)). ♣

8.4.7. Lemma (odhady Newtonova integrálu součinu dvou funkcí)**.** Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f je spojitá funkce na $[a,b]$ a $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je nerostoucí, nezáporná a spojitá. Potom

$$g(a)\inf_{x\in[a,b]}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \le \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \le g(a)\sup_{x\in[a,b]}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Speciálně platí

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \le g(a)\sup_{x\in[a,b]}\left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right|.$$

Důkaz. Dokažme nejprve druhou nerovnost. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Díky stejnoměrné spojitosti funkcí f a fg (viz Věta 8.2.19) existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ takové, že platí

$$\begin{aligned}&\forall x,y \in [a,b] : |x-y| < \delta \Rightarrow\\ &\qquad (|f(x)g(x) - f(y)g(y)| < \varepsilon)\ \&\ (|f(x)-f(y)| < \varepsilon)\,.\end{aligned} \tag{8.27}$$

Označme

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b],$$

a zvolme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ s normou menší než δ. Pak máme ze (8.27) pro každé $i \in \{1,\dots,n\}$

$$\forall t \in [x_{i-1},x_i] : f(t) \ge f(x_{i-1}) - \varepsilon,$$

a tedy

$$f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) - \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Obdobnou úvahou dostáváme pomocí (8.27)

$$\begin{aligned}
\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t &\leq f(x_{i-1})g(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \\
&\leq g(x_{i-1})\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon(x_i - x_{i-1})\right) + \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \\
&\leq g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + (g(a)+1)\varepsilon(x_i - x_{i-1}).
\end{aligned}$$

Označme

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon(g(a)+1)(b-a).$$

Pak

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(x_i - x_{i-1})(g(a)+1) \\
&= \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon(g(a)+1)(b-a) \\
&= \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})(F(x_i) - F(x_{i-1})) + \tilde{\varepsilon} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i)(g(x_{i-1}) - g(x_i)) + g(x_{n-1})F(x_n) + \tilde{\varepsilon} \\
&\leq \sup_{t\in[a,b]} F(t) \left(\sum_{i=1}^{n-1}(g(x_{i-1}) - g(x_i)) + g(x_{n-1})\right) + \tilde{\varepsilon} \\
&= g(a) \sup_{t\in[a,b]} F(t) + \varepsilon(g(a)+1)(b-a).
\end{aligned}$$

Jelikož ε bylo libovolné, plyne odtud požadovaná nerovnost.

První nerovnost lze dokázat obdobně. ■

8.4.8. Věta (Abelovo-Dirichletovo kritérium konvergence Newtonova integrálu)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ je spojitá, F je primitivní funkce k funkci f na (a,b) a $g\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ je na $[a,b)$ monotónní a spojitá. Pak platí:

(a) Jestliže $f \in \mathcal{N}(a,b)$ a g je omezená, pak $fg \in \mathcal{N}(a,b)$.

(b) Je-li F omezená na (a,b) a $\lim_{x\to b-} g(x) = 0$, je $fg \in \mathcal{N}(a,b)$.

Důkaz. V obou případech má funkce fg na (a,b) funkci primitivní, označme ji H. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že g je nerostoucí. V opačném případě bychom mohli pracovat s funkcí $-g$, neboť změna znaménka u g konvergenci integrálu $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ neovlivní.

(a) Můžeme předpokládat, že g je nezáporná, protože jinak bychom uvažovali funkci $g(x)+K$, kde K je číslo splňující

$$\forall x \in [a,b) : |g(x)| < K.$$

Pak totiž konvergence integrálu

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (f(x)(g(x)+K) - f(x)K)\,\mathrm{d}x$$

plyne z dokázaného tvrzení pro nezápornou funkci a Věty **??**(a).

Mějme tedy g nezápornou a nechť $C \in (0,\infty)$ splňuje

$$\forall x \in [a,b) : |g(x)| < C.$$

Podle předpokladu existuje $\lim_{x\to b_-} F(x)$ vlastní. Mějme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ dáno. K němu nalezneme pomocí Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro funkce (Věta 8.3.16) kladné $\delta \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall x,y \in P_-(b,\delta) : -\varepsilon < F(y) - F(x) < \varepsilon.$$

Potom pro x, y z okolí $P_-(b,\delta)$, $x < y$, platí podle Lemmatu 8.4.7

$$\begin{aligned} H(y) - H(x) &= \int_x^y f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \le g(x) \sup_{z\in[x,y]} \int_x^z f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= g(x) \sup_{z\in[x,y]} (F(z) - F(x)) \le g(x)\varepsilon \le C\varepsilon \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} H(y) - H(x) &= \int_x^y f(t)g(t)\,\mathrm{d}x \ge g(x) \inf_{z\in[x,y]} \int_x^z f(t)\,\mathrm{d}t \\ &\ge g(x) \inf_{z\in[x,y]} (F(z) - F(x)) \ge -g(x)\varepsilon \ge -C\varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy pro tato x, y platí

$$|H(x) - H(y)| < C\varepsilon.$$

Tedy H splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku v bodě b zleva, má v něm vlastní limitu zleva.

Snadnou úvahou pak obdržíme $fg \in \mathcal{N}(a,b)$ (viz závěr důkazu Věty 8.4.1). Podrobněji, zvolme $c \in (a,b)$. Ze spojitosti funkce fg na $[a,c]$ odvodíme $fg \in \mathcal{N}(a,c)$ (Věta 8.3.18). Dále H je spojitá v c, a tedy má zde vlastní limitu. Proto $fg \in \mathcal{N}(a,c)$. Věta **??**(e) pak završí argumentaci.

(b) Z předpokladu plyne, že $g(x) \ge 0$ pro všechna $x \in [a,b)$. Nechť $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, je takové, že

$$\forall x \in (a,b) \colon |F(x)| < K.$$

Pro dané $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ najdeme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P_-(b,\delta): |g(x)| < \varepsilon.$$

Pak pro $x, y \in P_-(b,\delta)$, $x < y$ máme

$$\begin{aligned} H(y) - H(x) &= \int_x^y f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \\ &\le g(x) \sup_{z\in[x,y]} (F(z) - F(x)) \\ &\le \varepsilon \sup_{z\in[x,y]} (F(z) - F(x)) \\ &\le 2K\varepsilon \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} H(y) - H(x) &= \int_x^y f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \\ &\ge g(x) \inf_{z\in[x,y]} (F(z) - F(x)) \\ &\ge \varepsilon \inf_{z\in[x,y]} (F(z) - F(x)) \\ &\ge -2K\varepsilon, \end{aligned}$$

a tedy pro tato x, y platí

$$|H(x) - H(y)| \le 2K\varepsilon.$$

Tedy Věta 8.3.16 říká, že H má vlastní limitu v b zleva. Jako výše pak důkaz uzavřeme pozorováním, že $fg \in \mathcal{N}(a,b)$. ■

8.4.9. Příklad. Dokažte, že $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$ konverguje.

Řešení. Položíme ve Větě 8.4.8(b) pro $x \in [1,\infty)$

$$f(x) = \cos x \quad \text{a} \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$

Pak primitivní funkce k f, totiž $\sin x$, je omezená na $(1,\infty)$ a $g(x)$ je na $[1,\infty)$ nezáporná monotónní funkce mající v ∞ limitu 0. A obě funkce jsou zjevně spojité na $[1,\infty)$. Tedy dle výše zmíněné věty zadaný integrál konverguje. ♣

8.4.10. Příklad. Dokažte, že $\int_1^\infty \operatorname{arctg} x \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$ konverguje.

Řešení. Ve Větě 8.4.8(a) položíme pro $x \in [1,\infty)$

$$f(x) = \frac{\cos x}{x} \quad \text{a} \quad g(x) = \operatorname{arctg} x.$$

Obě funkce jsou spojité na $[1,\infty)$, g je omezená neklesající a $f \in \mathcal{N}(1,\infty)$. Tedy integrál konverguje podle Větě 8.4.8(a). ♣

8.4.11. Příklad. Dokažte, že $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$ diverguje.

Řešení. Protože platí
$$\frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{\sin^2 x}{x}, \quad x \in [1, \infty),$$
stačí dle Věty 8.4.1 ověřit divergenci integrálu
$$\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x.$$
Pišme
$$\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1 - \cos 2x}{2x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}.$$
Jest
$$\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_2^\infty \frac{\cos y}{y}\,\mathrm{d}y$$
a z předchozího příkladu víme, že $\frac{\cos x}{x} \in \mathcal{N}(1, \infty)$. Tím spíše $\frac{\cos x}{x} \in \mathcal{N}(2, \infty)$, a tedy i $\frac{\cos 2x}{2x} \in \mathcal{N}(1, \infty)$. Máme tudíž
$$\frac{1}{2x} = \frac{\cos 2x}{2x} + \frac{\sin^2 x}{x},$$
přičemž $\frac{1}{2x} \notin \mathcal{N}(1, \infty)$ a $\frac{\cos x}{x} \in \mathcal{N}(1, \infty)$. Kdyby $\frac{\sin^2 x}{x} \in \mathcal{N}(1, \infty)$, pak by podle Věty ??(a) platilo i $\frac{1}{2x} \in \mathcal{N}(1, \infty)$, což by byl spor. Odtud plyne, že $\frac{\sin^2 x}{x} \notin \mathcal{N}(1, \infty)$, a tedy i $\frac{|\sin x|}{x} \notin \mathcal{N}(1, \infty)$. ♣

8.4.12. Věta (první věta o střední hodnotě)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a nechť $a < b$. Nechť f je spojitá funkce na $[a, b]$, g je nezáporná na $[a, b]$, $g \in \mathcal{N}(a, b)$ a $fg \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom existuje $c \in [a, b]$ takové, že
$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Funkce f, jakožto funkce na $[a, b]$ spojitá, nabývá na něm svého minima m a maxima M (viz Věta ??). Pak pro $x \in [a, b]$ platí
$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x). \tag{8.28}$$

Pokud $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, pak $g = 0$, neboť je nezáporná. Za bod c můžeme zvolit libovolný bod z $[a, b]$.

Předpokládejme tedy, že $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0$. Potom ze (8.28) platí
$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} \leq M.$$
Protože $f([a, b]) = [m, M]$ dle Věty 4.3.6, existuje $c \in [a, b]$ splňující
$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}.$$
Tím je důkaz dokončen. ■

8.4.13. Věta (druhá věta o střední hodnotě). Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a nechť $a < b$. Nechť f je spojitá funkce na $[a, b]$, g je monotónní a spojitá na $[a, b]$. Potom existuje $c \in [a, b]$ takové, že

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{8.29}$$

Důkaz. Předpokládejme opět, že g je nezáporná a nerostoucí. Nalezneme-li totiž bod c pro funkci $-g$ či $g + C$, pak takové c vyhovuje i (8.29).

Definujme

$$\varphi(y) = g(a)\int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t + g(b)\int_y^b f(t)\,\mathrm{d}t, \quad y \in [a, b].$$

Potom lze funkci φ vyjádřit jako

$$\varphi(y) = (g(a) - g(b))\int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t + g(b)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t, \quad y \in [a, b].$$

Pak je funkce φ spojitá na $[a, b]$ (Věta 8.2.28), a tedy existují body $y_1, y_2 \in [a, b]$ takové, že

$$\varphi(y_1) = \max_{y\in[a,b]} \varphi(y) \quad \text{a} \quad \varphi(y_2) = \min_{y\in[a,b]} \varphi(y).$$

Uvažujme spojitou nezápornou nerostoucí funkci

$$\psi(t) = g(t) - g(b), \quad t \in [a, b].$$

Lemma 8.4.7 pak dává

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t - g(b)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^b f(t)\psi(t)\,\mathrm{d}t \\
&\le \psi(a) \sup_{t\in[a,b]} \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s \\
&= (g(a) - g(b)) \max_{t\in[a,b]} \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

z čehož dostáváme

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t &\le (g(a) - g(b)) \max_{t\in[a,b]} \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s + g(b)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \max_{t\in[a,b]} \left((g(a) - g(b)) \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s + g(b)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right) \\
&= \varphi(y_1).
\end{aligned}$$

Obdobně obdržíme z Lemmatu 8.4.7

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \ge \varphi(y_2).$$

Spojitá funkce φ tedy musí v nějakém bodě $c \in [a,b]$ nabývat hodnoty $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ (Věta 4.3.6), a tedy

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(c) = g(a)\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + g(b)\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

■

8.4.14. Poznámka. Věta 8.4.13 nabízí alternativní důkaz Věty 8.4.8. Mějme totiž f, g, F, H jako v důkazu Věty 8.4.8. V případě tvrzení (a) najdeme pro dané $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, kladné $\delta \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall x, y \in P_-(b,\delta) : |F(x) - F(y)| < \varepsilon.$$

Nechť g je omezená konstantou C. Vezměme $x, y \in P_-(b,\delta)$, $x < y$. Ať $c \in [x,y]$ splňuje

$$\int_x^y f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = g(x)\int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t + g(y)\int_c^y f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{8.30}$$

Pak pro tato x, y máme

$$\begin{aligned}
|H(x) - H(y)| &= \left|\int_x^y f(t)g(t)\right| = \left|g(x)\int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t + g(y)\int_c^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq C\left|\int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t\right| + C\left|\int_c^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= C\,|F(c) - F(x)| + C\,|F(y) - F(c)| \\
&\leq 2C\varepsilon.
\end{aligned}$$

Tedy H má v b zleva vlastní limitu a $fg \in \mathcal{N}(a,b)$.

V Případě tvrzení (b) Věty 8.4.8(b), nechť C omezuje F a $|g(x)| < \varepsilon$ pro $x \in P_-(b,\delta)$. Nechť $x, y \in P_-(b,\delta)$, $x < y$. Najdeme bod $c \in [x,y]$ splňující (8.30). Pak máme odhad

$$\begin{aligned}
|H(x) - H(y)| &= \left|\int_x^y f(t)g(t)\right| = \left|g(x)\int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t + g(y)\int_c^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \varepsilon\left|\int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t\right| + \varepsilon\left|\int_c^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \varepsilon\,|F(c) - F(x)| + \varepsilon\,|F(y) - F(c)| \\
&\leq 4C\varepsilon.
\end{aligned}$$

Důkaz pak dokončíme jako výše.

8.5. Aplikace určitého integrálu

8.5.1. Věta (Integrální kritérium)**.** Nechť f je nezáporná nerostoucí spojitá funkce na $[n_0,\infty)$, kde $n_0 \in \mathbb{N}$. Nechť pro posloupnost $\{a_n\}$ platí $a_n = f(n)$, $n \geq n_0$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.

Důkaz. Uvažujme $n_1 \in \mathbb{N}, n_1 \geq n_0$ a dělení $D = \{n_0, n_0+1, \dots, n_1-1, n_1\}$ intervalu $[n_0, n_1]$. Funkce f je nerostoucí, a tedy

$$\overline{S}(f, D) = a_{n_0} + \dots + a_{n_1-1} = \sum_{i=n_0}^{n_1-1} a_i,$$

$$\underline{S}(f, D) = a_{n_0+1} + \dots + a_{n_1} = \sum_{i=n_0+1}^{n_1} a_i.$$

Protože je f spojitá na $[n_0, n_1]$, platí

$$\begin{aligned}\sum_{i=n_0+1}^{n_1} a_i &= \underline{S}(f, D) \leq (R)\int_{n_0}^{n_1} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (N)\int_{n_0}^{n_1} f(x)\,\mathrm{d}x = (R)\int_{n_0}^{n_1} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \overline{S}(f, D) = \sum_{i=n_0}^{n_1-1} a_i.\end{aligned} \tag{8.31}$$

Předpokládejme nyní, že $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Pak je funkce

$$F(x) = \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad t \in [n_0, \infty)$$

primitivní k f na (n_0, ∞), a tedy pro každé $n_1 > n_0$ máme z (8.31)

$$\begin{aligned}\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{x\to\infty} F(x) - F(n_0) = \lim_{x\to\infty} F(x) \\ &= \lim_{x\to\infty}\int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \geq \lim_{n\to\infty}\sum_{i=n_0+1}^{n} a_i \\ &= \sum_{i=n_0+1}^{\infty} a_i.\end{aligned}$$

Proto $\sum_{i=n_0+1}^{\infty} a_i$ konverguje, a tedy i $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje.

Obráceně, jestliže $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje, pak pro (8.31) dává

$$\begin{aligned}\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=n_0}^{n-1} a_i \geq \limsup_{n\to\infty}\int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \limsup_{x\to\infty} F(x).\end{aligned} \tag{8.32}$$

Protože je f nezáporná, je F neklesající. Tedy limita F v nekonečnu existuje a podle (8.32) je vlastní. Tedy $\int_{n_0}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ konverguje. ■

8.5.2. Příklad. Ukažte, že řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$ diverguje.

Řešení. Položme $f(x) = \frac{1}{x \log x}$, $x \in [2, \infty)$. Pak f je nezáporná spojitá a nerostoucí na $[2, \infty)$. Protože

$$\int_2^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\log 2}^\infty \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\log t]_{\log 2}^\infty = \infty,$$

řada

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \log n} = \sum_{n=2}^\infty f(n)$$

diverguje podle Věty 8.5.1. ♣

8.5.3. Věta (Zbytek Taylorova polynomu v integrálním tvaru)**.** Nechť $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$ a funkce f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní $(n+1)$-ní derivaci. Pak

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \int_a^x \frac{1}{n!} f^{n+1}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t. \tag{8.33}$$

Důkaz. Budeme postupovat matematickou indukcí podle $n \in \mathbb{N}$.

Pro $n = 0$ máme

$$f(x) - T_0^{f,a}(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t,$$

tedy (8.33) pro $n = 0$ platí.

Předpokládejme nyní platnost tvrzení pro $n \in \mathbb{N}$ a dokažme ho pro $n+1$. Mějme tedy $(n+2)$-krát diferencovatelnou funkci f na intervalu $[a, x]$. Pak je funkce $f^{(n+1)}(t)(x-t)^n$ spojitá na $[a, x]$, a proto můžeme pomocí per partes (Věta 8.3.14) počítat

$$\begin{aligned}
&\int_a^x \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1}\right]_a^x \\
&\quad - \int_a^x \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(n+1)(x-t)^n(-1)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)(x-a)^n + \int_a^x \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)(x-a)^n + f(x) - T_n^{f,a}(x) \\
&= f(x) - T_{n+1}^{f,a}(x).
\end{aligned}$$

Tím je důkaz proveden. ■

8.5.4. Definice. Křivkou budeme rozumět zobrazení $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) takové, že $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ je **třídy** C^1, tj. φ_i' jsou spojité na $[a, b]$, přičemž v krajních bodech $[a, b]$ uvažujeme příslušnou jednostrannou derivaci. **Geometrickým obrazem** křivky φ rozumíme množinu $\langle\varphi\rangle = \varphi([a, b]) \subset \mathbb{R}^n$.

8.5.5. Příklady. (a) Jednotkovou kružnici v rovině lze vyjádřit křivkou $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

(b) Graf funkce f na intervalu je křivkou popsanou zobrazením $\varphi(t) = [t, f(t)]$, $t \in [a, b]$.

(c) Geometrický obraz křivky lze často parametrizovat různými zobrazeními φ, například graf funkce $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, $x \in [-1, 1]$ lze popsat také jako $\varphi(t) = (t^3, t^2)$, $t \in [-1, 1]$.

8.5.6. Definice. Nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ke křivka. Její **délkou** rozumíme hodnotu

$$L(\varphi) = \sup\{L(\varphi, D); D \text{ dělení intervalu } [a, b]\},$$

kde pro dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ definujeme

$$L(\varphi, D) = \sum_{i=1}^{n} \|\varphi(x_{i-1}) - \varphi(x_i)\| .$$

8.5.7. Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$ a $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ je taková, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ je $f_i \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom definujeme

$$(N) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left((N) \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x, \dots, (N) \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \right).$$

Obdobně definujeme $(R) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ je taková, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ je $f_i \in \mathcal{R}(a, b)$

8.5.8. Lemma. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f = (f_1, \dots, f_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ je spojitá. Pak

$$\left\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\| = \left\| [\int_a^b f_1(t)\,\mathrm{d}t, \dots, \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t] \right\| \le \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t. \tag{8.34}$$

Důkaz. Funkce $t \mapsto \|f(t)\|$ je spojitá na $[a, b]$, a proto $\int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$ konverguje. Položme

$$y = [\int_a^b f_1(t)\,\mathrm{d}t, \dots, \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t] \in \mathbb{R}^n.$$

Pak máme z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti

$$\begin{aligned} \|y\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} y_i f_i(t) \right) \mathrm{d}t \le \int_a^b \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} f_i^2(t) \right)}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \|y\|\,\|f(t)\|\,\mathrm{d}t = \|y\| \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Pokud $y = 0$, (8.34) zjevně platí. Pokud $\|y\| > 0$, právě provedený výpočet dává (8.34). ■

8.5.9. Věta. Nechť $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ je křivka. Pak platí
$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + \cdots + (\varphi_n'(t))^2}\, \mathrm{d}t.$$

Důkaz. Mějme libovolné dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^k$ dáno. Pak platí díky Lemmatu 8.5.8
$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^k \|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\| &= \sum_{j=1}^k \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi'(t)\, \mathrm{d}t \right\| \\ &\le \sum_{j=1}^k \int_{x_{j-1}}^{x_j} \|\varphi'(t)\|\, \mathrm{d}t = \int_a^b \|\varphi'(t)\|\, \mathrm{d}t.\end{aligned}$$
Odtud plyne $L(\varphi) \le \int_a^b \|\varphi'(t)\|\, \mathrm{d}t$.

Abychom dokázali obrácenou nerovnost, zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Poněvadž jsou φ_i' stejnoměrně spojité na $[a,b]$ (viz Věta 8.2.19), existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí
$$\forall s, t \in [a,b], |s-t| < \delta : \left|\varphi_i'(t) - \varphi_i'(s)\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$
Nechť nyní $D = \{x_j\}_{j=0}^k$ je dělení $[a,b]$ splňující $\nu(D) < \delta$. Potom pro $t \in [x_{j-1}, x_j]$ platí $\|\varphi'(t)\| \le \left\|\varphi'(x_j)\right\| + \varepsilon$. Dostáváme tedy
$$\begin{aligned}\int_{x_{j-1}}^{x_j} \left\|\varphi'(t)\right\|\, \mathrm{d}t - \varepsilon(x_j - x_{j-1}) &\le \left\|\varphi'(x_j)\right\| (x_j - x_{j-1}) \\ &= \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \big(\varphi'(t) + \varphi'(x_j) - \varphi'(t)\big)\, \mathrm{d}t \right\| \\ &\le \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi'(t)\, \mathrm{d}t \right\| + \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\varphi'(x_j) - \varphi'(t))\, \mathrm{d}t \right\| \\ &\le \left\|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\right\| + \varepsilon(x_j - x_{j-1}).\end{aligned}$$
Dostáváme tedy
$$\int_a^b \left\|\varphi'(t)\right\|\, \mathrm{d}t \le \sum_{j=1}^k \left\|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\right\| + 2\varepsilon(b-a) \le L(\varphi) + 2\varepsilon(b-a).$$
Protože ε bylo voleno libovolně, dostáváme $\int_a^b \|\varphi'(t)\|\, \mathrm{d}t \le L(\varphi)$. ■

8.5.10. Příklad. (a) Je-li $\varphi(t) = [\cos t, \sin t]$, $t \in [0, 2\pi]$, pak
$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1\, \mathrm{d}t = 2\pi.$$

(b) Je-li f spojitě diferencovatelná funkce na $[a,b]$, pak parametrizace jejího grafu pomocí $\varphi(t) = [t, f(t)]$, $t \in [a,b]$, dává, že délka grafu funkce f je rovna $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, \mathrm{d}t$.

8.6. Teoretické příklady na integrál

8.6.1. Příklad. Definujme funkci $f : [0,1] \to [0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } x \text{ je iracionální,} \\ \frac{1}{q}, & \text{pokud } x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{N} \text{ nesoudělné.} \end{cases}$$

Ukažte, že f nemá primitivní funkci na žádném intervalu $(a, b) \in [0, 1]$ a $(R) \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Řešení. Je-li $(a, b) \subset [0, 1]$ libovolný interval, vezmeme racionální číslo tvaru $\frac{p}{q}$, p, q nesoudělné, ležící v intervalu (a, b). Pak funkce f nenabývá na (a, b) žádných iracionálních hodnot v intervalu $(0, \frac{1}{q})$, a tedy nemá na (a, b) Darbouxovu vlastnost. Proto dle Věty 8.1.19 nemá na (a, b) primitivní funkci.

Ukažme nyní, že $(R) \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. K tomuto účelu postačí ukázat, že pro dané $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje dělení D intervalu $[0, 1]$ splňující $\overline{S}(f, D) \le \varepsilon$. Pak totiž

$$0 \le \underline{S}(f, D) \le \overline{S}(f, D) < \varepsilon$$

a $(R) \int f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ dle Věty 8.2.15.

Najděme nyní takové dělení. Množina

$$M = \{x \in [0, 1];\ f(x) \ge \varepsilon\}$$

je konečná. Lze proto najít navzájem se neprotínající intervaly $I_1, \dots, I_n$ takové, že $\sum_{i=1}^n |I_i| < \varepsilon$ a $M \subset \bigcup_{i \in I} I_i$. Nechť D sestává z krajních bodů intervalů I_i, $i = 1, \dots, n$, s eventuálně přidanými body 0 a 1. Pak pro interval I z D různý od $I_j, \dots I_n$ platí $\sup_I f \le \varepsilon$. Tedy

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, D) &= \sum_{i=1}^n \Big(\sup_{I_i} f\Big)|I_i| + \sum_{I \notin \{I_1, \dots, I_n\}} \Big(\sup_I f\Big)|I| \\ &\le \sum_{i=1}^n |I_i| + \varepsilon \cdot \sum_{I \notin \{I_1, \dots, I_n\}} |I| \le 2\varepsilon. \end{aligned}$$

♣

8.6.2. Příklad. Nechť f je spojitá funkce na otevřeném omezeném intervalu (a, b). Ukažte, že f je stejnoměrně spojitá na (a, b) právě tehdy, když existují vlastní limity v krajních bodech (a, b).

Řešení. Má-li f vlastní limity v krajních bodech intervalu (a, b), můžeme definovat $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ jako

$$F(x) = \begin{cases} \lim_{y \to a_+} f(y), & x = a, \\ f(x), & x \in (a, b), \\ \lim_{y \to b_-} f(y), & x = b. \end{cases}$$

Pak F je na $[a,b]$ spojitá, a tedy i stejnoměrně spojitá (vizte Větu 8.2.19). Tedy f je stejnoměrně spojitá na (a,b).

Obráceně, je-li f stejnoměrně spojitá na (a,b), splňuje v obou krajních bodech Bolzanovu-Cauchyovu podmínku (Věta 8.3.16). To ověříme takto. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, je dáno. Najdeme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, dle definice stejnoměrné spojitosti, tj.

$$\forall x, y \in I : (|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Tedy pro $x, y \in P_+(a,\delta)$ máme $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, což jsme potřebovali dokázat. ♣

8.6.3. Příklad. Nechť $f, g \in \mathcal{R}(a,b)$. Pak funkce

$$x \mapsto f(x)g(x),\ x \mapsto \max\{f(x), g(x)\} \text{ a } x \mapsto \min\{f(x), g(x)\}$$

leží v $\mathcal{R}(a,b)$.

Řešení. Jelikož maximum i minimum dvou omezených funkcí je funkce omezená a

$$\begin{aligned}\max\{f(x), g(x)\} &= \frac{f(x)+g(x)}{2} + \frac{|f(x)-g(x)|}{2},\\ \min\{f(x), g(x)\} &= \frac{f(x)+g(x)}{2} - \frac{|f(x)-g(x)|}{2},\end{aligned}$$

jsou funkce $x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$, $x \mapsto \min\{f(x), g(x)\}$ riemannovsky integrovatelné dle Věty **??**(a).

Obraťme nyní naši pozornost k součinu fg. Protože $fg = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2\right)$, stačí dokázat integrovatelnost f^2 pro $f \in \mathcal{R}(a,b)$. Mějme tedy funkci $f \in \mathcal{R}(a,b)$. Pak f^2 je omezená funkce díky omezenosti f. Je-li c konstanta, platí $f^2 = (f + c)^2 - c^2 - 2cf$, a tedy stačí uvažovat nezápornou funkci f. Nechť tedy f je nezáporná a omezená číslem M. Pro $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, najdeme dělení D intervalu $[a,b]$ takové, že $\overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) < \varepsilon$ (viz Věta 8.2.15). Nechť $\mathcal{D}$ značí množinu intervalů v dělení D.

Protože pro množinu A nezáporných čísel platí

$$\sup A^2 = \sup\{x^2;\ x \in A\} = \left(\sup A\right)^2 \quad \text{a} \quad \inf A^2 = (\inf A)^2\,,$$

máme pro množinu A sestávající z nezáporných čísel a omezenou číslem M odhad

$$\begin{aligned}\sup A^2 - \inf A^2 &= (\sup A)^2 - (\inf A)^2\\ &= (\sup A - \inf A)(\sup A + \inf A) \le 2M(\sup A - \inf A).\end{aligned} \tag{8.35}$$

Použitím (8.35) dostáváme

$$\begin{aligned}\overline{S}(f^2, D) - \underline{S}(f^2, D) &= \sum_{I \in \mathcal{D}} \left(\sup_I f^2 - \inf_I f^2\right) \cdot |I|\\ &\le \sum_{I \in \mathcal{D}} 2M\left(\sup_I f - \inf_I f\right) \cdot |I| \le 2M\varepsilon.\end{aligned}$$

Tedy f^2 je riemannovsky integrovatelná dle Věty 8.2.15. ♣

8.6.4. Příklad. Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je riemannovsky integrovatelná kladná funkce na $[a,b]$. Pak $(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$.

Řešení. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že $f(x) > 0$ pro každé $x \in [a,b]$ a přitom $(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Zkonstruujeme nedegenerované intervaly $[a_n, b_n] \subset [a,b]$, $n \in \mathbb{N}$, takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

(a) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \subset [a,b]$,
(b) $0 < b_n - a_n \le \frac{1}{n}$,
(c) $\sup_{[a_n,b_n]} f \le \frac{1}{n}$.

Induktivní konstrukce. Případ $n = 1$. Nalezneme dělení $D = \{x_i\}_{i=1}^m$ intervalu $[a,b]$ splňující $\nu(D) < 1$ a $\overline{S}(f,D) < b-a$. Potom existuje $i_0 \in \{1,\dots,m\}$ takové, že $\sup_{[x_{i_0-1},x_{i_0}]} f < 1$. Kdyby tomu tak nebylo, platilo by

$$b - a > \overline{S}(f,D) = \sum_{i=1}^m \sup_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}) \ge \sum_{i=1}^m (x_i - x_{i-1}) = b - a,$$

což je spor. Můžeme tedy položit $a_1 = x_{i_0-1}$ a $b_1 = x_{i_0}$.

Předpokládejme nyní, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ máme zkonstruován interval $[a_n, b_n]$. Protože platí podle Věty 8.2.24

$$0 = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{a_n} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a_n}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b_n}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

a členy na pravé straně jsou nezáporné (vizte Větu 8.2.23), máme

$$\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Vezměme dělení D intervalu $[a_n, b_n]$ takové, že $S(f,D) < \frac{b_n - a_n}{n+1}$. Protože $S(f,D) \ge S(f,D')$ pro každé jemnější dělení D', můžeme předpokládat, že $\nu(D) < \frac{1}{n+1}$. Z definice $S(f,D)$ plyne, že alespoň na jednom intervalu určeném dělením D je supremum funkce f menší než $\frac{1}{n+1}$. Tento interval označíme jako $[a_{n+1}, b_{n+1}]$, čímž je konstrukce provedena.

Příklad ?? nyní dává, že existuje bod $x \in \bigcap_{n=1}^\infty [a_n, b_n]$. Pro něj pak platí

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon f(x) \le \sup_{[a_n,b_n]} f \le \frac{1}{n},$$

a tedy $f(x) = 0$. To je však spor s předpokladem. ♣

8.6.5. Příklad. Ukažte, že

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\,\mathrm{d}x = \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}.$$

Řešení. Odvodíme rekurentní formuli pro $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x$. Integrací per partes totiž dostáváme pro $n \geq 2$

$$\begin{aligned}\int \sin^n x \,\mathrm{d}x &= \int \sin^{n-1} x \sin x \,\mathrm{d}x \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + \int (n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x \,\mathrm{d}x \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + \int (n-1) \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Tedy

$$\int \sin^n x \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x.$$

Proto

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x.$$

Protože

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \quad \text{a} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \,\mathrm{d}x = 1,$$

máme

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \,\mathrm{d}x &= \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}, \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \,\mathrm{d}x &= \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}.\end{aligned}$$

Závěrem použijeme substituci $t = \frac{\pi}{2} - x$ k odvození

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \,\mathrm{d}x.$$

♣

8.6.6. Příklad (Wallisova formule)**.** Ukažte, že

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1} \frac{2k}{2k+1}.$$

Řešení. Díky Příkladu 8.6.5 máme

$$\begin{aligned}S_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}, \\ C_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \,\mathrm{d}x = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}.\end{aligned}$$

Tedy dostáváme

$$\frac{\pi}{2} = S_n \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1} = \frac{S_n}{C_n} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1} \frac{2k}{2k+1}. \tag{8.36}$$

Povšimněme si, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$0 < \sin^{2n+2} x < \sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

a tedy dle Příkladu 8.6.4

$$0 < S_{n+1} \leq C_n \leq S_n \leq C_{n-1}.$$

Tím pádem máme

$$\frac{2n+1}{2n} = \frac{C_{n-1}}{C_n} \geq \frac{S_n}{C_n} \geq \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{n}{n+1}.$$

Limitním přechodem v (8.36) máme požadovanou rovnost

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1} \frac{2k}{2k+1}$$

♣

8.6.7. Příklad (Stirlingův[1] vzorec)**.** Ukažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1.$$

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme

$$a_n = \frac{n!}{\sqrt{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} \quad \text{a} \quad b_n = \log a_n.$$

Pak platí pro $n \in \mathbb{N}$

$$b_n - b_{n+1} = (n + \tfrac{1}{2}) \log \frac{n+1}{n} - 1. \tag{8.37}$$

Protože dle Příkladu 6.3.8 platí

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}, \quad x \in (-1, 1),$$

máme

$$\log \frac{n+1}{n} = \log \frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2k+1}.$$

Dosazením do (8.37) dostaneme

$$b_n - b_{n+1} = (n + \tfrac{1}{2}) \log \frac{n+1}{n} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2k}.$$

[1]James Stirling (1692–1770)

Tedy je posloupnost $\{b_n\}$ klesající. Dále dostáváme odhad

$$b_n - b_{n+1} < \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n+1)^2} \right)^k = \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{(2n+1)^2}} = \frac{1}{4} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Tím pádem obdržíme

$$\begin{aligned} b_1 - b_n &= \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) \leq \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \leq \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

což znamená, že $b_n > b_1 - \frac{1}{4}$. Tedy posloupnost $\{b_n\}$, jakožto klesající a zdola omezená, konverguj k nějakému číslu b. Z toho máme konvergenci posloupnosti $\{a_n\}$, neboť

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} e^{b_n} = e^b.$$

Označíme $C = e^b$ a spočtěme její hodnotu. Protože víme z Příkladu 8.6.6, že

$$\tfrac{1}{2}\pi = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1} \frac{2k}{2k+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{((2n)!)^2(2n+1)},$$

dostáváme s použitím $\lim a_n = C$ vztah

$$\tfrac{1}{2}\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n} a_n^4 (2n)^2 \left(\frac{n}{e}\right)^{4n}}{(a_{2n})^2 4n \left(\frac{2n}{e}\right)^{4n} (2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^4}{(a_{2n})^2} \frac{n^2}{n(2n+1)} = \tfrac{1}{2} C^2.$$

Protože $C \geq 0$, dostáváme $C = \sqrt{\pi}$ a Stirlingova formule je odvozena. ♣

8.6.8. Příklad (Laplaceův-Gaussův integrál)**.** Ukažte, že

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí po substituci $x = \sin t$

$$\int_0^1 (1-x^2)^n \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t \, dt = \frac{2 \cdot 4 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)} \tag{8.38}$$

podle Příkladu 8.6.5. Dále pro $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, platí díky substituci $x = \operatorname{tg} t$ a opět díky Příkladu 8.6.5

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t \cos^{-2} t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} t \, dt \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)} \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \tag{8.39}$$

Dále platí

$$1 - y \le e^{-y} \le \frac{1}{1+y}, \quad y \in [0, \infty). \tag{8.40}$$

Označíme-li totiž

$$\varphi_1(y) = e^{-y} - 1 + y, \quad \varphi_2(y) = 1 - (1+y)e^{-y}, \quad y \in [0, \infty),$$

pak

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$$

a

$$\varphi_1'(y) = 1 - e^{-y} > 0, \quad \varphi_2'(y) = ye^{-y} > 0, \quad y \in (0, \infty).$$

Obě funkce jsou tedy rostoucí na $[0, \infty)$ (viz Věta 5.2.6), a proto nezáporné na $(0, \infty)$. Odtud již plyne (8.40).

Z (8.40) máme

$$(1 - x^2)^n \le e^{-nx^2}, \quad x \in (0, 1),$$

a

$$e^{-nx^2} \le \frac{1}{(1+x^2)^n}, \quad x \in (0, \infty).$$

Tedy

$$\int_0^1 (1-x^2)^n \, dx \le \int_0^1 e^{-nx^2} \, dx \le \int_0^\infty e^{-nx^2} \, dx \le \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n} \, dx.$$

Substitucí $t = x\sqrt{n}$ dostaneme

$$\sqrt{n} \int_0^1 (1-x^2)^n \, dx \le \int_0^\infty e^{-t^2} \, dt \le \sqrt{n} \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n} \, dx.$$

Z rovností (8.38) a (8.39) obdržíme

$$\sqrt{n} \frac{2 \cdot 4 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)} \le \int_0^\infty e^{-t^2} \, dt \le \sqrt{n} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)} \frac{\pi}{2}. \tag{8.41}$$

Spočtěme nyní limity krajních výrazů v (8.41). Použitím Stirlingovy formule 8.6.7 máme

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\frac{2\cdot 4\cdots 2n}{1\cdot 3\cdots (2n+1)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2}{\sqrt{2\pi(2n+1)}\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi n\sqrt{n}2^{2n}n^{2n}e}{\sqrt{2\pi(2n+1)}(2n+1)^{2n+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi n\sqrt{n}n^{2n}e}{\sqrt{2\pi(2n+1)}\left(\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{n}\right)^n\right)^2} \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{e}{(e^{\frac{1}{2}})^2} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}.
\end{aligned}$$

Z tohoto vzorce pak dostáváme

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\frac{1\cdot 3\cdots (2n-3)}{2\cdot 4\cdots (2n-2)}\frac{\pi}{2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\frac{1\cdot 3\cdots (2n-3)(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4\cdots (2n-2)(2n)}\frac{\pi}{2(2n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\pi}{2(2n+1)}\frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n\pi}{2(2n+1)}\frac{(2n+1)!}{\sqrt{n}2^{2n}(n!)^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}.
\end{aligned}$$

Tedy z Věty 2.2.44 máme limitním přechodem v (8.41)

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

♣

8.6.9. Příklad. Ukažte, že číslo π je iracionální.

Důkaz. Předpokládejme, že $\pi = \frac{a}{b}$ pro nějaká $a, b \in \mathbb{N}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme polynomy

$$f(x) = \frac{1}{n!}x^n(a - bx)^n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k}x^n b^k x^k,$$

$$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x).$$

Všimněme si, že $n!f(x)$ má celé koeficenty a členy u x mají stupeň alespoň n. Proto

$$f(0), f^{(1)}(0), \ldots, f^{(2n)}(0) \in \mathbb{Z}. \tag{8.42}$$

Protože $f(x) = f(\frac{a}{b} - x) = f(\pi - x)$, platí též

$$f(\pi), f^{(1)}(\pi), \ldots, f^{(2n)}(\pi) \in \mathbb{Z}. \tag{8.43}$$

Protože $f^{(2n+2)}(x) = 0$, odvodíme

$$\big(F'(x)\sin x - F(x)\cos x\big)' = F''(x)\sin x + F(x)\sin x = f(x)\sin x.$$

Tedy

$$\int_0^\pi f(x)\sin x \,\mathrm{d}x = \big[F'(x)\sin x - F(x)\cos x\big] = F(\pi) + F(0).$$

Díky (8.42) a (8.43) platí

$$\int_0^\pi f(x)\sin x \,\mathrm{d}x = F(\pi) + F(0) \in \mathbb{Z}.$$

Ale máme

$$0 < f(x)\sin x < \frac{1}{n!}(\pi^n a^n),$$

a tedy dle Příkladu 8.6.4 platí

$$0 < \int_0^\pi f(x)\sin x \,\mathrm{d}x < \pi\frac{1}{n!}(\pi^n a^n).$$

Pro dostatečně velké $n \in \mathbb{N}$ je tedy

$$\int_0^\pi f(x)\sin x \in \mathbb{N} \cap (0,1),$$

což je spor. ■

8.6.10. Příklad. Nechť f je sudá funkce a $[-a,a] \subset \mathcal{D}(f)$. Pokud $f \in \mathcal{R}(-a,a)$ (resp. $f \in \mathcal{N}(-a,a)$), pak

$$(R)\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2(R)\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{(resp. } (N)\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2(N)\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x).$$

Nechť f je lichá funkce a $[-a,a] \subset \mathcal{D}(f)$. Pokud $f \in \mathcal{R}(-a,a)$ (resp. $f \in \mathcal{N}(-a,a)$), pak

$$(R)\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{(resp. } (N)\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0).$$

Řešení. Pro newtonovsky integrovatelné funkce tvrzení snadno plyne z Věty o substituci 8.3.15, neboť substitucí $x = -t$ dostaneme pro sudou funkci rovnost

$$\begin{aligned}
(N)\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x &= (N)\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + (N)\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= (N)\int_{0}^{a} f(-t)\,\mathrm{d}t + (N)\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= (N)\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + (N)\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 2(N)\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

pro lichou pak

$$\begin{aligned}
(N)\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x &= (N)\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + (N)\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= (N)\int_{0}^{a} f(-t)\,\mathrm{d}t + (N)\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= (N)\int_{0}^{a} -f(t)\,\mathrm{d}t + (N)\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Nechť f je nyní sudá funkce riemannovsky integrovatelná na $[-a, a]$. Pro $n \in \mathbb{N}$ uvažujme dělení $D_n^+ = \{\frac{ja}{n}\}_{j=0}^n$ a $D_n^- = \{-a + \frac{ja}{n}\}_{j=0}^n$. Díky Důsledku 8.2.12 platí

$$\overline{\int_{-a}^{0}} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^-) \quad \text{a} \quad \overline{\int_{0}^{a}} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^+).$$

Vzhledem k sudosti funkce f platí $\overline{S}(f, D_n^-) = \overline{S}(f, D_n^+)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy dostáváme

$$\begin{aligned}
(R)\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x &= (R)\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + (R)\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \overline{\int_{-a}^{0}} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_{0}^{a}} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^-) + \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^+) \\
&= 2\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^+) \\
&= 2\overline{\int_{0}^{a}} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\cdot(R)\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Je-li funkce f lichá, platí pro výše uvažovaná dělení D_n^- a D_n^+ vztah $\overline{S}(f, D_n^+) = -\underline{S}(f, D_n^-)$. Tím pádem máme

$$\begin{aligned}(R)\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x &= (R)\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + (R)\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \underline{\int_{-a}^{0}} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_{0}^{a}} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^-) + \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^+) \\ &= -\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^+) + \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^+) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. ♣

8.6.11. Příklad. Nechť $p \in \mathbb{R}$ a f je p-periodická funkce.

(a) Nechť jsou intervaly $[a, b]$ a $[a + p, b + p]$ obsaženy v $\mathcal{D}(f)$ a f je riemannovsky integrovatelná funkce na $[a, b]$. Pak je riemannovsky integrovatelná na $(a + p, b + p)$ a platí $(R)\int_{a+p}^{b+p} f(x)\,\mathrm{d}x = (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Nechť jsou intervaly (a, b) a $(a + p, b + p)$ obsaženy v $\mathcal{D}(f)$ a f je newtonovsky integrovatelná funkce na (a, b). Pak je newtonovsky integrovatelná na $(a + p, b + p)$ a platí $(N)\int_{a+p}^{b+p} f(x)\,\mathrm{d}x = (N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Řešení. (a) Nechť $\{D_n\}$ je posloupnost dělení intervalu $[a, b]$ taková, že $\nu(D_n) \to 0$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ uvažujme dělení D_n' intervalu $[a + p, b + p]$, které vznikne z D_n přičtením p k dělícím bodům dělení D_n. Jelikož je f p-periodická, platí $\overline{S}(()f, D_n') = \overline{S}(()f, D_n)$ a $\underline{S}(()f, D_n') = \underline{S}(()f, D_n)$. Tedy existuje $(R)\int_{a+p}^{b+p} f(x)\,\mathrm{d}x$ a platí pro něj

$$(R)\int_{a+p}^{b+p} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n') = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(b) Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Pak je funkce

$$G(x) = F(x - p), \quad x \in (a + p, b + p),$$

primitivní k f na $(a + p, b + p)$. Vskutku, pro $x \in (a + p, b + p)$ platí

$$G'(x) = F'(x - p) = f(x - p) = f(x).$$

Jelikož máme

$$\begin{aligned}[G(x)]_{a+p}^{b+p} &= \lim_{x\to(b+p)_-} G(x) - \lim_{x\to(a+p)_+} G(x) \\ &= \lim_{x\to(b+p)_-} F(x - p) - \lim_{x\to(a+p)_+} F(x - p) \\ &= \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x) = [F(x)]_a^b,\end{aligned}$$

platí

$$(N)\int_{a+p}^{b+p} f(x)\,\mathrm{d}x = (N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

♣

8.6.12. Příklad. Ukažte, že součin dvou riemannovsky integrovatelných funkcí na omezeném uzavřeném intervaly je opět riemannovsky integrovatelná funkce. Dále najděte příklad newtonovsky integrovatelné funkce na otevřeném intervalu, jejíž druhá mocnina není newtonovsky integrovatelná.

Řešení. Mějme $f, g \in \mathcal{R}(a,b)$. Protože

$$fg = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right),$$

stačí dokázat, že $f^2 \in \mathcal{R}(a,b)$ pro $f \in \mathcal{R}(a,b)$. Jelikož je riemannovsky intergovatelná funkce omezená, lze přičtením vhodné konstanty $c \in \mathbb{R}$ zařídit, že $f + c$ je nezáporná. Pak ale

$$f^2 = (f+c)^2 - c^2 - 2cf$$

je v $\mathcal{R}(a,b)$, pokud $f + c \in \mathcal{R}(a,b)$. Lze tedy předpokládat, že f je nezáporná riemannovsky integrovatelná funcke na $[a,b]$. Naším cílem je dokázat, že $f^2 \in \mathcal{R}(a,b)$.

Nejprve si rozmysleme, že pro omezenou $A \subset [0,\infty)$ platí

$$(\sup A)^2 = \sup\{a^2;\ a \in A\} \quad \text{a} \quad (\inf A)^2 = \inf\{a^2;\ a \in A\}. \tag{8.44}$$

Z nerovnosti $(\sup A)^2 \geq a^2$, $a \in A$, je totiž patrné, že $(\sup A)^2 \geq \sup\{a^2;\ a \in A\}$. Máme-li $\varepsilon(0,\infty)$ dáno, najdeme $\tilde{a} \in A$ takové, že $\tilde{a} > \sup A - \varepsilon$. Pak

$$\sup\{a^2;\ a \in A\} \geq (\tilde{a})^2 > (\sup A)^2 - \varepsilon(2\sup A - \varepsilon).$$

Tedy dostáváme i opačnou nerovnost pro první tvrzení. Druhé se dokáže obdobně.

Mějme nyní $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, libovolné. Podle Věty 8.2.15 najdeme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a,b]$ takové, že

$$\overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) \leq \varepsilon.$$

Nechť $M \in \mathbb{R}$ omezuje f na $[a,b]$. Pak máme z (8.44)

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f^2,D)-\underline{S}(f^2,D) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sup_{[x_i,x_{i-1}]} f^2 - \inf_{[x_i,x_{i-1}]} f^2\right)(x_i-x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left((\sup_{[x_i,x_{i-1}]} f)^2 - (\inf_{[x_i,x_{i-1}]} f)^2\right)(x_i-x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left((\sup_{[x_i,x_{i-1}]} f - \inf_{[x_i,x_{i-1}]} f)(\sup_{[x_i,x_{i-1}]} f + \inf_{[x_i,x_{i-1}]} f)\right)(x_i-x_{i-1}) \\
&\le 2M\sum_{i=1}^{n}\left(\sup_{[x_i,x_{i-1}]} f - \inf_{[x_i,x_{i-1}]} f\right)(x_i-x_{i-1}) \\
&\le 2M \le 2M\left(\overline{S}(f,D)-\underline{S}(f,D)\right) \le 2M\varepsilon.
\end{aligned}$$

Věta 8.2.15 říká, že $f^2 \in \mathcal{R}(a,b)$.

Pro důkaz druhé části tvrzení stačí uvažovat funkci $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x\in(0,1)$. Pak $f \in \mathcal{N}(0,1)$, ale $f^2 \notin \mathcal{N}(0,1)$. ♣

8.6.13. Příklad. Najděte příklad funkce f, která má primitivní funkci na intervalu $(-1,1)$, ale $|f|$ ani f^2 primitivní funkci na $(-1,1)$ nemá.

Řešení. Uvažujme funkci

$$F(x)=\begin{cases} x^2\cos(\frac{1}{x^3}), & x\in(-1,1)\setminus\{0\},\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Pak

$$F'(x)=\begin{cases} 2x\cos(\frac{1}{x^3})+3\frac{1}{x^2}\sin(\frac{1}{x^3}), & x\in(-1,1)\setminus\{0\},\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Protože je funkce

$$g(x)=\begin{cases} 2x\cos(\frac{1}{x^3}), & x\in(-1,1)\setminus\{0\},\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

spojitá na $(-1,1)$, má zde primitivní funkci. Tedy i funkce

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^2}\sin(\frac{1}{x^3}), & x\in(-1,1)\setminus\{0\},\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

má primitivní funkci na $(-1,1)$. Ukážeme, že

$$|f(x)|=\begin{cases} \frac{1}{x^2}\left|\sin(\frac{1}{x^3})\right|, & x\in(-1,1)\setminus\{0\},\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

primitivní funkci na $(-1,1)$ nemá. Předpokládejme, že G je primitivní funkce k $|f|$ na $(-1,1)$. Položme

$$H(x) = (R)\int_{-1}^{x} |f(t)|\,\mathrm{d}t, \quad x \in (-1,0).$$

Pak podle Věty 8.2.28 je H dobře definovaná funkce na $(-1,0)$ a její derivace je zde rovna $|f|$. Věta 8.1.3 tedy dává existenci konstanty $c \in \mathbb{R}$ takové, že $H(x) = G(x) + c$, $x \in (-1,0)$. Pak tedy

$$\lim_{x\to 0_-} H(x) = G(0) + c$$

je vlastní. Ukážeme, že tento fakt vede ke sporu. Počítejme pomocí Věty o substituci **??**

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0_-} H(x) &= \lim_{x\to 0_-} (R)\int_{-1}^{x} \frac{1}{t^2}\left|\sin(\frac{1}{t^3})\right|\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{x\to 0_-} (N)\int_{-1}^{x} \frac{1}{t^2}\left|\sin(\frac{1}{t^3})\right|\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{x\to 0_-} (N)\int_{\frac{1}{x}}^{-1} \left|\sin t^3\right|\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{x\to 0_+} (N)\int_{1}^{\frac{1}{x}} \left|\sin t^3\right|\,\mathrm{d}t \\
&= (N)\int_{1}^{\infty} \left|\sin t^3\right|\,\mathrm{d}t \\
&= (N)\int_{1}^{\infty} \frac{|\sin t|}{3t^{\frac{2}{3}}}\,\mathrm{d}t \\
&\geq (N)\int_{1}^{\infty} \frac{|\sin t|}{3t}\,\mathrm{d}t = \infty
\end{aligned}$$

(poslední rovnost plyne z Příkladu 8.4.11). Tím jsme dostali kýžený spor.

Pro funkci f^2 postupujeme obdobně pomocí výpočtu

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0_-}(R)\int_{-1}^{x} f^2(t)\,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to 0_-}(N)\int_{-1}^{x}\frac{1}{t^4}\left(\sin(\frac{1}{t^3})\right)^2\,\mathrm{d}t\\ &= \lim_{x\to 0_-}(N)\int_{\frac{1}{x}}^{-1} t^2(\sin t^3)^2\,\mathrm{d}t\\ &= \lim_{x\to 0_+}(N)\int_{1}^{\frac{1}{x}} t^2(\sin t^3)^2\,\mathrm{d}t\\ &= (N)\int_{1}^{\infty} t^2(\sin t^3)^2\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{3}(N)\int_{1}^{\infty}\sin^2 t\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{6}\left[t-\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_1^{\infty} = \infty.\end{aligned}$$

♣

8.6.14. Příklad. Nechť $f\colon (0,1]\to\mathbb{R}$ je monotónní spojitá funkce a nechť konverguje $(N)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Pak

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že f je nerostoucí a nezáporná. Označíme $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$, $n\in\mathbb{N}$. Pak

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(\frac{k}{n})\\ &\le \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

a tedy

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \le \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Na druhou stranu máme odhady

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{k=2}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x\\ &\le \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f(\frac{k-1}{n}) \le \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})\\ &= a_n + \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Jelikož integrál $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, platí $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. (Vskutku, je-li F primitivní funkce k f na $(0,1)$, pak

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} [F(x)]_0^{\frac{1}{n}} = 0.)$$

Dostáváme tak

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leq \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Platí tak $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} a_n$. ♣

8.6.15. Příklad. Ukažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1}.$$

Řešení. Pro $a_n = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$ platí

$$\log a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log \frac{k}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Použijeme-li předešlý Příklad 8.6.14 na funkci $f(x) = \log x$, dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \log a_n = \int_0^1 \log x\,\mathrm{d}x = [x \log x]_0^1 - \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = -1.$$

Ze spojitosti funkce exp tak máme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \exp(-1).$$

♣

8.7. Početní příklady na integrál

Výpočet primitivní funkce. Jestliže v níže uvedených příkladech na určení primitivní funkce není uveden interval, pak hledáme primitivní funkci na všech maximálních otevřených intervalech obsažených v definičním oboru integrandu.

8.7.1. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Díky Větě 8.1.7 platí

$$\begin{aligned}\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1-3x+3x^2-x^3}{\sqrt[3]{x^4}}\,\mathrm{d}x\\ &= \int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + 3\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^5}\right)\mathrm{d}x\\ &\overset{c}{=} -\frac{1}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{9\sqrt[3]{x^2}}{2} + \frac{9\sqrt[3]{x^5}}{5} - \frac{3\sqrt[3]{x^8}}{8}, \quad x\in(-\infty,0),\ x\in(0,\infty).\end{aligned}$$

♣

8.7.2. Příklad. Spočtěte

$$\int \sin^4 x\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Jelikož

$$\begin{aligned}\sin^4 x &= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac14 - \frac12\cos 2x + \frac14\cos^2 2x\\ &= \frac14 - \frac12\cos 2x + \frac18 + \frac18\cos 4x = \frac38 - \frac12\cos 2x + \frac18\cos 4x,\end{aligned}$$

dostáváme

$$\int \sin^4 x\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \frac38 x - \frac14\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x, \quad x\in\mathbb{R}.$$

♣

8.7.3. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{\sinh^2 x\cosh^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Máme

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sinh^2 x\cosh^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\sinh^2 x\cosh^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sinh^2 x}\,\mathrm{d}x - \int\frac{1}{\cosh^2 x}\,\mathrm{d}x\\ &\overset{c}{=} -\operatorname{cotgh} x - \operatorname{tgh} x \quad \text{pro } x\in(-\infty,0) \text{ a } x\in(0,\infty).\end{aligned}$$

♣

8.7.4. Příklad. Spočtěte

$$\int \left(\frac{\log x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x.$$

Řešení. Pomocí Věty 8.1.12 postupně odvodíme

$$\begin{aligned}\int \log^2 x \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x &= -\frac{\log^2 x}{x} + 2\int \frac{\log x}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\log^2 x}{x} + 2\left(-\frac{\log x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\right) \\ &\overset{c}{=} -\frac{1}{x}\left(\log^2 x + 2\log x + 2\right), \quad x \in (0,\infty).\end{aligned}$$

♣

8.7.5. Příklad. Spočtěte

$$\int x^2 \arccos x\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Dvojnásobbným použitím Věty 8.1.12 dostáváme

$$\begin{aligned}\int x^2 \arccos x\,\mathrm{d}x &= \frac{x^3 \arccos x}{3} + \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^3 \arccos x}{3} - \frac{1}{3}\int x^2\left(\sqrt{1-x^2}\right)'\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^3 \arccos x}{3} - \frac{x^2\sqrt{1-x^2}}{3} + \frac{1}{3}\int 2x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Pomocí substituce $t = 1 - x^2$ převedeme poslední integrál na hledání primitivní funkce $\int -\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$. Tedy

$$\int 2x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} -\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}, \quad x \in (-1,1),$$

z čehož plyne závěr

$$\int x^2 \arccos x\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \frac{x^3 \arccos x}{3} - \frac{x^2\sqrt{1-x^2}}{3} - \frac{2}{9}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}, \quad x \in (-1,1).$$

♣

8.7.6. Příklad. Spočtěte

$$\int \sin(\log x)\,\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \int \cos(\log x)\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Označíme-li $I_1 = \int \sin(\log x)\,\mathrm{d}x$ a $I_2 = \int \cos(\log x)\,\mathrm{d}x$, pomocí Věty 8.1.12 dostáváme pro $x \in (0,\infty)$ rovnosti

$$I_1 = x\sin(\log x) - I_2 \quad \text{a} \quad I_2 = x\cos(\log x) + I_1.$$

Množiny I_1 a I_2 jsou určené až na konstantu. Použitím Lemmatu 8.1.11 máme po dosazení druhé rovnice do první a přičtení I_1 rovnost

$$2I_1 = I_1 + I_1 = x\sin(\log x) - x\cos(\log x) - I_1 + I_1 = x\sin(\log x) - x\cos(\log x) + C$$

(C značí množinu všech konstantních funkcí na $(0,\infty)$). Tedy

$$I_1 \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}\big(x\sin(\log x) - x\cos(\log x)\big), \quad x \in (0,\infty).$$

Obdobně odvodíme vztah

$$I_2 \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}\big(x\sin(\log x) + x\cos(\log x)\big), \quad x \in (0,\infty).$$

♣

8.7.7. Příklad. Spočtěte

$$\int (2x-3)^{10}\,\mathrm{d}x$$

Řešení. Máme

$$\int (2x-3)^{10}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (2x-3)^{10} 2\,\mathrm{d}x.$$

Položíme-li ve Větě **??** $\varphi(x) = 2x-3$ a $f(t) = t^{10}$, máme $\int f(t)\,\mathrm{d}t \stackrel{c}{=} \frac{1}{11}t^{11}$, $t \in \mathbb{R}$. Tedy platí

$$\int (2x-3)^{10} \stackrel{c}{=} \frac{1}{22}(2x-3)^{11}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

♣

8.7.8. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Zvolíme substituci $t = \varphi(x) = e^x$, čímž úlohu převedeme na výpočet

$$\int \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t \stackrel{c}{=} t - \log|1+t|$$

pro $t \in (-\infty,-1)$ a $t \in (-1,\infty)$. Proto

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} e^x - \log(1+e^x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

♣

8.7.9. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Funkce $h(x) = \frac{1}{1+\cos x}$ je spojitá na intervalech $(-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, a na těchto intervalech tedy budeme hledat její primitivní funkci. Platí

$$\int \frac{1}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Pro první člen platí

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} -\operatorname{cotg} x, \quad x \in (k\pi,(k+1)\pi) \quad \text{pro } k \in \mathbb{Z}.$$

V druhém členu použijeme Větu **??** pro funkci $\varphi(x) = \sin x$ a $f(t) = \frac{1}{t^2}$. Jelikož $\int f(t) \overset{c}{=} -\frac{1}{t}$, $t \in (-\infty, 0)$ a $t \in (0, \infty)$, platí

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} -\frac{1}{\sin x}, \quad x \in (k\pi, (k+1)\pi) \quad \text{pro } k \in \mathbb{Z}.$$

Položíme-li nyní

$$g(x) = \begin{cases} \frac{-\cos x + 1}{\sin x}, & x \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

dostaneme spojitou funkci na $(-\pi, \pi)$, která je dle předchozích výpočtů a Věty 8.1.53 primitivní k h na $(-\pi, \pi)$. Rozšíříme-li g 2π-periodicky na $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$, z periodicity uvažovaných funkcí plyne, že g je primitivní k h na množině $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$ (viz Příklad 8.6.11). ♣

8.7.10. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{x}{4 + x^4}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Položme $\varphi(x) = x^2$ pro $x \in \mathbb{R}$, a $f(t) = \frac{1}{4+t^2}$ pro $t \in \mathbb{R}$. Potom

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{4\left(1 + \left(\frac{t}{2}\right)^2\right)} \overset{c}{=} \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Protože

$$\int \frac{x}{4 + x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{4 + x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x,$$

dostáváme podle Věty **??**

$$\int \frac{x}{4 + x^4}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

♣

8.7.11. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Položme $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ pro $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Předpokládejme nejprve, že $x \in (1, \infty)$. Potom platí

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{x^2\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}.$$

Položme dále $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ pro $x \in (1, \infty)$ a $g(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ pro $t \in (-1, 1)$. Potom

$$f(x) = g(\varphi(x))\varphi'(x), \quad x \in (1, \infty).$$

Protože $\int g(t)\,\mathrm{d}t \stackrel{c}{=} -\arcsin t$, $t \in (-1,1)$, platí podle Věty 8.1.29

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} -\arcsin\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \in (1,\infty).$$

Podobně odvodíme, že

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \arcsin\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \in (-\infty,-1).$$

♣

8.7.12. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{x\log x \log\log x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Primitivní funkci budeme hledat na intervalech $(1,e)$ a (e,∞). Položme $f(x) = \frac{1}{x\log x\log\log x}$ a $\varphi(x) = \log\log x$ pro $x \in (1,e)$. Potom $\varphi((1,e)) = (-\infty,0)$. Definujme $g(t) = \frac{1}{t}$ pro $t \in (-\infty,0)$. Potom

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int g(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Protože $\int g(t)\,\mathrm{d}t \stackrel{c}{=} \log|t|$, $t \in (-\infty,0)$, máme podle druhé věty o substituci (Věta 8.1.27)

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \log|\varphi(x)| = \log\left|\log\log x\right|, \quad x \in (1,e).$$

Obdobně odvodíme, že

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \log\left|\log\log x\right|, \quad x \in (e,\infty).$$

♣

8.7.13. Příklad. Spočtěte

$$\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Položme $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ pro $x \in (\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+(k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, $\varphi(x) = \cos x$ pro $x \in \mathbb{R}$ a $g(t) = \frac{1}{t}$ pro $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Potom

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\int g(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tedy

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} -\log|\cos x|, \quad x \in (\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+(k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z}.$$

♣

8.7.14. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{2^x 3^x}{9^x - 4^x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Funkce $h(x) = \frac{2^x 3^x}{9^x - 4^x}$ je spojitá funkce na $\mathbb{R} \setminus 0$, kde tedy budeme hledat funkci k ní primitivní. Platí

$$h(x) = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left(\frac{3}{2}\right)^x - 1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Položíme-li $\varphi(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, $x \in \mathbb{R}$, a $f(t) = \frac{1}{t^2-1}$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, platí

$$h(x) = \frac{1}{\log \frac{3}{2}} f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Protože

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \log \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \quad \text{pro } t \in (-\infty, -1), t \in (-1, 1) \text{ a } t \in (1, \infty),$$

dostáváme

$$\int h(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \frac{1}{2(\log 3 - \log 2)} \log \left| \frac{3^x - 2^x}{3^x + 2^x} \right| \quad \text{pro } x \in (-\infty, 0) \text{ a } x \in (0, \infty).$$

♣

8.7.15. Příklad. Spočtěte

$$\int x\sqrt{2-5x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Primitivní funkci k $h(x) = x\sqrt{2-5x}$ budeme hledat na intervalu $(-\infty, \frac{2}{5})$. Uvažujme substituci $\varphi(x) = 2-5x$, $x \in (-\infty, \frac{2}{5})$. Pak $\varphi^{-1}(t) = \frac{2-t}{5}$, $(\varphi^{-1})'(t) = -\frac{1}{5}$ a

$$h(\varphi^{-1}(t))(\varphi^{-1})'(t) = -\frac{2}{25}\sqrt{t} + \frac{1}{25} t^{\frac{3}{2}}, t \in (0, \infty).$$

Jelikož

$$\int h \stackrel{c}{=} -\frac{4}{75} t^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{125} t^{\frac{5}{2}}, \quad t \in (0, \infty),$$

dle Věty 8.1.29 platí

$$\int h(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} -\frac{4}{75}(2-5x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{125}(2-5x)^{\frac{5}{2}}, \quad x \in (-\infty, \frac{2}{5}).$$

♣

8.7.16. Příklad. Spočtěte

$$\int \cos^5 x \sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Primitivní funkci k $h(x) = \cos^5 x \sqrt{\sin x}$ budeme hledat na intervalech $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Pišme

$$h(x) = \cos^4 x \sqrt{\sin x} \cos x = (1 - \sin^2 x)^2 \sqrt{\sin x} \cos x.$$

Položíme-li $\varphi(x) = \sin x$ a $f(t) = (1-t^2)^2 \sqrt{t}$, $t \in (0, \infty)$, platí

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = \int \left(\sqrt{t} - 2t^{\frac{5}{2}} + t^{\frac{9}{2}} \right) \mathrm{d}t \stackrel{c}{=} \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{7} t^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{11} t^{\frac{11}{2}}, \quad t \in (0, \infty).$$

Pomocí Věty **??** dostáváme

$$\int h(x) \stackrel{c}{=} \frac{2}{3}\sin x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{7}\sin x^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{11}\sin x^{\frac{11}{2}} \quad \text{pro } x \in (2k\pi, (2k+1)\pi), \text{ kde } k \in \mathbb{Z}.$$

♣

8.7.17. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x,$$

kde a je kladné reálné číslo.

Řešení. Položíme $f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$, a $\varphi(t) = a\sinh t$, $t \in \mathbb{R}$. Pak

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{a\sqrt{1+\sinh^2 t}} = \frac{1}{a\cosh t}$$

a

$$\varphi'(t) = a\cosh t.$$

Tedy

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int 1\,\mathrm{d}t \stackrel{c}{=} t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Proto

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \varphi^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \log\left(\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(Poslední rovnost snadno odvodíme ze vzorce $\frac{x}{a} = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$.) ♣

8.7.18. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Dle Věty **??** existují čísla $A, B, C \in \mathbb{R}$ taková, že platí

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Pak platí

$$x^2 + 1 = A(x+1)(x-1) + B(x-1) + C(x+1)^2, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Ze spojitosti obou stran této rovnosti pak plyne, že je splněna pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Porovnáme-li koeficienty polynomy na levé straně s koeficenty polynomu na straně pravé, obdržíme $A = \frac{1}{2}$, $B = -1$ a $C = \frac{1}{2}$. Proto

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\log|x+1| + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\log|x-1| \\ &\stackrel{c}{=} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\log\left|x^2-1\right| \quad \text{pro } x \in (-\infty, -1),\ x \in (-1, 1) \text{ a } x \in (1, \infty).\end{aligned}$$

♣

8.7.19. Příklad. Spočtěte
$$\frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Jelikož polynom x^4+1 nemá reálné kořeny, lze ho vyjádřit jako součin dvou nerozložitelných kvadratických polynomů. Ty nalezneme buď za pomoci metody neurčitých koeficientů nebo pomocí rozkladu
$$x^4+1=(x^2+1)^2-2x^2=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1).$$
Rozklad na parciální vzorky tedy bude mít tvar
$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1},\qquad x\in\mathbb{R},$$
kde $A,B,C,D\in\mathbb{R}$. Úpravou obržíme rovnost
$$\begin{aligned}1&=(Ax+B)(x^2-\sqrt{2}x+1)+(Cx+D)(x^2-\sqrt{2}x+1)\\&=x^3(A+C)+x^2(-\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D)+x(A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D)+(B+D).\end{aligned}$$
Řešením příslušné soustavy lineárních rovnic dostáváme
$$A=\frac{1}{2\sqrt{2}},\ B=\frac{1}{2},\ C=-\frac{1}{2\sqrt{2}},\ D=\frac{1}{2}.$$

Pak
$$\begin{aligned}\int\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{\frac{1}{4\sqrt{2}}(2x+\sqrt{2})}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x+\int\frac{\frac{1}{4}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4\sqrt{2}}\log(x^2+\sqrt{2}x+1)+\int\frac{\frac{1}{4}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4\sqrt{2}}\log(x^2+\sqrt{2}x+1)+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(\sqrt{2}x+1)^2+1}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4\sqrt{2}}\log(x^2+\sqrt{2}x+1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1).\end{aligned}$$

Obdobně postupujeme i u druhého členu, což vede k výsledku
$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x&\stackrel{c}{=}\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)\\&\quad+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1),\qquad x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

♣

8.7.20. Příklad. Spočtěte
$$\int\frac{x^3}{(x-1)^{100}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Použijeme substituci $y = x - 1$, čímž se problém převede na výpočet

$$\int \frac{(y+1)^3}{y^{100}}\,\mathrm{d}y = \int \left(y^{-97} + 3y^{-98} + 3y^{-99} + y^{-100}\right)\mathrm{d}y$$
$$\stackrel{c}{=} -\frac{1}{96}y^{-96} - \frac{3}{97}y^{-97} - \frac{3}{98}y^{-98} - \frac{1}{99}y^{-99}, \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Tedy

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}\,\mathrm{d}y \stackrel{c}{=} -\frac{1}{96}(x-1)^{-96} - \frac{3}{97}(x-1)^{-97} - \frac{3}{98}(x-1)^{-98}$$
$$-\frac{1}{99}(x-1)^{-99} \quad \text{pro } x \in (-\infty, 1) \text{ a } x \in (1, \infty).$$

♣

8.7.21. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{x^9}{(x^{10} + 2x^5 + 2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Jelikož

$$\int \frac{x^9}{(x^{10} + 2x^5 + 2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int \frac{x^5 5x^4}{(x^{10} + 2x^5 + 2)^2}\,\mathrm{d}x,$$

substitucí $y = x^5$ převedeme úlohu na hledání primitivní funkce

$$\int \frac{y}{(y^2 + 2y + 2)^2}\,\mathrm{d}y.$$

Díky Příkladu 8.1.16 pak máme

$$\int \frac{y}{(y^2+2y+2)^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int \left(\frac{2y+2}{(y^2+2y+2)^2} - \frac{2}{(y^2+2y+2)^2}\right)\mathrm{d}y$$
$$= -\frac{1}{2(y^2+2y+2)} - \int \frac{1}{((y+1)^2+1)^2}\,\mathrm{d}y$$
$$\stackrel{c}{=} -\frac{1}{2(y^2+2y+2)} - \frac{y+1}{2(y^2+2y+2)} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(y+1).$$

Závěr jest tedy následující:

$$\int \frac{x^9}{(x^{10} + 2x^5 + 2)^2}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} -\frac{x^5+1}{10(x^{10} + 2x^5 + 2)} - \frac{1}{10}\operatorname{arctg}(x^5 + 1),$$

přičemž rovnost platí na $\mathbb{R}$. ♣

8.7.22. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Funkce $h(x) = \frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$ splňuje

$$h(x) = \frac{1}{(\operatorname{tg}^2 x + 2)\cos^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Položíme $\varphi(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, a $f(t) = \frac{1}{t^2+2}$, $t \in \mathbb{R}$. Pak

$$h(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x), \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Jelikož

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\,\mathrm{d}t \overset{c}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \quad t \in \mathbb{R},$$

máme pro funkci

$$H(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right), \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),$$

rovnost

$$\int h(x) \overset{c}{=} H(x), \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Nechť nyní H je π-periodicky dodefinována na $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Pak též $H'(x) = h(x)$ na této množině (viz Příklad 8.6.11). Jelikož

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} H(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \quad \text{a} \quad \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+} H(x) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

je funkce

$$F(x) = \begin{cases} H(x) + k\frac{\pi}{\sqrt{2}}, & x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + k\frac{\pi}{\sqrt{2}}, & x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z, \end{cases}$$

díky Větě 8.1.53 primitivní k h na celém $\mathbb{R}$. ♣

8.7.23. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Pro funkci $h(x) = \frac{1}{\sin x}$ platí

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}, \quad x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi). \end{aligned}$$

Položíme-li $\varphi(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ a $f(t) = \frac{1}{t}$, máme rovnost

$$h(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x), \quad x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi).$$

Proto
$$\int h(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|, \quad x \in (-\pi, 0),\ x \in (0, \pi).$$
Díky periodicitě však tato rovnost platí i pro všechna $x \in (k\pi, (k+1)\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

Pro výpočet druhé primitivní funkce uvažujme rovnost $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$, $x \in \mathbb{R}$, a substituční funkci $\varphi(x) = \frac{\pi}{2} + x$. Díky Větě **??** a předešlému výpočtu pak platí
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}\,\mathrm{d}x \\ &\stackrel{c}{=} \log\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| \quad \text{pro } x \in (\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

♣

8.7.24. Příklad. Spočtěte
$$\int \frac{1}{(2 + \cos x)\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Primitivní funkci budeme hledat na intervalech $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Jelikož
$$\frac{1}{(2 + \cos x)\sin x} = \frac{\sin x}{(2 + \cos x)(\sin^2 x} = \frac{\sin x}{(2 + \cos x)(1 - \cos^2 x)},$$
substitucí $t = \varphi(x) = \cos x$ převedeme úlohu na hledání primtivní funkce
$$\int \frac{-1}{(2+t)(1-t^2)}\,\mathrm{d}t.$$
Snadným rozkladem na parciální zlomky obdržíme
$$\frac{-1}{(2+t)(1-t^2)} = \frac{1}{3(2+t)} - \frac{1}{6(1-t)} - \frac{1}{2(1+t)}.$$
Tedy
$$\int \frac{-1}{(2+t)(1-t^2)}\,\mathrm{d}t \stackrel{c}{=} \frac{1}{3}\log(2+t) + \frac{1}{6}\log(1-t) - \frac{1}{2}\log(1+t)$$
pro $t \in (-\infty, -2)$, $t \in (-2, -1)$, $t \in (-1, 1)$ a $t \in (1, \infty)$. z čehož plyne
$$\int \frac{1}{(2 + \cos x)\sin x}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \frac{1}{3}\log(2 + \cos x) + \frac{1}{6}\log(1 - \cos x) - \frac{1}{2}\log(1 + \cos x),$$
přičemž $x \in (k\pi, (k+1)\pi)$ pro $k \in \mathbb{Z}$. ♣

8.7.25. Příklad. Spočtěte
$$\int \frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Použijeme substituci $t = \varphi(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Stejně jako ve Větě **??** máme $\varphi^{-1}(t) = \operatorname{arctg} t$, $(\varphi^{-1})'(t) = \frac{1}{1+t^2}$, $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$ a $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$. Dostáváme tak úlohu

$$\int \frac{t^2+1}{(t^2+2)^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t^2+2-1}{(t^2+2)^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t^2+2} - \int \frac{1}{(t^2+2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

První integrál vyjde

$$\int \frac{1}{t^2+2}\,\mathrm{d}t \overset{c}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \quad t \in \mathbb{R},$$

zatímco druhý je dle rekurzívního vzorce 8.1.16 roven

$$\int \frac{1}{(t^2+2)^2} \overset{c}{=} \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\left(\frac{t}{2(1+(\frac{t}{\sqrt{2}})^2)}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dohromady dostáváme

$$\int \frac{t^2+1}{(t^2+2)^2}\,\mathrm{d}t \overset{c}{=} \frac{3}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) - \frac{t}{4(2+t^2)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dosazením tak získáváme rovnost

$$\int \frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \frac{3}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\operatorname{tg} x}{4(\operatorname{tg}^2 x + 2)}, \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Označme

$$F(x) = \frac{3}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\operatorname{tg} x}{4(\operatorname{tg}^2 x + 2)}.$$

Z periodicity uvažovaných funkcí plyne, že F je primitivní k zadané funkci také na každém intervalu tvaru $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Jelikož

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} F(x) = \frac{3\pi}{8\sqrt{2}} \quad \text{a} \quad \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+} F(x) = -\frac{3\pi}{8\sqrt{2}},$$

funkce

$$H(x) = \begin{cases} F(x) + k\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}, & x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), \\ \frac{3\pi}{8\sqrt{2}} + k\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}, & x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z},$$

je spojitá na $\mathbb{R}$ a mimo body $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, je primitivní k funkci zadané. Dle Věty 8.1.53 se tedy jedná o hledanou primitivní funkci na celém $\mathbb{R}$. ♣

8.7.26. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{2\sin x - \cos x + 5}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Použijeme substituci $t = \varphi(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $x \in (-\pi, \pi)$. Pak $\varphi^{-1}(t) = 2 \operatorname{arctg} t$, $(\varphi^{-1})'(t) = \frac{2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ a $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Dosazením získáváme integrál

$$\int \frac{1}{3t^2+2t+2}\, \mathrm{d}t = \frac{3}{5} \int \frac{1}{1+\left(\frac{3}{\sqrt{5}}(t+\frac{1}{3})\right)^2}\, \mathrm{d}t \overset{c}{=} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{3t+1}{\sqrt{5}}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pak je funkce

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}}\right)$$

primitivní k zadané funkci $f = \frac{1}{2\sin x - \cos x + 5}$ na intervalu $(-\pi, \pi)$. Z periodicity uvažovaných funkcí je F primitivní k f i na intervalech $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Jelikož

$$\lim_{x \to \pi-} F(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{5}} \quad \text{a} \quad \lim_{x \to -\pi+} F(x) = -\frac{\pi}{2\sqrt{5}}$$

funkce

$$H(x) = \begin{cases} F(x) + k\frac{\pi}{\sqrt{5}}, & x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi), \\ \frac{\pi}{2\sqrt{5}} + k\frac{\pi}{\sqrt{5}}, & x = \pi + 2k\pi, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z},$$

je spojitá na $\mathbb{R}$ a mimo body $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, je primitivní k funkci zadané. Dle Věty 8.1.53 se tedy jedná o hledanou primitivní funkci na celém $\mathbb{R}$. ♣

8.7.27. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}\, \mathrm{d}x.$$

Řešení. Polynom $x^2 + x + 1$ je kladný na celé reálné ose, a tedy budeme hledat primitivní funkci na celém $\mathbb{R}$. Použijeme Eulerovu substituci (viz Věta 8.1.59), tj. položíme $\varphi(x) = \sqrt{x^2+x+1} - x$. Pak

$$x = \frac{t^2-1}{1-2t}, \qquad \sqrt{x^2+x+1} = \frac{-t^2+t-1}{1-2t}$$

a

$$(\varphi^{-1})'(t) = -2\frac{t^2-t+1}{(1-2t)^2}.$$

Úlohu jsme tak převedli na hledání primitivní funkce

$$\begin{aligned} \int -2 \cdot \frac{(1-2t)(t^2-t+1)}{(-t^2+t-2)(1-2t)^2}\, \mathrm{d}t &= 2 \int \frac{1}{1-2t}\, \mathrm{d}t \\ &\overset{c}{=} -\log|1-2t|, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Proto platí

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}\, \mathrm{d}x \overset{c}{=} -\log\left|1 - 2\left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right)\right|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

♣

8.7.28. Příklad. Spočtěte
$$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Použijeme Větu 8.1.56, takže položíme $\varphi(x) = \sqrt[6]{x+1}$. Pak $(\varphi^{-1})(t) = t^6 - 1$ a $(\varphi^{-1})'(t) = 6t^5$. Úlohu jsme tak převedli na hledání primitivní funkce
$$\int \frac{(1-t^3)6t^5}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$
Standardním postupem odvodíme identitu
$$\frac{t^8-t^5}{t^2+1} = t^6 - t^4 - t^3 + t^2 + t - 1 + \frac{-t+1}{t^2+1}.$$
Jelikož
$$\int \frac{-t+1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t - \int \frac{t}{t^2+1} \overset{c}{=} \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\log(1+t^2),$$
máme výsledek
$$\int \frac{(1-t^3)6t^5}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \overset{c}{=} -\frac{6}{7}t^7 + \frac{6}{5}t^5 + \frac{3}{2}t^4 - 2t^3 - 3t^2 + 6t + 3\log(1+t^2) - 6\operatorname{arctg} t,$$
kde $t \in \mathbb{R}$. Nyní jen stačí dosadit $t = \sqrt[6]{1+x}$ a obdržíme tak hledanou primitivní funkci pro $x \in (-1,\infty)$. ♣

8.7.29. Příklad. Spočtěte
$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Jelikož
$$\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1},$$
zvolíme substituci $t = \varphi(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ (viz Věta 8.1.56). Pak $\varphi^{-1}(t) = -\frac{1+t^2}{1-t^2}$ a $(\varphi^{-1})'(t) = \frac{-4t}{(1-t^2)^2}$. Úlohu tak převedeme na hledání primitivní funkce
$$\int \frac{t-1}{t+1}\cdot\frac{-4t}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{4t}{(1+t)^3(1-t)}\,\mathrm{d}t.$$
Standardním postupem obdržíme rozklad na parciální zlomky
$$\frac{4t}{(1+t)^3(1-t)} = \frac{1}{2(1-t)} + \frac{1}{2(1+t)} + \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{2}{(1+t)^3},$$

což znamená, že

$$\int \frac{4t}{(1+t)^3(1-t)}\,\mathrm{d}t \overset{c}{=} \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| - \frac{1}{1+t} + \frac{1}{(1+t)^2}$$

pro $t \in (-\infty,-1)$, $t \in (-1,1)$ a $t \in (1,\infty)$. Dosazením $t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ dostaneme hledanou primitivní funkci na intervalu $(1,\infty)$. ♣

8.7.30. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Substitucí $t = \varphi(x) = \sqrt{x}+\sqrt{1+x}$ dostáváme

$$\varphi^{-1}(t) = \left(\frac{t^2-1}{2t}\right)^2 \quad \text{a} \quad (\varphi^{-1})'(t) = \frac{(t^2-1)(t^2+1)}{2t^3}.$$

Tím jsme úohu převedli na hledání primitivní funkce

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+t}\cdot\frac{(t^2+1)(t^2-1)}{2t^3}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int \frac{t^3-t^2+t-1}{t^3}\,\mathrm{d}t \\ &\overset{c}{=} \frac{1}{2}\left(t - \log|t| - \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2}\right)\end{aligned}$$

pro $t \in (-\infty,-1)$, $t \in (-1,0)$ a $t \in (0,\infty)$. Dosazením $t = \sqrt{x}+\sqrt{1+x}$ obdržíme hledanou primitivní funkci na intervalu $(0,\infty)$. ♣

8.7.31. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{x\sqrt{-\log^2 x + 4\log -3}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Substitucí $t = \log x$ převedeme úlohu na hledání primitivní funkce

$$\int \frac{1}{\sqrt{-t^2+4t-3}}\,\mathrm{d}t.$$

Jelikož

$$\sqrt{-t^2+4t-3} = \sqrt{(t-1)(3-t)} = (3-t)\sqrt{\frac{t-1}{3-t}}, \quad t \in (1,3),$$

položíme $y = \varphi(t) = \sqrt{\frac{t-1}{3-t}}$. Pak $\varphi^{-1}(y) = \frac{3y^2+1}{y^2+1}$, $(\varphi^{-1})'(y) = \frac{4y}{(y^2+1)^2}$ a $3-t = \frac{2}{y^2+1}$. Tím obdržíme

$$\int \frac{1}{\frac{2}{y^2+1}\cdot y}\cdot\frac{4y}{(y^2+1)^2}\,\mathrm{d}y = \int \frac{2}{y^2+1}\,\mathrm{d}y \overset{c}{=} 2\operatorname{arctg} y, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Proto platí

$$\int \frac{1}{x\sqrt{-\log^2 x + 4\log -3}}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\log x - 1}{3 - \log x}}, \quad x \in (e, e^3).$$

♣

8.7.32. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Primitivní funkci budeme hledat na intervalu $(-\infty, 0)$. Výpočet započneme úpravou

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x}}{(1+e^x)-(1-e^x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{\sqrt{1+e^x}}{2e^x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\sqrt{1-e^x}}{2e^x}\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{8.45}$$

Podívejme se nejprve na první člen. V něm provedeme substituci $t = \varphi(x) = \sqrt{1+e^x}$, $x \in (-\infty, 0)$. Pak $\varphi^{-1}(t) = \log(t^2-1)$ a $(\varphi^{-1})'(t) = \frac{2t}{t^2-1}$. Úlohu jsme tak převedli na výpočet primitivní funkce

$$\int \frac{t^2}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Dle Věty **??** existují čísla $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ splňující

$$\frac{t^2}{(t^2-1)^2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{(t+1)^2}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Úpravou a použitím spojitosti dostáváme rovnost

$$t^2 = A(t^3+t^2-t-1) + B(t^2+2t+1) + C(t^3-t^2-t+1) + D(t^2-2t+1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Systém rovnic

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ A + B - C + D &= 1 \\ -A + 2B - C - 2D &= 0 \\ -A + B + C + D &= 0 \end{aligned}$$

má řešení

$$A = \frac{1}{4},\ B = \frac{1}{4},\ C = -\frac{1}{4},\ D = \frac{1}{4}.$$

Proto platí

$$\int \frac{t^2}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t \overset{c}{=} \frac{1}{4}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{1}{4(t-1)} - \frac{1}{4(t+1)}.$$

V druhém výrazu z (8.45) provedeme substituci $t = \varphi(x) = \sqrt{1-e^x}$. Pak $\varphi^{-1}(t) = \log(1-t^2)$ a $(\varphi^{-1})'(t) = -\frac{2t}{1-t^2}$. Dostaneme tak integrál

$$\int \frac{-t^2}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Použitím první části výpočtu obdržíme

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \frac{1}{4}\log\left|\frac{t_1-1}{t_1+1}\right| - \frac{1}{4(t_1-1)} - \frac{1}{4(t_1+1)} + \frac{1}{4}\log\left|\frac{t_2-1}{t_2+1}\right| - \frac{1}{4(t_2-1)} - \frac{1}{4(t_2+1)},$$

kde $t_1 = \sqrt{1+e^x}$ a $t_2 = \sqrt{1-e^x}$. Výpočet přitom platí na intervalu $(-\infty, 0)$. ♣

Určitý integrál.

8.7.33. Příklad. Nalezněte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1} + \frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$$

Řešení. Jelikož

$$\frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+1} \le \sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}} \le \sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n},$$

stačí dle Věty 2.2.44 určit limitu výrazu

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}.$$

Uvážíme-li však funkci $f(x) = 2^x$, $x \in [0,1]$, obdržíme riemannovsky integrovatelnou funkci na $[0,1]$ (viz Věta 8.2.20) a dle Důsledku 8.2.13 máme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}} = (R)\int_0^1 2^x\,\mathrm{d}x = (N)\int_0^1 2^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\log 2}\left[2^x\right]_0^1 = \frac{1}{\log 2}.$$

♣

8.7.34. Příklad. Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = \int_{x^2}^{x^3}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Označme

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}, \quad t \in \mathbb{R},$$

a

$$F(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dle Věty 8.2.28 platí

$$F'(x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tedy

$$\begin{aligned} f'(x) &= \bigl(F(x^3) - F(x^2)\bigr)' = g(x^3)3x^2 - g(x^2)2x \\ &= \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

♣

8.7.35. Příklad. Nalezněte limitu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x (\operatorname{arctg} t)^2 \, \mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Řešení. Pomocí l'Hospitalova pravidla odvodíme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x (\operatorname{arctg} t)^2 \, \mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

♣

8.7.36. Příklad. Vypočtěte integrál

$$\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x} \, \mathrm{d}x.$$

Řešení. Použitím Věty 8.3.15 a Příkladu 8.6.11 dostaneme

$$\begin{aligned} \int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x} \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \int_0^{200\pi} \sqrt{1-\cos y} \, \mathrm{d}y = 50 \int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos y} \, \mathrm{d}y \\ &= 50 \left(\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos y} \, \mathrm{d}y + \int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{1-\cos y} \, \mathrm{d}y \right) \\ &= 100 \int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos y} \, \mathrm{d}y = 100 \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{1+\cos y}} \, \mathrm{d}y \\ &= 100 \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t = 200 \left[\sqrt{t} \right]_{t=0}^{t=2} = 200\sqrt{2}. \end{aligned}$$

♣

8.7.37. Příklad. Spočtětě integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\varepsilon \cos x} \, \mathrm{d}x,$$

kde $\varepsilon \in [0, 1)$.

Řešení. Použitím substituce $\operatorname{cotg}\frac{x}{2} = t$, kde $\cos x = \frac{t^2-1}{t^2+1}$, dostáváme

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\varepsilon\cos x}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\varepsilon\frac{t^2-1}{t^2+1}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{t^2(1+\varepsilon)+1-\varepsilon}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{4}{1-\varepsilon}\int_0^{\infty} \frac{1}{1+\left(t\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{4}{1-\varepsilon}\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{arctg}\left(t\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right)\right]_{t=0}^{y=\infty} \\
&= \frac{\pi}{2}\frac{4}{\sqrt{(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.
\end{aligned}$$

♣

8.7.38. Příklad. Spočtětě integrál

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Pomocí Věty 8.3.14 dostáváme

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x\right]_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{2}\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\left(\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right) \\
&= \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

♣

8.7.39. Příklad. Spočtětě integrál

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e} \left|\log x\right|\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Platí

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\log x| \, dx = \int_{\frac{1}{e}}^{1} (-\log x) \, dx + \int_{1}^{e} \log x \, dx$$
$$= [-x \log x + x]_{e^{-1}}^{1} + [x \log x - x]_{1}^{e}$$
$$= 2 - \frac{2}{e}.$$

♣

8.7.40. Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálů

$$\int_0^1 x^\alpha \, dx, \qquad \int_1^\infty x^\alpha \, dx,$$

kde α je reálný parametr.

Řešení. Jelikož

$$\int_0^1 x^\alpha \, dx = \begin{cases} \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1, & \alpha \neq -1, \\ [\log x]_0^1, & \alpha = -1 \end{cases}$$

integrál $\int_0^1 x^\alpha \, dx$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > -1$.

Podobně odvodíme, že $\int_1^\infty x^\alpha \, dx$ konverguje právě tehdy, když $\alpha < -1$. ♣

8.7.41. Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálů

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^\alpha |\log x|^\beta \, dx, \qquad \int_{10}^\infty x^\alpha |\log x|^\beta \, dx,$$

kde α a β jsou reálné parametry.

Řešení. Uvažujme nejprve první integrál. Integrovaná funkce má v bodě $\frac{1}{2}$ vlastní limitu a na intervalu $(0, \frac{1}{2})$ je spojitá. Je tedy třeba vyšetřit její integrovatelnost u bodu 0.

Pokud $\alpha > -1$, zvolíme $\alpha' \in (-1, \alpha)$ a díky platnosti vztahu

$$\lim_{x \to 0+} x^{\alpha - \alpha'} |\log x|^\beta = 0$$

odvodíme odhad

$$x^\alpha |\log x|^\beta \leq x^{\alpha'},$$

který platí ne nějakém okolí $(0, \delta)$. Jelikož $\int_0^\delta x^{\alpha'}$ konverguje (viz Příklad 8.7.40), konverguje dle Věty 8.4.1 i integrál původní.

Pokud $\alpha = -1$, platí

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{-1} |\log x|^\beta = \begin{cases} -\left[\frac{(-\log x)^{\beta+1}}{\beta+1}\right]_0^{\frac{1}{2}}, & \beta \neq -1, \\ -[\log(-\log x)]_0^{\frac{1}{2}}, & \beta = -1. \end{cases}$$

Tedy intergrál konverguje pro $\beta < -1$.

Je-li konečně $\alpha < -1$, zvolíme $\alpha' \in (\alpha, -1)$ a díky platnosti vztahu

$$\lim_{x \to 0_+} x^{\alpha-\alpha'} \left|\log x\right|^{\beta} = \infty$$

odvodíme odhad

$$x^{\alpha} \left|\log x\right|^{\beta} \geq x^{\alpha'},$$

který platí na nějakém okolí $(0, \delta)$. Z divergence integrálu $\int_0^{\delta} x^{\alpha'}$ pak plyne divergence integrálu zadaného.

Závěrem tedy lze říci, že integrál konverguje právě tehdy, když $\alpha > -1$ nebo když $\alpha = -1$ a $\beta < -1$.

Druhý integrál bychom vyšetřili obdobným způsobem, přičemž by nám vyšlo, že konverguje právě tehdy, když $\alpha < -1$ nebo když $\alpha = -1$ a $\beta < -1$. ♣

8.7.42. Příklad. Dokažte, že

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\log 2.$$

Řešení. Snadno ověříme, že integrál konverguje. Vskutku,

$$\lim_{x \to 0_+} \frac{\log(\sin x)}{\log x} = \lim_{x \to 0_+} \frac{\log\left(\frac{\sin x}{x}\right) + \log x}{\log x} = 1,$$

a $\log x$ je funkce integrovatelná u 0 (viz Příklad 8.7.41).

Nyní pomocí substituce $x = 2t$ máme

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(2\sin t\cos t)\,\mathrm{d}t \\ &= 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log 2\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\cos t)\right). \end{aligned}$$

Jelikož substitucí $t = \frac{\pi}{2} - u$ v posledním integrálu získáváme

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\cos t)\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin u)\,\mathrm{d}u,$$

platí

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi\log 2}{2} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

Tím je požadovaná rovnost dokázána. ♣

8.7.43. Příklad. Vypočtěte integrály

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\,\mathrm{d}x, \int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \int_0^1 \frac{\arcsin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. První integrál převedeme pomocí per partes na

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\,\mathrm{d}x = \big[x \log(\sin x)\big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi \log 2}{2}.$$

V druhém provedeme substituci $x = \sin t$ a dostaneme

$$\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi \log 2}{2}.$$

Třetí pak opět pomocí per partes vyčíslíme jako

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x} = \big[\arcsin x \log x\big]_0^1 - \int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi \log 2}{2}.$$

♣

Konvergence integrálu.

8.7.44. Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálů

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^{\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Integrandy jsou spojité funkce, takže stačí vyšetřit existenci integrálů v krajních bodech daných intervalů. Podívejme se nejprve na funkci $f(x) = \frac{-\log x}{1-x^2}$. Pak pro $g(x) = -\log x$ platí $\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Jelikož má $g(x)$ u 0 konvergentní integrál, dle Věty 8.4.5 má u 0 i $f(x)$ konvergentní integrál. Tedy i $-f(x)$ (což je zadaná funkce) má u 0 konvergentní integrál.

U bodu 1 platí

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\log x}{1-x^2} = \lim_{x\to 1-} \frac{\log x}{1-x} \cdot \frac{1}{1+x} = -\frac{1}{2},$$

a tedy je zadaná funkce u 1 jakožto omezená funkce integrovatelná.

Závěr tedy je, že první integrál konverguje.

Druhý integrand u 0 srovnáme s funkcí $\log x$, co je funkce u 0 integrovatelná. U nekonečna se integrand chová jako $\frac{\log x}{x^2}$ (tj. pro $f(x) = \frac{\log x}{1+x^2}$ a $g(x) = \frac{\log x}{x^2}$ platí $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, co je integrovatelná funkce. Tedy i f je integrovatelná u nekonečna. Dohromady máme, že i druhý integrál je konvergentní.

♣

8.7.45. Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálu

$$\int_0^{\infty} \frac{x - \sin x}{x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x,$$

kde α je reálný parametr.

Řešení. Integrand $f(x)$ je nezáporná spojitá funkce na $(0,\infty)$, budeme tak vyšetřovat integrovatelnost v krajních bodech tohoto intervalu. Položíme $g(x) = x^{3-\alpha}$. Pak

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

Dle Věty 8.4.5 konverguje f u 0 právě thedy, když u 0 konverguje g. To však nastává právě pro $3-\alpha > -1$, tj. $\alpha < 4$.

U nekonečna uvážíme funkci $g(x) = \frac{1}{x^{\alpha-1}}$. Pak

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-\sin x}{x} = 1,$$

a tedy f má u nekonečna konvergentní integrál právě thedy, když g je integrovatelná u nekonečna. To však nastává právě pro $\alpha - 1 > 1$.

Dohramdy tak máme, že integrál konverguje právě thedy, když $\alpha \in (2,4)$.

♣

8.7.46. Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálu

$$\int_0^\infty \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)\operatorname{arctg} x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Daná funkce $f(x)$ je integrovatelná u 0, neboť zde je omezená ($\lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$ a $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ je omezená). U nekonečna f srovnáme s funkcí $g(x) = \frac{1}{x^2}$, neboť pak máme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Jelikož je g integrovatelná u nekonečna, je i f integrovatelná u nekonečna. Proto je f integrovatelná na $(0,\infty)$. ♣

8.7.47. Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálu

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos x)\operatorname{tg}^\alpha x\,\mathrm{d}x,$$

kde α je reálný parametr.

Řešení. Co se týče integrovatlenosti daná funkce f u 0, položme $g(x) = x^{\alpha+2}$. Pak

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\log(\cos x)}{\cos x - 1}\,\frac{\cos x - 1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^p \frac{1}{\cos^p x} = -\frac{1}{2}.$$

Tedy f je integrovatelná u 0 právě tehdy, když g je integrovatelná u 0. To nastává v případě $\alpha > -3$.

Situaci u bodu $\frac{\pi}{2}$ nám pomůže objasnit funkce

$$g(x) = \frac{\log\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^\alpha}.$$

Pak

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\frac{f(x)}{g(x)}&=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\sin^\alpha x\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}\right)^\alpha\frac{\log(\cos x)}{\log(\frac{\pi}{2}-x}\\&=1\cdot 1\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\log(\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x})+\log(\frac{\pi}{2}-x)}{\log(\frac{\pi}{2}-x)}=1.\end{aligned}$$

Jelikož je funkce g integrovatelná u $\frac{\pi}{2}$ zleva právě thedy, když $\alpha < 1$ (viz Příklad 8.7.41, máme dle Věty 8.4.5 nutnou a postačující podmínku pro integrovatelnost f u $\frac{\pi}{2}$.

Závěr tedy jest, že integrál konverguje právě tehdy, když $\alpha \in (-3, 1)$.

♣

8.7.48. Příklad. Vyšetřete absolutní i neabsolutní konvergenci integrálu

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x,$$

kde α je reálný parametr.

Řešení. Vzhledem ke spojitosti dané funkce f na $[1,\infty)$ stačí vyšetřit její integrovatelnost v nekonečnu. Je-li $\alpha > 1$, platí $|f(x)| \le \frac{1}{x^\alpha}$, a tedy f je absolutně integrovatelná. Je-li $\alpha \in (0,1]$, má $\sin x$ omezenou primitivní funkci a $x^{-\alpha}$ je klesající funkce s limitou 0 v nekonečnu. Dle Věty 8.4.8 je integrál z f konvergentní. Pokud $\alpha \in (-\infty, 0]$, máme pro každé $n \in \mathbb{N}$ odhad

$$\left|\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin x\, x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x\right| \ge (2n\pi)^{-\alpha}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin x\,\mathrm{d}x = 2\cdot(2n\pi)^{-\alpha}.$$

Z tohoto odhadu vidíme neplatnost Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro primitivní funkci k f v nekonečnu. Integrál tak není v tomto případě konvergentní.

Uvažujme nyní znovu $\alpha \in (0,1]$. Pak pro přirozená čísla $n < m$ platí

$$\begin{aligned}\int_{2n\pi}^{2m\pi}\frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x&=\sum_{k=n}^{m-1}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}\frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\\&\ge\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{(2(k+1)\pi)^\alpha}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x\\&=2^{1-\alpha}\pi^{-\alpha}\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{(k+1)^\alpha}.\end{aligned}$$

Jelikož je řada $\sum_{k=1}^\infty (k+1)^{-\alpha}$ divergentní, plyne z předcházejícího odhadu neplatnost Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro primitivní funkci k f v nekonečnu.

Integrál je tak konvergentní právě tehdy, když $\alpha > 0$, a je absolutně konvergentní právě thedy, když $\alpha > 1$.

♣

8.7.49. Příklad. Vyšetřete absolutní i neabsolutní konvergenci integrálu

$$\int_0^\infty (\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}})x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x,$$

kde α je reálný parametr.

Řešení. Jelikož

$$\cos x = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

a

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4),$$

dostáváme pro danou funkci f vztah

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{f(x)}{x^{4-\alpha}} = \lim_{x\to 0_+} \frac{-\frac{x^4}{12} + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}.$$

Tedy f je integrovatelná u 0 právě tehdy, když $4-\alpha > -1$, tj. $\alpha < 5$.

Zkoumejme nyní situaci v nekonečnu. Povšimněme si, že $e^{-\frac{x^2}{2}}x^{-\alpha}$ je (absolutně) integrovatelná v nekonečnu pro každé α. To totiž ihned plyne z odhadu

$$e^{-\frac{x^2}{2}}x^{-\alpha} \le x^{-2}$$

platného na nějakém okolí ∞, který odvodíme z limity

$$\lim_{x\to\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}x^{\gamma} = 0, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Pro $\alpha > 1$ tak máme odhad

$$|f(x)| \le \frac{2}{x^\alpha},$$

a tedy je f absolutně integrovatelná.

Pokud $\alpha \in (0,1]$, jsou funkce $\frac{\cos x}{x^\alpha}$ a $e^{-\frac{x^2}{2}}x^{-\alpha}$ integrovatelné, a tedy i f je integrovatelná. Není však absolutně integrovatelná, neboť máme odhad

$$|f(x)| \ge \frac{|\cos x|}{x^\alpha} - e^{-\frac{x^2}{2}}x^{-\alpha},$$

kde na pravé straně je součet divergentní a konvergentní funkce, tj. funkce s divergentním integrálem.

Pokud $\alpha \in (-\infty, 0]$, integrál $\int_{10}^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ diverguje (viz Příklad 8.7.48). Jelikož $\int_{10}^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x$ konverguje, diverguje i $\int_{10}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$.

Závěr tedy jest, že $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $\alpha \in (0,5)$. Dále daný integrál konverguje absolutně právě tehdy, když $\alpha \in (1,5)$.

♣

8.7.50. Příklad. Vyšetřete absolutní i neabsolutní konvergenci integrálů

$$\int_{10}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int_{10}^{\infty} \frac{\sin x}{x + 2\sin x}\,\mathrm{d}x, \quad \int_{10}^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + 2\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. U prvního integrálu vyšetřujeme díky nezápornosti integrandu pouze absolutní konvergenci. Jelikož však

$$\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x},$$

$\int_{10}^{\infty} \frac{1}{2x}$ diverguje a $\int_{10}^{\infty} \frac{\cos 2x}{2x}$ konverguje (viz Věta 8.4.8), diverguje i integrál $\int_{10}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x}$.

U druhého integrálu odhadneme

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sin x}{x + 2\sin x} - \frac{\sin x}{x}\right| &= \left|\frac{x\sin x - x\sin x - 2\sin^2 x}{x(x + 2\sin x)}\right| \\ &\le \frac{2}{x(x-2)}\end{aligned}$$

Funkce $\frac{\sin x}{x+2\sin x} - \frac{\sin x}{x}$ je tak integrovatelná (viz Věta 8.4.1), což díky integrovatelnosti funkce $\frac{\sin x}{x}$ implikuje integrovatelnost funkce

$$\frac{\sin x}{x + 2\sin x} = \left(\frac{\sin x}{x + 2\sin x} - \frac{\sin x}{x}\right) + \frac{\sin x}{x}.$$

U absolutní konvergence použijeme odhad

$$\left|\frac{\sin x}{x + 2\sin x}\right| \ge \frac{|\sin x|}{x+2} = \frac{|\sin x|}{x}\,\frac{x}{x+2},$$

který dává díky Příkladu 8.7.48 a Větě 8.4.8(A) divergenci daného integrálu.

U třetího integrálu postupujeme obodobně jako u předešlého, dostaneme však odhad

$$\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x} + 2\sin x} - \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right| = \left|\frac{2\sin^2 x}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2\sin x)}\right| \ge \frac{2\sin^2 x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}.$$

Snadno odvodíme, že funkce na pravé straně této nerovnosti není integrovatelná, a tedy je funkce

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x} + 2\sin x} = \left(\frac{\sin x}{\sqrt{x} + 2\sin x} - \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) + \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

součtem funkce s konvergentním integrálem a funkce s divergentním integrálem. Jední se tedy o neintegrovatelnou funkci.

♣

8.7.51. Příklad. Vyšetřete absolutní i neabsolutní konvergenci integrálu

$$\int_0^{\infty} x\sin x^4\,\mathrm{d}x$$

Řešení. U 0 jest funkce spojitá, a tedy integrovatelná. Dále pišme

$$\int_1^\infty x\sin x^4\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty 4x^3\sin x^4\frac{1}{4x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Jelikož je funkce $\int 4x^3\sin x^4 = -\cos x^4$ omezená a $\frac{1}{4x^2}$ konverguje v nekonečnu monotónně k nule, konverguje integrál dle Věty 8.4.8(D).

U absolutní konvergence je třeba znovu vyzkoumat integrovatelnost v nekonečnu. K tomuto účelu použijeme substituci $x^4 = y$ a obdržíme

$$\int_1^\infty x\left|\sin x^4\right|\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \sqrt[4]{y}\frac{\sin y}{4y^{\frac{3}{4}}}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\int_1^\infty \frac{|\sin y|}{y^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}y,$$

což je divergentní integrál (viz Příklad 8.7.48). Tedy je daný integrál absolutně divergentní. ♣

8.7.52. Příklad. Vyšetřete absolutní i neabsolutní konvergenci integrálu

$$\int_1^\infty x^\alpha\sin(x+\log x)\,\mathrm{d}x,$$

kde α je reálný parametr.

Řešení. Označme $\varphi(x) = x+\log x$. Jelikož $\varphi'(x) = 1+\frac{1}{x}$, vidíme, že $1\le\varphi'\le 2$ a φ' klesá. Tedy φ' i $\frac{1}{\varphi'}$ jsou omezené monotónní funkce. Dle Věty 8.4.8(A) tak platí

$$\int_1^\infty x^\alpha\sin\varphi(x)\,\mathrm{d}x \text{ konverguje} \iff \int_1^\infty x^\alpha(\sin\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \text{ konverguje.}$$

Budeme tak vyšetřovat konvergenci druhého integrálu.

Označme $\psi(x) = \varphi'(x)\sin\varphi(x)$. Pak $\int\psi(x)\,\mathrm{d}x = -\cos\varphi(x)$ je omezená, a tedy v případě $\alpha < 0$ integrál konverguje dle Věty 8.4.8(D). Pokud $\alpha = 0$, integrál diverguje, neboť

$$\int_1^\infty \varphi'(x)\sin\varphi(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos\varphi(x)]_1^\infty$$

neexistuje (viz Příklad 4.4.3). Je-li $\alpha > 0$, pak integrál diverguje. V opačném případě by totiž integrál

$$\int_1^\infty \psi(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty x^\alpha\psi(x)x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x$$

konvergoval dle Věty 8.4.8(A), což dle předcházející části neplatí. Integrál tak konverguje pro $\alpha < 0$.

Vyzkoumejme nyní absolutní konvergenci. Podobně jako výše odvodíme z Věty 8.4.8(A), že

$$\int_1^\infty x^\alpha\left|\sin\varphi(x)\right|\,\mathrm{d}x \text{ konverguje} \iff \int_1^\infty x^\alpha\left|\sin\varphi(x)\right|\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \text{ konverguje.}$$

Pro případ $\alpha < -1$ je zjevně integrál konvergentní. Předpokládejme, že $\alpha\in[-1,0)$. Zvolme libovolné $n,m\in\mathbb{N}$, $n<m$, a nechť $x,y\in[1,\infty)$ splňují $\varphi(a) = n\pi$

a $\varphi(b) = m\pi$ (Takové body existují, neboť $\varphi\colon [1,\infty) \to [1,\infty)$ je rostoucí bijekce.) Pak

$$\begin{aligned}\int_a^\infty x^\alpha\,|\sin\varphi(x)|\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x &\geq \int_a^b x^\alpha\,|\sin\varphi(x)|\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x\\ &\geq b^\alpha \int_a^b |\sin\varphi(x)|\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = b^\alpha \int_{n\pi}^{m\pi} |\sin y|\,\mathrm{d}y\\ &= b^\alpha 2(m-n).\end{aligned}$$

Jelikož

$$b \leq b + \log b = \varphi(b) = m\pi,$$

platí $b^\alpha \geq (m\pi)^\alpha$. Tedy

$$\begin{aligned}\int_a^\infty x^\alpha\,|\sin\varphi(x)|\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x &\geq 2\left(m^{1+\alpha} - b^\alpha n\right)\\ &= 2\left(m^{1+\alpha} - n(\varphi^{-1}(m\pi))^\alpha\right)\\ &\geq 2\left(1 - n(\varphi^{-1}(m\pi))^\alpha\right).\end{aligned} \tag{8.46}$$

Protože $\lim_{m\to\infty}(\varphi^{-1}(m\pi))^\alpha = 0$, dostáváme z (8.46) neplatnost Bolzanovy-Cauchyovy podmínky v nekonečnu.

Vskutku, nechť $x_0 \in (1,\infty)$ je libovolné. Zvolíme $n \in \mathbb{N}$ tak, aby $\varphi^{-1}(n\pi) > x_0$ a nechť $m > n$ je takové přirozené číslo, že $n(\varphi^{-1}(m\pi))^\alpha < \frac{1}{2}$. Pak (8.46) dává

$$\int_{x_0}^\infty x^\alpha\,|\sin\varphi(x)|\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^\infty x^\alpha\,|\sin\varphi(x)|\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x > 1.$$

Tím je ukázáno, že daný integrál diverguje absolutně pro $\alpha \in [-1,0)$. ♣

8.7.53. Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálu

$$\int_1^\infty \frac{\sin(\sin x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

Řešení. Ukážeme nejprve, že pro libovolné $a < b$ platí

$$\left|\int_a^b \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x\right| \leq 2\pi. \tag{8.47}$$

Je-li totiž $b-a \leq 2\pi$, pak odhad zjevně platí. V opačném případě nalezneme $k \in \mathbb{N}$ takové, že $a + k2\pi \geq b$ a $a + (k-1)2\pi < b$. Pak

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^{a+k2\pi} \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x - \int_b^{a+2k\pi} \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x\right|\\ &= \left|\int_b^{a+2k\pi} \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x\right| \leq 2\pi,\end{aligned}$$

neboť

$$\int_a^{a+k2\pi} \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{k-1} \int_{a+n2\pi}^{a+(n+1)2\pi} \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Tato rovnost platí díky výpočtu

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \sin(\sin(y+\pi))\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\pi} \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \sin(-\sin y)\,\mathrm{d}y = 0.
\end{aligned}$$

Tím je (8.47) dokázána.

Ověřme nyní platnost Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro daný integrál. Pro dané $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, položme $x_0 = \max\{1, 4\pi\varepsilon^{-1}\}$. Pak pro $a, b \in (x_0, \infty)$, $a < b$, existuje dle Věty 8.4.13 $c \in (a, b)$ takové, že

$$\int_a^b \frac{\sin(\sin x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_a^c \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{b}\int_c^b \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

Z toho dostáváme díky (8.47)

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b \frac{\sin(\sin x)}{x}\,\mathrm{d}x\right| &\le \frac{\varepsilon}{4\pi}\left|\int_a^c \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x\right| + \frac{\varepsilon}{4\pi}\left|\int_c^b \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\le \frac{\varepsilon}{4\pi}2\pi + \frac{\varepsilon}{4\pi}2\pi = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tím je konvergence daného integrálu dokázána. ♣

8.7.54. Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálu

$$\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Platí $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x = \operatorname{arctg} x$, takže můžeme psát

$$\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (\sin x^{-2})(-2x^{-3})\frac{-x^2}{2}\frac{x}{\operatorname{arctg} x}\,\mathrm{d}x.$$

Jelikož je $\int (\sin x^{-2})(-2x^{-3})\,\mathrm{d}x = \cos x^{-2}$ omezená a $\lim_{x\to 0_+} \frac{-x^2}{2} = 0$, konverguje dle Věty 8.4.8(D) integrál

$$\int_0^1 (\sin x^{-2})(-2x^{-3})\frac{-x^2}{2}\,\mathrm{d}x.$$

K ověření konvergence stačí nyní dle Věty 8.4.8(A) ukázat, že je funkce $x \mapsto \frac{x}{\operatorname{arctg} x}$ na nějakém pravém okolí bodu 0 omezená a monotónní. Její omezenost je zřejmá, neboť má v 0 vlastní limitu. Dále platí

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}, \quad x \in (-1, 1) \setminus \{0\},$$

a tedy pro funkci

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

platí

$$f'(0) = 0 \quad \text{a} \quad f''(0) = -\frac{2}{3}.$$

Jelikož má f spojitou druhou derivaci, platí $f'' < 0$ pro nějaké $(0, \delta)$. Tedy f' klesá na $(0, \delta)$, což implikuje, že $f' < 0$ na $(0, \delta)$. Tedy f klesá na $(0, \delta)$. Proto je funkce $\frac{1}{f}$ monotónní na $(0, \delta)$ a důkaz je tak hotov. ♣

KAPITOLA 9

Metrické prostory

Tato kapitola je věnována metrickým prostorům, tj. množinám, na kterých je dán způsob měření vzdálenosti. Metrické prostory nám umožní definovat pojem spojitosti obecněji než tomu bylo v Kapitole 4. Dále budeme zkoumat některé důležité typy metrických prostorů. Výsledky této kapitoly budeme později často používat.

9.1. Základní pojmy

9.1.1. Definice. Nechť P je množina a $\varrho\colon P \times P \to [0, \infty)$ je funkce splňující následující tři podmínky:

(a) $\forall x, y \in P : \varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
(b) $\forall x, y \in P : \varrho(x, y) = \varrho(y, x)$,
(c) $\forall x, y, z \in P : \varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$.

Potom funkci ϱ nazýváme **metrikou** na P a dvojici (P, ϱ) nazýváme **metrickým prostorem**. Jsou-li x, y prvky množiny P, pak nezáporné číslo $\varrho(x, y)$ nazýváme jejich **vzdáleností**.

9.1.2. Metrický prostor (P, ϱ) sestává z množiny prvků P a z funkce ϱ, pomocí které mezi prvky P měříme vzdálenost. V tomto kontextu budeme o prvcích množiny P hovořit jako o bodech. Definice metrického prostoru připouští i možnost, že P je prázdná množina. Podmínky (a)–(c) vyjadřují přirozené požadavky, které by měl splňovat libovolný způsob měření vzdálenosti na jakékoli množině. Podmínka (a) vyjadřuje jednak to, že dva různé body mají vždy od sebe kladnou vzdálenost a jednak to, že vzdálenost každého bodu od sebe sama je vždy nulová. Podmínka (b) říká, že vzdálenost bodu x od bodu y je vždy stejná jako vzdálenost bodu y od bodu x. Podmínka (c), kterou nazýváme **trojúhelníkovou nerovností**, je dalším přirozeným požadavkem.

9.1.3. Úmluva. Přestože metrický prostor (P, ϱ) je dvojice (množina, metrika), často používáme obratu „metrický prostor P“, pokud je volba metriky zřejmá z kontextu.

Příklady metrických prostorů. Následující série příkladů ilustruje právě definovaný pojem metrického prostoru. S metrickými prostory z těchto příkladů se budeme setkávat i později.

9.1.4. Příklad. Definujme funkci ϱ na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ předpisem

$$\varrho(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Dokažte, že $(\mathbb{R}, \varrho)$ tvoří metrický prostor.

Řešení. Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí $|x-y| \in [0, \infty)$. Stačí tedy ověřit platnost podmínek (a)-(c) z Definice 9.1.1. Podmínky (a) a (b) jsou však zřejmě splněny a podmínka (c) plyne z Důsledku 1.5.12(b). ♣

9.1.5. Úmluva. V dalším textu budeme na metrickém prostoru $\mathbb{R}$ vždy uvažovat metriku ϱ definovanou v Příkladu 9.1.4, pokud nebude výslovně řečeno jinak.

Občas budeme (nejen v této kapitole) využívat následující užitečnou nerovnost.

9.1.6. Věta (Cauchyova nerovnost)**.** Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ jsou reálná čísla. Pak platí

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)^2 \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\Big). \tag{9.1}$$

Důkaz. Pokud jsou všechna čísla $a_1, \ldots, a_n$ rovna nule, pak v (9.1) nastává rovnost. Předpokládejme nyní, že alespoň jedno z čísel $a_1, \ldots, a_n$ je různé od nuly. Uvažujme výraz

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2, \tag{9.2}$$

který lze přepsat na tvar

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)x^2 + 2\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)x + \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Koeficient u x^2 je nenulový a výraz (9.2) je nezáporný pro libovolné x reálné, takže rovnice

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)x^2 + 2\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)x + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = 0$$

má nejvýše jeden reálný kořen. Diskriminant této rovnice je tedy menší nebo roven nule. Odtud plyne, že

$$4\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)^2 - 4\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\Big) \leq 0,$$

což snadno dává (9.1). ■

9.1.7. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Definujme funkci ϱ_2 na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ předpisem

$$\varrho_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

kde $x = [x_1, \dots, x_n]$, $y = [y_1, \dots, y_n]$. Dokažte, že $(\mathbb{R}^n, \varrho_2)$ tvoří metrický prostor.

Řešení. Pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$ platí $\varrho_2(x, y) \in [0, \infty)$ a podmínky (a), (b) z Definice 9.1.1 jsou zřejmě splněny. Ověříme podmínku (c). Nechť $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $x = [x_1, \dots, x_n]$, $y = [y_1, \dots, y_n]$ a $z = [z_1, \dots, z_n]$. Označme $a_i = x_i - y_i$ a $b_i = y_i - z_i$, $i = 1, \dots, n$. Potom z Cauchyovy nerovnosti (Věta 9.1.6) vyplývá, že

$$\begin{aligned}
\varrho_2(x, z) &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 + 2\sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2} \\
&\le \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i^2} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2} \\
&= \varrho_2(x, y) + \varrho_2(y, z).
\end{aligned}$$

Tím jsme ověřili, že $(\mathbb{R}^n, \varrho_2)$ je metrický prostor. ♣

9.1.8. Funkci ϱ_2 z Příkladu 9.1.7 nazýváme **eukleidovskou metrikou** na $\mathbb{R}^n$. Symbol ϱ_2 je zvolen z důvodů, které budou zřejmé z dalšího textu. Pro $n = 1$ splývá metrika ϱ_2 na $\mathbb{R}$ s metrikou ϱ zavedenou v Příkladu 9.1.4. Pokud budeme pracovat s prostorem $\mathbb{R}^n$, budeme na něm vždy uvažovat metriku ϱ_2, nebude-li výslovně řečeno jinak.

9.1.9. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Definujme funkci ϱ_1 na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ předpisem

$$\varrho_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \tag{9.3}$$

kde $x = [x_1, \dots, x_n]$ a $y = [y_1, \dots, y_n]$. Dokažte, že $(\mathbb{R}^n, \varrho_1)$ tvoří metrický prostor.

Řešení. Pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$ platí $\varrho_1(x, y) \in [0, \infty)$ a podmínky (a), (b) z Definice 9.1.1 jsou zřejmě splněny. Zbývá tedy ověřit podmínku (c). Nechť $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $x = [x_1, \dots, x_n]$, $y = [y_1, \dots, y_n]$ a $z = [z_1, \dots, z_n]$. Potom z Důsledku 1.5.12(b) vyplývá, že

$$\begin{aligned}
\varrho_1(x, z) &= \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| \le \sum_{i=1}^n \bigl(|x_i - y_i| + |y_i - z_i|\bigr) \\
&= \varrho_1(x, y) + \varrho_1(y, z).
\end{aligned}$$

Tím je ověřena platnost podmínky (c). Dokázali jsme tedy, že $(\mathbb{R}^n, \varrho_1)$ je metrický prostor. ♣

9.1.10. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Definujme funkci ϱ_∞ na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ předpisem

$$\varrho_\infty(x, y) = \max\bigl\{|x_i - y_i|;\ i \in \{1, \dots, n\}\bigr\}, \tag{9.4}$$

kde $x = [x_1, \dots, x_n]$ a $y = [y_1, \dots, y_n]$. Dokažte, že $(\mathbb{R}^n, \varrho_\infty)$ tvoří metrický prostor.

Řešení. Pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$ platí $\varrho_\infty(x, y) \in [0, \infty)$ a podmínky (a), (b) z Definice 9.1.1 jsou zřejmě splněny. Zbývá tedy ověřit podmínku (c). Nechť $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $x = [x_1, \dots, x_n]$, $y = [y_1, \dots, y_n]$ a $z = [z_1, \dots, z_n]$. Potom existuje $j \in \{1, \dots, n\}$ takové, že

$$\varrho_\infty(x, z) = \max\bigl\{|x_i - z_i|;\ i \in \{1, \dots, n\}\bigr\} = |x_j - z_j|.$$

Podle Důsledku 1.5.12(b) pak máme

$$|x_j - z_j| \le |x_j - y_j| + |y_j - z_j|.$$

Protože

$$|x_j - y_j| \le \max\bigl\{|x_i - y_i|;\ i \in \{1, \dots, n\}\bigr\} = \varrho_\infty(x, y)$$

a

$$|y_j - z_j| \le \max\bigl\{|y_i - z_i|;\ i \in \{1, \dots, n\}\bigr\} = \varrho_\infty(y, z),$$

dostáváme celkem

$$\varrho_\infty(x, z) \le \varrho_\infty(x, y) + \varrho_\infty(y, z).$$

Tím jsme ověřili platnost podmínky (c). Dokázali jsme tedy, že $(\mathbb{R}^n, \varrho_\infty)$ je metrický prostor. ♣

Před formulací dalšího příkladu připomeňme, že symbol $\mathbb{C}$ značí množinu všech komplexních čísel.

9.1.11. Příklad (Gaussova rovina)**.** Funkci $\varrho\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to [0, \infty)$ definujme předpisem $\varrho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$. Dokažte, že $(\mathbb{C}, \varrho)$ je metrický prostor.

Řešení. Každé komplexní číslo je jednoznačně určeno dvěma reálnými složkami – reálnou a imaginární. Funkci ϱ pak z těchto složek počítáme podle stejného vzorce, kterým počítáme vzdálenost ϱ_2 dvou bodů v $\mathbb{R}^2$ pomocí jejich souřadnic. Podle Příkladu 9.1.7 je tedy $(\mathbb{C}, \varrho)$ metrický prostor. ♣

9.1.12. Příklad. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Označme symbolem $\mathcal{C}([a, b])$ množinu všech spojitých reálných funkcí definovaných na intervalu $[a, b]$. Definujme funkci $\varrho_{\sup}$ na $\mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b])$ předpisem

$$\varrho_{\sup}(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|.$$

Dokažte, že $\bigl(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\sup}\bigr)$ tvoří metrický prostor. Funkci $\varrho_{\sup}$ nazýváme **supremovou metrikou** na $\mathcal{C}([a, b])$.

Řešení. Nechť $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$. Díky spojitosti funkce absolutní hodnota, větě o spojitosti a aritmetických operacích (Věta 4.2.4) a větě o spojitosti složené funkce (Věta 4.2.22) platí $|f - g| \in \mathcal{C}([a, b])$. Podle věty o existenci extrémů (Věta **??**) nabývá funkce $|f - g|$ na $[a, b]$ svého maxima, takže funkce $\varrho_{\sup}$ je na $\mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b])$

dobře definovaná a splňuje $\varrho_{\sup}(f,g) \in [0,\infty)$ pro každé $f,g \in \mathcal{C}([a,b])$. Podmínky (a) a (b) z Definice 9.1.1 jsou zřejmě splněny. Nechť $f,g,h \in \mathcal{C}([a,b])$. Potom pro každé $x \in [a,b]$ platí

$$\begin{aligned} |f(x)-h(x)| &\leq |f(x)-g(x)| + |g(x)-h(x)| \\ &\leq \sup_{y\in[a,b]} |f(y)-g(y)| + \sup_{y\in[a,b]} |g(y)-h(y)| \\ &= \varrho_{\sup}(f,g) + \varrho_{\sup}(g,h). \end{aligned}$$

Odtud plyne, že číslo $\varrho_{\sup}(f,g) + \varrho_{\sup}(g,h)$ je horní závorou množiny

$$\big\{|f(x)-h(x)|;\ x \in [a,b]\big\},$$

a tedy podle definice suprema platí

$$\varrho_{\sup}(f,h) \leq \varrho_{\sup}(f,g) + \varrho_{\sup}(g,h).$$

Tím je ověřena podmínka (c) z Definice 9.1.1. Dokázali jsme, že $\big(\mathcal{C}([a,b]), \varrho_{\sup}\big)$ je metrický prostor. ♣

9.1.13. Příklad. Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Definujme funkci ϱ_{int} na $\mathcal{C}([a,b]) \times \mathcal{C}([a,b])$ předpisem

$$\varrho_{\text{int}}(f,g) = (R)\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx.$$

Dokažte, že $(\mathcal{C}([a,b]), \varrho_{\text{int}})$ tvoří metrický prostor. Funkci ϱ_{int} nazýváme **integrální metrikou** na $\mathcal{C}([a,b])$.

K řešení příkladu budeme potřebovat následující lemma.

9.1.14. Lemma. Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $h \in \mathcal{C}([a,b])$. Nechť existuje $x_0 \in [a,b]$ takové, že $h(x_0) > 0$. Potom $\int_a^b |h(x)|\,dx > 0$.

Důkaz. Nechť nejprve x_0 je vnitřním bodem $[a,b]$. Ze spojitosti funkce h plyne existence $\delta > 0$ takového, že $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset [a,b]$ a $h(x) > \frac{1}{2}h(x_0)$ pro každé $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$. Potom

$$\begin{aligned} \int_a^b |h(x)|\,dx &= \int_a^{x_0-\delta} |h(x)|\,dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |h(x)|\,dx + \int_{x_0+\delta}^b |h(x)|\,dx \\ &\geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |h(x)|\,dx \geq \frac{1}{2}h(x_0)\cdot 2\delta = \delta h(x_0) > 0. \end{aligned}$$

Nyní předpokládejme, že $x_0 = a$. Potom ze spojitosti funkce h plyne existence $\delta > 0$ takového, že $\delta < b-a$ a $h(x) > \frac{1}{2}h(a)$ pro každé $x \in [a, a+\delta)$. Potom

$$\int_a^b |h(x)|\,dx \geq \int_a^{a+\delta} |h(x)|\,dx \geq \frac{1}{2}h(a)\cdot\delta > 0.$$

V případě $x_0 = b$ postupujeme obdobně. ■

Řešení Příkladu 9.1.13. Podle Věty 8.2.20 je funkce ϱ_{int} dobře definovaná a splňuje $\varrho_{\text{int}}(f,g) \in [0,\infty)$ pro každé $f,g \in \mathcal{C}([a,b])$. Jestliže $f = g$, potom zřejmě $\varrho_{\text{int}}(f,g) = 0$. Jestliže naopak $f,g \in \mathcal{C}([a,b])$ a platí $\varrho_{\text{int}}(f,g) = 0$, pak podle Lemmatu 9.1.14 je $f(x) - g(x) = 0$ pro každé $x \in [a,b]$, tedy $f = g$. Tím je ověřena podmínka (a) z Definice 9.1.1. Podmínka (b) je zřejmě splněna. Ověříme platnost podmínky (c). Nechť $f,g,h \in \mathcal{C}([a,b])$. Potom pomocí Důsledku 1.5.12(b) a linearity určitého integrálu (Věta 8.2.22) dostáváme

$$\begin{aligned}
\varrho_{\text{int}}(f,h) &= \int_a^b |f(x) - h(x)|\,dx \\
&\le \int_a^b \big(|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|\big)\,dx \\
&= \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx + \int_a^b |g(x) - h(x)|\,dx \\
&= \varrho_{\text{int}}(f,g) + \varrho_{\text{int}}(g,h).
\end{aligned}$$

Dokázali jsme, že $\big(\mathcal{C}([a,b]), \varrho_{\text{int}}\big)$ je metrický prostor. ♣

9.1.15. Příklad. Nechť P je libovolná množina. Definujme funkci $\varrho_{\text{diskr}}\colon P \times P \to [0,\infty)$ předpisem

$$\varrho_{\text{diskr}}(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } x \neq y, \\ 0, & \text{pokud } x = y. \end{cases}$$

Dokažte, že potom $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ tvoří metrický prostor. Funkci ϱ_{diskr} nazýváme **diskrétní metrikou** na P a $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ **diskrétním metrickým prostorem**.

Řešení. Pro každé $x,y \in P$ platí $\varrho(x,y) \in [0,\infty)$ a podmínky (a) a (b) z Definice 9.1.1 jsou zřejmě splněny. Nechť $x,y,z \in P$. Jestliže $x = z$, potom $\varrho_{\text{diskr}}(x,z) = 0$, a tedy nerovnost v (c) je zřejmě splněna. Jestliže $x \neq z$, potom $x \neq y$ nebo $z \neq y$. Odtud plyne, že

$$\varrho_{\text{diskr}}(x,y) + \varrho_{\text{diskr}}(y,z) \ge 1 = \varrho_{\text{diskr}}(x,z).$$

Podmínka (c) je tedy splněna. Dokázali jsme, že $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je metrický prostor. ♣

9.1.16. Příklad. Nechť P je množina všech posloupností, jejichž členy jsou rovny 0 nebo 1, tedy $P = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, neboli

$$P = \big\{\{x_n\}_{n=1}^{\infty};\ \forall n \in \mathbb{N}\colon x_n \in \{0,1\}\big\}.$$

Pro posloupnosti $x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\}$ z P definujme

$$\varrho(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } x = y, \\ \frac{1}{k}, & \text{pokud } x \neq y, \text{ kde } k = \min\{m \in \mathbb{N};\ x_m \neq y_m\}. \end{cases}$$

Dokažte, že (P, ϱ) je metrický prostor.

Řešení. Pro každé $x, y \in P$ je zřejmě hodnota $\varrho(x, y)$ dobře definována a platí $\varrho(x, y) \in [0, \infty)$. Jsou také zřejmě splněny vlastnosti (a), (b) z Definice 9.1.1. Nechť $x, y, z \in P$. Ověříme platnost trojúhelníkové nerovnosti $\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$. Jestliže $x = z$, potom nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme, že $x \neq z$. Potom existuje nejmenší $k \in \mathbb{N}$ takové, že $x_k \neq z_k$. Odtud plyne, že $x_k \neq y_k$ nebo $z_k \neq y_k$, a tedy $\varrho(x, y) + \varrho(y, z) \geq \frac{1}{k}$. Máme tak $\varrho(x, y) + \varrho(y, z) \geq \varrho(x, z)$. Ověřili jsme, že (P, ϱ) je metrický prostor. ♣

Normované lineární prostory. Výčet příkladů metrických prostorů nyní rozšíříme o normované lineární prostory.

9.1.17 (vektorový prostor)**.** Symbol $\mathbb{F}$ bude značit množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ nebo množinu komplexních čísel $\mathbb{C}$. Pro porozumění následující definici je třeba znát pojem *vektorového prostoru nad* $\mathbb{F}$. Tento pojem jakož i definice dalších důležitých pojmů lineární algebry a související základní výsledky je možné nalézt například v [**4**]. Vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ chápeme jako trojici $(X, +, \cdot)$, kde X je množina, $+$ je operace sčítání na X a $\cdot$ je operace násobení prvků X prvky z $\mathbb{F}$. Většinou budeme ale používat kratší termín „vektorový prostor X" místo přesnějšího „vektorový prostor $(X, +, \cdot)$". Nulový prvek budeme značit symbolem 0.

9.1.18. Definice. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$. Zobrazení $\|\cdot\| \colon X \to [0, \infty)$ nazýváme **normou** na X, jestliže jsou splněny následující tři podmínky:

(a) $\forall x \in X \colon \|x\| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$,
(b) $\forall x \in X \;\forall \lambda \in \mathbb{F} \colon \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,
(c) $\forall x, y \in X \colon \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Dvojici $\big(X, \|\cdot\|\big)$ pak nazýváme **normovaným lineárním prostorem** nad tělesem $\mathbb{F}$. Pokud $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, hovoříme o **reálném** normovaném lineárním prostoru, pokud $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, hovoříme o **komplexním** normovaném lineárním prostoru.

9.1.19. Věta. Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{F}$. Definujme zobrazení $\varrho \colon X \times X \to [0, \infty)$ předpisem $\varrho(x, y) = \|x - y\|$. Potom ϱ je metrika na X.

Důkaz. Nechť $x, y \in X$. Potom zřejmě $\varrho(x, y) \in [0, \infty)$. Ověříme podmínky (a)–(c) z Definice 9.1.1. Rovnost $\varrho(x, y) = 0$ nastává právě tehdy, když $\|x - y\| = 0$, což nastává právě tehdy, když $x - y = 0$, neboli $x = y$. Použijeme-li podmínku (b) z Definice 9.1.18 pro speciální volbu $\lambda = -1$, dostaneme

$$\begin{aligned}\varrho(x, y) &= \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |(-1)| \cdot \|y - x\| \\ &= \|y - x\| = \varrho(y, x),\end{aligned}$$

tedy podmínka (b) z Definice 9.1.1 je splněna. Pro každé $x, y, z \in X$ platí díky podmínce (c) z Definice 9.1.18

$$\begin{aligned}\varrho(x, z) &= \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| \\ &= \varrho(x, y) + \varrho(y, z).\end{aligned}$$

Ověřili jsme tedy i podmínku (c) z Definice 9.1.1. Tím je důkaz dokončen. ■

9.1.20 (normovaný lineární prostor jako metrický prostor). V souladu s Větou 9.1.19 budeme každý normovaný lineární prostor považovat také za prostor metrický s metrikou definovanou pomocí normy způsobem uvedeným v tvrzení Věty 9.1.19. Tak dostáváme důležitou třídu metrických prostorů.

Uveďme několik příkladů reálných normovaných lineárních prostorů.

9.1.21. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Sčítání prvků z $\mathbb{R}^n$ je definováno po složkách, stejně tak násobení prvků z $\mathbb{R}^n$ reálnými čísly. Pro $x = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$, $y = [y_1, \dots, y_n] \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ tedy klademe $x + y = [x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n]$ a $\alpha x = [\alpha x_1, \dots, \alpha x_n]$. Definujme funkci $\|\cdot\| \colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ předpisem

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2},$$

kde $x = [x_1, \dots, x_n]$. Dokažte, že $\big(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|\big)$ je reálný normovaný lineární prostor.

Řešení. Zřejmě platí $\|x\| \in [0, \infty)$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$. Jestliže $x = 0 \in \mathbb{R}^n$, potom $x_i = 0$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$, a tedy $\|x\| = 0$. Jestliže naopak $x \in \mathbb{R}^n$ a $\|x\| = 0$, potom $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$, takže pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí $x_i^2 = 0$. Odtud již snadno plyne $x = 0$. Podmínka (a) z Definice 9.1.18 je tedy splněna.

Nechť $x \in \mathbb{R}^n$ a $\lambda \in \mathbb{R}$. Potom platí

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda^2 x_i^2} = |\lambda| \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = |\lambda| \cdot \|x\|,$$

a tedy podmínka (b)z Definice 9.1.18 je splněna.

Nechť konečně $x, y \in \mathbb{R}^n$. Potom pomocí výpočtu v řešení Příkladu 9.1.7 dostaneme $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$. Ověřili jsme platnost podmínky (c) z Definice 9.1.18. Funkce $\|\cdot\|$ je tedy norma na $\mathbb{R}^n$. ♣

9.1.22. Definice. Funkci $\|\cdot\|$ z Příkladu 9.1.21 nazýváme **eukleidovskou normou na** $\mathbb{R}^n$.

9.1.23. Příklad. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Množinu $\mathcal{C}([a, b])$ opatříme obvyklým sčítáním funkcí a obvyklým násobením funkce reálným číslem. Definujme funkci $\|\cdot\|_{\sup}$ na $\mathcal{C}([a, b])$ předpisem $\|f\|_{\sup} = \sup_{[a,b]} |f|$. Dokažte, že $\big(\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|_{\sup}\big)$ je reálný normovaný lineární prostor.

Řešení. Je snadné ověřit, že množina $\mathcal{C}([a, b])$ s uvedenými operacemi tvoří vektorový prostor. Poznamenejme jen, že je třeba využít Větu 4.2.4, ze které plyne, že součet spojitých funkcí je spojitá funkce a násobek spojité funkce je také spojitá funkce. Podle Věty **??** je $\|f\|_{\sup} \in [0, \infty)$ pro každé $f \in \mathcal{C}([a, b])$. Vlastnosti (a), (b) z Definice 9.1.18 jsou zřejmě splněny. Pro $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$ díky trojúhelníkové nerovnosti (Věta 1.5.11) a Větě 1.5.20(a) platí

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{\sup} &= \sup\{|f(x)+g(x)|;\ x\in[a,b]\}\\ &\le \sup\{|f(x)|+|g(x)|;\ x\in[a,b]\}\\ &\le \sup\{|f(x)|;\ x\in[a,b]\}+\sup\{|g(x)|;\ x\in[a,b]\}\\ &= \|f\|_{\sup}+\|g\|_{\sup}.\end{aligned}$$

Tím je ověřena vlastnost (c) z Definice 9.1.18, a tedy $(\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|)$ je reálný normovaný lineární prostor. ♣

9.1.24. Příklad (prostor ℓ_∞). Definujme ℓ_∞ jako množinu všech omezených posloupností reálných čísel. Sčítání prvků z ℓ_∞ je definováno po složkách, stejně tak násobení prvků z ℓ_∞ reálnými čísly. Pro $x=\{x_n\}\in\ell_\infty$, $y=\{y_n\}\in\ell_\infty$ a $\alpha\in\mathbb{R}$ tedy klademe $x+y=\{x_n+y_n\}$ a $\alpha x=\{\alpha x_n\}$. Dále pro $x=\{x_n\}\in\ell_\infty$ položme $\|x\|_\infty=\sup\{|x_n|;\ n\in\mathbb{N}\}$. Dokažte, že pak dvojice $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ tvoří reálný normovaný lineární prostor.

Řešení. Operace sčítání prvků z ℓ_∞ i násobení prvků z ℓ_∞ reálnými čísly jsou dobře definovány, neboť součet dvou omezených posloupností je opět omezená posloupnost a násobek omezené posloupnosti je také omezená posloupnost. Není těžké ověřit, že ℓ_∞ s uvedenými operacemi tvoří reálný vektorový prostor. Poznamenejme jen, že nulovým vektorem je posloupnost, jejíž všechny členy jsou rovny 0.

Ověříme, že zobrazení $x\mapsto\|x\|_\infty$ je norma na ℓ_∞. Pokud $x=0\in\ell_\infty$, pak snadný výpočet dává $\|x\|_\infty=0$. Pokud pro $x\in\ell_\infty$ platí $\|x\|=0$, potom pro každé $n\in\mathbb{N}$ musí platit $|x_n|=0$, a tedy $x=0$. Máme-li $x\in\ell_\infty$ a $\alpha\in\mathbb{R}$, potom

$$\|\alpha x\|_\infty=\sup\{|\alpha x_n|;\ n\in\mathbb{N}\}=|\alpha|\cdot\sup\{|x_n|;\ n\in\mathbb{N}\}=|\alpha|\cdot\|x\|_\infty.$$

Pro $x,y\in\ell_\infty$ máme díky trojúhelníkové nerovnosti (Věta 1.5.11) a Větě 1.5.20(a)

$$\begin{aligned}\|x+y\| &= \sup\{|x_n+y_n|;\ n\in\mathbb{N}\}\le\sup\{|x_n|+|y_n|;\ n\in\mathbb{N}\}\\ &\le \sup\{|x_n|;\ n\in\mathbb{N}\}+\sup\{|y_n|;\ n\in\mathbb{N}\}=\|x\|+\|y\|.\end{aligned}$$

♣

9.1.25. Příklad (prostor c_0). Definujme c_0 jako množinu všech posloupností reálných čísel $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ splňující $\lim x_n=0$. Sčítání prvků z c_0 je definováno po složkách, stejně tak násobení prvků z c_0 reálnými čísly. Pro $x=\{x_n\}\in c_0$, $y=\{y_n\}\in c_0$ a $\alpha\in\mathbb{R}$ tedy klademe $x+y=\{x_n+y_n\}$ a $\alpha x=\{\alpha x_n\}$. Dále pro $x=\{x_n\}\in c_0$ položme $\|x\|_\infty=\sup\{|x_n|;\ n\in\mathbb{N}\}$. Dokažte, že pak dvojice $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ tvoří reálný normovaný lineární prostor.

Řešení. Pokud $x=\{x_n\}\in c_0$, $y=\{y_n\}\in c_0$, pak $\lim(x_n+y_n)=\lim x_n+\lim y_n=0+0=0$, a tedy $x+y\in c_0$. Pro $\alpha\in\mathbb{R}$ platí $\lim\alpha x_n=\alpha\cdot 0=0$, a tedy opět $\alpha x\in c_0$. Poněvadž každý prvek z c_0 leží v ℓ_∞, (Věta 2.2.39) tvoří c_0 vektorový podprostor ℓ_∞. Zobrazení $x\mapsto\|x\|_\infty$ je pak normou na c_0 podle Příkladu 9.1.24. ♣

Podprostor, otevřená koule a diametr.

9.1.26. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom dvojice $(M, \varrho|_{M\times M})$ zřejmě tvoří opět metrický prostor, neboť podmínky (a)–(c) z Definice 9.1.1 jsou splněny pro všechna x, y, z z P, a tedy i pro všechna x, y, z z M. Z této úvahy plyne korektnost následující definice.

9.1.27. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom dvojici $(M, \varrho|_{M\times M})$ nazýváme **metrickým podprostorem** metrického prostoru (P, ϱ). Metriku $\varrho|_{M\times M}$ na prostoru M nazýváme **indukovanou** nebo též **zděděnou** metrikou z prostoru (P, ϱ) a značíme ji opět pouze symbolem ϱ.

9.1.28. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $x \in P$ a $r > 0$. Potom množinu $B(x, r)$ definovanou předpisem

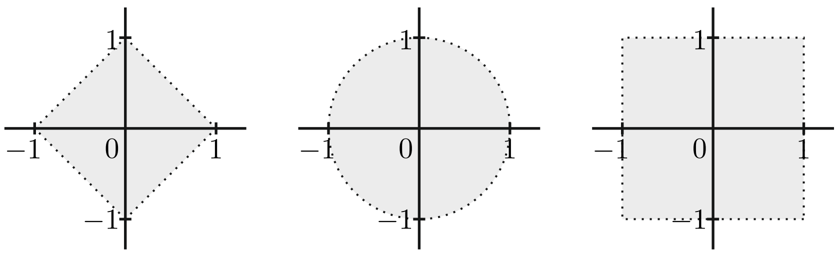
$$B(x, r) = \{y \in P;\ \varrho(x, y) < r\}$$

nazýváme **otevřenou koulí se středem** x **a poloměrem** r.

9.1.29. Příklad. Uvažujme metrický prostor $\mathbb{R}$ s eukleidovskou metrikou. Nechť $x \in \mathbb{R}$ a $r > 0$. Dokažte, že $B(x, r) = (x - r, x + r)$.

Řešení. Tvrzení plyne z definice eukleidovské metriky na $\mathbb{R}$ elementárním výpočtem. ♣

9.1.30 (geometrie koulí v $\mathbb{R}^2$)**.** Na následujících obrázcích jsou znázorněny otevřené koule v $\mathbb{R}^2$ se středem v počátku a poloměrem 1 postupně pro metriky ϱ_1, ϱ_2 a ϱ_∞ po řadě z Příkladů 9.1.9, 9.1.7, 9.1.10.



9.1.31. Příklad. Nechť $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je diskrétní metrický prostor, $x \in P$ a $r > 0$. Dokažte, že

$$B(x, r) = \begin{cases} \{x\}, & \text{pokud } r \le 1, \\ P, & \text{pokud } r > 1. \end{cases}$$

Řešení. Tvrzení plyne bezprostředně z definice diskrétní metriky. ♣

9.1.32. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $A \subset P$ a $x \in P$. Potom **vzdálenost bodu** x **od množiny** A definujeme předpisem

$$\operatorname{dist}_{(P,\varrho)}(x, A) = \inf\{\varrho(x, y);\ y \in A\}.$$

Namísto symbolu $\operatorname{dist}_{(P,\varrho)}(x, A)$ lze užít také symboly $\operatorname{dist}_\varrho(x, A)$, $\varrho(x, A)$ nebo $\operatorname{dist}(x, A)$, je-li z kontextu jasné, s jakým metrickým prostorem pracujeme.

Speciálně pro každé $x \in P$ platí $\operatorname{dist}(x, \emptyset) = \infty$.

9.1.33. Příklad. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $A, B \subset P$, $A \subset B$, a $x \in P$. Dokažte, že potom platí $\operatorname{dist}(x, B) \leq \operatorname{dist}(x, A)$.

Řešení. Vzhledem k tomu, že $A \subset B$, platí

$$\{\varrho(x, y);\ y \in A\} \subset \{\varrho(x, y);\ y \in B\}.$$

Tudíž

$$\operatorname{dist}(x, B) = \inf\{\varrho(x, y);\ y \in B\} \leq \inf\{\varrho(x, y);\ y \in A\} \leq \operatorname{dist}(x, A).$$

Odtud plyne dokazované tvrzení. ♣

9.1.34. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. **Diametr prostoru** P definujeme předpisem

$$\operatorname{diam} P = \sup\{\varrho(x, y);\ x, y \in P\},$$

pokud je P neprázdný, a klademe $\operatorname{diam} \emptyset = 0$. **Diametrem množiny** $A \subset P$ rozumíme diametr metrického prostoru (A, ϱ).

9.1.35. Definice. Řekneme, že metrický prostor P je **omezený**, jestliže platí $\operatorname{diam} P < \infty$. Řekneme, že podmnožina A prostoru P je **omezená**, jestliže je metrický prostor (A, ϱ) omezený.

9.1.36. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Je-li množina P prázdná nebo jednobodová, pak platí $\operatorname{diam} P = 0$. Jestliže má množina P alespoň dva různé body, pak z podmínky (a) v Definici 9.1.1 plyne, že $\operatorname{diam} P > 0$.

9.1.37. Příklad. Nechť P je množina. Dokažte, že diskrétní metrický prostor $(P, \varrho_{\mathrm{diskr}})$ je omezený.

Řešení. Pro každé $x, y \in P$ platí $\varrho(x, y) \leq 1$, a tedy $\operatorname{diam} P \leq 1$. Tudíž je $(P, \varrho_{\mathrm{diskr}})$ omezený. ♣

9.1.38. Příklad. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Dokažte následující tvrzení.

(a) Nechť $A \subset B \subset P$. Potom $\operatorname{diam} A \leq \operatorname{diam} B$.

(b) Nechť $A \subset P$ a navíc $P \neq \emptyset$. Pak je množina $A \subset P$ omezená právě tehdy, když existují $r > 0$ a $x \in P$ taková, že $A \subset B(x, r)$.

Řešení. (a) Tvrzení plyne z definice suprema a diametru a z inkluze

$$\{\varrho(x, y);\ x, y \in A\} \subset \{\varrho(x, y);\ x, y \in B\}.$$

(b) $\Rightarrow$ Množina P je neprázdná, takže můžeme zvolit $x \in P$. Pokud je A prázdná, pak zvolíme $r > 0$ libovolně. V případě, že A je neprázdná položíme $r =$

$\operatorname{dist}(x, A) + \operatorname{diam} A + 1$. Díky předpokladu omezenosti a neprázdnosti A dostáváme $r \in (0, \infty)$. Zvolme $y \in A$. Nalezneme $z \in A$ takové, že $\varrho(x, z) < \operatorname{dist}(x, A) + 1$. Potom platí

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y) < \operatorname{dist}(x, A) + 1 + \operatorname{diam} A = r,$$

a tedy $y \in B(x, r)$. Tím jsme ověřili inkluzi $A \subset B(x, r)$.

$\Leftarrow$ Pokud platí $A \subset B(x, r)$ pro jistá $x \in P$ a $r > 0$, pak použitím trojúhelníkové nerovnosti dostáváme pro libovolné $u, v \in A$ nerovnosti

$$\varrho(u, v) \leq \varrho(u, x) + \varrho(x, v) \leq r + r = 2r.$$

Odtud plyne $\operatorname{diam} A \leq 2r < \infty$. Množina A je tedy omezená. ♣

9.2. Konvergence v metrických prostorech

Konvergencí posloupností reálných čísel jsme se podrobně zabývali v Kapitole 2. Nyní pojem konvergence zobecníme pro posloupnosti prvků metrického prostoru. To nám umožní zkoumat konvergenci posloupností, jejichž členy jsou komplikovanější objekty než reálná čísla, například vektory, funkce, matice, množiny a další.

9.2.1. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}$ prvků P **konverguje** k prvku $x \in P$ v prostoru (P, ϱ), jestliže platí $\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x) = 0$. Prvek x nazýváme **limitou posloupnosti** $\{x_n\}$ **v** (P, ϱ). **Konvergentní posloupností v** (P, ϱ) rozumíme posloupnost, která má limitu v (P, ϱ).

9.2.2. Nechť $P = \mathbb{R}$. Pak výše uvedený pojem konvergence splývá s pojmem konvergence posloupnosti reálných čísel.

9.2.3. Definice. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků metrického prostoru (P, ϱ). Jestliže $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, pak říkáme, že $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je **podposloupnost** posloupnosti $\{x_n\}$, případně **vybranou posloupností**, z posloupnosti $\{x_n\}$.

9.2.4. Věta (vlastnosti konvergence)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $\{x_n\}$ je posloupnost prvků P.

(a) Pak má posloupnost $\{x_n\}$ v (P, ϱ) nejvýše jednu limitu.
(b) Jestliže existují $n_0 \in \mathbb{N}$ a $x \in P$ takové, že $x_n = x$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, potom je x limitou posloupnosti $\{x_n\}$.
(c) Nechť $\{x_{n_k}\}$ je vybraná posloupnost z posloupnosti $\{x_n\}$. Jestliže $x \in P$ je limitou posloupnosti $\{x_n\}$ v (P, ϱ), pak x je také limitou posloupnosti $\{x_{n_k}\}$.

Důkaz. (a) Předpokládejme, že existují prvky $x, y \in P$, které jsou limitami posloupnosti $\{x_n\}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $\varrho(x, x_n) < \varepsilon$ pro každé $n \geq n_0$ a $\varrho(y, x_n) < \varepsilon$ pro každé $n \geq n_1$. Položme $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Potom platí

$$0 \leq \varrho(x, y) \leq \varrho(x, x_{n_2}) + \varrho(x_{n_2}, y) < 2\varepsilon.$$

Protože ε bylo zvoleno libovolně, plyne odtud, že $\varrho(x, y) = 0$, a tedy $x = y$.

(b) Pro každé $n \geq n_0$ platí $\varrho(x_n, x) = 0$, a tedy $\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x) = 0$, takže prvek x je limitou posloupnosti $\{x_n\}$.

(c) Protože posloupnost reálných čísel $\{\varrho(x_{n_k}, x)\}$ je vybraná z posloupnosti $\{\varrho(x_n, x)\}$, plyne z věty o limitě vybrané posloupnosti reálných čísel (Věta 2.2.30), že platí $\lim_{k\to\infty} \varrho(x_{n_k}, x) = 0$, a tedy x je limitou posloupnosti $\{x_{n_k}\}$. ■

9.2.5. Označení. Pokud je posloupnost $\{x_n\}$ konvergentní v metrickém prostoru (P, ϱ), pak je podle Věty 9.2.4(a) její limita určena jednoznačně a budeme ji značit $\lim_{n\to\infty} x_n$ nebo jen $\lim x_n$. Pokud $\lim x_n = x$, pak také píšeme $x_n \overset{\varrho}{\to} x$, $n \to \infty$, případně $x_n \overset{\varrho}{\to} x$ nebo pouze $x_n \to x$.

9.2.6. Příklad. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků neprázdné množiny P. Dokažte, že $\{x_n\}$ je konvergentní v $(P, \varrho_{\mathrm{diskr}})$ právě tehdy, když existují $n_0 \in \mathbb{N}$ a $x \in P$ takové, že $x_n = x$ pro každé $n \geq n_0$.

Řešení. $\Rightarrow$ Nechť $x_n \to x$ pro nějaký prvek $x \in P$. Potom $\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x) = 0$, a tedy existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $\varrho(x_n, x) < 1$. Z definice diskrétní metriky plyne, že pro každé takové n platí $x_n = x$.

$\Leftarrow$ Tato implikace platí v každém metrickém prostoru, jak vyplývá z Věty 9.2.4(b).

♣

V následujícím příkladu ukážeme, že konvergence ve vícerozměrném eukleidovském prostoru splývá s konvergencí „po složkách“. Souřadnice prvku $z \in \mathbb{R}^n$ budeme v následujícím příkladu i později označovat $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

9.2.7. Příklad. Nechť $\{x^m\}_{m=1}^{\infty}$ je posloupnost prvků z $\mathbb{R}^n$ a $y \in \mathbb{R}^n$. Dokažte, že potom platí $\lim_{m\to\infty} x^m = y$ právě tehdy, když pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí $\lim_{m\to\infty} x_i^m = y_i$.

Řešení. $\Rightarrow$ Pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ a každé $m \in \mathbb{N}$ platí $|x_i^m - y_i| \leq \varrho_2(x^m, y)$. Odtud plyne tvrzení.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí $\lim_{m\to\infty} x_i^m = y_i$. Potom ze spojitosti odmocniny, věty o aritmetice limit (Věta 2.2.34) a Heineovy věty (Věta 4.2.14) dostáváme

$$\lim_{m\to\infty} \varrho(x^m, y) = \lim_{m\to\infty} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^m - y_i)^2} = 0,$$

a tedy $\lim_{m\to\infty} x^m = y$. ♣

9.2.8. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\varrho_1(x,y) \le \sqrt{n}\varrho_2(x,y) \le n\varrho_\infty(x,y) \le n\varrho_1(x,y). \tag{9.5}$$

Řešení. Z Cauchyovy nerovnosti (Věta 9.1.6) odvodíme, že

$$\begin{aligned}\varrho_1(x,y) &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^n 1 \cdot |x_i - y_i| \\ &\le \sqrt{\Big(\sum_{i=1}^n 1^2\Big) \cdot \Big(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\Big)} \\ &= \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \sqrt{n}\varrho_2(x,y).\end{aligned}$$

Dále odhadneme shora výrazy $|x_i - y_i|$, $i = 1, \dots, m$, jejich maximem, a dostaneme

$$\begin{aligned}\varrho_2(x,y) &\le \sqrt{\sum_{i=1}^n \big(\max\{|x_i - y_i|;\ i \in \{1,\dots,n\}\}\big)^2} \\ &= \sqrt{n} \cdot \max\{|x_i - y_i|;\ i \in \{1,\dots,n\}\} = \sqrt{n}\varrho_\infty(x,y).\end{aligned}$$

Nerovnost $\varrho_\infty(x,y) \le \varrho_1(x,y)$ zřejmě platí. Dokazované tvrzení pak plyne z právě odvozených nerovností. ♣

9.2.9. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $\{x^m\}_{m=1}^\infty$ je posloupnost prvků z $\mathbb{R}^n$ a $y \in \mathbb{R}^n$. Dokažte, že následující tři výroky jsou ekvivalentní.

(i) Platí $x^m \xrightarrow{\varrho_1} y$.
(ii) Platí $x^m \xrightarrow{\varrho_2} y$.
(iii) Platí $x^m \xrightarrow{\varrho_\infty} y$.

Řešení. (i)⇒(ii) Předpokládejme, že $x^m \xrightarrow{\varrho_1} y$. Potom $\lim_{m\to\infty} \varrho_1(x^m, y) = 0$. Z (9.5) plyne, že pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí $\varrho_2(x^m, y) \le \sqrt{n}\varrho_1(x^m, y)$. Protože pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí $\varrho_2(x^m, y) \ge 0$, vyplývá z věty o dvou strážnících, že také $\lim_{m\to\infty} \varrho_2(x^m, y) = 0$, a tedy platí (ii).

(ii)⇒(iii) Předpokládejme nyní, že platí $x^m \xrightarrow{\varrho_2} y$. Pak opět z (9.5) dostaneme, že pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí $\varrho_\infty(x^m, y) \le \sqrt{n}\varrho_2(x^m, y)$, a tedy $\lim_{m\to\infty} \varrho_\infty(x^m, y) = 0$. Tím je dokázáno tvrzení (iii).

(iii)⇒(i) Konečně předpokládáme-li, že platí $x^m \xrightarrow{\varrho_\infty} y$, pak tvrzení (i) vyplývá obdobným způsobem jako v předcházejících případech z nerovnosti $\varrho_1(x^m, y) \le n\varrho_\infty(x^m, y)$ platné pro každé $m \in \mathbb{N}$. ♣

9.3. Topologické pojmy v metrických prostorech

Termíny *topologie* a *topologický* budou vysvětleny v závěru příštího oddílu. Nejprve zavedeme dva důležité typy podmnožin metrických prostorů (uzavřené a otevřené množiny), tři množinové operace v metrických prostorech (vnitřek, hranice a uzávěr) a budeme zkoumat jejich vlastnosti. Užitečnost těchto pojmů se projeví v dalších oddílech a kapitolách.

Uzavřené a otevřené množiny.

9.3.1. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Řekneme, že množina M je **uzavřená** v (P, ϱ), jestliže pro každou konvergentní posloupnost $\{x_n\}$ prvků množiny M je limita této posloupnosti prvkem M.

9.3.2. Příklad. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

(a) Dokažte, že $[a, b]$ je uzavřená množina v $\mathbb{R}$.
(b) Dokažte, že $(a, b]$ není uzavřená množina v $\mathbb{R}$.

Řešení. (a) Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků intervalu $[a, b]$ splňující $x_n \to x$ pro nějaké $x \in \mathbb{R}$. Podle Důsledku 2.4.18 platí $H(\{x_n\}) = \{x\}$. Podle Příkladu 2.4.22 tudíž platí $x \in [a, b]$. Tedy $[a, b]$ je uzavřená množina.

(b) Položme $x_n = a + \frac{b-a}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak je $\{a_n\}$ posloupnost prvků intervalu $(a, b]$ splňující $x_n \to a$. Protože $a \notin (a, b]$, plyne odtud, že $(a, b]$ není uzavřená množina. ♣

9.3.3. Příklad. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$ je konečná množina. Dokažte, že M je uzavřená.

Řešení. Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je posloupnost prvků M splňující $x_n \to x$ pro nějaké $x \in P$. Předpokládejme, že $x \notin M$. Položme $d = \min\{\varrho(x, y);\ y \in M\}$. Protože M je konečná, platí $d > 0$. Dále zřejmě pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\varrho(x_n, x) \geq d$. To je ale spor s tím, že $x_n \to x$. Odtud plyne, že $x \in M$, a tedy je množina M uzavřená.

Jiné řešení. Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je posloupnost prvků M splňující $x_n \to x$ pro nějaké $x \in P$. Množina M je konečná, a proto existuje $z \in M$ takové, že množina $\{n \in \mathbb{N};\ x_n = z\}$ je nekonečná. Existuje tedy vybraná posloupnost $\{x_{n_k}\}$ z posloupnosti $\{x_n\}$ taková, že $x_{n_k} = z$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Potom díky Větě 9.2.4(b) máme $\lim x_{n_k} = z$ a podle Věty 9.2.4(c) máme $\lim x_{n_k} = x$. Z Věty 9.2.4(a) pak plyne $x = z$, a tedy $x \in M$. ♣

9.3.4. Příklad. Dokažte, že v diskrétním metrickém prostoru $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je každá množina uzavřená.

Řešení. Předpokládejme, že $M \subset P$, $\{x_n\}$ je posloupnost prvků M, $x \in P$ a platí $x_n \to x$. Podle Příkladu 9.2.6 existují $n_0 \in \mathbb{N}$ a $y \in P$ takové, že $x_n = y$ pro každé $n \geq n_0$. Odtud plyne $y \in M$. Z Věty 9.2.4(a) plyne $x_n \to y$, a tedy z Věty 9.2.4(b) vyplývá $x = y$. Tedy $x \in M$, takže M je uzavřená. ♣

9.3.5. Věta (vlastnosti uzavřených množin)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor.

(a) Prázdná množina a celý prostor P jsou uzavřené množiny v (P, ϱ).
(b) Nechť $\mathcal{F}$ je neprázdný systém uzavřených množin. Potom je množina $\bigcap \mathcal{F}$ uzavřená v (P, ϱ).
(c) Nechť $m \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že množiny $F_1, \dots, F_m$ jsou uzavřené. Potom je množina $\bigcup_{i=1}^m F_i$ uzavřená v (P, ϱ).

Důkaz. (a) Prázdná množina neobsahuje žádnou posloupnost, takže implikace v definici uzavřené množiny je splněna. Uzavřenost množiny P je zřejmá.

(b) Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je posloupnost prvků $\bigcap \mathcal{F}$ splňující $x_n \to x$ pro nějaké $x \in P$. Nechť $F \in \mathcal{F}$. Potom je $\{x_n\}$ posloupnost prvků F. Protože F je uzavřená, platí $x \in F$. Protože F byla zvolena libovolně, plyne odtud, že $x \in \bigcap \mathcal{F}$. Tedy $\bigcap \mathcal{F}$ je uzavřená množina.

(c) Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je posloupnost prvků $\bigcup_{i=1}^m F_i$ splňující $x_n \to x$ pro nějaké $x \in P$. Protože množin $F_1, \dots, F_m$ je konečně mnoho, existuje $j \in \{1, \dots, m\}$ takové, že množina $\{n \in \mathbb{N};\ x_n \in F_j\}$ je nekonečná. Existuje tedy podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$, jejíž prvky jsou v F_j. Podle Věty 9.2.4(c) platí $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Protože F_j je uzavřená množina, platí $x \in F_j$, a tedy tím spíše $x \in \bigcup_{i=1}^m F_i$. Odtud plyne, že $\bigcup_{i=1}^m F_i$ je uzavřená množina. ■

9.3.6. V tvrzení (c) Věty 9.3.5 je důležité, že systém množin, které sjednocujeme, je konečný. Bez tohoto předpokladu obdobné tvrzení neplatí. Uvažujme množiny $F_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right]$, $n \in \mathbb{N}$. Potom $\bigcup_{n=1}^\infty \left[\frac{1}{n}, 1\right] = (0, 1]$. Z Příkladu 9.3.2 tedy plyne, že každá z množin F_n je uzavřená, ale množina $\bigcup_{n=1}^\infty \left[\frac{1}{n}, 1\right]$ není uzavřená.

9.3.7. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $M \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že x je **vnitřním bodem** množiny M, jestliže existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset M$. Množinu všech vnitřních bodů množiny M nazýváme **vnitřkem** množiny M a označujeme symbolem $\operatorname{Int} M$ podle latinského slova interior (vnitřek).

Řekneme, že množina M je **otevřená** v (P, ϱ), jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem.

9.3.8. Příklad. Dokažte, že v metrickém prostoru $\mathbb{R}$ je každý otevřený interval otevřená množina.

Řešení. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a $x \in (a, b)$. Položme $r = \min\{x - a, b - x, 1\}$, potom zřejmě platí $B(x, r) = (x - r, x + r) \subset (a, b)$, a tedy x je vnitřním bodem (a, b). Odtud plyne, že (a, b) je otevřená množina. ♣

9.3.9. Příklad. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $x_0 \in P$ a $r_0 > 0$. Dokažte, že potom je $B(x_0, r_0)$ otevřená množina.

Řešení. Zvolme $x \in B(x_0, r_0)$. Položme $r = r_0 - \varrho(x_0, x)$. Potom $r > 0$. Pro každé $y \in B(x, r)$ navíc platí

$$\varrho(x_0, y) \leq \varrho(x_0, x) + \varrho(x, y) < \varrho(x_0, x) + r = r_0.$$

Tedy $y \in B(x_0, r_0)$. Odtud plyne $B(x, r) \subset B(x_0, r_0)$. Každý bod množiny $B(x_0, r_0)$ je tedy jejím vnitřním bodem, a proto je $B(x_0, r_0)$ otevřená množina. ♣

9.3.10. Příklad. Dokažte, že v metrickém prostoru $\mathbb{R}$ není interval $(0, 1]$ otevřenou množinou a že platí $\mathrm{Int}(0, 1] = (0, 1)$.

Řešení. Nechť $r > 0$. Potom $B(1, r) = (1 - r, 1 + r) \not\subset (0, 1]$, takže bod $x = 1$ není vnitřním bodem intervalu $(0, 1]$. Interval $(0, 1]$ tedy není otevřenou množinou. Z Příkladu 9.3.8 vyplývá, že každý bod $x \in (0, 1)$ je vnitřním bodem intervalu $(0, 1)$, a tedy i vnitřním bodem intervalu $(0, 1]$. Odtud plyne, že $\mathrm{Int}(0, 1] = (0, 1)$. ♣

9.3.11. Věta (vlastnosti otevřených množin)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor.

(a) Prázdná množina a P jsou otevřené množiny v (P, ϱ).
(b) Nechť $\mathcal{G}$ je systém otevřených množin v (P, ϱ). Potom je množina $\bigcup \mathcal{G}$ otevřená v (P, ϱ).
(c) Nechť $m \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že množiny $G_1, \dots, G_m$ jsou otevřené v (P, ϱ). Potom je množina $\bigcap_{i=1}^m G_i$ otevřená v (P, ϱ).

Důkaz. (a) Tvrzení plyne bezprostředně z definice otevřené množiny.

(b) Předpokládejme, že $x \in \bigcup \mathcal{G}$. Potom existuje množina $G \in \mathcal{G}$ taková, že $x \in G$. Protože G je otevřená množina, existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset G$. Tedy $B(x, r) \subset \bigcup \mathcal{G}$. Odtud plyne, že $\bigcup \mathcal{G}$ je otevřená množina.

(c) Nechť $x \in \bigcap_{i=1}^m G_i$. Potom $x \in G_i$ pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$. Pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ je množina G_i otevřená, tedy existuje $r_i > 0$ takové, že $B(x, r_i) \subset G_i$. Položme $r = \min\{r_i;\ i \in \{1, \dots, m\}\}$. Potom zřejmě platí $B(x, r) \subset B(x, r_i)$ pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$, a tedy $B(x, r) \subset G_i$, takže $B(x, r) \subset \bigcap_{i=1}^m G_i$. Množina $\bigcap_{i=1}^m G_i$ je tudíž otevřená. ■

9.3.12. V tvrzení Věty 9.3.11(c) je důležité, že počet množin, které pronikáme, je konečný. Pro nekonečný systém otevřených množin obdobné tvrzení neplatí, tj. průnik nekonečně mnoha otevřených množin nemusí být otevřenou množinou. Příkladem je prostor $\mathbb{R}$, kde pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme $G_n = (0, 1 + \frac{1}{n})$. Potom je podle Příkladu 9.3.8 pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina G_n otevřená, ale $\bigcap_{n=1}^\infty G_n = (0, 1]$, což není otevřená množina, jak víme z Příkladu 9.3.10.

9.3.13. Věta (vztah otevřených a uzavřených množin)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom množina M je otevřená právě tehdy, když $P \setminus M$ je uzavřená.

Důkaz. $\Rightarrow$ Nechť M je otevřená množina, $\{x_n\}$ je posloupnost prvků $P \setminus M$, $x \in P$ a platí $x_n \to x$. Předpokládejme, že $x \in M$. Potom díky otevřenosti M existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset M$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\varrho(x_{n_0}, x) < r$. Potom $x_{n_0} \in (P \setminus M) \cap B(x, r)$, což je spor. Tedy $x \notin M$. To znamená, že $x \in P \setminus M$, a tedy $P \setminus M$ je uzavřená množina.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že M není otevřená množina. Pak existuje $x \in M$ takové, že pro každé $r > 0$ platí $B(x, r) \cap (P \setminus M) \neq \emptyset$. Speciálně pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$B(x, \frac{1}{n}) \cap (P \setminus M) \neq \emptyset$. Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ lze nalézt $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap (P \setminus M)$. Posloupnost $\{x_n\}$ pak leží celá v množině $P \setminus M$ a zřejmě splňuje $x_n \to x$. Protože $x \notin P \setminus M$, plyne odtud, že $P \setminus M$ není uzavřená. ■

9.3.14. Příklad. Dokažte, že v diskrétním metrickém prostoru $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je každá množina otevřená.

Řešení. Předpokládejme, že $M \subset P$. Z Příkladu 9.3.4 vyplývá, že $P \setminus M$ je uzavřená v $(P, \varrho_{\text{diskr}})$. Podle Věty 9.3.13 je tedy množina M otevřená v $(P, \varrho_{\text{diskr}})$. ♣

9.3.15. Věta (charakterizace vnitřku)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom $\operatorname{Int} M$ je největší (vzhledem k množinové inkluzi) otevřená množina obsažená v M.

Důkaz. Předpokládejme, že $x \in \operatorname{Int} M$. Potom existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset M$. Dokážeme, že $B(x, r) \subset \operatorname{Int} M$. Zvolme $y \in B(x, r)$. Označme $s = r - \varrho(x, y)$. Potom $s > 0$. Dále platí $B(y, s) \subset B(x, r)$, neboť pro každé $z \in B(y, s)$ máme

$$\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z) < \varrho(x, y) + s = r.$$

Tedy $B(y, s) \subset M$, takže $y \in \operatorname{Int} M$. Odtud plyne, že $B(x, r) \subset \operatorname{Int} M$, a tedy $\operatorname{Int} M$ je otevřená.

Nyní dokážeme, že $\operatorname{Int} M$ je největší otevřená množina obsažená v M. Nechť $G \subset M$ je otevřená množina. Potom pro každé $x \in G$ nalezneme $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset G$. Platí tedy také, že $B(x, r) \subset M$. To znamená, že x je vnitřním bodem množiny M, a tedy $x \in \operatorname{Int} M$. Platí tudíž $G \subset \operatorname{Int} M$. ■

9.3.16. Věta. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom

$$\operatorname{Int} M = \bigcup \{B(x, r);\ x \in P,\ r > 0,\ B(x, r) \subset M\}.$$

Důkaz. Označme

$$G = \bigcup \{B(x, r);\ x \in P,\ r > 0,\ B(x, r) \subset M\}.$$

Předpokládejme nejprve, že $x \in \operatorname{Int} M$. Potom existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset M$. Odtud plyne, že $B(x, r) \subset G$, a tedy speciálně $x \in G$. Tím je dokázána inkluze $\operatorname{Int} M \subset G$.

Nyní předpokládejme, že $y \in G$. Pak existují $x \in P$ a $r > 0$ taková, že $B(x, r) \subset M$ a $y \in B(x, r)$. Podle Příkladu 9.3.9 je množina $B(x, r)$ otevřená, a tedy podle Věty 9.3.15 $B(x, r) \subset \operatorname{Int} M$. Tím je dokázána inkluze $G \subset \operatorname{Int} M$, a tedy množinová rovnost $G = \operatorname{Int} M$. ■

9.3.17. Věta (otevřené podmnožiny $\mathbb{R}$)**.** Množina $G \subset \mathbb{R}$ je otevřená právě tehdy, když G je spočetným disjunktním sjednocením otevřených intervalů.

Důkaz. $\Rightarrow$ Je-li G prázdná, pak tvrzení platí, neboť stačí uvažovat prázdný systém intervalů. Předpokládejme nyní, že $G \neq \emptyset$. Nechť $y \in G$. Potom definujeme prvky $a_y, b_y \in \mathbb{R}^*$ předpisem

$$a_y = \inf\{x \in \mathbb{R};\ [x, y] \subset G\}, \quad b_y = \sup\{z \in \mathbb{R};\ [y, z] \subset G\}.$$

Dokážeme, že $a_y, b_y \notin G$. Předpokládejme pro spor, že $a_y \in G$. Potom existuje $r > 0$ takové, že $B(a_y, r) \subset G$, tedy $(a_y - r, a_y + r) \subset G$. Pro libovolné $s \in (0, r)$ pak platí $[a_y - s, y] \subset G$, to je ale spor s definicí a_y. Odtud vyplývá, že $a_y \notin G$. Obdobně lze dokázat, že $b_y \notin G$. Povšimněme si, že $a_y < y < b_y$.

Dále dokážeme, že $(a_y, b_y) \subset G$. Předpokládejme, že $z \in (a_y, b_y)$. Potom buď $z \in (a_y, y]$ nebo $z \in [y, b_y)$. V prvním případě existuje podle definice a_y prvek $x \in (a_y, z)$ takový, že $[x, y] \subset G$. Odtud plyne $z \in G$. Ve druhém případě lze odvodit platnost $z \in G$ obdobně.

Položme $\mathcal{J} = \{(a_y, b_y);\ y \in G\}$. Potom platí $\bigcup \mathcal{J} \subset G$. Opačná inkluze $G \subset \bigcup \mathcal{J}$ je zřejmá, neboť pro každé $y \in G$ platí $y \in (a_y, b_y) \in \mathcal{J}$. Tedy $G = \bigcup \mathcal{J}$.

Nechť $y, z \in G$. Dokážeme, že potom buď $(a_y, b_y) = (a_z, b_z)$ nebo $(a_y, b_y) \cap (a_z, b_z) = \emptyset$. Předpokládejme, že $(a_y, b_y) \neq (a_z, b_z)$. Jestliže $a_y = a_z$, potom $b_y \neq b_z$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $b_y > b_z$. Potom ale $b_z \in (a_y, b_y)$, a tedy $b_z \in G$, což je spor. Jestliže $a_y \neq a_z$, potom bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a_y < a_z$. Protože $a_z \notin G$, platí $a_z \notin (a_y, b_y)$. Takže $b_y \leq a_z$, a tedy $(a_y, b_y) \cap (a_z, b_z) = \emptyset$. Systém $\mathcal{J}$ je tedy disjunktní. Z Příkladu 1.6.25 pak plyne, že systém $\mathcal{J}$ je spočetný.

$\Leftarrow$ Tato implikace plyne z Příkladu 9.3.8 a Věty 9.3.11(b). ■

Hranice a uzávěr množiny. Pojem hranice geometrického objektu v rovině či prostoru jsme zvyklí běžně používat intuitivním způsobem. V následující definici zavedeme tento pojem přesně v libovolném metrickém prostoru.

9.3.18. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $M \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že x je **hraničním bodem** množiny M, jestliže pro každé $r > 0$ platí $B(x, r) \cap M \neq \emptyset$ a $B(x, r) \cap (P \setminus M) \neq \emptyset$. Množinu všech hraničních bodů množiny M nazýváme **hranicí** množiny M a značíme ji ∂M.

9.3.19. Hraniční bod množiny v metrickém prostoru může a nemusí být prvkem této množiny. Přímo z definice vyplývá, že hranice libovolné množiny M v metrickém prostoru (P, ϱ) je rovna hranici množiny $P \setminus M$.

9.3.20. Příklad. Nechť P je množina a $M \subset P$. Dokažte, že v prostoru $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ platí $\partial M = \emptyset$.

Řešení. Předpokládejme, že $x \in P$. Potom pro $r \in (0, 1]$ podle Příkladu 9.1.31 platí $B(x, r) = \{x\}$. Jestliže $x \in M$, pak $B(x, r) \cap (P \setminus M) = \emptyset$. Je-li naopak $x \in P \setminus M$, pak $B(x, r) \cap M = \emptyset$. V obou případech x není hraničním bodem M. Vzhledem k tomu, že x bylo zvoleno libovolně, je $\partial M = \emptyset$. ♣

9.3.21. Příklad. Dokažte, že v metrickém prostoru $\mathbb{R}$ je hranicí intervalu $(0, 1)$ množina $\{0, 1\}$.

Řešení. Označme $M = (0, 1)$. Nechť $r > 0$. Potom $B(0, r) = (-r, r)$, a tedy

$$B(0, r) \cap M \supset B\big(0, \min\{r, 1\}\big) \cap M = (0, r) \neq \emptyset \qquad \text{a}$$

$$B(0, r) \cap (\mathbb{R} \setminus M) \supset B\big(0, \min\{r, 1\}\big) \cap (\mathbb{R} \setminus M) = (-r, 0] \neq \emptyset.$$

Odtud plyne, že $0 \in \partial M$. Podobně lze dokázat, že $1 \in \partial M$.

Je-li $x \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$, pak existuje $r > 0$ takové, že $B(x,r) \cap M = \emptyset$, a tedy $x \notin \partial M$. Je-li $x \in (0,1)$, pak existuje $r > 0$ takové, že $B(x,r) \cap (\mathbb{R} \setminus M) = \emptyset$, a tedy opět $x \notin \partial M$. Odtud již vyplývá platnost dokazovaného tvrzení. ♣

9.3.22. Příklad. Dokažte, že v metrickém prostoru $\mathbb{R}$ platí $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ a $\partial(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

Řešení. Nechť $x \in \mathbb{R}$ a $r > 0$. Podle Věty 1.5.34 existují $y \in \mathbb{R}$ a $z \in \mathbb{R}$ splňující $y \in B(x,r) \cap \mathbb{Q}$ a $z \in B(x,r) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Odtud plyne, že $x \in \partial\mathbb{Q}$ a také $x \in \partial(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. ♣

9.3.23. Definice. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Označme $\overline{M} = M \cup \partial M$. Potom množinu $\overline{M}$ nazýváme **uzávěrem** množiny M v prostoru (P,ϱ).

9.3.24. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom zřejmě platí $M \subset \overline{M}$.

9.3.25. Věta. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom M je uzavřená právě tehdy, když $\partial M \subset M$, neboli $M = \overline{M}$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Předpokládejme, že M je uzavřená množina a $x \in \partial M$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap M$. Zřejmě platí $x_n \to x$. Z uzavřenosti M pak plyne, že $x \in M$.

$\Leftarrow$ Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků M splňující $x_n \to x$, kde $x \in P$. Jestliže $x \in \partial M$, potom dle předpokladu platí $x \in M$. Předpokládejme, že $x \notin \partial M$. Potom z definice hraničního bodu vyplývá, že existuje $r > 0$ takové, že buď $B(x,r) \cap M = \emptyset$ nebo $B(x,r) \cap (P \setminus M) = \emptyset$. První možnost nemůže nastat, protože $x_n \to x$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $x_n \in M$. Tudíž platí $B(x,r) \cap (P \setminus M) = \emptyset$. Speciálně tedy $x \in M$. Odtud plyne, že M je uzavřená. Tím je tvrzení dokázáno. ■

9.3.26. Příklad. Dokažte, že platí $\overline{(0,1)} = [0,1]$.

Řešení. Podle Příkladu 9.3.21 platí $\partial(0,1) = \{0,1\}$. Odtud plyne, že $\overline{(0,1)} = [0,1]$. ♣

9.3.27. Příklad. Dokažte, že množina $\mathbb{Q}$ není otevřená ani uzavřená v $\mathbb{R}$ a platí $\operatorname{Int}\mathbb{Q} = \emptyset$ a $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Řešení. Z Příkladu 9.3.22 víme, že $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$, takže $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Tudíž $\mathbb{Q} \neq \overline{\mathbb{Q}}$, a tedy množina $\mathbb{Q}$ není uzavřená v $\mathbb{R}$.

Nechť $x \in \mathbb{Q}$ a $r > 0$. Potom podle Věty 1.5.34 existuje $y \in B(x,r) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Tedy $B(x,r)$ není podmnožinou $\mathbb{Q}$, takže x není vnitřním bodem množiny $\mathbb{Q}$. Žádný bod $\mathbb{Q}$ tedy není vnitřním bodem množiny $\mathbb{Q}$, a tedy $\mathbb{Q}$ není otevřená v $\mathbb{R}$ a $\operatorname{Int}\mathbb{Q} = \emptyset$. ♣

9.3.28. Věta (vlastnosti uzávěru)**.** Nechť (P,ϱ) je metrický prostor, $A \subset P$ a $B \subset P$. Potom platí:

(a) $\overline{\emptyset} = \emptyset$ a $\overline{P} = P$,
(b) jestliže $A \subset B$, potom $\overline{A} \subset \overline{B}$,
(c) $\overline{A} = \{x \in P;\ \operatorname{dist}(x,A) = 0\}$,

(d) množina $\overline{A}$ je uzavřená,
(e) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,
(f) $\operatorname{diam} A = \operatorname{diam} \overline{A}$,
(g) $\overline{A}$ je nejmenší (vzhledem k inkluzi) uzavřená množina obsahující A.

Důkaz. (a) Zřejmě platí $\partial\emptyset = \emptyset$ a $\partial P = \emptyset$. Tvrzení pak okamžitě plynou z definice uzávěru.

(b) Předpokládejme, že $x \in \overline{A}$. Pokud $x \in B$, pak $x \in \overline{B}$. Jestliže $x \in \overline{A} \setminus B$, potom speciálně $x \in \overline{A} \setminus A$, a tedy $x \in \partial A$. Zvolme $r > 0$. Potom $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$, a tedy také $B(x, r) \cap B \neq \emptyset$, neboť $A \subset B$. Z toho, že $x \notin B$, dále zřejmě plyne, že $B(x, r) \cap (P \setminus B) \neq \emptyset$. Tedy $x \in \partial B$. Protože $\partial B \subset \overline{B}$, dostáváme $x \in \overline{B}$.

(c) Označme
$$M = \{x \in P;\ \operatorname{dist}(x, A) = 0\}.$$
Předpokládejme, že $y \in P \setminus M$. Potom $\operatorname{dist}(y, A) > 0$. Položme $r = \frac{1}{4} \operatorname{dist}(y, A)$. Pokud $z \in B(x, r)$ a $w \in A$, potom podle trojúhelníkové nerovnosti máme
$$\varrho(z, w) \geq \varrho(y, w) - \varrho(x, z) \geq \operatorname{dist}(y, A) - r = \frac{3}{4} \operatorname{dist}(x, A) > r.$$
Platí tedy $B(y, r) \cap A = \emptyset$. Nechť $a \in A$ a $z \in B(y, \frac{r}{2})$. Potom
$$\varrho(z, a) \geq \varrho(y, a) - \varrho(z, y) > r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}.$$
Tedy $B(y, \frac{r}{2}) \subset P \setminus M$, takže $P \setminus M$ je otevřená množina. Podle Věty 9.3.13 je množina M uzavřená. Zřejmě platí $A \subset M$, a tedy podle (b) také $\overline{A} \subset \overline{M}$. Protože M je uzavřená, máme podle Věty 9.3.25 $\overline{M} = M$, a tedy $\overline{A} \subset M$.

Dokážeme nyní opačnou inkluzi. Nechť $x \in P \setminus \overline{A}$. Pak $x \notin \partial A$. Poněvadž $x \in P \setminus A$, musí podle definice hranice existovat $r > 0$ takové, že $B(x, r) \cap A = \emptyset$. Pak platí $\operatorname{dist}(x, A) \geq r > 0$, a tedy $x \notin M$. Tím je inkluze $M \subset \overline{A}$ dokázána.

(d) Z tvrzení (c) víme, že $\overline{A} = \{x \in P;\ \operatorname{dist}(x, A) = 0\}$, přičemž v důkazu tvrzení (c) jsme ověřili, že množina na pravé straně rovnosti je uzavřená.

(e) Protože $A \subset A \cup B$, plyne z (b), že $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$. Obdobně dostaneme $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$, a tedy $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Dokážeme opačnou inkluzi. Víme, že $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$, a tedy podle (b) platí $\overline{A \cup B} \subset \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$. Podle (d) a Věty 9.3.5(c) je $\overline{A} \cup \overline{B}$ uzavřená množina, tedy $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Odtud plyne, že $\overline{A \cup B} \subset \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(f) Pokud $A = \emptyset$, pak tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme, že $A \neq \emptyset$ a $x, y \in \overline{A}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle (c) existují $x', y' \in A$ taková, že $\varrho(x, x') < \varepsilon$ a $\varrho(y, y') < \varepsilon$. Potom
$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, x') + \varrho(x', y') + \varrho(y', y) < 2\varepsilon + \operatorname{diam} A.$$
Protože ε bylo zvoleno libovolně, plyne odtud, že $\operatorname{diam} \overline{A} \leq \operatorname{diam} A$. Opačná nerovnost plyne z 9.3.24 a Příkladu 9.1.38(a).

(g) Předpokládejme, že F je uzavřená množina splňující $A \subset F$. Podle tvrzení (b) potom platí $\overline{A} \subset \overline{F}$. Protože F je uzavřená množina, platí $\overline{F} = F$, takže $\overline{A} \subset F$. Podle tvrzení (d) je množina $\overline{A}$ uzavřená a navíc zřejmě platí $A \subset \overline{A}$. ∎

9.3.29. Příklad. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $x \in P$, $0 < r < s$. Potom $\overline{B(x,r)} \subset B(x,s)$.

Řešení. Předpokládejme, že $y \in \overline{B(x,r)}$. Potom podle Věty 9.3.28(c) existuje $z \in B(x,r)$ splňující $\varrho(z,y) < s - r$. Potom máme

$$\varrho(x,y) \leq \varrho(x,z) + \varrho(z,y) < r + s - r = s.$$

Platí tedy $y \in B(x,s)$, čímž je tvrzení dokázáno. ♣

9.3.30 (relativita topologických pojmů)**.** Vlastnosti, které v teorii metrických prostorů vypovídáme o množinách (např. otevřenost, uzavřenost), závisí na metrickém prostoru, vzhledem ke kterému tyto vlastnosti uvažujeme. Máme-li například metrický prostor (P, ϱ) a $A \subset Q \subset P$, pak je třeba brát v potaz, zda tvrzení o množině A vztahujeme k metrickému prostoru (P, ϱ) nebo (Q, ϱ). Pokud hrozí nedorozumění, pak je třeba uvést, v kterém metrickém prostoru pracujeme. Například je-li (P, ϱ) metrický prostor a $A \subset P$, pak uzávěr množiny A v prostoru (P, ϱ) můžeme pro upřesnění označit $\overline{A}^{(P,\varrho)}$ nebo jen $\overline{A}^{P}$.

Následující věta ukazuje vztah mezi uzávěrem množiny A v prostoru (P, ϱ) a v prostoru (Q, ϱ). Vztah otevřených (respektive uzavřených) množin v (P, ϱ) a otevřených (respektive uzavřených) množin v (Q, ϱ) je zachycen ve Větě 9.3.32.

9.3.31. Věta (relativní uzávěr)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset Q \subset P$. Potom platí $\overline{A}^{Q} = \overline{A}^{P} \cap Q$ $(= \overline{A} \cap Q)$.

Důkaz. Inkluze $\subset$. Předpokládejme, že $x \in \overline{A}^{Q}$. Potom $x \in Q$ a $\operatorname{dist}_{(Q,\varrho)}(x, A) = 0$. Poněvadž $\operatorname{dist}_{(Q,\varrho)}(x, A) = \operatorname{dist}_{(P,\varrho)}(x, A)$, máme $\operatorname{dist}_{(P,\varrho)}(x, A) = 0$. Potom tedy platí $x \in \overline{A} \cap Q$.

Inkluze $\supset$. Předpokládejme, že $x \in \overline{A} \cap Q$. Bod x je prvkem Q, a tedy platí $\operatorname{dist}_{(Q,\varrho)}(x, A) = \operatorname{dist}_{(P,\varrho)}(x, A)$. Poněvadž $x \in \overline{A}$, máme $\operatorname{dist}_{(Q,\varrho)}(x, A) = \operatorname{dist}_{(P,\varrho)}(x, A) = 0$, a tedy $x \in \overline{A}^{Q}$. ∎

9.3.32. Věta. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset Q \subset P$. Potom A je otevřená (respektive uzavřená) v (Q, ϱ) právě tehdy, když existuje množina $B \subset P$ otevřená (respektive uzavřená) v (P, ϱ) splňující $A = B \cap Q$.

Důkaz. Případ otevřených množin. $\Rightarrow$ Nechť A je otevřená množina v prostoru (Q, ϱ). Podle Věty 9.3.16 je

$$A = \bigcup \{B_Q(x,r);\ x \in Q,\ r > 0,\ B_Q(x,r) \subset A\},$$

kde $B_Q(x,r) = \{y \in Q;\ \varrho(x,y) < r\}$, neboli $B_Q(x,r)$ je koule o středu x a poloměru r v prostoru (Q,ϱ). Označme

$$B = \bigcup\{B(x,r);\ x \in Q,\ r > 0,\ B_Q(x,r) \subset A\}.$$

Podle Věty 9.3.11(b) je B otevřená množina v prostoru (P,ϱ). Navíc zřejmě platí $A = B \cap Q$.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že B je otevřená množina v (P,ϱ) splňující $A = B \cap Q$. Podle Věty 9.3.16 je

$$B = \bigcup\{B(x,r);\ x \in P,\ r > 0,\ B(x,r) \subset B\}.$$

Potom platí

$$A = \bigcup\{B_Q(x,r);\ x \in Q,\ r > 0,\ B(x,r) \subset B\},$$

tedy

$$A = \bigcup\{B_Q(x,r);\ x \in Q,\ r > 0,\ B_Q(x,r) \subset A\}.$$

Tedy opět podle Věty 9.3.11(b) je množina A otevřená v prostoru (Q,ϱ). Tím je dokázáno tvrzení věty pro případ, kdy množina A je otevřená.

Případ uzavřených množin. $\Rightarrow$ Předpokládejme, že $A \subset Q$ je uzavřená v (Q,ϱ). Potom je množina $Q \setminus A$ otevřená v (Q,ϱ) (Věta 9.3.13). Podle již dokázaného tvrzení existuje otevřená množina H v (P,ϱ) splňující $H \cap Q = Q \setminus A$. Položíme $B = P \setminus H$. Pak je množina B uzavřená v (P,ϱ) podle Věty 9.3.13 a splňuje

$$B \cap Q = (P \setminus H) \cap Q = Q \setminus H = Q \setminus (Q \setminus A) = A,$$

čímž je tato implikace dokázána.

$\Leftarrow$ Nyní předpokládejme, že pro množinu $A \subset Q$ existuje $B \subset P$, která je uzavřená v (P,ϱ) a $A = B \cap Q$. Potom je množina $P \setminus B$ otevřená v (P,ϱ) a $Q \setminus A = (P \setminus B) \cap Q$. Podle již dokázaného tedy máme, že množina $Q \setminus A$ je otevřená v (Q,ϱ). Podle Věty 9.3.13 je tak A uzavřená v (Q,ϱ). ■

9.3.33. Příklad. Dokažte, že interval $[0,1]$ je otevřenou množinou v prostoru $[0,1] \cup (2,3)$ se zděděnou eukleidovskou metrikou v prostoru $\mathbb{R}$.

Řešení. Označme $P = \mathbb{R}$, $Q = [0,1] \cup (2,3)$, $A = [0,1]$ a $B = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Potom je B otevřená v P a $A = B \cap Q$. Podle Věty 9.3.32 je pak A otevřená v Q. ♣

Husté množiny.

9.3.34. Definice. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že množina $A \subset P$ je **hustá** v (P,ϱ), jestliže $\overline{A} = P$.

9.3.35. Bude užitečné si uvědomit, že množina $A \subset P$ je hustá právě tehdy, když pro každé $x \in P$ existuje posloupnost $\{x_n\}$ prvků množiny A splňující $\lim x_n = x$.

9.3.36. Příklad. Dokažte, že $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jsou husté v $\mathbb{R}$.

Řešení. Zvolme $x \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom podle Věty 1.5.34 existuje racionální číslo $q \in B(x, \varepsilon)$. To znamená, že $\operatorname{dist}(x, \mathbb{Q}) < \varepsilon$. Vzhledem k tomu, že $\varepsilon > 0$ bylo zvoleno libovolně, dostáváme $\operatorname{dist}(x, \mathbb{Q}) = 0$, a tedy $x \in \overline{\mathbb{Q}}$. Máme tak $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Hustotu $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$ lze dokázat obdobně, jenom Větu 1.5.34 nahradíme výsledkem z Příkladu 1.8.23. ♣

9.3.37. Lze ukázat, že množina všech polynomů na $[a, b]$, kde $[a, b] \subset \mathbb{R}$, je hustá v $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\sup})$. Důkaz tohoto zajímavého tvrzení uvedeme až v Kapitole 11 (Věta 11.2.6).

9.3.38. Příklad. Nechť P je množina a $A \subset P$. Dokažte, že A je hustá v prostoru $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ právě tehdy, když $A = P$.

Řešení. Pokud $A = P$, pak je A zřejmě hustá v P. Pokud $\overline{A} = P$, pak pro libovolné $x \in P$ platí $\operatorname{dist}(x, A) = 0$. Existuje tedy $y \in A$ takové, že $\varrho_{\text{diskr}}(x, y) < 1$. Potom ale nutně $x = y$ a máme tak $x \in A$. Dokázali jsme tedy, že $A = P$. ♣

9.3.39. Věta (charakterizace hustých množin)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Množina $A \subset P$ je hustá v P právě tehdy, když pro každou neprázdnou otevřenou množinu G v P platí $G \cap A \neq \emptyset$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Nechť $G \subset P$ je neprázdná a otevřená v P. Potom existuje $x \in G$. K němu nalezneme $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset G$. Poněvadž $\overline{A} = P$, platí podle Věty 9.3.28(c), že $\operatorname{dist}(x, A) = 0$. Potom platí $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$, a tedy také $G \cap A \neq \emptyset$.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že $x \in P$. Potom je pro každé $r > 0$ množina $B(x, r)$ neprázdná a otevřená. Platí tedy $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$. To znamená, že $\operatorname{dist}(x, A) < r$, a tedy musí být $\operatorname{dist}(x, A) = 0$. Platí tedy $x \in \overline{A}$ (Věta 9.3.28(c)). Odvodili jsme $P = \overline{A}$, takže A je hustá v P. ■

9.3.40. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $A \subset P$ je hustá a $G \subset P$. Množina $A \cap G$ nemusí být hustá v G, neboť $A \cap G$ může být prázdná a G neprázdná. Pokud ale G je navíc otevřená v P, pak je již $G \cap A$ hustá v G. Odvození není těžké. Zvolme otevřenou neprázdnou množinu $H \subset G$ v G. Podle Věty 9.3.32 existuje množina $\tilde{H}$, která je otevřená v P a splňuje $H = \tilde{H} \cap G$. Vzhledem k otevřenosti množin $\tilde{H}$ a G v P je H otevřená v P. Pak platí $A \cap H = A \cap G \cap H \neq \emptyset$ podle Věty 9.3.39, neboť A je hustá v P. Podle téže věty je pak $A \cap G$ hustá v G.

Řídké množiny.

9.3.41. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že množina $A \subset P$ je **řídká** v (P, ϱ), jestliže je množina $P \setminus \overline{A}$ je hustá v P.

9.3.42. Příklad. Dokažte následující tvrzení.

(a) Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom je jednobodová množina $\{x\}$ řídká v $\mathbb{R}$.
(b) Množina přirozených čísel $\mathbb{N}$ je řídká v $\mathbb{R}$.
(c) Množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ není řídká v $\mathbb{R}$.

Řešení. (a) Zvolme neprázdnou otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}$. Nalezneme $y \in G$ a $r > 0$ taková, že $(y - r, y + r) \subset G$. Zřejmě platí $(y - r, y + r) \setminus \{x\} \neq \emptyset$, a proto $G \cap (\mathbb{R} \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Podle Věty 9.3.39 je $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ hustá. Poněvadž $\mathbb{R} \setminus \{x\} = \mathbb{R} \setminus \overline{\{x\}}$ podle Příkladu 9.3.3, dostáváme, že množina $\{x\}$ je řídká.

(b) Množina $\mathbb{N}$ je uzavřená v $\mathbb{R}$, protože platí

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N} = (-\infty, 1) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n, n + 1)$$

a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ je tedy otevřená v $\mathbb{R}$ podle Věty 9.3.17. Stačí tedy dokázat, že $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ je hustá. Zvolme neprázdnou otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}$. Potom G obsahuje neprázdný otevřený interval, a je tedy podle 3.8.28 nespočetná. Odtud plyne $G \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) = G \setminus \mathbb{N} \neq \emptyset$. Podle Věty 9.3.39 je $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ hustá, což implikuje řídkost množiny $\mathbb{N}$.

(c) Podle Příkladu 9.3.36 je $\mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$, takže $\mathbb{Q}$ není řídká v $\mathbb{R}$. ♣

9.3.43. Příklad. Nechť P je množina a $A \subset P$. Dokažte, že množina A je řídká v metrickém prostoru $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ právě tehdy, když je prázdná.

Řešení. $\Rightarrow$ Množina $P \setminus \overline{A}$ je hustá, a tedy $P \setminus \overline{A} = P$ podle Příkladu 9.3.38. Máme tedy $\overline{A} = \emptyset$, takže $A = \emptyset$.

$\Leftarrow$ Tato implikace je zřejmá a platí v každém metrickém prostoru. ♣

9.3.44. Věta (charakterizace řídkých množin)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Množina A je řídká v P právě tehdy, když pro každou neprázdnou otevřenou množinu $G \subset P$ existuje neprázdná otevřená množina $H \subset G$ taková, že $H \cap A = \emptyset$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Nechť $G \subset P$ je otevřená neprázdná množina. Pak položíme $H = G \cap (P \setminus \overline{A})$. Potom je H otevřená, neboť je průnikem dvou otevřených množin. Zřejmě platí $H \subset G$. Množina H je navíc neprázdná, neboť množina $P \setminus \overline{A}$ je hustá a podle Věty 9.3.39 má tedy s G neprázdný průnik. Navíc přímo z definice množiny H plyne $H \cap A = \emptyset$.

$\Leftarrow$ Nechť $G \subset P$ je neprázdná otevřená množina v P. Podle předpokladu existuje neprázdná otevřená množina $H \subset G$ splňující $H \cap A = \emptyset$. Množina $P \setminus H$ je uzavřená, obsahuje A, a proto podle Věty 9.3.28(g) platí $\overline{A} \subset P \setminus H$, takže také $H \subset P \setminus \overline{A}$. Tedy $G \cap (P \setminus \overline{A}) \neq \emptyset$. Podle Věty 9.3.39 je tudíž množina $P \setminus \overline{A}$ hustá v P, což znamená, že A je řídká. ■

9.3.45. Příklad. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Označme

$$A = \big\{ f \in \mathcal{C}([a, b]);\ \forall x \in [a, b] \colon |f(x)| \leq 1 \big\}.$$

Dokažte, že

(a) A je řídká v metrickém prostoru $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{int}})$,
(b) A není řídká v metrickém prostoru $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{sup}})$.

Řešení. (a) Nejprve dokážeme, že A je uzavřená v prostoru $\big(\mathcal{C}([a,b]), \varrho_{\text{int}}\big)$. Nechť $g \in \mathcal{C}([a,b]) \setminus A$. Potom existuje $c \in [a,b]$ takové, že $|g(c)| > 1$. Předpokládejme, že $c \neq b$. Ze spojitosti funkce g pak plyne, že existuje $d \in (c,b)$ takové, že pro každé $x \in (c,d)$ platí $|g(x)| > \frac{|g(c)|+1}{2}$. Potom pro každou funkci $f \in A$ a pro každé $x \in (c,d)$ platí

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &\geq \big||f(x)| - |g(x)|\big| = |g(x)| - |f(x)| \\ &\geq \frac{|g(c)|+1}{2} - 1 = \frac{|g(c)|-1}{2}, \end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{aligned} \varrho_{\text{int}}(f,g) &= \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x \geq \int_c^d |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\geq \int_c^d \frac{|g(c)|-1}{2}\,\mathrm{d}x = (d-c)\frac{|g(c)|-1}{2}. \end{aligned}$$

To znamená, že $\varrho_{\text{int}}(g,A) \geq (d-c)\frac{|g(c)|-1}{2} > 0$, a tedy podle Věty 9.3.28(c) platí $g \notin \overline{A}$. Z toho plyne, že $\overline{A} = A$, a tedy A je uzavřená v metrickém prostoru $\big(\mathcal{C}([a,b]), \varrho_{\text{int}}\big)$. V případě, že $c = b$, nalezneme $d \in (a,c)$ takové, že pro každé $x \in (d,c)$ platí $|g(x)| > \frac{|g(c)|+1}{2}$ a dále postupujeme obdobně, přičemž místo intervalu (c,d) pracujeme s intervalem (d,c).

Díky uzavřenosti A platí $\mathcal{C}([a,b]) \setminus \overline{A} = \mathcal{C}([a,b]) \setminus A$. K důkazu řídkosti množiny A v prostoru $(\mathcal{C}([a,b]), \varrho_{\text{int}})$ tedy stačí dokázat, že

$$\overline{\mathcal{C}([a,b]) \setminus A} = \mathcal{C}([a,b]).$$

Zvolme $h \in \mathcal{C}([a,b])$. Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je takové, že $\frac{1}{n_0} < b - a$. Pro $n \geq n_0$ položme

$$h_n(x) = \begin{cases} n\big(h(a+\frac{1}{n}) - 2\big) \cdot (x-a) + 2, & \text{pro } x \in [a, a+\frac{1}{n}), \\ h(x), & \text{pro } x \in (a+\frac{1}{n}, b]. \end{cases}$$

Potom $h_n \in \mathcal{C}([a,b]) \setminus A$, neboť h_n je zřejmě spojitá na $[a,b]$ a $h_n(a) = 2$. Označme $M = \sup_{[a,b]} |h|$. Vzhledem ke spojitosti funkce h je M konečné číslo. Pak platí

$$\begin{aligned} \varrho_{\text{int}}(h_n, h) &= \int_a^b |h_n(x) - h(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_a^{a+\frac{1}{n}} (|h_n(x)| + |h(x)|)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_a^{a+\frac{1}{n}} \Big(n\big(|h(a+\tfrac{1}{n})| + 2\big) \cdot \tfrac{1}{n} + 2 + M\Big)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_a^{a+\frac{1}{n}} (2M+4)\,\mathrm{d}x = \frac{2M+4}{n}. \end{aligned}$$

Protože $\lim_{n\to\infty} \frac{2M+4}{n} = 0$, plyne odtud, že $\lim_{n\to\infty} \varrho_{\text{int}}(h_n, h) = 0$, a tedy $h_n \xrightarrow{\varrho_{\text{int}}} h$. To znamená, že $h \in \overline{\mathcal{C}([a,b]) \setminus A}$, a tedy $\mathcal{C}([a,b]) \setminus A$ je hustá v $(\mathcal{C}([a,b]), \varrho_{\text{int}})$, takže A je v tomto prostoru řídká.

(b) Označme f nulovou funkci na intervalu $[a, b]$. Potom otevřená koule $B(f, 1)$ tvoří otevřenou neprázdnou množinu v $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\sup})$, která je obsažena v A. Podle Věty 9.3.44 pak A není řídká v $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\sup})$. ♣

9.3.46. Věta (vlastnosti řídkých množin)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A, B \subset P$.

(a) Je-li A řídká v P a $B \subset A$, pak také B je řídká v P.
(b) Jsou-li množiny A a B řídké v P, pak také $A \cup B$ je řídká v P.
(c) Množina A je řídká v P právě tehdy, když $\overline{A}$ je řídká v P.

Důkaz. (a) Podle Věty 9.3.28(b) platí $\overline{B} \subset \overline{A}$, a tedy $P \setminus \overline{A} \subset P \setminus \overline{B}$. Množina $P \setminus \overline{A}$ je hustá, a tedy podle Věty 9.3.39 je hustá i množina $P \setminus \overline{B}$. To znamená, že množina B je řídká v P.

(b) Podle Věty 9.3.28(e) a De Morganových pravidel (Věta 1.3.11) platí

$$P \setminus \overline{A \cup B} = P \setminus (\overline{A} \cup \overline{B}) = (P \setminus \overline{A}) \cap (P \setminus \overline{B}). \tag{9.6}$$

Protože množiny A a B jsou řídké v (P, ϱ), jsou obě množiny $P \setminus \overline{A}$ a $P \setminus \overline{B}$ v tomto prostoru husté. Navíc jsou podle Věty 9.3.13 obě otevřené. Zvolme neprázdnou otevřenou množinu $G \subset P$. Potom je množina $G \cap (P \setminus \overline{A})$ otevřená a díky hustotě $P \setminus \overline{A}$ je také neprázdná. Množina $P \setminus \overline{B}$ je hustá, a proto je množina $G \cap (P \setminus \overline{A}) \cap (P \setminus \overline{B})$ neprázdná. Množina $(P \setminus \overline{A}) \cap (P \setminus \overline{B})$ je tedy hustá. Z (9.6) plyne, že množina $P \setminus \overline{A \cup B}$ je hustá v P, a tedy $A \cup B$ je řídká v P.

(c) Z Věty 9.3.28(d) vyplývá, že $P \setminus \overline{\overline{A}} = P \setminus \overline{A}$. Odtud již tvrzení snadno plyne. ■

9.3.47. Věta. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $G \subset P$ je otevřená hustá množina v P. Potom je množina $P \setminus G$ řídká v P.

Důkaz. Podle Věty 9.3.13 je množina $P \setminus G$ uzavřená v P, a tedy $\overline{P \setminus G} = P \setminus G$. Protože G je hustá v P, dostáváme

$$\overline{P \setminus \overline{P \setminus G}} = \overline{P \setminus (P \setminus G)} = \overline{G} = P.$$

Množina $P \setminus G$ je tedy řídká v P. ■

Hromadné body.

9.3.48. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $M \subset P$ a $a \in P$. Řekneme, že a je **hromadným bodem množiny** M, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$M \cap \big(B(a, \varepsilon) \setminus \{a\}\big) \neq \emptyset.$$

Množinu všech hromadných bodů množiny M nazýváme **derivací množiny** M a značíme ji symbolem M'. Řekneme, že a je **izolovaným bodem množiny** M, jestliže $a \in M \setminus M'$.

9.3.49. Příklad. Uvažujte metrický prostor $\mathbb{R}$ a množinu $M = (0, 1)$. Dokažte, že $M' = [0, 1]$.

Řešení. Zvolme $x \in [0,1]$ a $r > 0$. Pak není těžké si rozmyslet, že platí
$$\big(B(x,r) \setminus \{x\}\big) \cap M \neq \emptyset.$$
Odtud plyne inkluze $[0,1] \subset M'$.

Nyní zvolme $x \notin [0,1]$. Položme $r = \min\{|x|, |x-1|\}$. Potom $r > 0$ a zřejmě platí $B(x,r) \cap M = \emptyset$. Odtud plyne inkluze $M' \subset [0,1]$, a tedy celkem $M' = [0,1]$. ♣

9.3.50. Příklad. Nechť $M = \left\{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\}$. Dokažte, že $M' = \{0\}$.

Řešení. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n \in \mathbb{N}$ splňující $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Položme $y = \frac{1}{n}$. Potom $y \neq 0$ a $y \in B(0,\varepsilon) \cap M$. Tedy $0 \in M'$.

Nyní zvolme $x \neq 0$. Položme
$$\varepsilon = \begin{cases} |x|, & \text{je-li } x \in (-\infty, 0),\\ \min\{|x - \frac{1}{n}|, |x - \frac{1}{n+1}|\}, & \text{je-li } x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N},\\ \frac{1}{n(n+1)}, & \text{je-li } x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N},\\ |x-1|, & \text{je-li } x \in (1,\infty).\end{cases}$$
Ve všech případech potom platí $\varepsilon > 0$ a $\big(B(x,\varepsilon) \setminus \{x\}\big) \cap M = \emptyset$. Tedy $x \notin M'$. Odtud plyne, že $M' = \{0\}$. ♣

9.3.51. Příklad. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je prostá omezená posloupnost reálných čísel a $M = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Dokažte, že $M' = H(\{a_n\})$.

Řešení. Předpokládejme, že $x \in H(\{a_n\})$ a $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel splňující $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = x$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí $|a_{n_k} - x| < \varepsilon$. Z toho, že posloupnost $\{a_n\}$ je prostá, plyne, že existuje $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, takové, že $a_{n_k} \neq x$. Pak $a_{n_k} \in (B(x,\varepsilon) \setminus \{x\}) \cap M$. Odtud plyne $x \in M'$. Tím je dokázaná inkluze $H(\{a_n\}) \subset M'$.

Nyní předpokládejme, že $x \in M'$. Budeme konstruovat vybranou posloupnost s limitou rovnou x. Podle definice hromadného bodu pro každé $\varepsilon > 0$ platí $(B(x,\varepsilon) \setminus \{x\}) \cap M \neq \emptyset$. Lze tedy nalézt $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_1} \in B(x,1) \setminus \{x\}$. Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ již máme určena přirozená čísla $n_1 < \cdots < n_k$ splňující $a_{n_j} \in B\big(x, \frac{1}{j}\big) \setminus \{x\}$ pro každé $j \in \{1, \ldots, k\}$. Množina $A = \{a_j;\ j \leq n_k\}$ je konečná, a proto existuje $\varepsilon \in (0, \frac{1}{k+1})$ takové, že $A \cap \big(B(x,\varepsilon) \setminus \{x\}\big) = \emptyset$. Pak lze nalézt $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_{k+1}} \in B\big(x,\varepsilon\big) \setminus \{x\}$. Díky volbě ε máme $n_{k+1} > n_k$. Podle principu matematické indukce dostaneme touto konstrukcí rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, pro kterou navíc zřejmě platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = x$. Odtud plyne, že $x \in H(\{a_n\})$, a tedy $M' \subset H(\{a_n\})$. Tím je rovnost $M' = H(\{a_n\})$ dokázána. ♣

9.3.52. Příklad. Nechť $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je diskrétní metrický prostor. Dokažte, že $P' = \emptyset$.

Řešení. Pro každé $x \in P$ zřejmě platí $B(x,1) = \{x\}$, a tedy $B(x,1) \setminus \{x\} = \emptyset$. Tudíž $x \notin P'$. Protože x bylo zvoleno libovolně, plyne odtud, že $P' = \emptyset$. ♣

9.4. Spojitá zobrazení mezi metrickými prostory

V Kapitole 4 jsme definovali pojmy limita a spojitost reálné funkce. V tomto oddílu zavedeme tyto pojmy i pro zobrazení mezi metrickými prostory.

Spojitost zobrazení.

9.4.1. Definice. Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z P do Q, $a \in P$ a $M \subset P$. Řekneme, že zobrazení f je

(a) **spojité v bodě** a **vzhledem k množině** M, jestliže $a \in M$ a platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in M : \big(\varrho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma\big(f(x), f(a)\big) < \varepsilon\big), \tag{9.7}$$

(b) **spojité v bodě** a, jestliže je spojité v a vzhledem k P,

(c) **spojité na množině** M, jestliže je spojité v každém bodě $x \in M$ vzhledem k M,

(d) **spojité**, jestliže je spojité na P.

9.4.2 (komentář k Definici 9.4.1)**.** (a) Pokud je zobrazení f spojité v bodě a vzhledem k M, pak existuje $\eta > 0$ takové, že $B(a, \eta) \cap M \subset \mathcal{D}(f)$.

(b) Výrok (9.7) můžeme ekvivalentně zapsat takto

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in B_\varrho(a, \delta) \cap M : f(x) \in B_\sigma(f(a), \varepsilon).$$

(c) Spojitost zobrazení f z P do Q závisí nejenom na tom, jak je f definováno, ale také na tom, jaké metriky uvažujeme na množinách P a Q.

(d) Je-li $P = Q = M = \mathbb{R}$, pak výše uvedená definice spojitosti souhlasí s definicí spojitosti reálné funkce jedné reálné proměnné.

9.4.3. Příklad. Nechť $i, n \in \mathbb{N}$, $i \leq n$, a $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je zobrazení definované předpisem $\pi_i(x) = x_i$. Dokažte, že π_i je spojité.

Řešení. Zvolme $a \in \mathbb{R}^n$ a $\varepsilon > 0$. Položme $\delta = \varepsilon$. Potom pro každé $x \in B(a, \delta)$ platí

$$\begin{aligned}|\pi_i(x) - \pi_i(a)| = |x_i - a_i| &\leq \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - a_j)^2} \\ &= \varrho_2(x, a) < \delta = \varepsilon,\end{aligned}$$

a tedy π_i je spojité v a. Bod $a \in \mathbb{R}^n$ byl zvolen libovolně, a proto je π_i spojité na $\mathbb{R}^n$. ♣

9.4.4. Příklad. Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor. Dokažte, že $x \mapsto \|x\|$ je spojité zobrazení z X do $\mathbb{R}$.

Řešení. Podle vlastností z Definice 9.1.18 platí pro každé $x, y \in X$

$$\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\| \quad \text{a} \quad \|y\| \leq \|y - x\| + \|x\| = \|x - y\| + \|x\|. \tag{9.8}$$

Díky (9.8) platí pro každé $x, y \in X$

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|. \tag{9.9}$$

Nyní zvolme $x_0 \in X$. Ověříme definici spojitosti v bodě x_0. Pro $\varepsilon > 0$ položme $\delta = \varepsilon$. Pro každé $x \in B(x_0, \delta)$ platí podle (9.9)

$$\big|\|x_0\| - \|x\|\big| \le \|x_0 - x\| < \delta = \varepsilon.$$

Tím je důkaz proveden. ♣

Spojitost zobrazení mezi metrickými prostory závisí zásadním způsobem na zvolených metrikách. Následující příklad tento fakt ilustruje.

9.4.5. Příklad. Nechť $(P, \varrho_{\mathrm{diskr}})$ a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f : P \to Q$. Dokažte, že f je spojité.

Řešení. Předpokládejme, že $a \in P$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Položme $\delta = 1$. Potom platí $B_{\varrho_{\mathrm{diskr}}}(a, \delta) = \{a\}$. Odtud plyne, že pro každé $x \in B_{\varrho_{\mathrm{diskr}}}(a, \delta)$ platí $f(x) = f(a)$, a tedy $f(x) \in B_\sigma(f(a), \varepsilon)$. To znamená, že f je spojité v a. Poněvadž a bylo zvoleno libovolně, plyne odtud, že f je spojité zobrazení. ♣

9.4.6. Věta (charakterizace spojitosti)**.** Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f : P \to Q$. Potom jsou následující tři výroky ekvivalentní.

(i) Zobrazení f je spojité na P.
(ii) Pro každou množinu G otevřenou v Q je množina $f^{-1}(G)$ otevřená v P.
(iii) Pro každou množinu F uzavřenou v Q je množina $f^{-1}(F)$ uzavřená v P.

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Předpokládejme, že G je otevřená množina v Q a $x \in f^{-1}(G)$. Potom $f(x) \in G$. Protože G je otevřená, existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $B_\sigma(f(x), \varepsilon) \subset G$. Díky spojitosti zobrazení f nalezneme $\delta > 0$ takové, že $f(B_\varrho(x, \delta)) \subset B_\sigma(f(x), \varepsilon)$. To znamená, že

$$B_\varrho(x, \delta) \subset f^{-1}(B_\sigma(f(x), \varepsilon)) \subset f^{-1}(G).$$

Bod x je tedy vnitřním bodem množiny $f^{-1}(G)$. Odtud plyne, že $f^{-1}(G)$ je otevřená množina v P.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Nechť $a \in P$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Množina $f^{-1}\big(B_\sigma(f(a), \varepsilon)\big)$ obsahuje prvek a a podle předpokladu je otevřená. Nalezneme tedy $\delta > 0$ takové, že $B_\varrho(a, \delta) \subset f^{-1}\big(B_\sigma(f(a), \varepsilon)\big)$, neboli $f\big(B_\varrho(a, \delta)\big) \subset B_\sigma(f(a), \varepsilon)$. Odtud plyne, že f je spojité v a. Bod a byl zvolen libovolně v P, a proto je f spojité.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Nechť F je uzavřená množina v Q. Potom $Q \setminus F$ je otevřená množina v Q, a tedy, podle (ii), je množina $f^{-1}(Q \setminus F)$ otevřená v P. Z Příkladu 1.8.20(d) plyne, že

$$\begin{aligned} f^{-1}(F) &= f^{-1}\big(Q \setminus (Q \setminus F)\big) = f^{-1}(Q) \setminus f^{-1}(Q \setminus F) \\ &= P \setminus f^{-1}(Q \setminus F). \end{aligned}$$

Množina $f^{-1}(F)$ je tedy uzavřená v P.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Nechť G je otevřená množina v Q. Potom $Q \setminus G$ je uzavřená množina v Q, a tedy, podle (iii), je množina $f^{-1}(Q \setminus G)$ uzavřená v P. Množina $f^{-1}(G) = P \setminus f^{-1}(Q \setminus G)$ je tudíž otevřená v P. ■

Limita zobrazení.

9.4.7. Definice. Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z P do Q, $A \subset P$, $a \in A'$ a $b \in Q$. Řekneme, že zobrazení f **má v bodě** a **limitu** b **vzhledem k množině** A, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in A\colon \big(0 < \varrho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), b) < \varepsilon\big).$$

Jestliže $A = P$, pak říkáme, že f **má v bodě** a **limitu** b.

9.4.8. Věta (jednoznačnost limity)**.** Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, $f: P \to Q$, $A \subset P$ a $a \in A'$. Potom f má v bodě a nejvýše jednu limitu vzhledem k množině A.

Důkaz. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že $b_1, b_2 \in Q$, $b_1 \neq b_2$, jsou limitami zobrazení f vzhledem k množině A. Zvolme $\varepsilon = \frac{1}{4}\sigma(b_1, b_2)$. Potom je $\varepsilon > 0$ a existuje k němu $\delta_1 > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in A\colon (0 < \varrho(x, a) < \delta_1 \Rightarrow \sigma(f(x), b_1) < \varepsilon).$$

Dále existuje $\delta_2 > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in A\colon (0 < \varrho(x, a) < \delta_2 \Rightarrow \sigma(f(x), b_2) < \varepsilon).$$

Díky tomu, že $a \in A'$, nalezneme $x \in A$ takové, že $0 < \varrho(x, a) < \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Potom platí

$$\sigma(b_1, b_2) \leq \sigma(b_1, f(x)) + \sigma(f(x), b_2) < 2\varepsilon < \sigma(b_1, b_2),$$

což je spor. ■

9.4.9. Limitu vzhledem k množině A počítáme pouze v bodech, které jsou hromadnými body množiny A. Pokud totiž a není hromadným bodem A, pak v jistém okolí bodu a již kromě bodu a nejsou žádné body z A a proměnná funkce f se nemůže blížit k bodu a v rámci množiny $A \setminus \{a\}$. V takovém bodě a by sice definice limity formálně dávala smysl, ale nebyla by určena jednoznačně.

9.4.10. Označení. Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z P do Q, $A \subset P$ a $a \in A'$. Pokud existuje limita zobrazení f v bodě a vzhledem k množině A, označujeme tuto limitu symbolem $\lim_{x \to a,\, x \in A} f(x)$. Je-li $A = P$, píšeme jen $\lim_{x \to a} f(x)$.

Věty Heineova typu.

9.4.11. Věta (Heine)**.** Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z P do Q, $A \subset P$, $a \in A'$ a $b \in Q$. Potom jsou následující dva výroky ekvivalentní.

(i) Platí $\lim_{x \to a,\, x \in A} f(x) = b$.

(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ prvků množiny $A \setminus \{a\}$ splňující $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ platí $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = b$.

Důkaz. (i)⇒(ii) Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je posloupnost prvků množiny $A \setminus \{a\}$ splňující $\lim_{n \to \infty} x_n = a$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in A\colon (0 < \varrho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), b) < \varepsilon).$$

Dále nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $x_n \in (B(a,\delta) \setminus \{a\}) \cap A$. Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $f(x_n) \in B(b,\varepsilon)$. Tím jsme ověřili, že $\lim f(x_n) = b$.

(ii)$\Rightarrow$(i) Provedeme nepřímý důkaz, tj. odvodíme $\neg$(i) $\Rightarrow$ $\neg$(ii). Předpokládejme tedy, že neplatí (i). Pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že

$$\forall \delta > 0 \, \exists x \in A \colon 0 < \varrho(x,a) < \delta \wedge f(x) \notin B(b,\varepsilon). \tag{9.10}$$

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Položme $\delta = \frac{1}{n}$. K tomuto δ nalezneme podle (9.10) prvek x_n splňující $x_n \in (B(a,\frac{1}{n}) \setminus \{a\}) \cap A$ a $f(x_n) \notin B(b,\varepsilon)$. Potom posloupnost $\{x_n\}$ splňuje $\lim x_n = a$ a $x_n \in A \setminus \{a\}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, ale není pravda, že $\lim f(x_n) = b$. Podmínka (ii) tedy není splněna. ■

9.4.12. Věta. Nechť (P,ϱ) a (Q,σ) jsou metrické prostory, $f \colon P \to Q$ a $a \in P$. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní.

(i) Zobrazení f je spojité v bodě a.
(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ prvků P splňující $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Mějme posloupnost $\{x_n\}$ prvků P splňující $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu pomocí (i) nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in P$ splňující $\varrho(y,a) < \delta$ platí $\sigma(f(y), f(a)) < \varepsilon$. K našemu δ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $\varrho(x_n,a) < \delta$. Potom pro každé $n \geq n_0$ platí $\sigma(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$. Tím je dokázáno, že $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Provedeme opět nepřímý důkaz. Předpokládejme, že (i) neplatí. To znamená, že existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $\delta > 0$ existuje $y \in B(a,\delta)$ splňující $\sigma(f(y), f(a)) \geq \varepsilon$. Díky tomuto tvrzení nalezneme pro každé $n \in \mathbb{N}$ prvek $x_n \in B(a,\frac{1}{n})$ splňující $\sigma(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$. Posloupnost $\{x_n\}$ pak splňuje $\lim x_n = a$, ale neplatí $\lim f(x_n) = f(a)$. Neplatí tedy (ii). ■

Z předchozí věty plyne okamžitě následující výsledek.

9.4.13. Věta. Nechť (P,ϱ) a (Q,σ) jsou metrické prostory a $f \colon P \to Q$. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní.

(i) Zobrazení f je spojité.
(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ prvků P a $x \in P$ splňující $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

9.4.14. Věta. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor, $f,g \colon P \to \mathbb{R}$, $A \subset P$ a $a \in A'$. Předpokládejme, že platí

$$\lim_{x\to a, x\in A} f(x) = \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \lim_{x\to a, x\in A} g(x) = \beta \in \mathbb{R}.$$

Potom

(a) $\lim_{x\to a, x\in A}(f(x) + g(x)) = \alpha + \beta$,
(b) $\lim_{x\to a, x\in A}(f(x) \cdot g(x)) = \alpha \cdot \beta$,
(c) jestliže $\beta \neq 0$, pak $\lim_{x\to a, x\in A} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$.

Důkaz. (a) Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je posloupnost prvků množiny $A \setminus \{a\}$ splňující $\lim x_n = a$. Potom podle Věty 9.4.11 dostaneme $\lim f(x_n) = \alpha$ a $\lim g(x_n) = \beta$. Podle Věty 2.2.34(a) odvodíme $\lim(f(x_n) + g(x_n)) = \alpha + \beta$. Podle Věty 9.4.11 pak dostáváme $\lim_{x \to a, x \in A}(f(x) + g(x)) = \alpha + \beta$.

(b), (c) Postupujeme obdobně jako v (a), pouze Větu 2.2.34(a) nahradíme Větou 2.2.34(b),(c). ■

9.4.15. Věta (vztah mezi limitou a spojitostí v bodě)**.** Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z P do Q, $A \subset P$ a $a \in A \cap A' \cap D(f)$. Potom je f spojité v a vzhledem k A právě tehdy, když $\lim_{x \to a, x \in A} f(x) = f(a)$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Bod a patří do množiny A', takže v něm můžeme počítat limitu vzhledem k A. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu podle definice spojitosti nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in A \colon \bigl(\varrho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma\bigl(f(x), f(a)\bigr) < \varepsilon\bigr).$$

Potom tím spíše platí

$$\forall x \in A \colon \bigl(0 < \varrho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma\bigl(f(x), f(a)\bigr) < \varepsilon\bigr).$$

Tím jsme ověřili, že platí $\lim_{x \to a, x \in A} f(x) = f(a)$.

$\Leftarrow$ Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu podle definice limity nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in A \colon \bigl(0 < \varrho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma\bigl(f(x), f(a)\bigr) < \varepsilon\bigr).$$

Poněvadž $a \in A$ a $\sigma(f(a), f(a)) = 0 < \varepsilon$ máme

$$\forall x \in A \colon \bigl(\varrho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma\bigl(f(x), f(a)\bigr) < \varepsilon\bigr).$$

Tím je ověřena spojitost zobrazení f v bodě a. ■

Spojitost a limita složeného zobrazení.

9.4.16. Věta (spojitost složeného zobrazení v bodě)**.** Nechť (X, ϱ), (Y, σ) a (Z, τ) jsou metrické prostory, $f \colon X \to Y$ a $g \colon Y \to Z$. Nechť $A \subset X$, $a \in A$, $B \subset Y$, $f(a) \in B$ a platí:

(a) existuje $\eta > 0$ takové, že $f\bigl(B_\varrho(a, \eta) \cap A\bigr) \subset B$,
(b) f je spojité v bodě a vzhledem k A,
(c) g je spojité v bodě $f(a)$ vzhledem k B.

Potom zobrazení $g \circ f$ je spojité v bodě a vzhledem k A.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Díky podmínce (c) nalezneme $\psi > 0$ takové, že

$$\forall y \in B_\sigma(f(a), \psi) \cap B \colon g(y) \in B_\tau(g(f(a)), \varepsilon). \tag{9.11}$$

K nalezenému ψ díky podmínce (b) nalezneme $\zeta > 0$ takové, že

$$\forall x \in B_\varrho(a, \zeta) \cap A \colon f(x) \in B_\sigma(f(a), \psi). \tag{9.12}$$

Položme $\delta = \min\{\eta, \zeta\}$. Potom podle (a) platí

$$\forall x \in B_\varrho(a, \delta) \cap A \colon f(x) \in B.$$

Odtud a díky (9.11) a (9.12) obdržíme

$$\forall x \in B_\varrho(a,\delta) \cap A\colon g(f(x)) \in B_\tau(g(f(a)),\varepsilon).$$

Tím je důkaz proveden, neboť jsme k ε nalezli příslušné δ. ■

9.4.17. Věta (spojitost složeného zobrazení)**.** Nechť (X,ϱ), (Y,σ) a (Z,τ) jsou metrické prostory, $f\colon X \to Y$ je spojité a $g\colon Y \to Z$ je spojité. Potom je zobrazení $g \circ f\colon X \to Z$ spojité.

Důkaz. Nechť $G \subset Z$ je otevřená množina v prostoru (Z,τ). Zobrazení g je spojité, a tedy podle věty o charakterizaci spojitého zobrazení (Věta 9.4.6, (i)⇒(ii)), je $g^{-1}(G)$ otevřená množina v prostoru (Y,σ). Zobrazení f je spojité, takže podle téže věty je množina $f^{-1}(g^{-1}(G))$ otevřená v prostoru (X,ϱ). Protože $(g \circ f)^{-1}(G) = f^{-1}(g^{-1}(G))$, plyne odtud pomocí Věty 9.4.6, (ii)⇒(i), že zobrazení $g \circ f\colon X \to Z$ je spojité. ■

9.4.18. Věta (limita složeného zobrazení)**.** Nechť (X,ϱ), (Y,σ) a (Z,τ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z X do Y a g je zobrazení z Y do Z. Nechť $A \subset X$, $a \in A'$, $B \subset Y$, $b \in B'$, $c \in Z$ a platí

(a) existuje $\lambda > 0$ takové, že $f\big(A \cap (B(a,\lambda) \setminus \{a\})\big) \subset B$,
(b) $\lim_{x\to a, x\in A} f(x) = b$,
(c) $\lim_{y\to b, y\in B} g(y) = c$.

Nechť je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(P) existuje $\eta > 0$ takové, že pro každé $x \in B(a,\eta) \cap A$, $x \neq a$, platí $f(x) \neq b$,
(S) zobrazení g je spojité v bodě b vzhledem k množině B.

Potom platí

$$\lim_{x\to a, x\in A} (g \circ f)(x) = c.$$

Důkaz. Varianta s podmínkou (P). Zvolme $\varepsilon > 0$. Díky podmínce (c) nalezneme $\psi > 0$ takové, že

$$\forall y \in B\colon (0 < \sigma(y,b) < \psi \Rightarrow \tau(g(y),c) < \varepsilon). \tag{9.13}$$

K nalezenému ψ díky podmínce (b) nalezneme $\zeta > 0$ takové, že

$$\forall x \in A\colon (0 < \varrho(x,a) < \zeta \Rightarrow \sigma(f(x),b) < \psi). \tag{9.14}$$

Vezmeme λ z podmínky (a) a η z podmínky (P). Položíme $\delta = \min\{\lambda,\eta,\zeta\}$. Potom podle (a), (P) a (9.14) platí

$$\forall x \in A\colon \big(0 < \varrho(a,x) < \delta \Rightarrow (f(x) \in B \wedge 0 < \sigma(f(x),b) < \psi)\big).$$

Odtud a díky (9.13) obdržíme

$$\forall x \in A\colon (0 < \varrho(a,x) < \delta \Rightarrow \tau(g(f(x)),c) < \varepsilon).$$

Tím je důkaz proveden, neboť jsme k ε nalezli příslušné δ.

Varianta s podmínkou (S). Zvolme $\varepsilon > 0$. Díky podmínce (S) nalezneme $\psi > 0$ takové, že

$$\forall y \in B\colon (\sigma(y,b) < \psi \Rightarrow \tau(g(y),g(b)) < \varepsilon). \tag{9.15}$$

K nalezenému ψ díky podmínce (b) nalezneme $\zeta > 0$ takové, že
$$\forall x \in A\colon (0 < \varrho(x,a) < \zeta \Rightarrow \sigma(f(x),b) < \psi). \tag{9.16}$$
Vezměme λ z podmínky (a) a položme $\delta = \min\{\lambda, \zeta\}$. Potom podle (a) a (9.16) platí
$$\forall x \in A\colon \bigl(0 < \varrho(a,x) < \delta \Rightarrow (f(x) \in B \wedge \sigma(f(x),b) < \psi)\bigr).$$
Odtud a díky (9.15) obdržíme
$$\forall x \in A\colon (0 < \varrho(a,x) < \delta \Rightarrow \tau(g(f(x)), g(b)) < \varepsilon).$$
Tím je důkaz proveden, neboť $c = g(b)$ podle (a) a (S), a tak jsme k ε nalezli příslušné δ. ■

9.4.19. Definice. Nechť (P,ϱ) a (Q,σ) jsou metrické prostory. Řekneme, že zobrazení $f\colon P \to Q$ je **homeomorfismus** (prostoru P na prostor Q), jestliže je spojité, bijektivní a zobrazení $f^{-1}\colon Q \to P$ je také spojité. Řekneme, že prostory (P,ϱ) a (Q,σ) jsou **homeomorfní**, jestliže existuje homeomorfismus prostoru P na prostor Q.

9.4.20. Příklad. Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Ukažte, že interval (a,b) je homeomorfní s $\mathbb{R}$.

Řešení. Definujme zobrazení $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ předpisem
$$f(x) = \operatorname{tg}\bigl(\pi \tfrac{x-a}{b-a} - \tfrac{\pi}{2}\bigr).$$
Zobrazení $x \mapsto \pi\frac{x-a}{b-a} - \frac{\pi}{2}, x \in (a,b)$, je prosté spojité zobrazení definované na intervalu (a,b), jehož obor hodnot je roven $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Odtud a z vlastností funkce tangens plyne, že f je prosté spojité zobrazení definované na (a,b), jehož obor hodnot je roven $\mathbb{R}$. Inverzní zobrazení f^{-1} má tvar
$$f^{-1}(y) = \frac{\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2}}{\pi}(b-a) + a.$$
Z tohoto vyjádření plyne, že zobrazení f^{-1} je spojité. Tím jsme ověřili, že f je homeomorfismus prostoru (a,b) na prostor $\mathbb{R}$. ♣

9.4.21. V Příkladu 9.10.57 ukážeme, že čtverec $[0,1] \times [0,1]$ není homeomorfní s intervalem $[0,1]$. Uveďme ještě, že v komplexní analýze, což je partie matematiky věnující se zobrazením z komplexních čísel do komplexních čísel, je používán výsledek, že „sféra bez severního pólu“ je homeomorfní s komplexní rovinou, jinými slovy prostor
$$\bigl\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, z < 1\bigr\}$$
s metrikou zděděnou z $\mathbb{R}^3$ je homeomorfní s $\mathbb{C}$. Důkaz není obtížný, ale uvádět jej zde nebudeme.

9.4.22. Poznámka. *Topologický prostor* je dvojice $(X,\mathcal{G})$, kde X je množina a $\mathcal{G}$ je systém podmnožin X, který splňuje následující podmínky:

(a) Prázdná množina a X patří do $\mathcal{G}$.
(b) Nechť $\mathcal{S} \subset \mathcal{G}$, potom $\bigcup \mathcal{S} \in \mathcal{G}$.

(c) Nechť $m \in \mathbb{N}$ a $G_1, \ldots, G_m \in \mathcal{G}$, potom $\bigcap_{i=1}^{m} G_i \in \mathcal{G}$.

Množinám z $\mathcal{G}$ pak říkáme *otevřené množiny v* $(X, \mathcal{G})$.

Pokud je (P, ϱ) metrický prostor a $\mathcal{G}$ je systém všech otevřených množin v (P, ϱ), pak je podle Věty 9.3.11 dvojice $(P, \mathcal{G})$ topologický prostor. V tomto smyslu je tedy každý metrický prostor i prostorem topologickým. Existují však topologické prostory, které nelze obdržet z žádného metrického prostoru popsaným způsobem.

Řadu pojmů, které jsme definovali pro metrické prostory, je možné definovat i v prostorech topologických, neboť v definici vystačíme s otevřenými množinami a nepotřebujeme pracovat s metrikou. Mezi takové pojmy patří např. uzavřené množiny, hranice, vnitřek, uzávěr množiny, ale i spojité zobrazení (vizte Větu 9.4.6), a tedy i homeomorfismus.

Je-li $f : X \to Y$ homeomorfismus mezi topologickými prostory X a Y, pak zobrazení $A \mapsto f(A)$, kde $A \subset X$, je bijekcí systému otevřených množin v X na systém otevřených množin v Y. Vlastnosti prostoru, které se zachovávají homeomorfismem, se nazývají *topologické*.

9.5. Součin metrických prostorů

9.5.1. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $(P_1, \varrho_1), \ldots, (P_n, \varrho_n)$ jsou metrické prostory. Položme $P = P_1 \times \cdots \times P_n$. Na množině P lze zavést novou metriku pomocí metrik $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ různými způsoby, přičemž žádný z nich nemá výsadní postavení. Následující tři metriky jsou často používány a opírají se o definice metrik z Příkladů 9.1.7, 9.1.9 a 9.1.10. Ověření, že funkce $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_\infty$ jsou metriky na P, není o nic obtížnější než ověřování ve zmíněných příkladech.

Metriku $\sigma_1 : P \times P \to [0, \infty)$ definujeme předpisem

$$\sigma_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \varrho_i(x_i, y_i),$$

kde $x, y \in P$ mají tvar $x = (x_1, \ldots, x_n)$ a $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Metriku σ_1 nazýváme ℓ_1**-součtem** metrik $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$. Metriku $\sigma_2 : P \times P \to [0, \infty)$ definujeme předpisem

$$\sigma_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \varrho_i(x_i, y_i)^2},$$

kde x, y jsou jako výše. Metriku σ_2 nazýváme ℓ_2**-součtem** metrik $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$. Metriku $\sigma_\infty : P \times P \to [0, \infty)$ definujeme předpisem

$$\sigma_\infty(x, y) = \max\{\varrho_i(x_i, y_i);\ i \in \{1, \ldots, n\}\},$$

kde x, y jsou jako výše. Metriku σ_∞ nazýváme ℓ_∞**-součtem** metrik $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$.

9.5.2. Nechť $n, m \in \mathbb{N}$. Uvažujme na $\mathbb{R}$ obvyklou eukleidovskou metrikou. Potom ℓ_2-součet n takových metrik na $\mathbb{R}^n$ je roven eukleidovské metrice na $\mathbb{R}^n$. Podobně pokud budeme na prostorech $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ uvažovat eukleidovské metriky, pak jejich

ℓ_2-součet bude opět eukleidovská metrika na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Obdobná tvrzení platí i pro ℓ_1-metriku a ℓ_1-součet metrik, resp. ℓ_∞-metriku a ℓ_∞-součet metrik.

Pokud nebude řečeno výslovně jinak, budeme na množině $\mathbb{R}^n$ uvažovat vždy eukleidovskou metriku.

9.5.3. Věta. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $(P_1, \varrho_1), \dots, (P_n, \varrho_n)$ jsou metrické prostory, $P = \prod_{i=1}^n P_i$ a τ je ℓ_2-součet metrik $\varrho_1, \dots, \varrho_n$.

(a) Jestliže $G_i \subset P_i$ je otevřená v (P_i, ϱ_i) pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$, potom je $G = \prod_{i=1}^n G_i$ otevřená v (P, τ).
(b) Nechť $i \in \{1, \dots, n\}$. Potom je zobrazení $\pi_i : P \to P_i$ definované předpisem $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ spojité na (P, τ).

Důkaz. (a) Předpokládejme, že $x = (x_1, \dots, x_n) \in G$. Nechť $i \in \{1, \dots, n\}$. Díky otevřenosti G_i v (P_i, ϱ_i) nalezneme $r_i > 0$ takové, že $B_{\varrho_i}(x_i, r_i) \subset G_i$. Položme $r = \min\{r_i;\ i \in \{1, \dots, n\}\}$. Pro $x' \in B_\tau(x, r)$ platí $\varrho_i(x_i, x'_i) \le \tau(x, x') < r$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$. Máme tedy

$$B_\tau(x, r) \subset \prod_{i=1}^n B_{\varrho_i}(x_i, r) \subset \prod_{i=1}^n G_i = G.$$

Každý bod množiny G je tedy jejím vnitřním bodem, a proto je G otevřená v (P, τ).

(b) Nechť $H \subset P_i$ je otevřená množina. Potom platí

$$\pi_i^{-1}(H) = P_1 \times \dots \times P_{i-1} \times H \times P_{i+1} \times \dots \times P_n.$$

Množina $\pi_i^{-1}(H)$ je tedy podle již dokázaného tvrzení (a) otevřená v P, a proto je zobrazení π_i spojité podle Věty 9.4.6. ■

9.5.4. Věta. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $(Q, \sigma), (P_1, \varrho_1), \dots, (P_n, \varrho_n)$ jsou metrické prostory, $P = \prod_{i=1}^n P_i$ a τ je ℓ_2-součet metrik $\varrho_1, \dots, \varrho_n$. Zobrazení $f = (f_1, \dots, f_n) \colon Q \to P$ je spojité právě tehdy, když je každé zobrazení $f_i : Q \to P_i$ spojité, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Nechť $i \in \{1, \dots, n\}$. Zvolme $x \in Q$ a dále zvolme $\varepsilon > 0$. Díky spojitosti f v bodě x nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in Q$ splňující $\sigma(x, y) < \delta$ platí $\tau(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Pak ale platí také $\varrho_i(f_i(x), f_i(y)) \le \tau(f(x), f(y)) < \varepsilon$, a zobrazení f_i je tedy v bodě x spojité.

$\Leftarrow$ Nechť $x \in Q$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ a každé $y \in Q$ splňující $\sigma(x, y) < \delta$ platí $\varrho_i\big(f_i(x), f_i(y)\big) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Potom pro každé $y \in Q$ splňující $\sigma(x, y) < \delta$ pak platí

$$\tau\big(f(x), f(y)\big) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \big(\varrho_i(f_i(x), f_i(y))\big)^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^n \big(\tfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\big)^2} = \varepsilon.$$

Tím je dokázána spojitost zobrazení f v bodě x. ■

9.5.5. Poslední dvě věty platí i v případě, že místo ℓ_2-součtu metrik budeme uvažovat ℓ_1-součet nebo ℓ_∞-součet metrik $\varrho_1, \dots, \varrho_n$.

9.5.6. Poznámka. V tomto oddílu jsme se zabývali součinem *konečně* mnoha metrických prostorů. Je možné uvažovat i součin nekonečné posloupnosti metrických prostorů, ale pak je příslušná teorie složitější a v tomto textu se jí věnovat nebudeme.

9.6. Kompaktní prostory

Další čtyři oddíly budou věnovány metrickým prostorům, které mají některé speciální vlastnosti. Začneme s kompaktními metrickými prostory.

Definice a základní vlastnosti kompaktních prostorů.

9.6.1. Definice. Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je **kompaktní**, jestliže z každé posloupnosti prvků z P lze vybrat konvergentní podposloupnost. Řekneme, že množina $K \subset P$ je **kompaktní** v P, jestliže je metrický prostor (K, ϱ) kompaktní, tedy jestliže z každé posloupnosti prvků z K lze vybrat podposloupnost, která konverguje v P a jejíž limita je prvkem K.

9.6.2. Příklad. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$ je konečná. Dokažte, že A je kompaktní.

Řešení. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků z A. Potom existuje alespoň jeden prvek $x \in A$, který se v posloupnosti $\{x_n\}$ vyskytuje nekonečněkrát. Posloupnost $\{x_n\}$ tudíž obsahuje podposloupnost, jejíž každý člen je roven x. Tato podposloupnost tedy konverguje podle Věty 9.2.4(b) k prvku x, který náleží do množiny A. ♣

9.6.3. Příklad. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Dokažte, že interval $[a, b]$ je kompaktní v $\mathbb{R}$.

Řešení. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků $[a, b]$. Potom je $\{x_n\}$ omezená. Dle Bolzanovy–Weierstrassovy věty (Věta 2.4.7) existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $x \in \mathbb{R}$ takové, že $x_{n_k} \to x$. Protože $[a, b]$ je uzavřená množina, platí $x \in [a, b]$. Odtud plyne, že $[a, b]$ je kompaktní množina v $\mathbb{R}$. ♣

9.6.4. Příklad. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a posloupnost $\{x_n\}$ prvků P splňuje

$$\exists \delta > 0 \ \forall m, n \in \mathbb{N},\ n \neq m \colon \varrho(x_n, x_m) \geq \delta.$$

Dokažte, že potom P není kompaktní.

Řešení. Předpokládejme, že P je kompaktní. Potom existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $x \in P$ takové, že $x_{n_k} \to x$. Nalezneme k_0 takové, že pro každé $k \geq k_0$ platí $\varrho(x_{n_k}, x) < \frac{\delta}{2}$. Potom

$$\delta \leq \varrho(x_{k_0}, x_{k_0+1}) \leq \varrho(x_{k_0}, x) + \varrho(x, x_{k_0+1}) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

což je spor. Prostor P tedy není kompaktní. ♣

9.6.5. Příklad. Dokažte, že metrický prostor $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je kompaktní právě tehdy, když je P konečná.

Řešení. $\Rightarrow$ Předpokládejme, že množina P je nekonečná. Potom P obsahuje prostou posloupnost $\{x_n\}$. Pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, platí $\varrho(x_m, x_n) = 1$. Posloupnost $\{x_n\}$ tedy splňuje podmínku z Příkladu 9.6.4. Podle tohoto příkladu tedy prostor $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ není kompaktní.

$\Leftarrow$ Tato implikace plyne z Příkladu 9.6.2. ♣

9.6.6. Věta. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $K \subset P$ je kompaktní. Potom je množina K uzavřená.

Důkaz. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků množiny K taková, že $\lim x_n = y$, kde $y \in P$. Protože K je kompaktní, existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $x \in K$ takové, že $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Z věty o limitě vybrané posloupnosti plyne, že $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = y$. Z věty o jednoznačnosti limity pak plyne, že $x = y$. Tedy platí $y \in K$. To podle definice znamená, že množina K je uzavřená. ■

9.6.7. Věta (uzavřená podmnožina kompaktu)**.** Nechť (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor a $F \subset P$ je uzavřená. Potom je F kompaktní.

Důkaz. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků F. Potom je $\{x_n\}$ také posloupnost prvků kompaktního prostoru P, takže existují podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $x \in P$ takové, že $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Protože F je uzavřená, platí $x \in F$. Množina F je tedy kompaktní v P. ■

9.6.8. Věta (kompaktnost a omezenost)**.** Nechť (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor. Potom je P omezený.

Důkaz. Předpokládejme, že prostor P není omezený. Potom je P neprázdný. Zvolme $x \in P$. Protože $\operatorname{diam} P = \infty$, existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$ prvek $x_n \in P$ takový, že $\varrho(x, x_n) \geq n$. Protože P je kompaktní prostor, existují podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $y \in P$ takový, že $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = y$. Tedy existuje k_0 takové, že pro každé $k \geq k_0$ platí $\varrho(y, x_{n_k}) \leq 1$. Nechť $k \geq k_0$ je takové, že $n_k > \varrho(x, y) + 1$. Potom

$$n_k \leq \varrho(x, x_{n_k}) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, x_{n_k}) \leq \varrho(x, y) + 1 < n_k,$$

což je spor. Prostor P je tedy omezený. ■

Následující věta obsahuje důležitou charakterizaci kompaktních množin v prostoru $\mathbb{R}^n$.

9.6.9. Věta (kompaktnost v $\mathbb{R}^n$)**.** Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $K \subset \mathbb{R}^n$. Potom K je kompaktní právě tehdy, když je omezená a uzavřená.

Důkaz. $\Rightarrow$ Tato implikace plyne z Vět 9.6.6 a 9.6.8.

$\Leftarrow$ Použijeme matematickou indukci podle n. Nechť $n = 1$ a $\{x_k\}$ je posloupnost prvků K. Množina K je omezená v $\mathbb{R}$, a tedy existují $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, splňující

$K \subset [a, b]$. Podle Příkladu 9.6.3 je $[a, b]$ kompaktní. Protože K je podle předpokladu uzavřená v $\mathbb{R}$, je uzavřená i v $[a, b]$ (Věta 9.3.32), a je tedy podle Věty 9.6.7 kompaktní v $\mathbb{R}$.

Nyní předpokládejme, že tvrzení platí v každém prostoru $\mathbb{R}^d$, kde $d \leq n$. Nechť K je omezená a uzavřená množina v $\mathbb{R}^{n+1}$. Definujme zobrazení $\pi_1 : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ a $\pi_2 : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ předpisy

$$\pi_1\big([x_1, \dots, x_{n+1}]\big) = [x_1, \dots, x_n], \quad \pi_2\big([x_1, \dots, x_{n+1}]\big) = x_{n+1}.$$

Eukleidovské metriky v prostorech $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^{n+1}$ označíme pro účely tohoto důkazu po řadě jako ϱ_2^1, ϱ_2^n a ϱ_2^{n+1}. Pro každé $x, y \in K$ platí

$$\varrho_2^n\big(\pi_1(x), \pi_1(y)\big) \leq \varrho_2^{n+1}(x, y) \leq \operatorname{diam} K$$

a

$$\varrho_2^1\big(\pi_2(x), \pi_2(y)\big) \leq \varrho_2^{n+1}(x, y) \leq \operatorname{diam} K,$$

takže $\pi_1(K)$ je omezená v $\mathbb{R}^n$ a $\pi_2(K)$ je omezená v $\mathbb{R}$. Podle Věty 9.3.28(f) jsou omezené také množiny $\overline{\pi_1(K)}$ a $\overline{\pi_2(K)}$. Tyto množiny jsou navíc podle Věty 9.3.28(d) uzavřené. Podle indukčního předpokladu jsou pak obě množiny kompaktní.

Nechť $\{x^k\}$ je posloupnost prvků K. Označme $x^k = [a^k, b^k]$, kde $a^k \in \mathbb{R}^n$ a $b^k \in \mathbb{R}$. Díky kompaktnosti množiny $\overline{\pi_1(K)}$ existuje podposloupnost $\{a^{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{a^k\}$ a prvek $a \in \overline{\pi_1(K)}$ takové, že $\lim_{j\to\infty} a^{k_j} = a$. Protože $\overline{\pi_2(K)}$ je kompaktní, existuje podposloupnost $\{b^{k_{j_\ell}}\}_{\ell=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{b^{k_j}\}$ a prvek $b \in \overline{\pi_2(K)}$ takové, že $\lim_{\ell\to\infty} b^{k_{j_\ell}} = b$. Potom díky Příkladu 9.2.7 platí

$$\lim_{\ell\to\infty} x^{k_{j_\ell}} = \lim_{\ell\to\infty} [a^{k_{j_\ell}}, b^{k_{j_\ell}}] = [a, b].$$

Množina K je podle předpokladu uzavřená, a tedy $[a, b] \in K$. Odtud plyne, že K je kompaktní v $\mathbb{R}^{n+1}$. ■

9.6.10. Tvrzení Věty 9.6.9 neplatí pro obecné metrické prostory. Například libovolná nekonečná množina v diskrétním metrickém prostoru je omezená a uzavřená, avšak nikoli kompaktní. Následující příklad popisuje takovou situaci v případě důležitého prostoru spojitých funkcí $\mathcal{C}([0, 1])$ (vizte Příklad 9.1.23).

9.6.11. Příklad. Dokažte, že uzávěr otevřené koule $B(0, 1)$ v prostoru $\mathcal{C}([0, 1])$ je omezená a uzavřená množina, avšak není kompaktní v prostoru $(\mathcal{C}([0, 1]), \varrho_{\sup})$.

Řešení. Omezenost a uzavřenost. Je snadné ověřit, že $\operatorname{diam} B(0, 1) \leq 2$. Z Věty 9.3.28(f), pak plyne $\operatorname{diam} \overline{B(0, 1)} \leq 2$, a množina $\overline{B(0, 1)}$ je tedy omezená. Podle Věty 9.3.28(d) je také uzavřená.

Negace kompaktnosti. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme funkci $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ předpisem

$$f_n(x) = \begin{cases} 2^{n-1}x, & x \in \big[0, \frac{1}{2^n}\big], \\ \frac{1}{2}, & x \in \big(\frac{1}{2^n}, 1\big]. \end{cases}$$

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Funkce f_n je zřejmě spojitá na $[0,1]$. Počítejme

$$\begin{aligned}\varrho_{\sup}(f_n, 0) &= \sup\{|f_n(x) - 0|;\ x \in [0,1]\}\\ &= \sup\{|f_n(x)|;\ x \in [0,1]\} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Platí tedy $f_n \in B(0,1) \subset \overline{B(0,1)}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$. Potom $1 - 2^{m-n} \geq \frac{1}{2}$, a tedy

$$\varrho_{\sup}(f_n, f_m) \geq |f_n(\tfrac{1}{2^n}) - f_m(\tfrac{1}{2^n})| = \frac{1}{2} - 2^{m-1-n} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Z Příkladu 9.6.4 tedy plyne, že $\overline{B(0,1)}$ není kompaktní. ♣

9.6.12. Věta (spojitý obraz kompaktu)**.** Nechť (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor, (Q, σ) je metrický prostor a $f : P \to Q$ je spojité. Potom je $f(P)$ kompaktní v Q.

Důkaz. Nechť $\{y_n\}$ je posloupnost prvků $f(P)$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in P$ takové, že $f(x_n) = y_n$. Protože P je kompaktní, existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $x \in P$ takové, že $x_{n_k} \to x$ v P. Protože f je spojité, plyne z Heineovy věty (Věta 9.4.13), že $f(x_{n_k}) \to f(x)$ v Q. Označíme-li $y = f(x)$, pak $y \in f(P)$ a platí $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = y$. Odtud plyne, že $f(P)$ je kompaktní v Q. ■

9.6.13. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Množinu $\mathbb{C}^n$ opatříme metrikou σ, která je ℓ_2-součtem metrik $\varrho_1, \dots, \varrho_n$ na $\mathbb{C}$, které jsou všechny rovny metrice ϱ uvedené v Příkladu 9.1.11. Dokažte, že množina $K \subset \mathbb{C}^n$ je kompaktní právě tehdy, když je omezená a uzavřená.

Řešení. Definujme zobrazení $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C}^n$ předpisem

$$f(x) = [x_1 + ix_2, \dots, x_{2n-1} + ix_{2n}].$$

Zobrazení f je bijekce a navíc pro každé $x, y \in \mathbb{R}^{2n}$ platí $\rho_2(x,y) = \sigma(f(x), f(y))$, což plyne z následujícího výpočtu. Platí

$$\begin{aligned}\sigma(f(x), f(y)) &= \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left|(x_{2j-1} + ix_{2j}) - (y_{2j-1} + iy_{2j})\right|^2}\\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left((x_{2j-1} - y_{2j-1})^2 + (x_{2j} - y_{2j})^2\right)}\\ &= \sqrt{\sum_{s=1}^{2n} (x_s - y_s)^2} = \rho_2(x,y).\end{aligned}$$

Odtud snadno plyne, že zobrazení f je homeomorfismus. Navíc pro každou množinu $A \subset \mathbb{R}^{2n}$ platí, že A je omezená v $\mathbb{R}^{2n}$ právě tehdy, když $f(A) \subset \mathbb{C}^n$ je omezená. Odtud a z Věty 9.6.9 plyne dokazované tvrzení. ♣

Extrémy funkcí.

9.6.14. Definice. Nechť P je množina a $f: P \to \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f **nabývá svého maxima** na P, jestliže existuje $x \in P$ takové, že $f(x) \geq f(y)$ pro každé $y \in P$. Obdobně řekneme, že f **nabývá svého minima** na P, jestliže existuje $x \in P$ takové, že $f(x) \leq f(y)$ pro každé $y \in P$. Bod x nazýváme v prvním případě **bodem maxima** a ve druhém **bodem minima**.

Následující důležitá věta udává postačující podmínku pro existenci extrému.

9.6.15. Věta (extrémy spojité funkce na kompaktu)**.** Nechť (P, ϱ) je neprázdný kompaktní metrický prostor a $f: P \to \mathbb{R}$ je spojité. Potom f nabývá na P svého maxima i minima.

Důkaz. Označme $y = \sup f(P)$. Podle Věty 9.6.12 je množina $f(P)$ kompaktní, a tedy podle Vět 9.6.6 a 9.6.8 omezená a uzavřená. Z omezenosti $f(P)$ plyne, že $y \in \mathbb{R}$ a z uzavřenosti $f(P)$ plyne, že $y \in f(P)$. Tedy f nabývá na P svého maxima. Obdobně lze dokázat, že f nabývá na P svého minima. ■

9.6.16. Předpoklad spojitosti zobrazení i předpoklad kompaktnosti ve Větě 9.6.15 jsou důležité. Nespojité zobrazení nemusí nabývat extrémů ani na kompaktní množině. Příkladem je funkce f definovaná na $[0, 1]$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } x = 0, \text{ nebo } x = 1, \\ 2x - 1, & \text{pokud } x \in (0, 1). \end{cases}$$

Spojité zobrazení na nekompaktní množině rovněž nemusí nabývat svých extrémů. Příkladem je funkce f definovaná na $(0, 1)$ předpisem $f(x) = x$.

Stejnoměrná spojitost. Podobně jako jsme zobecnili pojem spojitosti a limity pro zobrazení mezi metrickými prostory, tak můžeme zobecnit i pojem stejnoměrně spojité funkce (vizte 8.2.16–8.2.19).

9.6.17. Definice. Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory. Řekneme, že zobrazení $f: P \to Q$ je **stejnoměrně spojité**, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x, y \in P: \big(\varrho(x, y) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon\big).$$

9.6.18. Příklad. Nechť (P, ϱ), (Q, σ) jsou metrické prostory a $f: P \to Q$ je stejnoměrně spojité. Dokažte, že potom je f spojité.

Řešení. Předpokládejme, že $x_0 \in P$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ z definice stejnoměrné spojitosti pro ε. Tedy jsou-li $x, y \in P$ body splňující $\varrho(x, y) < \delta$, je $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Je-li nyní $y \in P$ a $\varrho(x_0, y) < \delta$, pak máme $\sigma(f(y), f(x_0)) < \varepsilon$. Zobrazení f je proto spojité v bodě x_0. Odtud plyne spojitost f. ♣

9.6.19. Věta (spojitost a stejnoměrná spojitost na kompaktu)**.** Nechť (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor, (Q, σ) je metrický prostor a $f: P \to Q$ je spojité. Potom f je stejnoměrně spojité.

Důkaz. Předpokládejme pro spor, že f není stejnoměrně spojité. Potom existuje $\varepsilon > 0$ a posloupnosti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ prvků P splňující $\varrho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ a $\sigma\big(f(x_n), f(y_n)\big) \geq \varepsilon$ pro každé n. Z kompaktnosti P plyne, že existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a $x \in P$ takové, že $x_{n_k} \to x$. Potom také $y_{n_k} \to x$, neboť

$$0 \leq \varrho(x, y_{n_k}) \leq \varrho(x, x_{n_k}) + \varrho(x_{n_k}, y_{n_k})$$

a

$$\lim_{k\to\infty} \big(\varrho(x, x_{n_k}) + \varrho(x_{n_k}, y_{n_k})\big) = 0.$$

Ze spojitosti f a Heineovy věty tudíž plyne, že $f(x_{n_k}) \to f(x)$ a $f(y_{n_k}) \to f(x)$. Nalezneme k takové, že $\sigma(f(x_{n_k}), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$ a $\sigma(f(y_{n_k}), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Potom

$$\varepsilon \leq \sigma\big(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})\big) \leq \sigma\big(f(x_{n_k}), f(x)\big) + \sigma\big(f(y_{n_k}), f(x)\big) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

což je spor. Zobrazení f je tedy stejnoměrně spojité. ■

Homeomorfní zobrazení.

9.6.20. Věta. Nechť (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor, (Q, σ) je metrický prostor a $f : P \to Q$ je spojitá bijekce. Potom f je homeomorfismus.

Důkaz. Zobrazení f je bijekce, a tedy je zobrazení f^{-1} dobře definováno na Q. Předpokládejme, že $F \subset P$ je uzavřená množina. Podle Věty 9.6.7 je F kompaktní v P. Tudíž je podle Věty 9.6.12 také množina $f(F)$ kompaktní, a tedy dle Věty 9.6.6 uzavřená v Q. Podle Věty 9.4.6 je zobrazení f^{-1} spojité z Q do P. Zobrazení f je tedy homeomorfismus. ■

Totální omezenost. Následující pojem je užitečný sám o sobě. My jej později použijeme k charakterizaci kompaktnosti.

9.6.21. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $\varepsilon > 0$ a $H \subset P$. Řekneme, že H je ε-**síť** prostoru P, jestliže $P = \bigcup_{x\in H} B(x, \varepsilon)$. Řekneme, že prostor P je **totálně omezený**, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná ε-síť prostoru P. Řekneme, že množina $A \subset P$ je **totálně omezená** v P, jestliže je prostor (A, ϱ) totálně omezený.

9.6.22. Příklad. Dokažte, že každý konečný metrický prostor je totálně omezený.

Řešení. Platnost tvrzení bezprostředně vyplývá z definice totální omezenosti. ♣

9.6.23. Věta. Nechť (P, ϱ) je totálně omezený metrický prostor. Potom je P omezený.

Důkaz. Z definice totální omezenosti plyne, že existuje konečná 1-síť H prostoru P. Díky konečnosti H máme $\operatorname{diam} H < \infty$. Nechť $x, y \in P$. Potom existují $x', y' \in H$ takové, že $\varrho(x, x') < 1$ a $\varrho(y, y') < 1$. Platí tedy

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, x') + \varrho(x', y') + \varrho(y', y) < 1 + \operatorname{diam} H + 1 = \operatorname{diam} H + 2,$$

takže $\operatorname{diam} P \leq \operatorname{diam} H + 2$. Prostor P je tedy omezený. ■

9.6.24. Příklad. Nechť $(P, \varrho_{\mathrm{diskr}})$ je diskrétní metrický prostor. Dokažte, že P je totálně omezený právě tehdy, když je konečný.

Řešení. $\Rightarrow$ Z totální omezenosti P plyne, že existuje konečná 1-síť $H \subset P$. Z Příkladu 9.1.31 plyne, že pro každé $x \in P$ je $B(x, 1) = \{x\}$. Tedy platí

$$P = \bigcup_{x \in H} B(x, 1) = \bigcup_{x \in H} \{x\} = H.$$

Odtud plyne, že prostor P je konečný.

$\Leftarrow$ Tvrzení plyne z Příkladu 9.6.22. ♣

9.6.25. Z Příkladu 9.6.24 vyplývá, že opačná implikace k implikaci uvedené ve Větě 9.6.23 obecně neplatí, neboť každý nekonečný diskrétní metrický prostor je omezený (vizte Příklad 9.1.37), není však totálně omezený.

9.6.26. Věta. Nechť (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor. Potom je P totálně omezený.

Důkaz. Předpokládejme, že P není totálně omezený. Potom existuje $\delta > 0$ takové, že pro každou konečnou množinu $C \subset P$ je

$$P \setminus \bigcup_{x \in C} B(x, \delta) \neq \emptyset.$$

Zvolme $x_1 \in P$ libovolně. Dále budeme pokračovat matematickou indukcí. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že máme zvoleny prvky $x_1, \dots, x_n$. Potom je množina $P \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \delta)$ neprázdná. Nechť x_{n+1} je její libovolný prvek. Touto konstrukcí získáme posloupnost $\{x_n\}$ prvků množiny P splňující $\varrho(x_n, x_m) \geq \delta$ pro každá $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$. Podle Příkladu 9.6.4 pak prostor P není kompaktní. ∎

Charakterizace kompaktnosti. Nyní uvedeme dvě charakterizace kompaktnosti.

9.6.27. Definice. Nechť P je metrický prostor a $\mathcal{G}$ je systém jeho podmnožin. Řekneme, že $\mathcal{G}$ **pokrývá** P, neboli je **pokrytím** P, jestliže $P = \bigcup \mathcal{G}$. Jestliže pokrytí $\mathcal{G}$ prostoru P sestává z otevřených množin, říkáme, že jde o **otevřené pokrytí**. Jestliže $\mathcal{G}$ obsahuje konečně mnoho množin, říkáme, že jde o **konečné pokrytí**.

9.6.28. Věta. Metrický prostor (P, ϱ) je kompaktní právě tehdy, když pro každé otevřené pokrytí $\mathcal{G}$ prostoru P existuje konečné pokrytí $\mathcal{G}^* \subset \mathcal{G}$ prostoru P.

Důkaz. $\Rightarrow$ Předpokládejme, že $\mathcal{G}$ je otevřené pokrytí prostoru P. Nejprve dokážeme, že platí následující výrok:

$$\exists n \in \mathbb{N}\ \forall x \in P\ \exists G \in \mathcal{G} \colon B(x, \tfrac{1}{n}) \subset G. \tag{9.17}$$

Předpokládejme, že (9.17) neplatí, potom tedy

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x \in P\ \forall G \in \mathcal{G} \colon B(x, \tfrac{1}{n}) \not\subset G.$$

Odtud získáváme posloupnost $\{x_n\}$, kde pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $G \in \mathcal{G}$ platí $B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset G$. Díky kompaktnosti prostoru P můžeme nalézt podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $x \in P$ takové, že $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. K prvku x nalezneme množinu $G \in \mathcal{G}$ splňující $x \in G$. Protože G je otevřená, můžeme nalézt $\delta > 0$ takové, že $B(x, \delta) \subset G$. K tomuto δ nalezneme $k \in \mathbb{N}$ takové, že $n_k \geq \frac{2}{\delta}$ a $\varrho(x_{n_k}, x) < \frac{\delta}{2}$. Potom pro každé $y \in B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k})$ platí

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, x_{n_k}) + \varrho(x_{n_k}, y) < \frac{\delta}{2} + \frac{1}{n_k} \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

takže

$$B(x_{n_k}, \tfrac{1}{n_k}) \subset B(x, \delta) \subset G,$$

což je spor. Tím je dokázána platnost výroku (9.17).

Existuje tedy $n \in \mathbb{N}$ takové, že ke každému $x \in P$ lze nalézt množinu $G_x \in \mathcal{G}$ splňující $B(x, \frac{1}{n}) \subset G_x$. Prostor P je kompaktní, a tedy podle Věty 9.6.26 také totálně omezený. To znamená, že v něm existuje konečná $\frac{1}{n}$-síť H. Položme

$$\mathcal{G}^* = \{G_x;\ x \in H\}.$$

Potom platí $\mathcal{G}^* \subset \mathcal{G}$, $\mathcal{G}^*$ obsahuje konečně mnoho množin a

$$P \subset \bigcup_{x\in H} B(x, \tfrac{1}{n}) \subset \bigcup_{x\in H} G_x.$$

Systém $\mathcal{G}^*$ je tedy konečné otevřené pokrytí prostoru P splňující $\mathcal{G}^* \subset \mathcal{G}$.

$\Leftarrow$ Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků P. Označme $A = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Předpokládejme, že existuje $y \in P$ takové, že pro všechna $r > 0$ je množina $B(y, r) \cap A$ nekonečná. Pak existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ splňující $x_{n_1} \in B(y, 1)$. Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ máme zvolena přirozená čísla $n_1 < \cdots < n_{k-1}$. Protože $B(y, \frac{1}{k}) \cap A$ je nekonečná množina, existuje $n_k \in \mathbb{N}$, $n_k > n_{k-1}$, splňující $x_{n_k} \in B(y, \frac{1}{k})$. Tímto způsobem dostaneme indukcí rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ splňující $x_{n_k} \in B(y, \frac{1}{k})$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Potom je ale $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ podposloupnost posloupnosti $\{x_n\}$ splňující $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = y$.

Nyní předpokládejme, že pro každé $y \in P$ existuje $r_y > 0$ takové, že $B(y, r_y) \cap A$ je konečná množina. Pro každé $y \in P$ je množina $B(y, r_y)$ otevřená a navíc zřejmě platí $P = \bigcup_{y\in P} B(y, r_y)$. Systém $\{B(y, r_y)\}_{y\in P}$ tudíž představuje otevřené pokrytí prostoru P, a tedy podle předpokladu existuje konečná množina $F \subset P$ taková, že $P = \bigcup_{y\in F} B(y, r_y)$. Platí

$$A = A \cap P = A \cap \bigcup_{y\in F} B(y, r_y) = \bigcup_{y\in F} (A \cap B(y, r_y)),$$

takže A je konečná množina, neboť je rovna konečnému sjednocení konečných množin. Odtud vyplývá, že se alespoň jeden prvek množiny A vyskytuje v posloupnosti $\{x_n\}$ nekonečněkrát. Posloupnost $\{x_n\}$ tudíž obsahuje konstantní, a tedy konvergentní podposloupnost. V obou případech jsme nalezli konvergentní podposloupnost libovolně zvolené posloupnosti prvků P, prostor P je tedy kompaktní. ∎

9.6.29. Důsledek (Borel[1]). Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Nechť $\mathcal{J}$ je systém neprázdných otevřených intervalů splňující $[a, b] \subset \bigcup \mathcal{J}$. Pak existuje konečný systém $\mathcal{J}^* \subset \mathcal{J}$ takový, že $[a, b] \subset \bigcup \mathcal{J}^*$.

Důkaz. Tvrzení bezprostředně vyplývá z Příkladu 9.6.3 a Věty 9.6.28. ∎

9.6.30. Věta. Metrický prostor (P, ϱ) je kompaktní právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{F_n\}$ neprázdných uzavřených podmnožin P, která pro každé $n \in \mathbb{N}$ splňuje $F_{n+1} \subset F_n$, platí $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Nechť $\{F_n\}$ je posloupnost splňující příslušné předpoklady. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ zvolíme $x_n \in F_n$. Protože P je kompaktní, existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $x \in P$ takové, že $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Potom pro všechna $k \in \mathbb{N}$ splňující $n_k > n$ platí $x_{n_k} \in F_n$, neboť

$$x_{n_k} \in F_{n_k} \subset F_n.$$

Protože F_n je uzavřená, vyplývá odtud, že také $x \in F_n$. Protože n bylo zvoleno libovolně, platí $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Množina $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ je tedy neprázdná.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je posloupnost prvků P. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme

$$F_n = \overline{\{x_j;\ j \in \mathbb{N},\ j \geq n\}}.$$

Potom je $\{F_n\}$ posloupnost neprázdných uzavřených podmnožin P taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $F_{n+1} \subset F_n$. Podle předpokladu tedy existuje $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Protože $x \in F_1$, plyne z definice množiny F_1, že existuje index $n_1 \in \mathbb{N}$ takový, že $\varrho(x_{n_1}, x) < 1$. Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ máme zvoleny indexy $n_1 < \cdots < n_k$. Protože $x \in F_{n_k+1}$, plyne z definice této množiny, že existuje index $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ splňující $n_{k+1} > n_k$ a $\varrho(x_{n_{k+1}}, x) < \frac{1}{k+1}$. Takto získáme rostoucí posloupnost indexů $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ takovou, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\varrho(x_{n_k}, x) < \frac{1}{k}$. Tedy $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Z posloupnosti $\{x_n\}$ jsme tedy vybrali konvergentní podposloupnost. To znamená, že prostor P je kompaktní. ∎

9.7. Úplné prostory

Z Kapitoly 2 víme, že posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ je konvergentní právě tehdy, když splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall m, n \geq n_0 \colon |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

V tomto oddíle budeme studovat otázku, ve kterých metrických prostorech platí analogie tohoto tvrzení. Nejprve zformulujeme Bolzanovu-Cauchyovu podmínku pro posloupnost bodů v metrickém prostoru.

[1] Félix Édouard Justin Émile Borel (1871–1956)

9.7.1. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $\{x_n\}$ je posloupnost prvků P. Řekneme, že $\{x_n\}$ splňuje **Bolzanovu-Cauchyovu podmínku** (případně, že je **cauchyovská**), jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall m, n \geq n_0 \colon \varrho(x_m, x_n) < \varepsilon. \tag{9.18}$$

9.7.2. Výrok (9.18) je ekvivalentní výroku

$$\exists K > 0 \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall m, n \geq n_0 \colon \varrho(x_m, x_n) < K\varepsilon.$$

Důkaz lze provést obdobně jako v případě limity posloupnosti reálných čísel (vizte Lemma 2.2.18).

9.7.3. Věta. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $\{x_n\}$ je konvergentní posloupnost prvků P. Potom je $\{x_n\}$ cauchyovská.

Důkaz. Nechť $x \in P$ splňuje $\lim x_n = x$. Nechť $\varepsilon > 0$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $\varrho(x_n, x) < \varepsilon$. Pak pro každé $m, n \geq n_0$ platí

$$\varrho(x_n, x_m) \leq \varrho(x_n, x) + \varrho(x_m, x) \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

a tedy posloupnost $\{x_n\}$ podle 9.7.2 splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. ■

9.7.4. Příklad. Dokažte, že posloupnost $\{x_n\}$ prvků metrického prostoru $(P, \varrho_{\mathrm{diskr}})$ je cauchyovská právě tehdy, když existují $x \in P$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $x_n = x$.

Řešení. $\Rightarrow$ Položme $\varepsilon = 1$. Z Bolzanovy-Cauchyovy podmínky plyne, že existuje n_0 takové, že pro každé $m, n \geq n_0$ platí $\varrho(x_m, x_n) < 1$. Z definice diskrétní metriky vyplývá, že pro každá taková m, n platí $x_n = x_m$. Odtud již snadno plyne dokazovaná implikace.

$\Leftarrow$ Z Věty 9.2.4(b) víme, že posloupnost $\{x_n\}$ je v $(P, \varrho_{\mathrm{diskr}})$ konvergentní. Podle Věty 9.7.3 je tedy v tomto prostoru cauchyovská. ♣

9.7.5. V důkazu Věty 9.7.3 jsme viděli, že důkaz nutnosti Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro konvergenci posloupnosti reálných čísel, jak jej známe z Věty 2.4.26, je možné snadno zobecnit pro obecný metrický prostor. V důkazu opačné implikace Věty 2.4.26, tedy v důkazu toho, že Bolzanova-Cauchyova podmínka pro posloupnost reálných čísel implikuje její konvergenci, jsme však podstatným způsobem využili pojmů limes superior a limes inferior, které závisí na uspořádání reálných čísel, což je vlastnost, kterou v obecném metrickém prostoru nemáme k dispozici. Není tedy překvapivé, že výše zmíněná implikace pro obecný metrický prostor neplatí. Vzhledem k její důležitosti však stojí za to vymezit třídu prostorů, ve kterých zůstává v platnosti.

9.7.6. Definice. Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je **úplný**, jestliže každá cauchyovská posloupnost prvků P je konvergentní.

Příklady úplných a neúplných prostorů.

9.7.7. Příklad. Dokažte, že metrický prostor $\mathbb{R}$ je úplný.

Řešení. Tvrzení plyne z Věty 2.4.26. ♣

9.7.8. Příklad. Dokažte, že metrický prostor $(0,1)$ není úplný.

Řešení. Uvažujme posloupnost $\{x_n\} = \{\frac{1}{n+1}\}$ prvků intervalu $(0,1)$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Potom pro každé $m, n \geq n_0$ platí

$$|x_m - x_n| = \left|\frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1}\right| < \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Odtud plyne, že posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská v $(0,1)$. Dokážeme, že $\{x_n\}$ není konvergentní v $(0,1)$. Předpokládejme, že $x \in (0,1)$. Potom existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n_1} < x$. Označme $\varepsilon = x - \frac{1}{n_1}$. Pak $\varepsilon > 0$ a pro každé $n \geq n_1$ platí

$$|x_n - x| = x - \frac{1}{n+1} \geq x - \frac{1}{n_1} = \varepsilon,$$

a tedy $\lim x_n \neq x$. Protože $x \in (0,1)$ bylo zvoleno libovolně, posloupnost $\{x_n\}$ nemá v prostoru $(0,1)$ limitu, a tedy v něm není konvergentní. Prostor $(0,1)$ tedy není úplný. ♣

9.7.9. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že metrický prostor $\mathbb{R}^n$ je úplný.

Řešení. Nechť $\{x^k\}$ je cauchyovská posloupnost prvků prostoru $\mathbb{R}^n$. Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ a $k, l \in \mathbb{N}$ platí

$$|x_i^k - x_i^l| \leq \varrho_2(x^k, x^l).$$

Z této nerovnosti plyne, že $\{x_i^k\}_{k=1}^{\infty}$ je cauchyovská posloupnost reálných čísel pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$. Podle Příkladu 9.7.7 jsou tedy tyto posloupnosti konvergentní. Označme $\lim_{k\to\infty} x_i^k = x_i^*$, kde $i \in \{1, \dots, n\}$. Prvek $x^* = [x_1^*, \dots, x_n^*]$ je pak limitou posloupnosti $\{x^k\}$ podle Příkladu 9.2.7. ♣

9.7.10. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Množinu $\mathbb{C}^n$ opatříme metrikou σ, která je ℓ_2-součtem metrik $\varrho_1, \dots, \varrho_n$ na $\mathbb{C}$, které jsou všechny rovny metrice ϱ uvedené v Příkladu 9.1.11. Dokažte, že $(\mathbb{C}^n, \varrho)$ je úplný metrický prostor.

Řešení. Dvojice $(\mathbb{C}^n, \varrho)$ je metrický prostor podle 9.5.1. Předpokládejme, že $\{z^j\}$ je cauchyovská posloupnost v $\mathbb{C}^n$. Potom pro každé $j, m \in \mathbb{N}$ a $l \in \{1, \dots, n\}$ platí podle definice ℓ_2-součtu metrik a podle definice metriky ϱ na $\mathbb{C}$ následující nerovnosti

$$\left|\operatorname{Re} z_l^j - \operatorname{Re} z_l^m\right| \leq \sigma(z^j, z^m) \qquad \text{a} \qquad \left|\operatorname{Im} z_l^j - \operatorname{Im} z_l^m\right| \leq \sigma(z^j, z^m)$$

Odtud plyne, že posloupnosti reálných čísel $\left\{\operatorname{Re} z_l^j\right\}_{j=1}^{\infty}$ a $\left\{\operatorname{Im} z_l^j\right\}_{j=1}^{\infty}$ jsou cauchyovské pro každé $l \in \{1, \dots, n\}$. Podle Příkladu 9.7.7 jsou uvedené posloupnosti konvergentní. Existují tedy komplexní čísla $w^1, \dots, w^n$ taková, že

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_l^n = \operatorname{Re} w_l \qquad \text{a} \qquad \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_l^n = \operatorname{Im} w_l$$

pro každé $l \in \{1, \dots, n\}$. Z těchto limit pak plyne konvergence posloupnosti $\{z^j\}$ k prvku $w = (w_1, \dots, w_n)$. ♣

9.7.11. Příklad. Dokažte, že diskrétní metrický prostor $(P, \varrho_{\mathrm{diskr}})$ je úplný.

Řešení. Tvrzení plyne z Příkladů 9.2.6 a 9.7.4. ♣

Úplnost metrického prostoru zásadním způsobem závisí na zvolené metrice. Tento fakt ilustrují následující dva příklady.

9.7.12. Příklad. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dokažte, že metrický prostor $(\mathcal{C}([a,b]), \varrho_{\sup})$ je úplný.

Řešení. Nechť $\{f_n\}$ je cauchyovská posloupnost v prostoru $(\mathcal{C}([a,b]), \varrho_{\sup})$. Zvolme $x \in [a,b]$. Potom je posloupnost reálných čísel $\{f_n(x)\}$ cauchyovská v $\mathbb{R}$, neboť pro každé $n, m \in \mathbb{N}$ platí $|f_n(x) - f_m(x)| \le \varrho_{\sup}(f_n, f_m)$. Podle Věty 2.4.26 má posloupnost $\{f_n(x)\}$ v $\mathbb{R}$ vlastní limitu, kterou označíme symbolem $f(x)$. Tím je definována funkce $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

Pozorování. Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \ge n_0$ a $x \in [a,b]$ platí $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme díky cauchyovskosti posloupnosti $\{f_n\}$ přirozené číslo n_0 takové, že pro každé $n, m \ge n_0$ a $x \in [a,b]$ platí
$$|f_n(x) - f_m(x)| \le \varrho_{\sup}(f_n, f_m) < \varepsilon.$$
Pak pro každé $n \ge n_0$ a $x \in [a,b]$ platí
$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \le \varepsilon.$$

Funkce f je spojitá na $[a,b]$. Předpokládejme, že $y \in [a,b]$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme podle předchozího pozorování $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $x \in [a,b]$ platí $|f_{n_0}(x) - f(x)| \le \varepsilon$. Funkce f_{n_0} je spojitá na $[a,b]$, a tedy existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $z \in [a,b]$, $|z - y| < \delta$, platí $|f_{n_0}(z) - f_{n_0}(y)| < \varepsilon$. Potom pro každé $z \in [a,b]$, $|z - y| < \delta$, platí
$$|f(z) - f(y)| \le |f(z) - f_{n_0}(z)| + |f_{n_0}(z) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)| < 3\varepsilon.$$
Funkce f je tedy spojitá v bodě y. Protože bod y byl zvolen libovolně, je funkce f spojitá na $[a,b]$.

Platí $\lim \varrho_{\sup}(f_n, f) = 0$. Tento vztah plyne okamžitě z uvedeného pozorování. To znamená, že posloupnost $\{f_n\}$ je v prostoru $(\mathcal{C}([a,b]), \varrho_{\sup})$ konvergentní, čímž jsme ověřili definici úplnosti pro prostor $(\mathcal{C}([a,b]), \varrho_{\sup})$. ♣

9.7.13. Příklad. Dokažte, že metrický prostor $(\mathcal{C}([-1,1]), \varrho_{\mathrm{int}})$ není úplný.

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme funkci f_n na $[-1,1]$ předpisem
$$f_n(x) = \operatorname{sign}(x)\, \sqrt[n]{|x|}.$$

Potom pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ splňující $m < n$ platí

$$\begin{aligned}\varrho_{\text{int}}(f_n, f_m) &= \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)| \, \mathrm{d}x = 2\int_0^1 \big(f_n(x) - f_m(x)\big) \, \mathrm{d}x \\ &= 2\Big(\frac{n}{n+1} - \frac{m}{m+1}\Big) = \frac{2(n-m)}{(n+1)(m+1)}.\end{aligned}$$

Nechť $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 + 1 > \frac{2}{\varepsilon}$. Potom pro každé $m, n \geq n_0$ platí

$$\varrho_{\text{int}}(f_n, f_m) = \frac{2(n-m)}{(n+1)(m+1)} \leq 2\frac{n}{n+1}\frac{1}{m+1} \leq \frac{2}{n_0+1} < \varepsilon,$$

takže posloupnost $\{f_n\}$ je cauchyovská v prostoru $\big(\mathcal{C}([-1,1]), \varrho_{\text{int}}\big)$. Dokážeme však, že tato posloupnost není v prostoru $\big(\mathcal{C}([-1,1]), \varrho_{\text{int}}\big)$ konvergentní.

Nechť f je libovolná spojitá funkce na $[-1,1]$ a označme $a = f(0)$. Předpokládejme nejprve, že $a \leq 0$. Potom ze spojitosti funkce f v bodě 0 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in [0, \delta]$ platí $f(y) < \frac{1}{2}$. K tomuto δ existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $2^{-m} < \delta$. Označme

$$\gamma = \int_{2^{-m}}^{\delta} \big(f_m(x) - f(x)\big) \, \mathrm{d}x.$$

Potom $\gamma > 0$, neboť pro každé $x \in [2^{-m}, \delta]$ platí $f_m(x) > \frac{1}{2}$ a $f(x) \leq \frac{1}{2}$, takže $f_m(x) > f(x)$. Navíc pro každé $n \geq m$ platí

$$\begin{aligned}\varrho(f_n, f) &= \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f(x)| \, \mathrm{d}x \geq \int_{2^{-m}}^{\delta} |f_n(x) - f(x)| \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{2^{-m}}^{\delta} \big(f_n(x) - f(x)\big) \, \mathrm{d}x \geq \int_{2^{-m}}^{\delta} \big(f_m(x) - f(x)\big) \, \mathrm{d}x \\ &= \gamma,\end{aligned}$$

takže funkce f není limitou posloupnosti $\{f_n\}$ v prostoru $\big(\mathcal{C}([-1,1]), \varrho_{\text{int}}\big)$.

Nyní předpokládejme, že $a \geq 0$. Potom ze spojitosti funkce f v bodě 0 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in [-\delta, 0]$ platí $f(y) > -\frac{1}{2}$. K tomuto δ existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $2^{-m} < \delta$. Označme

$$\gamma = \int_{-\delta}^{-2^{-m}} \big(f(x) - f_m(x)\big) \, \mathrm{d}x.$$

Potom $\gamma > 0$ a pro každé $n \geq m$ platí

$$\begin{aligned}\varrho(f_n, f) &= \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f(x)| \, \mathrm{d}x \geq \int_{-\delta}^{-2^{-m}} |f_n(x) - f(x)| \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{-\delta}^{-2^{-m}} \big(f(x) - f_n(x)\big) \, \mathrm{d}x \geq \int_{-\delta}^{-2^{-m}} \big(f(x) - f_m(x)\big) \, \mathrm{d}x \\ &= \gamma,\end{aligned}$$

a tedy funkce f opět není limitou posloupnosti $\{f_n\}$ v prostoru $\big(\mathcal{C}([-1,1]), \varrho_{\text{int}}\big)$. Posloupnost $\{f_n\}$ tedy není v prostoru $\big(\mathcal{C}([-1,1]), \varrho_{\text{int}}\big)$ konvergentní. Z toho plyne, že tento metrický prostor není úplný. ♣

Banachovy prostory.

9.7.14. Definice. **Banachovým prostorem** nazýváme úplný normovaný lineární prostor.

S teorií Banachových prostorů, které tvoří velmi důležitou podtřídu úplných metrických prostorů, se lze seznámit v [**10**]. Zde a v příkladové části uvedeme jen několik základních příkladů. Podle Příkladů 9.7.9 a 9.7.10 víme, že prostory $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$, opatřené standardními operacemi sčítání vektorů a násobení skaláry, jsou Banachovy prostory. Následující příklad zobecňuje tyto výsledky.

9.7.15. Příklad. Nechť X je normovaný lineární prostor, který má konečnou dimenzi. Potom je X Banachův.

Řešení. Předpokládejme nejprve, že X je komplexní normovaný lineární prostor. Normu odpovídající metrice σ na $\mathbb{C}^n$ z Příkladu 9.7.10 označíme symbolem $\|\cdot\|_{\mathbb{C}^n}$. Pro $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^n$ tedy platí $\|\alpha - \beta\|_{\mathbb{C}^n} = \sigma(\alpha, \beta)$. Normu na X budeme značit $\|\cdot\|$.

Nechť prvky $x_1, \dots, x_n$ tvoří bázi B prostoru X. Definujme zobrazení $\Phi\colon \mathbb{C}^n \to X$ předpisem

$$\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot x_j .$$

Zobrazení Φ je lineární a z vlastností báze B plyne, že zobrazení Φ je prosté a na. Inverzní zobrazení $\Phi^{-1}\colon X \to \mathbb{C}^n$ je tedy dobře definováno. Navíc lze snadno ověřit, že Φ^{-1} je lineární. Pro $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^n$ platí

$$\begin{aligned} \|\Phi(\alpha) - \Phi(\beta)\| &= \Big\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot x_j - \sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot x_j \Big\| \\ &\le \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j - \beta_j| \cdot \|x_j\| \le \Big(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\| \Big) \cdot \|\alpha - \beta\|_{\mathbb{C}^n} . \end{aligned}$$

Odtud plyne, že zobrazení Φ je spojité.

Ukážeme, že existuje konstanta $C > 0$ taková, že pro každé $\alpha \in \mathbb{C}^n$ platí

$$\|\Phi(\alpha)\| \ge C \|\alpha\|_{\mathbb{C}^n} . \tag{9.19}$$

Položme $C = \inf\{\|\Phi(\alpha)\|;\ \alpha \in S\}$, kde

$$S = \{\alpha \in \mathbb{C}^n;\ \|\alpha\|_{\mathbb{C}^n} = 1\}.$$

Množina S je zřejmě omezená a je také uzavřená podle Věty 9.4.6, neboť S je vzorem množiny $\{1\}$ při zobrazení $\alpha \mapsto \|\alpha\|_{\mathbb{C}^n}$, které je spojité podle Příkladu 9.4.4. Množina S je tedy kompaktní podle Příkladu 9.6.13. Ze spojitosti Φ, Příkladu 9.4.4 a Věty 9.4.17 plyne spojitost zobrazení $\alpha \mapsto \|\Phi(\alpha)\|$. Podle Věty 9.6.15 existuje

$\beta \in S$ takové, že $\|\Phi(\beta)\| = C$. Vztah (9.19) zřejmě platí pro $\alpha = 0 \in \mathbb{C}^n$. Předpokládejme, že $\alpha \in \mathbb{C}^n, \alpha \neq 0$. Potom máme $\alpha/\|\alpha\|_{\mathbb{C}^n} \in S$ a

$$\begin{aligned}
\|\Phi(\alpha)\| &= \Big\|\Phi\Big(\|\alpha\|_{\mathbb{C}^n} \cdot \frac{\alpha}{\|\alpha\|_{\mathbb{C}^n}}\Big)\Big\| \\
&= \Big\|\|\alpha\|_{\mathbb{C}^n} \cdot \Phi\Big(\frac{\alpha}{\|\alpha\|_{\mathbb{C}^n}}\Big)\Big\| && \text{(linearita } \Phi) \\
&= \|\alpha\|_{\mathbb{C}^n} \cdot \Big\|\Phi\Big(\frac{\alpha}{\|\alpha\|_{\mathbb{C}^n}}\Big)\Big\| && \text{(vlastnost normy)} \\
&\geq \|\alpha\|_{\mathbb{C}^n} \cdot C. && \text{(definice množiny } S \text{ a konstanty } C)
\end{aligned}$$

Tím je nerovnost (9.19) ověřena.

Nechť $\{x_k\}$ je cauchyovská posloupnost prvků X. Označme $\alpha^k = \Phi^{-1}(x_k), k \in \mathbb{N}$. Díky nerovnosti (9.19) máme pro každé $k, l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\|\alpha^k - \alpha^l\| &= \|\Phi^{-1}(x_k) - \Phi^{-1}(x_l)\| && \text{(definice prvků } \alpha^k, \alpha^l) \\
&= \|\Phi^{-1}(x_k - x_l)\| && \text{(linearita } \Phi^{-1}) \\
&\leq \frac{1}{C}\|\Phi(\Phi^{-1}(x_k - x_l))\| && \text{(nerovnost (9.19))} \\
&= \frac{1}{C}\|x_k - x_l\|.
\end{aligned}$$

Odtud plyne, že také posloupnost $\{\alpha^k\}$ je cauchyovská. Prostor $\mathbb{C}^n$ je úplný (Příklad 9.7.10), existuje tedy $\alpha \in \mathbb{C}^n$ takové, že $\lim \alpha^k = \alpha$. Díky spojitosti zobrazení Φ máme

$$\lim x^k = \lim \Phi(\alpha^k) = \Phi(\alpha).$$

Posloupnost $\{x^k\}$ je tedy konvergentní, čímž je úplnost prostoru X dokázána. ♣

9.7.16. Příklad. Dokažte, že normovaný lineární prostor $\big(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_{\sup}\big)$ je Banachův.

Řešení. V Příkladu 9.1.23 jsme ukázali, že $\big(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_{\sup}\big)$ je normovaný lineární prostor. Ptáme-li se, zda je tento prostor také úplný, ptáme se po úplnosti metrického prostoru $\big(\mathcal{C}([0,1]), \varrho_{\sup}\big)$. Prostor $\big(\mathcal{C}([0,1]), \varrho_{\sup}\big)$ je však úplný podle Příkladu 9.7.12. ♣

9.7.17. Příklad. Dokažte, že prostor ℓ_∞ je Banachův.

Řešení. Pro každé $x \in \ell_\infty$ budeme používat označení $x = \{x_m\}$, neboli x_m je m-tý člen posloupnosti x. Nechť $\{x^n\}$ je posloupnost prvků prostoru ℓ_∞, která je cauchyovská. Pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí, že posloupnost $\{x^n_m\}_{n=1}^\infty$ je cauchyovská posloupnost reálných čísel, neboť pro každé $i, j \in \mathbb{N}$ platí $|x^i_m - x^j_m| \leq \|x^i - x^j\|_\infty$. Prostor $\mathbb{R}$ je úplný, a proto je posloupnost $\{x^n_m\}_{n=1}^\infty$ konvergentní pro každé $m \in \mathbb{N}$. Označme příslušnou limitu jako x^*_m.

Pro $\varepsilon = 1$ nalezneme díky cauchyovskosti $\{x^n\}$ číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $i, j \geq n_0$ platí $\|x^i - x^j\| < 1$. Máme pak

$$|x^n_m| \leq |x^{n_0}_m| + |x^{n_0}_m - x^n_m| \leq \|x^{n_0}\| + \|x^{n_0} - x^n\| < \|x^{n_0}\| + 1$$

pro každé $n \geq n_0$ a pro každé $m \in \mathbb{N}$. Odtud plyne $|x_m^*| \leq \|x^{n_0}\| + 1$, což dokazuje, že $x^* = \{x_m^*\} \in \ell_\infty$.

Zbývá ukázat, že $\{x^n\}$ konverguje k x^*. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme díky cauchyovskosti $\{x^n\}$ číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $i, j \geq n_0$ platí $\|x^i - x^j\| < \varepsilon$. Zvolme $m \in \mathbb{N}$. Nalezneme $j \geq n_0$ takové, že $|x_m^* - x_m^j| < \varepsilon$. Pak pro každé $n \geq n_0$ platí

$$|x_m^* - x_m^n| \leq |x_m^* - x_m^j| + |x_m^j - x_m^n| < \varepsilon + \|x^j - x^n\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Odtud plyne, že pro každé $n \geq n_0$ platí $\|x^* - x^n\| \leq 2\varepsilon$. Posloupnost $\{x^n\}$ je tedy konvergentní v prostoru ℓ_∞. ♣

Základní vlastnosti úplných prostorů.

9.7.18. Věta (úplnost a uzavřenost)**.** Nechť (P, ϱ) je úplný metrický prostor a $M \subset P$. Potom je (M, ϱ) úplný právě tehdy, když M je uzavřená v (P, ϱ).

Důkaz. $\Rightarrow$ Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků M, která v P konverguje k prvku $x \in P$. Posloupnost $\{x_n\}$ je tedy cauchyovská v P. Tím pádem je také cauchyovská v M. Metrický prostor M je úplný, takže existuje bod $y \in M$, ke kterému konverguje $\{x_n\}$ v M. Potom $\{x_n\}$ konverguje k y i v P. Z jednoznačnosti limity vyplývá $x = y$, a tedy $x \in M$. Množina M je tedy uzavřená.

$\Leftarrow$ Nechť $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost prvků M. Potom je $\{x_n\}$ cauchyovská také v P, což je úplný metrický prostor, a tedy existuje $x \in P$ takové, že $\lim x_n = x$. Protože M je uzavřená, platí $x \in M$. Tedy $\lim x_n = x$ také v M, takže (M, ϱ) je úplný. ■

9.7.19. Věta (Cantor)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Potom P je úplný právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{F_n\}$ neprázdných uzavřených podmnožin P splňující $F_{n+1} \subset F_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} F_n = 0$ je $\bigcap_{n=1}^\infty F_n$ jednobodová množina.

Důkaz. $\Rightarrow$ Nechť $\{F_n\}$ je posloupnost množin splňující předpoklady věty. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ zvolíme libovolně prvek $x_n \in F_n$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme n_0 takové, že $\operatorname{diam} F_{n_0} < \varepsilon$. Potom pro každé $m, n \geq n_0$ platí $x_m, x_n \in F_{n_0}$, a tedy $\varrho(x_m, x_n) < \varepsilon$. Posloupnost $\{x_n\}$ je tedy cauchyovská. Z úplnosti P plyne, že existuje $x \in P$ takové, že $\lim x_n = x$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\{x_j\}_{j=n}^\infty$ posloupnost prvků F_n, která podle věty o limitě vybrané posloupnosti konverguje k x. Protože F_n je uzavřená, platí $x \in F_n$. Protože n bylo zvoleno libovolně, dostáváme $x \in \bigcap_{n=1}^\infty F_n$. Pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí $\operatorname{diam}\bigl(\bigcap_{n=1}^\infty F_n\bigr) \leq \operatorname{diam} F_m$, a tedy $\operatorname{diam}\bigl(\bigcap_{n=1}^\infty F_n\bigr) = 0$. Odtud plyne, že $\bigcap_{n=1}^\infty F_n = \{x\}$.

$\Leftarrow$ Nechť $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost v P. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme $F_n = \overline{\{x_j;\ j \geq n\}}$. Potom je $\{F_n\}$ posloupnost neprázdných uzavřených množin v P, která splňuje $F_{n+1} \subset F_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n, m \geq n_0$ platí $\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Odtud plyne, že $\operatorname{diam} F_n \leq \operatorname{diam} F_{n_0} \leq \varepsilon$ pro každé n, a tedy $\lim \operatorname{diam} F_n = 0$. Podle předpokladu platí $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$ pro nějaké $x \in P$. Potom pro každé $n \geq n_0$ platí $\varrho(x, x_n) \leq \operatorname{diam} F_{n_0} < \varepsilon$. Odtud plyne, že $\lim x_n = x$. ■

9.7.20. Bez předpokladu $\lim \operatorname{diam} F_n = 0$ Cantorova věta neplatí. Příkladem je posloupnost podmnožin $\{F_n\}$ v $\mathbb{R}$ definovaná předpisem $F_n = [n, \infty)$, které jsou uzavřené (vizte Příklad 9.3.8 a Větu 9.3.13) a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $F_{n+1} \subset F_n$. Nesplňují však požadavek $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} F_n = 0$ a zřejmě platí $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$.

9.7.21. Věta. Metrický prostor je kompaktní právě tehdy, když je totálně omezený a úplný.

Důkaz. Postupně dokážeme následující tři implikace.

Kompaktnost $\Rightarrow$ úplnost. Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost v P. Potom z kompaktnosti P plyne, že existují podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a bod $x \in P$ takové, že $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Potom z Bolzanovy-Cauchyovy podmínky plyne, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $m, n \geq n_0$ platí $\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Díky konvergenci posloupnosti $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ dále existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \geq k_0$ platí $\varrho(x_{n_k}, x) < \varepsilon$. Protože $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, existuje $k \geq k_0$ takové, že $n_k \geq n_0$. Potom pro každé $n \geq n_0$ platí

$$\varrho(x_n, x) \leq \varrho(x_n, x_{n_k}) + \varrho(x_{n_k}, x) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Odtud plyne, že $\lim x_n = x$, takže $\{x_n\}$ je konvergentní. Prostor P je tedy úplný.

Kompaktnost $\Rightarrow$ totální omezenost. Tato implikace vyplývá z Věty 9.6.26.

Úplnost a totální omezenost $\Rightarrow$ kompaktnost. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků P. Díky totální omezenosti P nalezneme pro každé $k \in \mathbb{N}$ konečnou $\frac{1}{k}$-síť D_k. Dále zkonstruujeme posloupnost $\{d_k\}$ takovou, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ jsou splněny následující dvě podmínky:

- $d_k \in D_k$,
- množina $A_k \subset \mathbb{N}$ definovaná předpisem $A_k = \left\{j \in \mathbb{N};\ x_j \in \bigcap_{l=1}^{k} B(d_l, \frac{1}{l})\right\}$ je nekonečná.

Platí $P = \bigcup_{d\in D_1} B(d, 1)$, a tedy

$$\mathbb{N} = \bigcup_{d\in D_1} \{j \in \mathbb{N};\ x_j \in B(d, 1)\}.$$

Vyjádřili jsme množinu přirozených čísel jako sjednocení konečně mnoha množin. Alespoň jedna z nich tedy musí být nekonečná. To znamená, že existuje $d_1 \in D_1$ takové, že příslušná množina A_1 je nekonečná.

Nyní předpokládejme, že máme již zvoleny body $d_1, \dots, d_k$. Potom platí $P = \bigcup_{d\in D_{k+1}} B(d, \frac{1}{k+1})$, a tedy

$$A_k = \bigcup_{d\in D_{k+1}} \left\{j \in A_k;\ x_j \in B(d, \tfrac{1}{k+1})\right\}.$$

Opět jsme vyjádřili nekonečnou množinu A_k jako sjednocení konečně mnoha množin, a tedy alespoň jedna z nich musí být nekonečná. Tedy existuje $d_{k+1} \in D_{k+1}$ takové, že příslušná množina A_{k+1} je nekonečná.

Nyní nalezneme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ takovou, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $n_k \in A_k$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{2}{k_0} < \varepsilon$. Potom pro každé $k, k' \geq k_0$ platí

$$\varrho(x_{n_k}, x_{n_{k'}}) \leq \varrho(x_{n_k}, d_{k_0}) + \varrho(d_{k_0}, x_{n_{k'}}) < \frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_0} = \frac{2}{k_0} < \varepsilon.$$

Posloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je tedy cauchyovská. Protože P je úplný, je tato posloupnost konvergentní. Z libovolně zvolené posloupnosti prvků z P jsme tedy vybrali konvergentní podposloupnost. Jinými slovy, P je kompaktní. ■

9.7.22. Věta. Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, Q je úplný, $f: P \to Q$, $A \subset P$ a $a \in A'$. Pak limita $\lim_{x \to a, x \in A} f(x)$ existuje právě tehdy, když je splněna následující (Bolzanova-Cauchyova) podmínka:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x, y \in (B(a, \delta) \setminus \{a\}) \cap A : \sigma\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon.$$

Důkaz. $\Rightarrow$ Označme $z = \lim_{x \to a, x \in A} f(x)$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in (B(a, \delta) \setminus \{a\}) \cap A : \sigma(f(x), z) < \varepsilon.$$

Pro libovolná $x, y \in (B(a, \delta) \setminus \{a\}) \cap A$ potom platí

$$\sigma(f(x), f(y)) \leq \sigma(f(x), z) + \sigma(z, f(y)) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

$\Leftarrow$ Protože $a \in A'$, existuje posloupnost $\{x_n\}$ prvků množiny $A \setminus \{a\}$ taková, že $x_n \to a$. Snadno ověříme, že posloupnost $\{f(x_n)\}$ je cauchyovská: Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ díky Bolzanově-Cauchyově podmínce. Dále nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $x_n \in B(a, \delta)$ pro každé $n \geq n_0$. Tedy $\sigma(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$ kdykoli $m, n \geq n_0$. Posloupnost $\{f(x_n\}$ je tedy cauchyovská v prostoru (Q, σ). Protože prostor Q je úplný, existuje $y = \lim_{n \to \infty} f(x_n) \in Q$. Ukážeme, že $\lim_{x \to a, x \in A} f(x) = y$.

Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že $\sigma(f(u), f(v)) < \varepsilon$ pro každé $u, v \in (B(a, \delta) \setminus \{a\}) \cap A$. Dále existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $x_n \in B(a, \delta)$ pro každé $n \geq n_0$, a $n_1 \geq n_0$ takové, že $\sigma(f(x_{n_1}), y) < \varepsilon$. Tedy

$$\sigma(f(x), y) \leq \sigma(f(x), f(x_{n_1})) + \sigma(f(x_{n_1}), y) < 2\varepsilon$$

pro každé $x \in (B(a, \delta) \setminus \{a\}) \cap A$. ■

Banachova věta o pevném bodě.

9.7.23. Definice. Nechť X je množina, $T: X \to X$ a $x \in X$. Řekneme, že x je **pevným bodem** zobrazení T, jestliže $T(x) = x$.

9.7.24. Některé rovnice v pokročilejších partiích matematické analýzy lze řešit nalezením pevného bodu vhodného zobrazení. Banachova věta o kontrakci (Věta 9.7.28) udává poměrně obecné postačující podmínky pro existenci pevného bodu. V Kapitole 12 ukážeme její aplikaci v teorii diferenciálních rovnic.

9.7.25. Definice. Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, $f : P \to Q$ a $K \geq 0$. Řekneme, že zobrazení f je K-**lipschitzovské**, jestliže pro každé $x, y \in P$ platí $\sigma\big(f(x), f(y)\big) \leq K\varrho(x, y)$. Řekneme, že f je **lipschitzovské**, jestliže existuje $K \geq 0$ takové, že f je K-lipschitzovské. Řekneme, že zobrazení f je **kontrakce**, jestliže existuje $K \in [0, 1)$ takové, že f je K-lipschitzovské.

9.7.26. Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f : P \to Q$ je lipschitzovské zobrazení. Pak je snadné ověřit, že f je stejnoměrně spojité, a tedy i spojité. Nejprve nalezneme $K > 0$ takové, že f je K-lipschitzovské. Zvolme $\varepsilon > 0$ a položme $\delta = \varepsilon / K$. Potom pro každé $x, y \in P$ splňující $\varrho(x, y) < \delta$ platí

$$\sigma\big(f(x), f(y)\big) \leq K\varrho(x, y) < K\delta = \varepsilon.$$

Zobrazení f je tedy stejnoměrně spojité.

9.7.27. Příklad. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$ je neprázdná množina. Dokažte, že potom je funkce $f : P \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem $f(x) = \operatorname{dist}(x, A)$ 1-lipschitzovská na P.

Řešení. Zvolme $x, y \in P$ a $\varepsilon > 0$. Pak nalezneme $x', y' \in A$ taková, že $\varrho(x, x') < \operatorname{dist}(x, A) + \varepsilon$ a $\varrho(y, y') < \operatorname{dist}(y, A) + \varepsilon$. Potom platí

$$\operatorname{dist}(x, A) \leq \varrho(x, y') \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, y') \leq \varrho(x, y) + \operatorname{dist}(y, A) + \varepsilon.$$

Odtud plyne

$$\operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(y, A) \leq \varrho(x, y) + \varepsilon$$

pro každé $\varepsilon > 0$. Máme tedy

$$f(x) - f(y) = \operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(y, A) \leq \varrho(x, y). \tag{9.20}$$

Záměnou rolí x, y obdržíme

$$f(y) - f(x) = \operatorname{dist}(y, A) - \operatorname{dist}(x, A) \leq \varrho(y, x). \tag{9.21}$$

Z (9.20), (9.21) a symetrie metriky plyne

$$|f(x) - f(y)| \leq \varrho(x, y),$$

a tedy f je 1-lipschitzovská funkce. ♣

9.7.28. Věta (Banach)**.** Nechť (P, ϱ) je úplný neprázdný metrický prostor a $T : P \to P$ je kontrakce. Potom existuje právě jeden pevný bod zobrazení T.

Důkaz. Existence pevného bodu. Budeme rekurentně definovat posloupnost bodů $\{x_n\}$. Hledaný pevný bod pak obdržíme jako limitu této posloupnosti. Díky neprázdnosti P můžeme zvolit $x_1 \in P$ libovolně. Předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ máme již definovány body $x_1, \dots, x_n$. Potom definujme $x_{n+1} = T(x_n)$. Dokážeme, že posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská v prostoru P.

Podle předpokladu existuje $\gamma \in [0, 1)$ takové, že T je γ-lipschitzovské. Pokud $\gamma = 0$, pak je zobrazení konstantní a dokazované tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme tedy v dalším, že $\gamma > 0$. Matematickou indukcí ověříme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$

platí $\varrho(x_n, x_{n+1}) \leq \gamma^{n-1}\varrho(x_1, x_2)$. Pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé. Předpokládejme, že dokazovaná nerovnost platí pro n. Pak platí

$$\begin{aligned}
\varrho(x_{n+1}, x_{n+2}) &= \varrho\big(T(x_n), T(x_{n+1})\big) && \text{(definice posloupnosti } \{x_n\}\text{)}\\
&\leq \gamma \cdot \varrho(x_n, x_{n+1}) && \text{(}\gamma\text{-lipschitzovskost } T\text{)}\\
&\leq \gamma \cdot \gamma^{n-1} \cdot \varrho(x_1, x_2) = \gamma^n \varrho(x_1, x_2). && \text{(indukční předpoklad)}
\end{aligned}$$

Odtud a z trojúhelníkové nerovnosti plyne, že pro každé $m, n \in \mathbb{N}, m < n$, platí

$$\begin{aligned}
\varrho(x_m, x_n) &\leq \varrho(x_m, x_{m+1}) + \varrho(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + \varrho(x_{n-1}, x_n)\\
&\leq \big(\gamma^{m-1} + \gamma^m + \cdots + \gamma^{n-2}\big) \cdot \varrho(x_1, x_2)\\
&\leq \frac{\gamma^{m-1}}{1-\gamma} \cdot \varrho(x_1, x_2).
\end{aligned}$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Poněvadž $\gamma \in [0, 1)$, platí $\lim \gamma^n = 0$. Lze tedy nalézt n_0 takové, že

$$\frac{\gamma^{n_0-1}}{1-\gamma} \cdot \varrho(x_1, x_2) < \varepsilon.$$

Potom pro každé $n > m \geq n_0$ platí

$$\varrho(x_m, x_n) \leq \frac{\gamma^{m-1}}{1-\gamma} \cdot \varrho(x_1, x_2) \leq \frac{\gamma^{n_0-1}}{1-\gamma} \cdot \varrho(x_1, x_2) < \varepsilon.$$

Posloupnost $\{x_n\}$ je tedy cauchyovská v P. Prostor P je úplný, takže existuje $x \in P$ takové, že $\lim x_n = x$.

Dokážeme, že $T(x) = x$. Podle věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 9.2.4(c)) platí $\lim x_{n+1} = x$, neboli $\lim T(x_n) = x$. Podle 9.7.26 je T spojité, a tedy dle Heineovy věty platí $\lim T(x_n) = T(x)$. Z věty o jednoznačnosti limity (Věta 9.2.4(a)) plyne, že $T(x) = x$.

Jednoznačnost pevného bodu. Předpokládejme, že x a y jsou pevné body zobrazení T. Pak platí

$$\varrho(x, y) = \varrho\big(T(x), T(y)\big) \leq \gamma \cdot \varrho(x, y).$$

Protože $\gamma < 1$, musí platit $\varrho(x, y) = 0$, a tedy $x = y$. Odtud plyne, že pevný bod zobrazení T je jednoznačně určen. ■

9.7.29. Poznámka. V matematice existuje celá řada vět o pevném bodě. Pro ilustraci uveďme bez důkazu známou Brouwerovu[2] větu o pevném bodě. Nechť K je neprázdná konvexní kompaktní podmnožina $\mathbb{R}^n$ a $f: K \to K$ je spojité. Potom má f pevný bod. V tomto případě ale nemusí být pevný bod jednoznačně určen.

[2]Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966)

Baireova věta.

9.7.30. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Řekneme, že množina A je

- **první kategorie** v P, jestliže existuje posloupnost $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ řídkých množin v P taková, že $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$,
- **druhé kategorie** v P, jestliže není první kategorie,
- **residuální** v P, jestliže $P \setminus A$ je první kategorie v P.

9.7.31. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Množina A je první kategorie v P právě tehdy, když existuje spočetný systém $\mathcal{A}$ řídkých množin v P takový, že $A = \bigcup \mathcal{A}$. Pokud je totiž A množina první kategorie, pak stačí položit $\mathcal{A} = \{A_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, kde A_n jsou řídké množiny z předchozí definice. Obráceně, pokud $\mathcal{A}$ je příslušný spočetný systém, můžeme jeho prvky uspořádat do posloupnosti (Lemma 1.6.20(b)) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pokud by byl $\mathcal{A}$ konečný, pak popužijeme prázdnou množinu v roli některých A_n. Pak bude platit $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

9.7.32. Příklady. Dokažte, že

(a) prostor $\mathbb{Q}$ je první kategorie v $\mathbb{R}$,
(b) množina $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je residuální v $\mathbb{R}$,
(c) množina $\mathcal{C}([a, b])$ je první kategorie v prostoru $\big(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\mathrm{int}}\big)$.

Řešení. (a) Pro každé $r \in \mathbb{Q}$ je jednobodová množina $\{r\}$ řídká v $\mathbb{R}$ podle Příkladu 9.3.42(a). Navíc platí

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{r\}.$$

Množina $\mathbb{Q}$ je tedy spočetným sjednocením řídkých množin, tudíž je první kategorie v $\mathbb{R}$.

(b) Tvrzení je přímým důsledkem již dokázaného tvrzení (a).

(c) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme

$$A_n = \{f \in \mathcal{C}([a, b]);\ \forall x \in [a, b] \colon |f(x)| \le n\}.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je množina A_n řídká v prostoru $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\mathrm{int}})$. Důkaz lze provést obdobně jako v Příkladu 9.3.45(a). Nechť $g \in \mathcal{C}([a, b])$. Potom podle Věty 4.3.11 je g omezená na $[a, b]$. Existuje tedy $n \in \mathbb{N}$ takové, že $g \in A_n$. Odtud vyplývá, že $\mathcal{C}([a, b]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Množina $\mathcal{C}([a, b])$ je tudíž první kategorie v $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\mathrm{int}})$. ♣

9.7.33. Věta (vlastnosti množin první kategorie)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor.

(a) Jestliže množina $A_n \subset P$ je první kategorie v P pro každé $n \in \mathbb{N}$, potom je $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ první kategorie v P.
(b) Jestliže je $A \subset P$ první kategorie v P a $B \subset A$, potom je B první kategorie v P.

Důkaz. (a) Podle předpokladu a 9.7.31 existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$ spočetný systém $\mathcal{A}_n$, jehož prvky jsou řídké množiny v P a který splňuje $A_n = \bigcup \mathcal{A}_n$. Položme $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$. Potom je systém $\mathcal{A}$ spočetným sjednocením spočetných systémů, a tedy je podle Věty 1.6.21(b) také spočetný. Navíc $\mathcal{A}$ obsahuje zřejmě pouze řídké množiny v P a platí $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup \mathcal{A}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$. Podle 9.7.31 je množina A první kategorie.

(b) Podle předpokladu existují množiny A_n, $n \in \mathbb{N}$, řídké v P, které splňují $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme $B_n = A_n \cap B$. Potom je podle Věty 9.3.46(a) množina B_n řídká v P pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Množina B je tedy první kategorie v P. ■

9.7.34. Věta (Baire[3]). Nechť (P, ϱ) je úplný metrický prostor a $G \subset P$ je neprázdná otevřená množina. Potom je G druhé kategorie v (P, ϱ).

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že G je první kategorie v P. Existují tedy množiny $A_n, n \in \mathbb{N}$, které jsou řídké v P a platí $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Zkonstruujeme otevřené koule $B(x_n, r_n)$, $n \in \mathbb{N}$, splňující $B(x_1, r_1) \subset G$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

- $\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subset B(x_n, r_n) \setminus A_n$,
- $r_n \in (0, \frac{1}{n})$.

Konstrukce. Množina G je neprázdná, a proto můžeme zvolit $x_1 \in G$. Potom díky otevřenosti G existuje $r_1 \in (0, 1)$ takové, že $B(x_1, r_1) \subset G$. Nyní předpokládejme, že jsme již zkonstruovali kouli $B(x_n, r_n)$. Podle Věty 9.3.44 nalezneme neprázdnou otevřenou množinu $H \subset B(x_n, r_n)$ takovou, že $H \cap A_n = \emptyset$. Zvolme $x_{n+1} \in H$. Potom existuje $r_{n+1} \in (0, \frac{1}{n+1})$ takové, že $B(x_{n+1}, 2r_{n+1}) \subset H$. Pak platí $\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subset B(x_{n+1}, 2r_{n+1})$ podle Příkladu 9.3.29. Máme tedy také $\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subset B(x_n, r_n)$. Tím je konstrukce hledané posloupnosti koulí provedena.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\operatorname{diam} \overline{B(x_n, r_n)} \le \frac{2}{n}$. Odtud plyne $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} \overline{B(x_n, r_n)} = 0$. Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subset \overline{B(x_n, r_n)}$. Podle Věty 9.7.19 existuje $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B(x_n, r_n)}$. Potom $x \in G$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $x \notin A_n$, což je spor. ■

9.7.35 (malé množiny). V matematice je často užitečné mít možnost rozlišovat mezi malými a velkými množinami. Pro takové rozlišení je vhodné použít pojem σ-ideálu.

Nechť X je množina a $\mathfrak{I} \subset \mathcal{P}(X)$ je systém podmnožin X. Řekneme, že systém $\mathfrak{I}$ je (**množinový**) σ**-ideál**, jestliže

(a) pro každou posloupnost $\{A_n\}$ množin z $\mathfrak{I}$ platí $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{I}$,
(b) pro každou množinu $A \in \mathfrak{I}$ a každou množinu $B \subset A$ platí $B \in \mathfrak{I}$.

[3] René-Louis Baire (1874–1932)

Na množiny, které patří do daného σ-ideálu $\mathfrak{I}$, pak pohlížíme jako na malé množiny. Podle předchozí definice pak vidíme, že *spočetné* sjednocení malých množin je také malá množina a podmnožina malé množiny je opět malá. To, zda je množina A malá, nebo ne, záleží na použitém σ-ideálu. Důležitým příkladem σ-ideálu je systém spočetných podmnožin dané množiny X (vizte Větu 1.6.21(a),(b)). Dalším důležitým příkladem jsou lebesgueovsky nulové množiny v prostoru $\mathbb{R}^n$ a konečně i množiny první kategorie v daném metrickém prostoru tvoří podle Věty 9.7.33 σ-ideál.

Pokud je σ-ideál $\mathfrak{I} \subset \mathcal{P}(X)$ netriviální v tom smyslu, že $\mathfrak{I} \neq \emptyset$ a $X \notin \mathfrak{I}$, pak lze $\mathfrak{I}$ použít k existenčním důkazům. Chceme-li ukázat, že v množině X existuje prvek, který má jistou vlastnost V, stačí ukázat, že množina

$$A = \{x \in X;\ x \text{ nesplňuje } V\}$$

patří do $\mathfrak{I}$. Pak je totiž $X \setminus A$ neprázdná. V některých situacích je existenční důkaz tohoto typu jednodušší než přímá konstrukce hledaného prvku. V následujícím paragrafu se podíváme podrobněji na tuto metodu v případě množin první kategorie.

9.7.36 (metoda kategorií)**.** Nechť X je množina a $V(x)$, $x \in X$ je nějaká výroková forma na X. Chceme-li nalézt $x \in X$ takové, že platí $V(x)$, stačí na X nalézt metriku ϱ takovou, že metrický prostor (X, ϱ) je úplný, a dokázat, že vzhledem k této metrice je množina $Z = \{y \in X;\ \neg V(y)\}$ první kategorie. Podle Baireovy věty pak neplatí $X = Z$, protože úplný prostor není první kategorie. Existuje tedy prvek $x \in X$ splňující $V(x)$. Množina všech takových x je dokonce residuální v X.

Metodu kategorií ilustrujme následujícím příkladem.

9.7.37. Příklad (Bolzano)**.** Dokažte, že existuje spojitá funkce na $[0, 1]$, která nemá v žádném bodě intervalu $[0, 1]$ vlastní derivaci.

Řešení. Množinu funkcí z $\mathcal{C}([0, 1])$, které mají alespoň v jednom bodě vlastní derivaci, označme A. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme pomocnou množinu následujícím způsobem

$$A_n = \left\{f \in \mathcal{C}([0, 1]);\ \exists x \in [0, 1 - \tfrac{1}{n}]\ \forall h \in (0, \tfrac{1}{n}) : |f(x + h) - f(x)| \leq nh\right\}.$$

Ukážeme, že množiny A_n jsou řídké a platí $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Odtud plyne, že A je první kategorie. Poněvadž $\left(\mathcal{C}([0, 1]), \varrho_{\sup}\right)$ je úplný metrický prostor (Příklad 9.7.12), dostáváme podle Baireovy věty (Věta 9.7.34), že existuje funkce $f \in \mathcal{C}([0, 1]) \setminus A$.

Inkluze $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Předpokládejme, že $f \in A$. Potom existuje $x \in (0, 1)$ takové, že $f'(x)$ je vlastní. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že $(x, x + \delta) \subset [0, 1]$ a pro každé $h \in (0, \delta)$ a platí

$$\left|\frac{f(x + h) - f(x)}{h} - f'(x)\right| < 1.$$

Nyní nalezneme $n \in N$ takové, že $n > \max\{\frac{1}{\delta}, |f'(x)| + 1\}$. Potom $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ a pro každé $h \in (0, \frac{1}{n})$ platí

$$|f(x + h) - f(x)| = \left|\frac{f(x + h) - f(x)}{h}\right| \cdot h < (|f'(x)| + 1) \cdot h \leq nh.$$

Odtud plyne, že $f \in A_n$.

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Pak je množina A_n uzavřená v $(\mathcal{C}([0,1]), \varrho_{\sup})$. Předpokládejme, že $\{f_k\}$ je posloupnost funkcí z množiny A_n, která v metrice $\varrho_{\sup}$ konverguje k funkci $f \in \mathcal{C}([0,1])$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $x_k \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ takové, že pro každé $h \in (0, \frac{1}{n})$ platí $|f_k(x_k + h) - f_k(x_k)| \leq nh$. Podle Bolzanovy-Weierstrassovy věty (Věta 2.4.7) existuje vybraná posloupnost $\{x_{k_j}\}$ z posloupnosti $\{x_k\}$ s limitou $x^* \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$. Pro zjednodušení zápisu položme $g_j = f_{k_j}$ a $y_j = x_{k_j}$ pro $j \in \mathbb{N}$. Zvolme nyní $h \in (0, \frac{1}{n})$ a $\varepsilon > 0$. Vzhledem k tomu, že posloupnost $\{g_j\}$ konverguje k f v supremové metrice, můžeme nalézt j_0 takové, že platí

$$\forall x \in [0,1]\colon |g_{j_0}(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{9.22}$$

Ze spojitosti f a vztahu $\lim y_j = x^*$ můžeme po j_0 navíc požadovat

$$\begin{aligned} |f(x^* + h) - f(y_{j_0} + h)| &< \varepsilon, \\ |f(x^*) - f(y_{j_0})| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Z definice množiny A_n plyne

$$|g_{j_0}(y_{j_0} + h) - g_{j_0}(y_{j_0})| \leq nh.$$

Použitím (9.22) dostaneme

$$\begin{aligned} |g_{j_0}(y_{j_0}) - f(y_{j_0})| &< \varepsilon, \\ |g_{j_0}(y_{j_0} + h) - f(y_{j_0} + h)| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Potom pomocí trojúhelníkové nerovnosti a výše uvedených odhadů obdržíme

$$\begin{aligned} |f(x^* + h) - f(x^*)| \leq{}& |f(x^* + h) - f(y_{j_0} + h)| + |f(y_{j_0} + h) - g_{j_0}(y_{j_0} + h)| \\ &+ |g_{j_0}(y_{j_0} + h) - g_{j_0}(y_{j_0})| + |g_{j_0}(y_{j_0}) - f(y_{j_0})| \\ &+ |f(y_{j_0}) - f(x^*)| < nh + 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že $\varepsilon > 0$ bylo zvoleno libovolně, platí $|f(x^* + h) - f(x^*)| \leq nh$. Odtud plyne, že f patří do množiny A_n. Tím je důkaz uzavřenosti A_n proveden.

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Pak je množina A_n řídká v $(\mathcal{C}([0,1]), \varrho_{\sup})$. Podle předchozího je množina A_n uzavřená, a proto k důkazu její řídkosti stačí ukázat, že množina $\mathcal{C}([0,1]) \setminus A_n$ je hustá. Zvolme neprázdnou otevřenou množinu G v prostoru $\mathcal{C}([0,1])$. Zvolme $f \in G$ a k ní nalezneme $\varepsilon > 0$ splňující $B(f, \varepsilon) \subset G$. Nyní stačí podle Věty 9.3.39 nalézt funkci $g \in B(f, \varepsilon) \setminus A_n$.

K funkci f nalezneme nejprve funkci $\tilde{f}$, která bude po částech afinní a bude blízko k funkci f v supremové metrice. K funkci $\tilde{f}$ pak přičteme funkci, která bude velmi rychle oscilovat, ale přitom bude nabývat malých hodnot. Tak dostaneme hledanou funkci g. Ukažme si tento postup podrobně.

Funkce f je stejnoměrně spojitá podle Věty 9.6.19. Nalezneme tedy $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x, y \in [0,1], |x - y| < \delta\colon |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{9.23}$$

Zvolme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^m$ intervalu $[0,1]$ takové, že $\nu(D) < \delta$. (Norma dělení $\nu(D)$ byla zavedena v Definici 8.2.1.) Definujme funkci $\tilde{f}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tak, aby $f(x_i) = \tilde{f}(x_i)$ pro každé $i \in \{0,\dots,m\}$ a pokud $x \in (x_{i-1}, x_i)$, kde $i \in \{1,\dots,m\}$, pak

$$\tilde{f}(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}).$$

Funkce $\tilde{f}$ je spojitá, neboť je spojitá na každém z intervalů $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1,\dots,m\}$. Pokud $x \in [0,1]$, pak existuje $i \in \{1,\dots,m\}$ takové, že $x \in [x_{i-1}, x_i]$ a s použitím (9.23) můžeme počítat

$$\begin{aligned} |f(x) - \tilde{f}(x)| &= \left| f(x) - f(x_{i-1}) - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}) \right| \\ &\le |f(x) - f(x_{i-1})| + |f(x_i) - f(x_{i-1})| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Označme

$$K = \max\left\{ \left| \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \right|;\ i \in \{1,\dots,m\} \right\}.$$

Pro každé $i \in \{1,\dots,m\}$, $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$ platí

$$|\tilde{f}(y) - \tilde{f}(x)| = \left| \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(y - x) \right| \le K|y - x|. \tag{9.24}$$

Potom pro každé $x, y \in [0,1]$, platí $|\tilde{f}(y) - \tilde{f}(x)| \le K|y - x|$. Skutečně, zvolme $x, y \in [0,1]$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x \le y$. Nalezneme $i, j \in \{1,\dots,m\}$ taková, že $x \in [x_{i-1}, x_i]$ a $y \in [x_{j-1}, x_j]$. Potom máme $i \le j$ a

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(y) - \tilde{f}(x)| &\le |\tilde{f}(y) - \tilde{f}(x_{j-1})| + \sum_{l=i+1}^{j-1} |\tilde{f}(x_l) - \tilde{f}(x_{l-1})| + |\tilde{f}(x_i) - \tilde{f}(x)| \\ &\le K|y - x_{j-1}| + \sum_{l=i+1}^{j-1} K|x_l - x_{l-1}| + K|x_i - x| = K|y - x|. \end{aligned}$$

Zvolme konstantu L tak, aby platilo

$$L > \max\left\{ \frac{4\pi(K + n)}{\varepsilon}, \pi n \right\}. \tag{9.25}$$

Funkci $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definujme předpisem

$$g(x) = \tilde{f}(x) + \frac{\varepsilon}{4}\sin(Lx).$$

Potom je g spojitá a pro každé $x \in [0,1]$ platí

$$|g(x) - f(x)| \le |g(x) - \tilde{f}(x)| + |\tilde{f}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{3}{4}\varepsilon.$$

Máme tedy $g \in B(f, \varepsilon)$. Zbývá ukázat, že $g \notin A_n$. Zvolme libovolně $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$. Pro $h \in (0, \frac{1}{n})$ platí

$$\begin{aligned} |g(x+h) - g(x)| &\geq \frac{\varepsilon}{4} |\sin(Lx + Lh) - \sin(Lx)| - |\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x)| \\ &\geq \frac{\varepsilon}{4} |\sin(Lx + Lh) - \sin(Lx)| - Kh \qquad (9.26) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} |\sin(\tfrac{1}{2}Lh)| \cdot \left|\cos(Lx + \tfrac{1}{2}Lh)\right| - Kh. \end{aligned}$$

Díky (9.25) platí $\frac{\pi}{2} < \frac{L}{2n}$, a proto můžeme nalézt $h^* \in (0, \frac{1}{n})$ takové, že $\frac{1}{2}Lh^* \leq \frac{\pi}{2}$ a $Lx + \frac{1}{2}Lh^* = k\pi - \frac{\pi}{4}$ nebo $Lx + \frac{1}{2}Lh^* = k\pi + \frac{\pi}{4}$ pro vhodné $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak platí $|\cos(Lx + \frac{1}{2}Lh^*)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ a

$$\begin{aligned} |g(x+h^*) - g(x)| &\geq \frac{\varepsilon}{4} |\sin(\tfrac{1}{2}Lh^*)| - Kh^* && \text{(volba } h^*) \\ &\geq \frac{\varepsilon}{4}\frac{2}{\pi}\frac{1}{2}Lh^* - Kh^* && \text{(Příklad 5.6.13)} \\ &= \Big(\frac{\varepsilon}{4}\frac{L}{\pi} - K\Big)h^* > nh^*. && \text{(volba } L \text{ podle (9.25))} \end{aligned}$$

Odtud plyne, že $g \notin A_n$. ♣

9.7.38. Věta. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a množina A_n je residuální v P pro každé $n \in \mathbb{N}$.

(a) Potom je množina $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ residuální v P.
(b) Je-li navíc P druhé kategorie, pak je $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ neprázdná.

Důkaz. (a) Platí $P \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (P \setminus A_n)$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je množina $P \setminus A_n$ první kategorie. Podle Věty 9.7.33 je tedy množina $\bigcup_{n=1}^{\infty}(P \setminus A_n)$ první kategorie. Odtud plyne residualita množiny $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

(b) Podle (a) je množina $P \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ první kategorie. Poněvadž je P druhé kategorie, musí být $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ neprázdná. ■

Množiny typu F-sigma a G-delta.

9.7.39. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že množina $A \subset P$ je

- **typu** F_σ v P, jestliže existují množiny $F_n, n \in \mathbb{N}$, uzavřené v P takové, že $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$,
- **typu** G_δ v P, jestliže existují množiny $G_n, n \in \mathbb{N}$, otevřené v P takové, že $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$.

9.7.40. Věta (vztah množin typu G_δ a F_σ)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Potom A je typu G_δ v P právě tehdy, když $P \setminus A$ je typu F_σ v P.

Důkaz. $\Rightarrow$ Pro A typu G_δ nalezneme posloupnost množin $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ otevřených v P splňující $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $F_n = P \setminus G_n$. Podle Věty 9.3.13

je pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina F_n uzavřená v P. Podle De Morganových pravidel (Věta 1.3.11) platí

$$P \setminus A = P \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (P \setminus G_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

takže množina $P \setminus A$ je typu F_σ v P.

$\Leftarrow$ Důkaz této implikace je obdobný. ■

9.7.41. Příklad. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Dokažte, že je-li $A \subset P$ uzavřená (resp. otevřená) v P, potom je zároveň typu G_δ i F_σ v P.

Řešení. Množina A je uzavřená v P. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $F_n = A$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ je zřejmě množina F_n uzavřená v P a platí $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Množina A je tedy typu F_σ.

Dokážeme nyní, že množina A je také typu G_δ. Pokud je A prázdná, potom je zřejmě typu G_δ. Předpokládejme tedy, že A je neprázdná. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$G_n = \{x \in P;\ \operatorname{dist}(x, A) < \tfrac{1}{n}\}.$$

Potom je pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina G_n otevřená v P podle Věty 9.4.6, neboť funkce $x \mapsto \operatorname{dist}(x, A)$ je spojitá, jak plyne z Příkladu 9.7.27. Navíc zřejmě platí $A \subset G_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a podle Vět 9.3.28(c) a 9.3.25 je $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Množina A je tedy typu G_δ v P.

Množina A je otevřená v P. Tvrzení plyne z předchozího a Vět 9.3.13 a 9.7.40. ♣

9.7.42. Věta. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$ je hustá množina typu G_δ. Potom je A residuální v P.

Důkaz. Pro množinu A existuje posloupnost $\{G_n\}$ otevřených množin v P splňující $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Protože je množina A hustá v P, plyne z Věty 9.3.39, že množina G_n, $n \in \mathbb{N}$, která A obsahuje, je také hustá v P. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je podle Věty 9.3.47 množina $P \setminus G_n$ řídká v P. Navíc platí

$$P \setminus A = P \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (P \setminus G_n),$$

takže $P \setminus A$ je první kategorie v P, neboli A je v tomto prostoru residuální. ■

9.7.43. Věta. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a Q je G_δ podmnožina P. Potom je (Q, ϱ) prostor druhé kategorie v sobě.

Důkaz. Předpokládejme pro spor, že (Q, ϱ) je první kategorie v (Q, ϱ). Je-li množina $H \subset Q$ řídká v (Q, ϱ), pak lze s pomocí Věty 9.3.44 snadno nahlédnout, že je H řídká i v prostoru $(\overline{Q}, \varrho)$. Odtud plyne, že Q je první kategorie i v prostoru $(\overline{Q}, \varrho)$. Množina Q je typu G_δ v P a z Věty 9.3.32 lze snadno odvodit, že Q je typu G_δ v $\overline{Q}$. Podle Věty 9.7.42 je Q residuální v $(\overline{Q}, \varrho)$, a tedy $\overline{Q} \setminus Q$ je první kategorie v $(\overline{Q}, \varrho)$. Odtud plyne, že $(\overline{Q}, \varrho)$ je sjednocením dvou množin první kategorie v $(\overline{Q}, \varrho)$, a tedy jde o množinu první kategorie v $(\overline{Q}, \varrho)$. Prostor $(\overline{Q}, \varrho)$ je však úplný podle Věty 9.7.18, a je tedy druhé kategorie podle Věty 9.7.34, což je spor. ■

9.7.44. Věta. Nechť (P, ϱ) je úplný metrický prostor a $A \subset P$ je množina typu F_σ v P, která je druhé kategorie v P. Potom má A neprázdný vnitřek.

Důkaz. Podle předpokladu existují uzavřené množiny $F_n \subset P, n \in \mathbb{N}$, takové, že $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Množina A není první kategorie, a proto existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že F_{n_0} není řídká. To znamená, že množina $P \setminus \overline{F_{n_0}} = P \setminus F_{n_0}$ není hustá. Existuje tedy neprázdná otevřená množina, která je obsažena v F_{n_0}. Vnitřek množiny F_{n_0}, a tedy i množiny A, je tak neprázdný. ■

9.7.45. Věta (charakterizace množin druhé kategorie)**.** Metrický prostor (P, ϱ) je druhé kategorie právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ otevřených hustých množin v (P, ϱ) platí $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Provedeme nepřímý důkaz. Předpokládejme, že existuje posloupnost otevřených hustých množin $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \emptyset$. Potom je pro každé $n \in \mathbb{N}$ podle Věty 9.3.47 množina $P \setminus G_n$ řídká v (P, ϱ). Navíc platí

$$P = P \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (P \setminus G_n).$$

Odtud plyne, že prostor (P, ϱ) je první kategorie, a tedy není druhé kategorie.

$\Leftarrow$ I tuto implikaci dokážeme nepřímým důkazem. Předpokládejme, že prostor (P, ϱ) je první kategorie. Potom existuje posloupnost jeho řídkých podmnožin $\{A_n\}$ splňující $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Podle Věty 9.3.46(c) je pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina $\overline{A_n}$ řídká v (P, ϱ). Navíc zřejmě platí $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $G_n = P \setminus \overline{A_n}$. Pak je Věty 9.3.13 a Definice 9.3.41 pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina G_n otevřená a hustá v (P, ϱ). Dále platí

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (P \setminus \overline{A_n}) = P \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} = P \setminus P = \emptyset.$$

■

9.7.46. Jestliže $\{G_n\}$ je posloupnost množin typu G_δ v metrickém prostoru (P, ϱ), pak množina $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ nemusí být v tomto prostoru typu G_δ. Množiny tohoto tvaru nazýváme **typu** $G_{\delta\sigma}$. Všimněme si, že každá množina typu G_δ je také typu $G_{\delta\sigma}$. Obdobně definujeme množiny **typu** $F_{\sigma\delta}$ jako množiny tvaru $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, kde $\{F_n\}$ je posloupnost množin typu F_σ v P. Takto můžeme postupovat dále a definovat množiny typu $G_{\delta\sigma\delta}$, $F_{\sigma\delta\sigma}$, $G_{\delta\sigma\delta\sigma}$, $F_{\sigma\delta\sigma\delta}$, … Opakovaným používáním operací spočetného průniku a spočetného sjednocení vytváříme stále větší systémy podmnožin P. Studiem těchto systémů množin se zabývá *deskriptivní teorie množin*, jejíž základy jsou vyloženy například v [**17**].

9.8. Separabilní prostory

9.8.1. Definice. Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je **separabilní**, jestliže obsahuje spočetnou hustou podmnožinu.

9.8.2. V separabilním metrickém prostoru P existuje podle definice spočetná hustá množina D. Prvky prostoru P, kterých může být nespočetně mnoho, lze tedy s libovolnou přesností aproximovat prvky z množiny D, která je spočetná. To je v některých konstrukcích podstatné. Ačkoliv v našem textu využijeme separabilitu jen několikrát, jde o důležitou a často používanou vlastnost.

Příklady separabilních prostorů.

9.8.3. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že prostor $\mathbb{R}^n$ je separabilní.

Řešení. Množina $\mathbb{Q}$ je spočetná a podle Příkladu 9.3.36 hustá v $\mathbb{R}$. Množina bodů z $\mathbb{R}^n$ s racionálními souřadnicemi, tj. množina $\mathbb{Q}^n$, je spočetná podle Věty 1.6.21(c). Ukážeme, že množina $\mathbb{Q}^n$ je hustá v $\mathbb{R}^n$. Zvolme $x = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ a $\varepsilon > 0$. Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ nalezneme díky hustotě $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$ prvek $y_i \in \mathbb{Q}$ takový, že $|y_i - x_i| < \varepsilon/\sqrt{n}$. Pro $y = [y_1, \dots, y_n]$, pak platí $y \in \mathbb{Q}^n$ a

$$\varrho_2(y, x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\Big)^2} = \varepsilon.$$

Tím je hustota $\mathbb{Q}^n$ v $\mathbb{R}^n$ ověřena. ♣

9.8.4. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že prostor $\mathbb{C}^n$ je separabilní.

Řešení. Množina $A = \{x + iy \in \mathbb{C};\ x, y \in \mathbb{Q}\}$ je obrazem množiny $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ při zobrazení $(x, y) \mapsto x + iy$, které je definováno na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s hodnotami v $\mathbb{C}$. Podle Věty 1.6.21(d) je pak množina A spočetná. Pak i kartézský součin $A^n \subset \mathbb{C}^n$ je podle Věty 1.6.21(c) spočetná množina. Snadno lze ukázat, že množina A je hustá v $\mathbb{C}$ a pak také že množina A^n je hustá v $\mathbb{C}^n$. Obě ověření lze provést podobně jako Příkladu 9.8.3. ♣

9.8.5. Příklad. Dokažte, že metrický prostor $\big(\mathcal{C}([0,1]), \varrho_{\sup}\big)$ je separabilní.

Řešení. Nechť $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, a $a \in \mathbb{R}^{n+1}$. Funkci $f_a \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definujme jako funkci, která je na každém intervalu $\big[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\big]$, kde $i \in \{1, \dots, n\}$, afinní, tj. tvaru $x \mapsto ax + b$, a splňuje $f(\frac{i}{n}) = a_{i+1}$, $i = 0, \dots, n$. Jinými slovy pro $i \in \{1, \dots, n\}$ a $x \in \big[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\big]$ platí

$$f_a(x) = a_i + \frac{a_{i+1} - a_i}{\frac{1}{n}}\big(x - \tfrac{i-1}{n}\big).$$

Pro každé $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ je funkce f_a spojitá na $[0,1]$, a tedy podle Věty 9.6.19 je i stejnoměrně spojitá na intervalu $[0,1]$. Množina funkcí $A_n = \{f_a;\ a \in \mathbb{Q}^{n+1}\}$ je spočetná pro každé $n \in \mathbb{N}$. Podle Věty 1.6.21 je spočetná i množina $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Ukážeme, že A je hustá v $\big(\mathcal{C}([0,1]), \varrho_{\sup}\big)$.

Nechť $f \in \mathcal{C}([0,1])$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu díky stejnoměrné spojitosti f nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall x, y \in [0,1], |x-y| < \tfrac{1}{n} : |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{9.27}$$

Pro každé $i \in \{0, \dots, n\}$ nalezneme podle Příkladu 9.3.36 $a_i \in \mathbb{Q}$ takové, že $|f(\frac{i}{n}) - a_{i+1}| < \varepsilon$. Označme $a = (a_1, \dots, a_{n+1})$. Pro $x \in [0,1]$ nalezneme $j \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $x \in [\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}]$. Potom pomocí (9.27) a volby $a_i, i = 1, \dots, n+1$, odhadneme

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_a(x)| &\le |f(x) - f(\tfrac{j-1}{n})| + |f(\tfrac{j-1}{n}) - a_j| + |a_j - f_a(x)| \\
&\le \varepsilon + \varepsilon + |a_j - f_a(x)| \\
&= 2\varepsilon + \left|a_j - a_j - \frac{a_{j+1} - a_j}{\frac{1}{n}}\left(x - \tfrac{j-1}{n}\right)\right| \\
&\le 2\varepsilon + |a_{j+1} - a_j| \\
&\le 2\varepsilon + |a_{j+1} - f(\tfrac{j}{n})| + |f(\tfrac{j}{n}) - f(\tfrac{j-1}{n})| + |f(\tfrac{j-1}{n}) - a_j| < 5\varepsilon.
\end{aligned}$$

Odtud plyne, že $\varrho_{\sup}(f, f_a) \le \varepsilon$. Množina A je tedy hustá, a tudíž je prostor $\left(\mathcal{C}([0,1]), \varrho_{\sup}\right)$ separabilní. ♣

9.8.6. Příklad. Dokažte, že diskrétní metrický prostor je separabilní právě tehdy, když je spočetný.

Řešení. Nechť P je množina a ϱ je diskrétní metrika na P. Podle Příkladu 9.3.38 je jedinou hustou podmnožinou prostoru (P, ϱ) množina P. Odtud ihned plyne tvrzení. ♣

9.8.7. Příklad. Dokažte, že Banachův prostor c_0 je separabilní.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme množinu D_n jako množinu posloupností $\{x_j\}$, které mají všechny členy racionální a pro každé $j > n$ platí $x_j = 0$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je množina $D_n, n \in \mathbb{N}$ podmnožinou c_0 a je prostým obrazem spočetné množiny $\mathbb{Q}^n$ při zobrazení

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, 0, 0, \dots),$$

a tedy je spočetná podle Věty 1.6.21(d). Položme $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Množina D je spočetná podle Věty 1.6.21(b). Dokážeme, že D je hustá v c_0.

Nechť $y = \{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ je prvek c_0. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|y_j| < \varepsilon$ pro každé $j > n$. Dále pro každé $j \in \{1, \dots, n_0\}$ nalezneme $r_j \in \mathbb{Q}$ splňující $|r_j - y_j| < \varepsilon$. Definujme posloupnost $x = \{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ předpisem

$$x_j = \begin{cases} r_j & \text{pro } j \in \{1, \dots, n_0\}, \\ 0 & \text{pro } j > n_0. \end{cases}$$

Potom platí $x \in D_{n_0}$, a tedy $x \in D$. Dále platí

$$\begin{aligned}\|x-y\|_\infty &= \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j - y_j| \\ &= \max\{\sup_{j\le n_0} |r_j - y_j|, \sup_{j>n_0} |0-y_j|\} \\ &< \max\{\varepsilon,\varepsilon\} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Množina D je tedy hustá v c_0. Odtud vyplývá, že prostor c_0 je separabilní. ♣

Základní vlastnosti separabilních prostorů.

9.8.8. Věta. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor, $\varepsilon > 0$ a $A \subset P$ je nespočetná množina taková, že pro každé $x, y \in A$, $x \neq y$, platí $\varrho(x,y) \geq \varepsilon$. Potom P není separabilní.

Důkaz. Předpokládejme, že D je libovolná hustá množina v P. Potom pro každé $x \in A$ existuje $d_x \in D \cap B(x, \frac{\varepsilon}{2})$. Nechť $x, y \in A$, $x \neq y$. Potom platí $B(x,\frac{\varepsilon}{2}) \cap B(y, \frac{\varepsilon}{2}) = \emptyset$, neboť kdyby existoval prvek $z \in B(x,\frac{\varepsilon}{2}) \cap B(y,\frac{\varepsilon}{2})$, pak bychom dostali

$$\varepsilon \leq \varrho(x,y) \leq \varrho(x,z) + \varrho(z,y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

což je spor. Odtud plyne, že $d_x \neq d_y$. To znamená, že zobrazení $F\colon A \to D$, které každému $x \in A$ přiřazuje prvek $d_x \in D$, je prosté. Tedy množina A má stejnou mohutnost jako množina $F(A)$. Protože A je nespočetná množina, je nespočetná i množina $F(A)$. Dále víme, že $F(A) \subset D$. Odtud vyplývá, že i D je nespočetná množina. Dokázali jsme, že prostor P neobsahuje žádnou spočetnou hustou množinu. Tudíž prostor P není separabilní. ■

9.8.9. Příklad. Dokažte, že Banachův prostor ℓ_∞ není separabilní.

Řešení. Pro $A \subset \mathbb{N}$ uvažujme charakteristickou funkci $\chi_A\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ zavedenou v 1.4.21. Funkce χ_A je tedy posloupnost, jejíž členy nabývají hodnoty 0 nebo 1. Pokud $A, B \subset \mathbb{N}$, $A \neq B$, pak zřejmě platí $\|\chi_A - \chi_B\|_\infty = 1$. Množina všech podmnožin $\mathbb{N}$ je nespočetná (Věta 1.6.7, vizte též 1.6.17 a Větu 1.6.18), a z Věty 9.8.8 tedy vyplývá, že prostor ℓ_∞ není separabilní. ♣

9.8.10. Definice. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a $\mathcal{B}$ je systém obsahující otevřené podmnožiny P. Řekneme, že $\mathcal{B}$ je **báze otevřených množin** prostoru P, jestliže pro každou otevřenou množinu $G \subset P$ existuje systém $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{B}$ takový, že $\bigcup \mathcal{B}^* = G$.

9.8.11. Každou otevřenou množinu můžeme obdržet jako sjednocení množin báze, přičemž systém bázových množin může být podstatně menší než systém všech otevřených množin. Prázdná množina je rovna sjednocení prázdného systému množin, a proto báze nemusí, ale může, obsahovat prázdnou množinu.

9.8.12. Věta (charakterizace separabilních prostorů). Nechť (P,ϱ) je metrický prostor. Potom je P separabilní právě tehdy, když má spočetnou bázi otevřených množin.

Důkaz. $\Rightarrow$ Nechť D je spočetná hustá podmnožina P. Položme

$$\mathcal{B} = \{B(x,r);\ x \in D,\ r \in \mathbb{Q} \cap (0,\infty)\}.$$

Množina $D \times \mathbb{Q}$ je spočetná podle Věty 1.6.21(c). Systém $\mathcal{B}$ je obrazem množiny $D \times \mathbb{Q}$ při zobrazení $F\colon (x,r) \mapsto B(x,r)$, a tedy je podle Věty 1.6.21(d) také spočetný.

Dokážeme, že $\mathcal{B}$ je bází otevřených množin P. Množiny v $\mathcal{B}$ jsou otevřené koule, a tedy otevřené množiny. Nechť $G \subset P$ je otevřená množina. Položme $\mathcal{B}^* = \{H \in \mathcal{B};\ H \subset G\}$. Zřejmě platí $\bigcup \mathcal{B}^* \subset G$. Dokážeme opačnou inkluzi. Předpokládejme, že $x \in G$. Potom existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $B(x,\varepsilon) \subset G$. Nalezneme $y \in B(x, \frac{\varepsilon}{4}) \cap D$ a $r \in (\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{2}) \cap \mathbb{Q}$. Potom $\varrho(x,y) < r$, takže $x \in B(y,r)$. Dále pro každé $z \in B(y,r)$ platí

$$\varrho(x,z) \le \varrho(x,y) + \varrho(y,z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

a tedy $B(y,r) \subset B(x,\varepsilon) \subset G$. Odtud vyplývá, že $B(y,r) \in \mathcal{B}^*$. Protože $x \in B(y,r)$, plyne odtud, že $x \in \bigcup \mathcal{B}^*$. Platí tedy $G = \bigcup \mathcal{B}^*$.

$\Leftarrow$ Nechť $\mathcal{B} = \{B_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ je spočetná báze neprázdných otevřených množin metrického prostoru (P,ϱ). Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ zvolíme $x_n \in B_n$ a položíme $D = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Množina D je zřejmě spočetná. Předpokládejme, že G je neprázdná otevřená množina. Potom existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $B_n \subset G$. Potom máme $x_n \in G$, a tedy $G \cap D \neq \emptyset$. Podle Věty 9.3.39 je tudíž množina D hustá v P. Odtud plyne, že prostor P je separabilní. ■

9.8.13. Věta. Nechť (P,ϱ) je separabilní metrický prostor a $Q \subset P$. Potom je metrický prostor (Q,ϱ) separabilní.

Důkaz. Podle Věty 9.8.12 existuje spočetná báze $\mathcal{B}$ otevřených množin prostoru P. Definujme systém $\mathcal{B}_Q = \{Q \cap B;\ B \in \mathcal{B}\}$. Systém $\mathcal{B}_Q$ spočetný, neboť sytém $\mathcal{B}$ je spočetný. Každá množina z $\mathcal{B}_Q$ je otevřená v Q podle Věty 9.3.32. Dokážeme, že $\mathcal{B}_Q$ je bází otevřených množin prostoru Q.

Předpokládejme, že $G \subset Q$ je otevřená množina v Q. Podle Věty 9.3.32 existuje množina $\tilde{G} \subset P$ otevřená v P splňující $G = \tilde{G} \cap Q$. Pro množinu $\tilde{G}$ nalezneme systém $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{B}$ splňující $\tilde{G} = \bigcup \mathcal{B}^*$. Položme $\mathcal{B}^*_Q = \{Q \cap B;\ B \in \mathcal{B}^*\}$. Potom zřejmě $\mathcal{B}^*_Q \subset \mathcal{B}_Q$ a $\bigcup \mathcal{B}^*_Q = Q \cap \bigcup \mathcal{B}^* = Q \cap \tilde{G} = G$.

Prostor (Q,ϱ) je separabilní podle Věty 9.8.12, neboť má spočetnou bázi otevřených množin. ■

9.8.14. Věta (totální omezenost a separabilita)**.** Nechť (P,ϱ) je totálně omezený metrický prostor. Potom je P separabilní.

Důkaz. Podle definice totální omezenosti existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$ konečná $\frac{1}{n}$-síť D_n prostoru P. Položme $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Podle Věty 1.6.21(b) je potom množina D spočetná. Zvolme $x \in P$ a $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Poněvadž D_n je $\frac{1}{n}$-síť, existuje $y \in D_n$ takové, že $\varrho(x,y) < \frac{1}{n}$. Potom $y \in D$ a platí $\varrho(x,y) < \varepsilon$. Odtud plyne, že D je hustá v P. Prostor P je tedy separabilní. ■

9.8.15. Důsledek. Nechť (P,ϱ) je kompaktní metrický prostor. Potom je P separabilní.

Důkaz. Tvrzení plyne z Věty 9.6.26 a Věty 9.8.14. ■

9.8.16. Definice. Řekneme, že metrický prostor (P,ϱ) má **Lindelöfovu vlastnost**[4], jestliže pro každý systém $\mathcal{G}$ otevřených podmnožin P splňující $P = \bigcup \mathcal{G}$ existuje spočetný systém $\mathcal{G}^* \subset \mathcal{G}$ takový, že $P = \bigcup \mathcal{G}^*$.

9.8.17. Z Věty 9.6.28 plyne, že každý kompaktní metrický prostor má Lindelöfovu vlastnost.

9.8.18. Věta. Nechť (P,ϱ) je separabilní metrický prostor. Potom P má Lindelöfovu vlastnost.

Důkaz. Nechť $\mathcal{G}$ je otevřené pokrytí P. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že systém $\mathcal{G}$ je neprázdný. Zvolme $G_0 \in \mathcal{G}$. Nechť $D = \{d_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ je spočetná hustá podmnožina P. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $q \in \mathbb{Q}$, $q > 0$. Jestliže existuje $G \in \mathcal{G}$ splňující $B(d_n, q) \subset G$, potom zvolme jednu z množin G s touto vlastností a označme ji $G_{n,q}$. Jestliže taková množina neexistuje, položme $G_{n,q} = G_0$. Definujme systém $\mathcal{G}^*$ předpisem

$$\mathcal{G}^* = \{G_{n,q};\ n \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{Q}, q > 0\}.$$

Potom je $\mathcal{G}^*$ zřejmě spočetný a platí $\mathcal{G}^* \subset \mathcal{G}$. Dokážeme, že $P = \bigcup \mathcal{G}^*$.

Nechť $x \in P$. Protože $P = \bigcup \mathcal{G}$, můžeme nalézt $G \in \mathcal{G}$ splňující $x \in G$. Díky otevřenosti množiny G nalezneme $r > 0$ takové, že $B(x,r) \subset G$. Díky tomu, že D je hustá množina, nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $d_n \in B(x, \frac{r}{2})$. Nyní nalezneme $q \in \mathbb{Q}$ takové, že $\varrho(x, d_n) < q < \frac{r}{2}$. Potom $x \in B(d_n, q)$ a pro každé $y \in B(d_n, q)$ platí díky trojúhelníkové nerovnosti

$$\varrho(y,x) \le \varrho(y, d_n) + \varrho(d_n, x) < q + \frac{r}{2} < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

takže $B(d_n, q) \subset B(x,r)$. Protože $B(x,r) \subset G$, platí $B(d_n,q) \subset G_{n,q}$. To znamená, že $x \in G_{n,q}$. Protože $G_{n,q} \in \mathcal{G}^*$ a x bylo zvoleno libovolně, plyne odtud, že $P = \bigcup \mathcal{G}^*$. Prostor P má tedy Lindelöfovu vlastnost. ■

9.9. Souvislé prostory

9.9.1. Definice. Řekneme, že metrický prostor (P,ϱ) je **souvislý**, jestliže není sjednocením dvou neprázdných disjunktních otevřených množin. Řekneme, že množina $A \subset P$ je **souvislá**, jestliže je metrický prostor (A,ϱ) souvislý.

[4]Ernst Leonard Lindelöf (1870–1946)

Příklady souvislých prostorů.

9.9.2. Příklad. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $x \in P$. Potom je množina $\{x\}$ souvislá v P.

Řešení. Prostor P, který je jednobodový, nemůže obsahovat dvě disjunktní neprázdné množiny, a tedy je souvislý. ♣

9.9.3. Příklad. Dokažte, že metrický prostor $\mathbb{R}$ je souvislý.

Řešení. Předpokládejme pro spor, že $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}$ jsou neprázdné disjunktní otevřené množiny splňující $G_1 \cup G_2 = \mathbb{R}$. Podle věty o struktuře otevřených množin v $\mathbb{R}$ (Věta 9.3.17) je množina G_1 spočetným sjednocením disjunktních otevřených intervalů. Protože $G_2 \neq \emptyset$, neplatí $G_1 = \mathbb{R}$, a tedy alespoň jeden z krajních bodů alespoň jednoho z těchto intervalů je prvkem $\mathbb{R}$. Označme tento bod jako a. Potom $a \notin G_1$, a tedy $a \in G_2$. Protože G_2 je otevřená v $\mathbb{R}$, existuje $r > 0$ takové, že $(a - r, a + r) \subset G_2$. Protože a je krajním bodem některého intervalu ležícího v G_1, musí platit $(a - r, a + r) \cap G_1 \neq \emptyset$. To je však spor s tím, že množiny G_1 a G_2 jsou disjunktní. ♣

9.9.4. Příklad. Dokažte, že metrický prostor $P = [0, 1] \cup (2, 3)$ není souvislý.

Řešení. Množina $[0, 1]$ je otevřená v P podle Příkladu 9.3.33. Množina $(2, 3)$ je otevřená v P podle Věty 9.3.32. Metrický prostor P je tedy sjednocením těchto dvou neprázdných disjunktních otevřených množin, a není tedy souvislý. ♣

9.9.5. Příklad. Dokažte, že metrický prostor $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je souvislý právě tehdy, když je množina P jednobodová nebo prázdná.

Řešení. $\Rightarrow$ Provedeme nepřímý důkaz. Předpokládejme, že množina P není ani jednobodová ani prázdná, a obsahuje tedy alespoň dva prvky. Nechť $x \in P$. Potom jsou množiny $\{x\}$ a $P \setminus \{x\}$ otevřené (Příklad 9.3.14), neprázdné a disjunktní. Množina P je jejich sjednocením, a proto není P souvislý.

$\Leftarrow$ Souvislost prázdného prostoru plyne ihned z definice. Souvislost jednobodového prostoru plyne z Příkladu 9.9.2. ♣

9.9.6. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $H \subset P$. Řekneme, že H je **obojetná**, jestliže je zároveň otevřená i uzavřená.

9.9.7. V každém metrickém prostoru (P, ϱ) jsou prázdná množina a množina P obojetné. V metrickém prostoru $[0, 1] \cup (2, 3)$ jsou množiny $[0, 1]$ a $(2, 3)$ obojetné, což plyne z Příkladu 9.3.33. Každá podmnožina metrického prostoru $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je obojetná podle Příkladů 9.3.4 a 9.3.14.

9.9.8. Věta (charakterizace souvislých prostorů)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Pak jsou následující čtyři výroky ekvivalentní.

(i) Prostor P není souvislý.
(ii) Existují dvě neprázdné uzavřené disjunktní množiny $F_1, F_2 \subset P$ splňující $P = F_1 \cup F_2$.

(iii) Existuje obojetná neprázdná množina H splňující $H \neq P$.
(iv) Existuje spojité surjektivní zobrazení $f : (P, \varrho) \to (\{0, 1\}, \varrho_{\mathrm{diskr}})$.

Důkaz. (i)⇒(ii) Nalezneme neprázdné disjunktní otevřené množiny G_1 a G_2 splňující $P = G_1 \cup G_2$. Položme $F_1 = G_1$ a $F_2 = G_2$. Podle Věty 9.3.13 jsou množiny F_1 a F_2 uzavřené. Navíc jsou zřejmě disjunktní a neprázdné a platí $P = F_1 \cup F_2$.

(ii)⇒(iii) Položme $H = F_1$. Potom H je neprázdná, uzavřená a různá od P. Protože F_2 je uzavřená, je H také otevřená, a tedy obojetná.

(iii)⇒(iv) Položme $f = \chi_H$. Protože $H \neq \emptyset$ a $H \neq P$, je f je surjektivní zobrazení. Dokážeme, že f je spojité. V prostoru $\{0, 1\}$ existují pouze čtyři otevřené množiny, a sice $\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$ a $\{0, 1\}$. Podle předpokladu jsou množiny $f^{-1}(\{0\}) = P \setminus H$ i $f^{-1}(\{1\}) = H$ otevřené. Množiny $f^{-1}(\{0, 1\}) = P$ a $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ jsou také otevřené. Podle Věty 9.4.6 je tedy f spojité.

(iv)⇒(i) Podle Příkladu 9.3.14 jsou množiny $\{0\}$ a $\{1\}$ otevřené. Ze spojitosti zobrazení f a Věty 9.4.6 plyne, že množiny $f^{-1}(\{0\})$ a $f^{-1}(\{1\})$ jsou otevřené P. Navíc jsou tyto dvě množiny zřejmě neprázdné a disjunktní a platí $P = f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1)$. Prostor P tedy není souvislý. ∎

9.9.9. Věta (vlastnosti souvislých prostorů)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor.

(a) Nechť (Q, σ) je metrický prostor a $f : P \to Q$ je spojité zobrazení. Nechť $A \subset P$ je souvislá množina v prostoru P. Pak $f(A)$ je souvislá množina v Q.
(b) Nechť $A \subset P$ je souvislá množina v prostoru P a $A \subset B \subset \overline{A}$. Pak je množina B souvislá v prostoru P. Speciálně, množina $\overline{A}$ je souvislá v P.
(c) Nechť $I \neq \emptyset$ a pro každé $\alpha \in I$ je A_α souvislá množina v P. Nechť platí

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset.$$

Potom je $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ souvislá množina v P.

Důkaz. (a) Předpokládejme pro spor, že množina $f(A)$ není souvislá v Q. Existují tedy neprázdné disjunktní množiny $G_1, G_2 \subset Q$ otevřené v $f(A)$ splňující $f(A) = G_1 \cup G_2$. Ze spojitosti zobrazení $f|_A$ a z Věty 9.4.6 plyne, že množiny $(f|_A)^{-1}(G_1)$ a $(f|_A)^{-1}(G_2)$ jsou otevřené v prostoru (A, ϱ). Navíc jsou zřejmě neprázdné a disjunktní a platí $A = (f|_A)^{-1}(G_1) \cup (f|_A)^{-1}(G_2)$. Množina A tudíž není souvislá, což je spor s předpokladem.

(b) Předpokládejme pro spor, že $B = F_1 \cup F_2$, přičemž F_1, F_2 jsou neprázdné, disjunktní a uzavřené v B. Podle Věty 9.3.32 jsou množiny $A \cap F_1$ a $A \cap F_2$ uzavřené v A. Navíc jsou tyto dvě množiny zřejmě disjunktní a platí $A = (A \cap F_1) \cup (A \cap F_2)$. Množina A je souvislá, a proto je jedna z uvedených množin rovna A. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $A \cap F_1 = A$. Platí tedy $A \subset F_1$. Potom podle Věty 9.3.31 máme

$$B = \overline{A} \cap B = \overline{A}^B \subset \overline{F_1}^B = F_1,$$

přičemž poslední rovnost plyne z uzavřenosti množiny F_1 v B. Odtud plyne $B = F_1$, a tedy $F_2 = \emptyset$, což je spor.

(c) Označme $X = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Pro spor předpokládejme, že existují neprázdné disjunktní množiny G_1, G_2, které jsou otevřené v X a platí $X = G_1 \cup G_2$. Pak pro každé $\alpha \in I$ máme $A_\alpha = (A_\alpha \cap G_1) \cup (A_\alpha \cap G_2)$, přičemž množiny $A_\alpha \cap G_1$ a $A_\alpha \cap G_2$ jsou disjunktní a podle Věty 9.3.32 otevřené v metrickém prostoru A_α. Tento metrický prostor je ale souvislý, takže alespoň jedna z množin $A_\alpha \cap G_1$ a $A_\alpha \cap G_2$ musí být prázdná a druhá musí být rovna A_α. Dokázali jsme, že pro každé $\alpha \in I$ platí buď $A_\alpha \subset G_1$ nebo $A_\alpha \subset G_2$. Protože ale průnik všech A_α je neprázdný, plyne odtud, že buď pro každé $\alpha \in I$ platí $A_\alpha \subset G_1$ nebo pro každé $\alpha \in I$ platí $A_\alpha \subset G_2$. Množina G_1 nebo G_2 je tudíž prázdná, což je spor. ■

9.9.10. Věta (charakterizace souvislých množin v $\mathbb{R}$). Nechť $A \subset \mathbb{R}$. Pak A je souvislá v $\mathbb{R}$ právě tehdy, když A je interval.

Důkaz. $\Rightarrow$ Provedeme nepřímý důkaz. Předpokládejme, že A není interval. Podle Lemmatu 1.5.28 existují body $x, y \in A$ a $z \in \mathbb{R}$, $z \notin A$, takové, že $x < z < y$. Potom

$$A = \big(A \cap (-\infty, z)\big) \cup \big(A \cap (z, \infty)\big).$$

Množiny $A \cap (-\infty, z)$ a $A \cap (z, \infty)$ jsou zřejmě neprázdné a disjunktní. Podle Věty 9.3.32 jsou navíc otevřené v A. Množina A tedy není souvislá.

$\Leftarrow$ Pro spor předpokládejme, že interval A není souvislá množina. Existují tedy disjunktní neprázdné množiny F_1, F_2, které jsou uzavřené v A a $F_1 \cup F_2 = A$. Existují tedy body $a \in F_1$ a $b \in F_2$. Platí $a \neq b$, neboť F_1 a F_2 jsou disjunktní. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a < b$. Označme $\sigma = \sup([a, b] \cap F_1)$. Z definice suprema vyplývá, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $x \in F_1$ s vlastností $\sigma - \varepsilon < x \le \sigma$. Poněvadž F_1 je uzavřená v A, platí $\sigma \in F_1$. Odtud plyne, že $\sigma < b$. Potom musí platit $(\sigma, b] \subset F_2$. Množina F_2 je uzavřená v A, a proto odtud plyne, že platí $\sigma \in F_2$. Máme tedy $\sigma \in F_1 \cap F_2$, což je spor. ■

Komponenta.

9.9.11. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že $M \subset P$ je **komponenta** (P, ϱ), jestliže M je maximální souvislá množina. **Komponentou** množiny $A \subset P$ rozumíme komponentu prostoru (A, ϱ).

9.9.12. Maximalitu z předchozí definice uvažujeme vzhledem k uspořádání inkluzí. Množina M je tedy komponentou prostoru P, jestliže je souvislá a pro každou souvislou množinu $B \subset P$ splňující $A \subset B$ platí $A = B$.

9.9.13. Věta. Nechť (P, ϱ) je neprázdný metrický prostor a $\mathcal{S}$ je množina všech komponent P. Potom $\mathcal{S}$ obsahuje pouze neprázdné uzavřené množiny, je disjunktní a $\bigcup \mathcal{S} = P$.

Důkaz. Neprázdnost. Jestliže $S \in \mathcal{S}$, potom je S neprázdná. Jinak bychom totiž obdrželi spor s maximalitou, protože P je neprázdný, existuje $x \in P$ a množina $\{x\}$ je souvislá podle Příkladu 9.9.2.

Uzavřenost. Pokud $S \in \mathcal{S}$, potom $\overline{S}$ je souvislá podle Věty 9.9.9(b) a $S \subset \overline{S}$. Vzhledem k maximalitě musí být $S = \overline{S}$, a tedy je S uzavřená.

Disjunktnost. Předpokládejme pro spor, že existují $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$, $S_1 \neq S_2$, $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$. Potom je podle Věty 9.9.9(c) množina $S_1 \cup S_2$ souvislá. Dále platí $S_1 \subsetneq S_1 \cup S_2$ nebo $S_2 \subsetneq S_1 \cup S_2$. V prvním případě dostáváme spor s maximalitou komponenty S_1 a ve druhém s maximalitou komponenty S_2.

Rovnost $\bigcup \mathcal{S} = P$. Zvolme $x \in P$. Definujme pomocný systém

$$\mathcal{A} = \{A \subset P;\ A \text{ je souvislá a } x \in A\}.$$

Platí $\{x\} \in \mathcal{A}$, a tedy množina $\bigcup \mathcal{A}$ je neprázdná. Množina $\bigcup \mathcal{A}$ je souvislá podle Věty 9.9.9(c) a je zřejmě maximální. Platí tedy $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{S}$, a tedy $x \in \bigcup \mathcal{S}$. ■

Křivková souvislost.

9.9.14. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že zobrazení $\gamma \colon [a, b] \to P$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, je **(parametrická) křivka**, jestliže je spojité.

9.9.15. Křivkou intuitivně rozumíme čáru v rovině nebo prostoru, případně v nějakém obecnějším prostoru. Matematicky by se tedy mělo jednat o podmnožinu metrického prostoru s jistými vlastnostmi. V předchozí definici však křivkou rozumíme spojité *zobrazení*. Tento přístup má své výhody, jak bude vidět později, zejména pak v Kapitole 13.

9.9.16. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že P je **křivkově souvislý**, jestliže pro každé $x, y \in P$ existuje křivka $\gamma \colon [0, 1] \to P$ taková, že $\gamma(0) = x$ a $\gamma(1) = y$. Množina $A \subset P$ je **křivkově souvislá** v P, jestliže metrický prostor (A, ϱ) je křivkově souvislý.

9.9.17. Věta. Nechť (P, ϱ) je křivkově souvislý metrický prostor. Potom je P souvislý.

Důkaz. Předpokládejme pro spor, že P není souvislý. Potom existují neprázdné disjunktní množiny G_1, G_2 otevřené v P splňující $P = G_1 \cup G_2$. Zvolme body $x \in G_1$ a $y \in G_2$. Pak existuje spojité zobrazení $f \colon [0, 1] \to P$ taková, že $f(0) = x$ a $f(1) = y$. Potom ale $[0, 1] = f^{-1}(G_1) \cup f^{-1}(G_2)$. Ze spojitosti zobrazení f a Věty 9.4.6 plyne, že množiny $f^{-1}(G_1)$ a $f^{-1}(G_2)$ jsou otevřené v prostoru $[0, 1]$. Zároveň jsou zřejmě disjunktní a neprázdné. Interval $[0, 1]$ je tedy nesouvislý. To je ale spor s Větou 9.9.10. ■

9.9.18. Věta. Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor a $G \subset X$ je otevřená. Potom je G souvislá právě tehdy, když je křivkově souvislá.

Důkaz. $\Rightarrow$ Pokud je G prázdná, pak implikace zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že $G \neq \emptyset$. Zvolme $x \in G$ libovolně a definujme množinu A jako množinu všech bodů $y \in G$, pro které existuje spojité zobrazení $f \colon [0, 1] \to G$ splňující $f(0) = x$ a $f(1) = y$.

Množina A je otevřená v G. Předpokládejme $y \in A$, pak existuje $r > 0$ takové, že $B(y, r) \subset G$. Nechť $z \in B(y, r)$. Definujme zobrazení $g\colon [0, 1] \to X$ předpisem

$$g(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{pro } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ y + (2t - 1)(z - y) & \text{pro } t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Je snadné zkontrolovat, že zobrazení g je spojité. Platí také $g\big([0, \frac{1}{2}]\big) = f\big([0, 1]\big) \subset G$ a $g\big((\frac{1}{2}, 1]\big) \subset B(y, r)$. Máme tedy $g\big([0, 1]\big) \subset G$. Protože platí $g(0) = f(0) = x$ a $g(1) = z$, dostáváme $z \in A$. Ukázali jsme tak $B(y, r) \subset A$, a tedy A je otevřená v X, takže je také otevřená v G.

Množina A je uzavřená v G. Mějme posloupnost $\{x_n\}$ prvků množiny A, která konverguje k prvku $z \in G$. Nalezneme $r > 0$ takové, že $B(z, r) \subset G$. Poněvadž $\lim x_n = z$, existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $x_n \in B(z, r)$. Díky podmínce $x_n \in A$ nalezneme spojité zobrazení $f\colon [0, 1] \to X$ splňující $f(0) = z$ a $f(1) = x_n$. Definujme zobrazení $g\colon [0, 1] \to X$ předpisem

$$g(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{pro } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ x_n + (2t - 1)(z - y) & \text{pro } t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Je snadné zkontrolovat, že zobrazení g je spojité a že platí $g\big([0, \frac{1}{2}]\big) = f\big([0, 1]\big) \subset G$, $g\big((\frac{1}{2}, 1]\big) \subset B(z, r) \subset G$, $g(0) = x$ a $g(1) = z$. Odtud plyne $z \in A$, čímž je ověřena uzavřenost A v G.

Množina A je neprázdná, neboť $x \in A$, o čemž svědčí konstantní zobrazení $f(t) = x, t \in [0, 1]$. To znamená, že A je neprázdná obojetná množina v G. Množina G je souvislá, takže musí platit $A = G$. Tím je ověřena definice křivkové souvislosti pro G.

$\Leftarrow$ Tato implikace plyne z Věty 9.9.17. ■

9.9.19. Příklad. Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor a $A \subset X$ je konvexní. Potom je A křivkově souvislá, a tedy i souvislá.

Řešení. Zvolme $a, b \in A$. Potom zobrazení $\varphi\colon [0, 1] \to X$ definované předpisem $\varphi(t) = (1 - t)a + tb$ má díky konvexitě množiny A hodnoty obsažené v A. Dále platí $\varphi(0) = a$ a $\varphi(1) = b$. Zbývá ukázat, že φ je spojité. Zvolme $t_0 \in [0, 1]$. Potom pro každé $t \in [0, 1]$ platí

$$\begin{aligned} \|\varphi(t) - \varphi(t_0)\| &= \|(1 - t)a + tb - (1 - t_0)a - t_0 b\| \\ &= \|(t - t_0)(b - a)\| = |t - t_0| \cdot \|b - a\|. \end{aligned}$$

Odtud již plyne spojitost zobrazení φ. ♣

9.9.20. Příklad. Dokažte, že množina A, která je definována jako graf funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, 0], \\ \sin\big(\frac{1}{x}\big) & \text{pro } x \in (0, \infty), \end{cases}$$

je souvislou podmnožinou prostoru $\mathbb{R}^2$, která ale není křivkově souvislá.

Řešení. Souvislost. Položme $A_1 = \{[x, f(x)] \in \mathbb{R}^2;\ x \in (0,\infty)\}$. Definujme zobrazení $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ předpisem $g(x) = [x, f(x)]$. Potom je zobrazení g spojité podle Věty 9.5.4 a $g\big((0,\infty)\big) = A_1$. Množina A_1 je tedy souvislá, neboť je spojitým obrazem souvislé množiny (Věta 9.9.9(a)).

Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $x_n = \frac{1}{n\pi}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $[x_n, 0] \in A_1$ a $\lim x_n = 0$. Odtud plyne, že $[0,0] \in \overline{A_1}$. Označíme-li tedy $A_2 = A_1 \cup \{[0,0]\}$, pak dostaneme $A_1 \subset A_2 \subset \overline{A_1}$. Podle Věty 9.9.9(b) je tudíž A_2 souvislá v prostoru $\mathbb{R}^2$.

Konečně označme $A_3 = (-\infty, 0] \times \{0\}$. Potom je A_3 zřejmě souvislá množina v $\mathbb{R}^2$ a navíc platí $A_2 \cap A_3 = \{[0,0]\}$, takže $A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$. Podle Věty 9.9.9(c) je tedy také množina $A = A_2 \cup A_3$ souvislá v $\mathbb{R}^2$.

Neplatnost křivkové souvislosti. Předpokládejme pro spor, že množina A je navíc křivkově souvislá v $\mathbb{R}^2$. Položme $a = [0,0]$ a $b = [\frac{1}{\pi}, 0]$. Pak $a, b \in A$ a existuje tedy spojité zobrazení $h\colon [0,1] \to A$ takové, že $h(0) = a$ a $h(1) = b$.

Tvrdíme, že pro každé $x \in [0, \frac{1}{\pi}]$ existuje $t \in [0,1]$ takové, že $h(t) = [x, f(x)]$. Kdyby tomu tak nebylo, pak by platilo $h\colon [0,1] \to A_4$, kde $A_4 = A \setminus \{[x, f(x)]\}$. Protože množiny $(-\infty, x) \times \mathbb{R}$ a $(x,\infty) \times \mathbb{R}$ jsou otevřené v $\mathbb{R}^2$, jsou podle Věty 9.3.32 množiny $A_4 \cap \big((-\infty, x) \times \mathbb{R}\big)$ a $A_4 \cap \big((x,\infty) \times \mathbb{R}\big)$ otevřené v A_4 a díky spojitosti zobrazení h a Větě 9.4.6 jsou také množiny $h^{-1}\big(A_4 \cap ((-\infty, x) \times \mathbb{R})\big)$ a $h^{-1}\big(A_4 \cap ((x,\infty) \times \mathbb{R})\big)$ otevřené v $[0,1]$. Protože jsou také zřejmě neprázdné a disjunktní a interval $[0,1]$ je jejich sjednocením, plyne odtud, že interval $[0,1]$ je nesouvislý, což je spor s Větou 9.9.10. Tím je dokázáno naše tvrzení.

Speciálně tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $t_n \in [0,1]$ takové, že

$$h(t_n) = \big[(\tfrac{\pi}{2} + 2n\pi)^{-1}, 1\big].$$

Zřejmě platí $\lim h(t_n) = [0,1] \in \mathbb{R}^2$. Podle Vět 9.6.12 a 9.6.3 je množina $h([0,1])$ kompaktní v $\mathbb{R}^2$. Podle Věty 9.6.6 je tato množina uzavřená v $\mathbb{R}^2$. Podle již dokázaného tvrzení obsahuje množina $h([0,1])$ posloupnost $\big\{[(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)^{-1}, 1]\big\}_{n=1}^{\infty}$. Odtud plyne $[0,1] \in A$, což je spor. ♣

9.9.21. Věta. Nechť X je normovaný lineární prostor a $G \subset X$ je otevřená. Potom komponenty G jsou otevřené v X.

Důkaz. Nechť $S \subset X$ je komponentou množiny G. Zvolme $x \in S$. Díky otevřenosti G nalezneme $\varepsilon > 0$ takové, že $B(x,\varepsilon) \subset G$. Množina $B(x,\varepsilon)$ je souvislá podle Příkladu 9.9.19, a tedy $S \cup B(x,\varepsilon)$ je souvislá podle Věty 9.9.9(c). Z maximality S ovšem vyplývá $B(x,\varepsilon) \subset S$. To znamená, že bod x je vnitřním bodem S. Bod x byl zvolen libovolně v množině S, a tedy S je otevřená. ■

9.10. Teoretické příklady k metrickým prostorům

Teoretické příklady jsou rozděleny do následujících pododdílů:

- základní pojmy,

- spojitost,
- úplné prostory,
- kompaktní prostory,
- Cantorův prostor a Cantorovo diskontinuum,
- souvislé a křivkově souvislé prostory.

Základní pojmy.

9.10.1. Příklad. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $x, y, u, v \in P$. Dokažte, že platí

$$|\varrho(x, y) - \varrho(u, v)| \leq \varrho(x, u) + \varrho(y, v).$$

Řešení. Díky trojúhelníkové nerovnosti (9.1.1(c)) a symetrii (9.1.1(b)) platí

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, u) + \varrho(u, v) + \varrho(v, y) = \varrho(x, u) + \varrho(u, v) + \varrho(y, v),$$

takže platí

$$\varrho(x, y) - \varrho(u, v) \leq \varrho(x, u) + \varrho(y, v).$$

Podobně obdržíme nerovnost

$$\varrho(u, v) \leq \varrho(u, x) + \varrho(x, y) + \varrho(y, v) = \varrho(x, u) + \varrho(x, y) + \varrho(y, v),$$

takže také platí

$$\varrho(u, v) - \varrho(x, y) \leq \varrho(x, u) + \varrho(y, v).$$

Tvrzení plyne z kombinace předcházejících dvou odhadů. ♣

9.10.2. Příklad. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $\{x_n\}$ je konvergentní posloupnost prvků P s limitou $x \in P$ a $\{y_n\}$ je konvergentní posloupnost prvků P s limitou $y \in P$. Dokažte, že $\varrho(x_n, y_n) \to \varrho(x, y)$.

Řešení. Podle Příkladu 9.10.1 pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|\varrho(x_n, y_n) - \varrho(x, y)| \leq \varrho(x_n, x) + \varrho(y_n, y).$$

Podle předpokladu konverguje pravá strana k nule, a tedy i levá. Odtud plyne tvrzení. ♣

9.10.3. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $x \in P$ a $r > 0$. Množinu $\overline{B}(x, r)$ definovanou předpisem

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in P;\ \varrho(x, y) \leq r\}$$

nazýváme **uzavřenou koulí se středem** x **a poloměrem** r.

9.10.4. Příklad. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $x \in P$ a $r > 0$. Dokažte, že uzavřená koule $\overline{B}(x, r)$ je uzavřená množina.

Řešení. Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je posloupnost bodů $\overline{B}(x, r)$ konvergující k $z \in P$. Potom $\varrho(x, z) \leq \varrho(x, x_n) + \varrho(x_n, z) \leq r + \varrho(x_n, z)$. Pravá strana nerovnosti konverguje k r, a proto $\varrho(x, z) \leq r$, neboli $x \in \overline{B}(x, r)$. Množina $\overline{B}(x, r)$ je tedy uzavřená. ♣

9.10.5. Příklad. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $x \in P$ a $r > 0$. Dokažte, že platí $\overline{B(x, r)} \subset \overline{B}(x, r)$. Ukažte, že opačná inkluze obecně neplatí.

Řešení. Platnost inkluze. Protože platí $B(x,r) \subset \overline{B}(x,r)$ a $\overline{B}(x,r)$ je uzavřená množina podle Příkladu 9.10.4, vyplývá dokazovaná inkluze z Věty 9.3.28(g).

Protipříklad na opačnou inkluzi. Nechť P je diskrétní metrický prostor obsahující alespoň dva různé body. Zvolme $x \in P$. Potom $B(x,1) = \overline{B(x,1)} = \{x\}$, ale $\overline{B}(x,1) = P$. Protože P má alespoň dva různé body, inkluze $\overline{B}(x,1) \subset \overline{B(x,1)}$ neplatí. ♣

9.10.6. Příklad. Definujme zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^* \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ předpisem

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{pro } x = -\infty, \\ \operatorname{arctg} x & \text{pro } x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\pi}{2} & \text{pro } x = \infty \end{cases}$$

a funkci $\tau\colon \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \to [0,\infty)$ předpisem $\tau(u,v) = |\varphi(u) - \varphi(v)|$.

(a) Dokažte, že $(\mathbb{R}^*, \tau)$ je metrický prostor.
(b) Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}^*$. Dokažte, že platí $\lim a_n = A$ v obvyklém smyslu právě tehdy, když $a_n \xrightarrow{\tau} A$.

Řešení. (a) Zřejmě pro každá $x, y \in \mathbb{R}^*$ platí $\tau(x,y) \in [0,\infty)$. Dále platí $\tau(x,y) = 0$ právě tehdy, když $\varphi(x) = \varphi(y)$. Zobrazení φ je prosté, což dává platnost podmínky (a) v Definici 9.1.1. Podmínka (b) v Definici 9.1.1 je zřejmě splněna. Ověřme ještě trojúhelníkovou nerovnost. Nechť $x, y, z \in \mathbb{R}^*$. Potom s pomocí trojúhelníkové nerovnosti pro reálná čísla dostaneme

$$\begin{aligned} \tau(x,z) &= |\varphi(x) - \varphi(z)| \le |\varphi(x) - \varphi(y)| + |\varphi(y) - \varphi(z)| \\ &\le \tau(x,y) + \tau(y,z). \end{aligned}$$

Tím je ověřeno, že $(\mathbb{R}^*, \tau)$ tvoří metrický prostor.

(b) $\Rightarrow$ Platí $\lim \varphi(a_n) = \varphi(A)$ díky spojitosti funkce arctg v případě, že $A \in \mathbb{R}$, a díky $\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg} x = \pm\frac{\pi}{2}$ v případě $A = \pm\infty$. Potom $\lim \tau(a_n, A) = 0$, a tedy $a_n \xrightarrow{\tau} A$.

$\Leftarrow$ Protože $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel, platí $\operatorname{tg}(\varphi(a_n)) = a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Poněvadž $\lim \varphi(a_n) = \varphi(A)$, platí $\lim a_n = A$ díky spojitosti funkce tg v případě, že $A \in \mathbb{R}$, a díky $\lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = \pm\infty$ v případě $A = \pm\infty$. ♣

9.10.7. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $\{a_n\}$ je posloupnost prvků P a $x \in P$. Řekneme, že x je **hromadná hodnota** posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ z posloupnosti $\{a_n\}$ taková, že platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = x$. Množinu všech hromadných hodnot posloupnosti $\{a_n\}$ značíme $H(\{a_n\})$.

9.10.8. Uveďme předchozí definici do souvislosti s Definicí 2.4.17. V druhé zmíněné pracujeme s posloupnostmi reálných čísel a jako hromadné hodnoty připouštíme i $\pm\infty$, tedy prvky, které nepatří do $\mathbb{R}$. Symbol $H(\{a_n\})$ má pro posloupnosti reálných čísel tedy dva různé významy podle toho, zda hromadné hodnoty uvažujeme pouze v $\mathbb{R}$ (Definice 9.10.7) nebo v $\mathbb{R}^*$ (Definice 2.4.17). Je tedy třeba vědět v jakém smyslu uvedený symbol používáme. V Příkladech 9.10.9, 9.10.10 to bude

Definice 9.10.7, v Příkladu 9.10.11 se pak na vztah těchto definic podíváme ještě jednou.

9.10.9. Příklad. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $\{a_n\}$ je posloupnost prvků z P. Dokažte, že množina všech hromadných hodnot $H(\{a_n\})$ je uzavřená v P.

Řešení. Předpokládejme, že $\{x^n\}$ je posloupnost prvků z $H(\{a_n\})$ splňující $\lim x^n = x \in P$. Pro každé n existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{m_j^n\}_{j=1}^{\infty}$ taková, že $\lim_{j\to\infty} a_{m_j^n} = x^n$. Nalezneme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ takovou, že pro každé $i \in \mathbb{N}$ platí $\varrho(a_{k_i}, x^i) < \frac{1}{i}$. Postupujeme následovně. Prvek $k_1 \in \mathbb{N}$ zvolme tak, aby platilo $\varrho(a_{k_1}, x^1) < 1$. To je možné, neboť $\lim_{j\to\infty} a_{m_j^1} = x^1$. Máme-li již zkonstruován prvek k_i, potom k_{i+1} nalezneme tak, že použijeme $\lim_{j\to\infty} a_{m_j^{i+1}} = x^{i+1}$ a nalezneme $l \in \mathbb{N}$ splňující $m_l^{i+1} > k_i$ a $\varrho(a_m^{i+1}, x^{i+1}) < \frac{1}{i+1}$. Položíme $k_{i+1} = m_l^{i+1}$, čímž je konstrukce hledané posloupnosti provedena. Pak platí

$$\varrho(a_{k_i}, x) \leq \varrho(a_{k_i}, x^i) + \varrho(x^i, x) \leq \frac{1}{i} + \varrho(x^i, x).$$

Poněvadž $\lim x^i = x$, dostáváme $\lim a_{k_i} = x$. Máme tedy $x \in H(\{a_n\})$. Tím je důkaz proveden. ♣

9.10.10. Příklad. Nechť (P, ϱ) je separabilní metrický prostor a $M \subset P$ je neprázdná a uzavřená. Potom existuje posloupnost $\{a_n\}$ prvků P taková, že $H(\{a_n\}) = M$.

Řešení. Podle Věty 9.8.13 je separabilní i prostor (M, ϱ). Nalezneme neprázdnou spočetnou množinu $D \subset M$, která je hustá v (M, ϱ). Dále nalezneme posloupnost $\{y_n\}$, která splňuje $\{y_n;\ n \in \mathbb{N}\} = D$. Definujme novou posloupnost

$$y_1, \quad y_1, y_2, \quad y_1, y_2, y_3, \quad y_1, y_2, y_3, y_4, \quad \dots,$$

a označme ji $\{a_n\}$. V této posloupnosti se každý prvek množiny D vyskytuje nekonečněkrát. Předpokládejme, že $z \in D$. Pak existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}$ taková, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $a_{n_k} = z$. Potom zřejmě $z \in H(\{a_n\})$. Platí tedy $D \subset H(\{a_n\})$. Díky uzavřenosti množiny M platí $H(\{a_n\}) \subset M$. Potom máme

$$M = \overline{D} \subset \overline{H(\{a_n\})} \subset \overline{M} = M.$$

Množina $H(\{a_n\})$ je podle Příkladu 9.10.9 uzavřená, takže dostáváme $H(\{a_n\}) = M$. ♣

9.10.11. Příklad. Nechť $M \subset \mathbb{R}^*$ je neprázdná uzavřená množina v prostoru $(\mathbb{R}^*, \tau)$, kde τ je metrika zavedená v Příkladu 9.10.6. Dokažte, že pak existuje posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ taková, že množina hromadných hodnot posloupnosti $\{a_n\}$ zavedená v Definici 2.4.17 je rovna množině M.

Řešení. Prostor $(\mathbb{R}^*, \tau)$ je separabilní, neboť množina racionálních čísel je hustá v $(\mathbb{R}^*, \tau)$. Podle Příkladu 9.10.10 tedy existuje posloupnost $\{b_n\}$ prvků $\mathbb{R}^*$ splňující $H(\{b_n\}) = M$. Naším úkolem je však nalézt posloupnost reálných čísel s uvedenou vlastností, takže příklad ještě není dořešen, protože posloupnost $\{b_n\}$ může obsahovat prvky ∞ a $-\infty$. Hledanou posloupnost zkonstruujeme následovně. Množina $\mathbb{R}$ je hustá v prostoru $(\mathbb{R}^*, \tau)$. Díky tomu pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme reálné číslo a_n splňující $\tau(a_n, b_n) < \frac{1}{n}$. Nyní stačí ukázat, že $H(\{a_n\}) = H(\{b_n\})$.

Předpokládejme, že $z \in H(\{a_n\})$. Pak existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}$ taková, že $a_{n_k} \xrightarrow{\tau} z$. Potom

$$\tau(z, b_{n_k}) = \tau(z, a_{n_k}) + \tau(a_{n_k}, b_{n_k}) < \tau(z, a_{n_k}) + \frac{1}{n_k}$$

pro každé $k \in \mathbb{N}$. Odtud plyne $b_{n_k} \xrightarrow{\tau} z$, takže $b_{n_k} \to z$, a proto $z \in H(\{b_n\})$. Opačnou inkluzi lze dokázat obdobně. ♣

9.10.12. Příklad. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $\{F_n\}$ je posloupnost uzavřených množin v P splňující $F_{n+1} \subset F_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $x_n \in F_n$, přičemž posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k nějakému bodu $x \in P$. Dokažte, že $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$.

Řešení. Nechť $k \in \mathbb{N}$ je dáno. Pak $\{x_n\}_{n=k}^{\infty}$ je posloupnost bodů v F_k konvergující k x. Protože množina F_k je uzavřená, platí $x \in F_k$. Tedy $x \in F_k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, a proto $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$. ♣

9.10.13. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a E, F jsou jeho podmnožiny. Potom nezáporný prvek $\operatorname{dist}(E, F)$ množiny $\mathbb{R}^*$ definovaný předpisem

$$\operatorname{dist}_\rho(E, F) = \inf\{\varrho(x, y);\ x \in E,\ y \in F\}$$

nazýváme **vzdáleností množin** E **a** F. Zde inf uvažujeme na množině $[0, \infty) \cup \{\infty\}$, a proto $\inf \emptyset = 0$. Místo symbolu $\operatorname{dist}_\rho(E, F)$ píšeme někdy $\rho(E, F)$, případně také jen $\operatorname{dist}(E, F)$.

9.10.14. Příklad. Nalezněte uzavřené disjunktní množiny $E, F \subset \mathbb{R}$ takové, že $\operatorname{dist}(E, F) = 0$.

Řešení. Položme $E = \mathbb{N}$ a $F = \{n + \frac{1}{n+1};\ n \in \mathbb{N}\}$. Potom E a F jsou disjunktní množiny v $\mathbb{R}$ a zřejmě platí $\operatorname{dist}(E, F) = 0$. Dále platí

$$\mathbb{R} \setminus E = (-\infty, 1) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (n, n+1)$$

a navíc podle Příkladu 9.3.8 je každý z intervalů $(-\infty, 1)$ a $(n, n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, otevřenou množinou v $\mathbb{R}$. Podle Věty 9.3.11(b) je tedy také $\mathbb{R} \setminus E$ otevřená množina v $\mathbb{R}$, takže podle Věty 9.3.13 je množina E uzavřená v $\mathbb{R}$. Obdobně lze dokázat, že také F je uzavřená množina v $\mathbb{R}$. ♣

Příklad 9.10.14 ukazuje, že dvě disjunktní uzavřené množiny mohou mít nulovou vzdálenost. Tato situace nemůže nastat, jestliže je alespoň jedna z množin kompaktní. Tento fakt bude podrobně dokázán v Příkladu 9.10.16.

9.10.15. Příklad. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $K, L \subset P$ jsou kompaktní neprázdné podmnožiny P. Dokažte, že existují $x \in K$ a $y \in L$ splňující $\operatorname{dist}(K, L) = \varrho(x, y)$.

Řešení. Nechť $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ jsou posloupnosti v K, respektive v L, takové, že

$$\lim \varrho(x_n, y_n) = \operatorname{dist}(K, L).$$

Díky kompaktnosti K vybereme podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$ konvergující k nějakému bodu $x \in K$. Dále využijeme kompaktnost L k nalezení podposloupnosti $\{y_{n_{k_j}}\}$ konvergující k nějakému $y \in L$. Pak ale $\lim_{j\to\infty} x_{n_{k_j}} \to x$, a tedy díky Příkladu 9.10.2 máme

$$\operatorname{dist}(K, L) = \lim_{j\to\infty} \varrho(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) = \varrho(x, y).$$

♣

9.10.16. Příklad. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $K \subset P$ je kompaktní, $F \subset P$ je uzavřená a $\operatorname{dist}(K, F) = 0$. Dokažte, že potom $K \cap F \neq \emptyset$.

Řešení. Nalezneme posloupnost $\{x_n\}$ prvků F a posloupnost $\{y_n\}$ prvků K takové, že

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, y_n) = \operatorname{dist}(K, F) = 0.$$

Protože K je kompaktní, lze z $\{y_n\}$ vybrat konvergentní podposloupnost $\{y_{n_k}\}$ s limitou $y \in K$. Potom

$$0 \le \varrho(x_{n_k}, y) \le \varrho(x_{n_k}, y_{n_k}) + \varrho(y_{n_k}, y)$$

a

$$\lim_{k\to\infty} \big(\varrho(x_{n_k}, y_{n_k}) + \varrho(y_{n_k}, y)\big) = 0.$$

Pak platí $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = y$. Protože F je uzavřená, platí $y \in F$. Tedy $y \in K \cap F$. ♣

9.10.17. Příklad. Nalezněte metrický prostor (P, ϱ), kompaktní množinu $K \subset P$ a uzavřenou podmnožinu $F \subset P$, jejichž vzdálenost není realizována, tedy neexistují $x \in K$ a $y \in F$ taková, že $\operatorname{dist}(K, F) = \varrho(x, y)$.

Řešení. Uvažujme Banachův prostor $P = c_0$. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme e^n n-tý kanonický vektor v c_0, tj. $e^n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, kde 1 je na n-tém místě. Položme $F = \big\{(1 + \frac{1}{n})e^n;\ n \in \mathbb{N}\big\}$ a $K = \{0\}$. Pak pro každá $n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$, platí

$$\|(1 + \tfrac{1}{n})e^n - (1 + \tfrac{1}{m})e^m\| = \max\big\{1 + \tfrac{1}{n}, 1 + \tfrac{1}{m}\big\} > 1.$$

Odtud plyne, že každá posloupnost prvků množiny F je od nějakého indexu konstantní, a má tedy limitu v F. Množina F je tedy uzavřená v c_0. Dále platí

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(K, F) &= \operatorname{dist}(0, F) = \inf\big\{\|(1 + \tfrac{1}{n})e^n\|;\ n \in \mathbb{N}\big\}\\ &= \inf\big\{1 + \tfrac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\big\} = 1,\end{aligned}$$

ale $\|0 - (1 + \frac{1}{n})e^n\| = 1 + \frac{1}{n} > 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Neexistuje tedy $x \in F$ splňující $\|0 - x\| = \operatorname{dist}(0, F) = 1$. ♣

9.10.18. Příklad. Nechť $K \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná kompaktní množina a $F \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná uzavřená množina. Dokažte, že existují body $x \in K$ a $y \in F$ splňující $\operatorname{dist}(K, F) = \varrho(x, y)$.

Řešení. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků z K a $\{y_n\}$ je posloupnost z F, které splňují $\lim \varrho(x_n, y_n) = \operatorname{dist}(K, F)$. Díky kompaktnosti K existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$ konvergující k nějakému $x \in K$.

Dále platí, že $\{y_{n_k}\}$ je omezená. To plyne z následující úvahy. Nechť $k_0 \in \mathbb{N}$ je takové, že pro každé $k \geq k_0$ platí $\varrho(x_{n_k}, y_{n_k}) < \operatorname{dist}(K, F) + 1$ a $\varrho(x_{n_k}, x) < 1$. Pak pro každé $k \geq k_0$ platí

$$\varrho(y_{n_k}, x) \leq \varrho(y_{n_k}, x_{n_k}) + \varrho(x_{n_k}, x) < \operatorname{dist}(K, F) + 1 + 1.$$

Z tohoto odhadu již plyne omezenost $\{y_{n_k}\}$.

Díky Větě 9.6.9 lze z posloupnosti $\{y_{n_k}\}$ vybrat podposloupnost $\{y_{n_{k_j}}\}$ konvergující k nějakému $y \in \mathbb{R}^n$. Z uzavřenosti F dostáváme $y \in F$. Proto díky Příkladu 9.10.2 máme

$$\operatorname{dist}(K, F) = \lim_{j\to\infty} \varrho(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) = \varrho(x, y).$$

♣

9.10.19. Příklad. Nechť (P, ϱ) je kompaktní neprázdný metrický prostor. Dokažte, že existují $x, y \in K$ splňující $\operatorname{diam} P = \varrho(x, y)$.

Řešení. Prostor P je omezený (Věta 9.6.8), a tedy $\operatorname{diam} P < \infty$. Nalezneme posloupnosti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ v P splňující $\lim \varrho(x_n, y_n) = \operatorname{diam} P$. Díky kompaktnosti P lze z $\{x_n\}$ vybrat podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ konvergující k nějakému bodu $x \in P$. Podobně vybereme podposloupnost $\{y_{n_{k_j}}\}$ posloupnosti $\{y_{n_k}\}$ konvergující k bodu $y \in P$. Pak máme díky Příkladu 9.10.2

$$\operatorname{diam} P = \lim_{j\to\infty} \varrho(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) = \varrho(x, y).$$

♣

9.10.20. Příklad. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Dokažte, že potom platí $\operatorname{Int} A = P \setminus \overline{P \setminus A}$.

Řešení. Protože $A = P \setminus (P \setminus A) \supset P \setminus \overline{P \setminus A}$ a poslední množina je otevřená, dostáváme podle Věty 9.3.15 inkluzi $\operatorname{Int} A \supset P \setminus \overline{P \setminus A}$. Dále platí $P \setminus A \subset P \setminus \operatorname{Int} A$ a množina $P \setminus \operatorname{Int} A$ je uzavřená. Platí tedy $\overline{P \setminus A} \subset P \setminus \operatorname{Int} A$. Odtud plyne inkluze $\operatorname{Int} A \subset P \setminus \overline{P \setminus A}$, čímž je rovnost dokázána. ♣

9.10.21. Příklad. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Dokažte, že uzávěr množiny (a, b) v prostoru $\mathbb{R}$ má tvar

$$\overline{(a, b)} = \begin{cases} [a, b], & \text{pokud } a, b \in \mathbb{R}, \\ (-\infty, b], & \text{pokud } a = -\infty,\ b \in \mathbb{R}, \\ [a, \infty), & \text{pokud } a \in \mathbb{R},\ b = \infty, \\ \mathbb{R}, & \text{pokud } a = -\infty,\ b = \infty. \end{cases}$$

Řešení. Jestliže $a, b \in \mathbb{R}$, pak obdobným postupem jako v řešení Příkladu 9.3.21 lze dokázat, že $\partial(a,b) = \{a,b\}$. Odtud plyne $\overline{(a,b)} = [a,b]$.

Předpokládejme, že $a = -\infty$ a $b \in \mathbb{R}$. Množiny $(-\infty, b)$ a (b, ∞) jsou otevřené, a proto pouze bod b může být hraničním bodem množiny $(-\infty, b)$. Pro každé $r > 0$ zřejmě platí $(b-r, b+r) \cap (-\infty, b) \neq \emptyset$ a $(b-r, b+r) \cap (b, \infty) \neq \emptyset$. Tak dostáváme $\partial(-\infty, b) = \{b\}$. Jestliže $a \in \mathbb{R}$ a $b = \infty$, pak obdobně dostaneme $\partial(a, \infty) = \{a\}$. Tak obdržíme druhou a třetí rovnost úlohy.

Jestliže $a = -\infty$ a $b = \infty$ je tvrzení zřejmé. ♣

9.10.22. Příklad. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $A \subset P$ a $B \subset P$. Dokažte, že potom platí $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, přičemž tato inkluze může být vlastní.

Řešení. Podle Věty 9.3.28(b) platí $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$ a $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$, takže $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Dokážeme, že inkluze může být vlastní pomocí následujícího příkladu. Nechť $P = \mathbb{R}$, $A = (0,1)$ a $B = (1,2)$. Potom $\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset$, ale $\overline{A} = [0,1]$ a $\overline{B} = [1,2]$, takže $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\} \neq \emptyset$. ♣

9.10.23. Příklad (Cantor–Bendixson[5]). Nechť (P, ϱ) je separabilní metrický prostor. Dokažte, že potom existuje spočetná otevřená množina $U \subset P$ a uzavřená množina $F \subset P$ bez izolovaných bodů takové, že $P = F \cup U$.

Řešení. Prostor P je separabilní, takže podle Věty 9.8.12 existuje spočetná báze otevřených množin $\mathcal{B}$. Položme $U = \bigcup\{B \in \mathcal{B};\ B \text{ je spočetná}\}$ a $F = P \setminus U$. Množina U je otevřená, neboť je sjednocením otevřených množin. Je také spočetná, neboť je spočetným sjednocením spočetných množin. Množina F je uzavřená, neboť je doplňkem otevřené množiny. Zbývá dokázat, že F nemá izolovaný bod. Pro spor předpokládejme, že $x \in F$ je izolovaným bodem množiny F. Existuje tedy $r > 0$ takové, že $B(x,r) \cap (F \setminus \{x\}) = \emptyset$. Pak existuje $B \in \mathcal{B}$ taková, že $x \in B \subset B(x,r)$. Pro množinu B platí $B = (B \cap U) \cup (B \setminus U)$. Množina $B \cap U$ je spočetná, neboť je podmnožinou spočetné množiny U. Dále platí $B \setminus U = B \cap F = \{x\}$, a tedy je množina $B \setminus U$ také spočetná. Dostáváme tedy, že množina B je spočetná, a proto $x \in B \subset U$, což je spor. ♣

Spojitost.

9.10.24. Příklad. Dokažte, že spojitý obraz uzavřené množiny nemusí být uzavřená množina a spojitý obraz otevřené množiny nemusí být otevřená množina.

Řešení. Funkce $\operatorname{arctg}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce zobrazující uzavřenou množinu $\mathbb{R}$ na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, což není uzavřená množina v $\mathbb{R}$. Funkce $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce zobrazující otevřenou množinu $\mathbb{R}$ na $[-1,1]$, což není otevřená množina v $\mathbb{R}$. ♣

9.10.25. Příklad. Nechť (P, ϱ), (Q, σ) jsou metrické prostory, $D \subset P$ je hustá a $f, g\colon P \to Q$ jsou spojitá zobrazení splňující $f(x) = g(x)$ pro $x \in D$. Dokažte, že $f = g$ na P.

[5] Ivar Otto Bendixson (1861–1935)

Řešení. Definujme funkci $h\colon P \to \mathbb{R}$ předpisem $h(x) = \sigma(f(x), g(x))$, $x \in P$. Díky Příkladu 9.10.1 platí pro každé $x, y \in P$

$$\begin{aligned}|h(x) - h(y)| &= |\sigma(f(x), g(x)) - \sigma(f(y), g(y))| \\ &\leq \sigma(f(x), f(y)) + \sigma(g(x), g(y)).\end{aligned}$$

Odtud díky spojitosti zobrazení f a g dostáváme spojitost funkce h. Označme $X = \{x \in P;\ f(x) = g(x)\}$. Platí $X = h^{-1}(\{0\})$. Podle Věty 9.4.6 je množina X uzavřená. Poněvadž platí $D \subset X$ a D je hustá v P, obdržíme $X = P$. Máme tedy $f = g$. ♣

9.10.26. Příklad. Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, Q je úplný, $M \subset P$ je hustá v P a $f\colon M \to Q$ je stejnoměrně spojité zobrazení. Pak existuje spojité rozšíření f na celé P. Toto rozšíření je určeno jednoznačně a je stejnoměrně spojité na P.

Řešení. Zobrazení f zřejmě splňuje v každém bodě $a \in P \setminus M$ Bolzanovu-Cauchyovu podmínku z Věty 9.7.22. Můžeme tedy položit

$$g(a) = \begin{cases} f(a) & \text{pro } a \in M, \\ \lim_{x \to a, x \in M} f(x) & \text{pro } a \in P \setminus M. \end{cases}$$

Ukážeme, že takto definované zobrazení $g\colon P \to Q$ je stejnoměrně spojité na P. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že $\sigma(f(u), f(v)) < \frac{\varepsilon}{3}$ kdykoli $u, v \in M$ a $\varrho(u, v) < \delta$. Nechť nyní $x, y \in P$, $\varrho(x, y) < \frac{\delta}{3}$. Pro x nalezneme bod $x_1 \in M$ takový, že $\varrho(x, x_1) < \frac{\delta}{3}$ a $\varrho(g(x), f(x_1)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Je-li totiž $x \in M$, položíme $x_1 = x$. Pokud $x \in P \setminus M$, pak existuje $0 < \delta_1 \leq \frac{\delta}{3}$ takové, že $\sigma(g(x), f(u)) < \frac{\varepsilon}{3}$ kdykoli $u \in B(x, \delta_1) \cap M$. Z hustoty M tedy plyne existence $x_1 \in M$ splňujícího $\varrho(x, x_1) < \frac{\delta}{3}$ a $\sigma(g(x), f(x_1)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Obdobně obdržíme $y_1 \in M$ splňující $\varrho(y, y_1) < \frac{\delta}{3}$ a $\sigma(g(y), f(y_1)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne

$$\varrho(x_1, y_1) \leq \varrho(x_1, x) + \varrho(x, y) + \varrho(y, y_1) < \delta.$$

Dohromady tedy máme

$$\sigma(g(x), g(y)) \leq \sigma(g(x), f(x_1)) + \sigma(f(x_1), f(y_1)) + \sigma(f(y_1), g(y)) < \varepsilon.$$

Jednoznačnost rozšíření plyne z Příkladu 9.10.25. ♣

9.10.27. Příklad. Nalezněte metrické prostory (P, ϱ), (Q, σ) a zobrazení $f\colon P \to Q$, které je stejnoměrně spojité, ale nikoliv lipschitzovské.

Řešení. Položme $P = Q = \mathbb{R}$ a $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$. Funkce f je zřejmě spojitá, a tedy podle Věty 8.2.19 také stejnoměrně spojitá na $[0, 1]$. Předpokládejme, že f je lipschitzovská na $[0, 1]$, tedy že existuje K takové, že

$$\forall x, y \in [0, 1]\colon |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq K|x - y|.$$

Tento vztah platí speciálně pro $x = 0$, $y \in (0, 1]$, takže máme

$$\forall y \in (0, 1]\colon \sqrt{y} \leq Ky,$$

to jest
$$\forall y \in (0,1]\colon \frac{1}{\sqrt{y}} \le K.$$
Tento odhad ale zřejmě neplatí, takže dostáváme spor. Odtud plyne, že funkce f není lipschitzovská na $[0,1]$. ♣

9.10.28. Příklad. Nechť $A \subset \mathbb{R}$ je typu F_σ. Dokažte, že existuje funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, že A je množinou bodů nespojitosti f.

Řešení. Pišme $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, kde F_n jsou uzavřené množiny v $\mathbb{R}$. Podle Příkladu 9.8.3 je $\mathbb{R}$ separabilní, a proto je podle Věty 9.8.13 pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina F_n separabilní. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme spočetnou množinu $D_n \subset F_n$, která je hustá v F_n. Definujme $f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\chi_{D_n}$. Pak f je dobře definovaná funkce na $\mathbb{R}$. Označme $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Množina D je spočetná. Odtud plyne, že množina $\mathbb{R} \setminus D$ je hustá. Pro každé $x \in D$ platí $f(x) > 0$ a pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus D$ platí $f(x) = 0$.

Spojitost v bodech $\mathbb{R} \setminus A$. Nechť $x \in \mathbb{R} \setminus A$. Potom platí $f(x) = 0$. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Protože $x \notin \bigcup_{j=1}^{n_0} F_{n_0}$ a uvedená množina je uzavřená, existuje $\delta > 0$ takové, že $B(x,\delta) \cap \bigcup_{j=1}^{n_0} F_{n_0} = \emptyset$. Potom pro každé $y \in B(x,\delta)$ platí
$$0 \le f(y) - f(x) = f(y) = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\chi_{D_n}(y) \le \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$
Tedy f je spojitá v x.

Nespojitost v bodech A. Nechť $x \in A$. Předpokládejme nejprve, že $x \notin D$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $x \in F_{n_0}$. Položme $\varepsilon = \frac{1}{2^{n_0}}$. Pro každé $\delta > 0$ existuje díky hustotě D_{n_0} v F_{n_0} bod $y \in D_{n_0} \cap B(x,\delta)$. Potom platí
$$f(y) - f(x) = f(y) \ge \frac{1}{2^{n_0}} = \varepsilon.$$
Odtud plyne, že f není spojitá v x.

Nyní předpokládejme, že $x \in D$. Potom $f(x) > 0$. Položme $\varepsilon = f(x)$. Potom pro každé $\delta > 0$ existuje $y \in B(x,\delta) \cap (\mathbb{R} \setminus D)$ a platí
$$f(x) - f(y) = f(x) = \varepsilon.$$
Odtud plyne, že f není spojitá v x. ♣

9.10.29. Definice. Nechť (P,ϱ) a (Q,σ) jsou metrické prostory, $f\colon (P,\varrho) \to (Q,\sigma)$ je zobrazení a $x \in P$. Potom **oscilací** funkce f v bodě x nazýváme nezáporný prvek $\operatorname{osc}_f(x)$ množiny $\mathbb{R}^*$ definovaný předpisem
$$\operatorname{osc}_f(x) = \begin{cases} \lim_{\delta\to 0+} \operatorname{diam}_\sigma f\big(B_\varrho(x,\delta)\big), & \text{pokud existuje } \delta_0 > 0 \\ & \text{takové, že } \operatorname{diam} f(B(x,\delta_0)) < \infty, \\ \infty, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Poznamenejme, že právě uvedená limita vždy existuje, neboť funkce $\delta \mapsto \operatorname{diam}_\sigma f\big(B_\varrho(x,\delta)\big)$ je dobře definovaná neklesající reálná funkce na intervalu $(0,\delta_0)$.

9.10.30. Příklad. Nechť (P,ϱ) a (Q,σ) jsou metrické prostory a $f\colon P \to Q$. Označme symbolem C_f množinu těch bodů $x \in P$, v nichž je funkce f spojitá. Dokažte, že potom platí $C_f = \{x \in P;\ \operatorname{osc}_f(x) = 0\}$.

Řešení. Označme $A = \{x \in P;\ \operatorname{osc}_f(x) = 0\}$.

Inkluze $C_f \subset A$. Nechť $x \in C_f$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in B(x,\delta)$ platí $f(y) \in B(f(x),\varepsilon)$. Nechť $y_1, y_2 \in B(x,\delta)$. Potom

$$\sigma(f(y_1), f(y_2)) \le \sigma(f(y_1), f(x)) + \sigma(f(x), f(y_2)) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Odtud plyne, že platí $\operatorname{diam}_\sigma f\big(B(x,\delta)\big) \le 2\varepsilon$. To znamená, že $\operatorname{osc}_f(x) = 0$, a tedy $x \in A$.

Inkluze $A \subset C_f$. Nechť $x \in A$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že $\operatorname{diam}_\sigma f(B(x,\delta)) < \varepsilon$. Tedy pro každé $y \in B(x,\delta)$ platí

$$\sigma(f(y), f(x)) \le \operatorname{diam} f\big(B(x,\delta)\big) < \varepsilon.$$

To znamená, že funkce f je v bodě x spojitá, takže $x \in C_f$. ♣

9.10.31. Příklad. Nechť (P,ϱ) a (Q,σ) jsou metrické prostory a $f\colon (P,\varrho) \to (Q,\sigma)$ je funkce. Nechť C_f je množina bodů spojitosti funkce f. Dokažte, že C_f je typu G_δ.

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme

$$B_n = \{x \in P;\ \operatorname{osc}_f(x) < \tfrac{1}{n}\}.$$

Dokážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je množina B_n otevřená. Zvolme tedy $n \in \mathbb{N}$ a $x \in B_n$. Potom existuje $\delta > 0$ takové, že $\operatorname{diam} f\big(B(x,\delta)\big) < \frac{1}{n}$. Pokud $y \in B(x,\delta)$, pak pro $r \in (0, \delta - \varrho(x,y))$ platí $B(y,r) \subset B(x,\delta)$, a tedy

$$\operatorname{osc}_f(y) \le \operatorname{diam} f\big(B(y,\delta)\big) \le \operatorname{diam} f\big(B(x,\delta)\big) < \frac{1}{n}.$$

Odtud plyne $B(x,\delta) \subset B_n$. Množina B_n je tedy otevřená.

Množina C_f podle Příkladu 9.10.30 splňuje

$$C_f = \{x \in P;\ \operatorname{osc}_f(x) = 0\}$$

a navíc zřejmě platí

$$\{x \in P;\ \operatorname{osc}_f(x) = 0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Odtud vyplývá, že množina C_f je průnikem spočetně mnoha otevřených množin, tedy je typu G_δ. ♣

9.10.32. Příklad. Dokažte, že množina $\mathbb{Q}$ není typu G_δ.

Řešení. Tvrzení dokážeme sporem. Díky Příkladu 9.3.36 víme, že množina $\mathbb{Q}$ je hustá v metrickém prostoru $\mathbb{R}$. Kdyby byla navíc ještě typu G_δ, musela by být podle Věty 9.7.42 residuální v $\mathbb{R}$. Podle Příkladu 9.7.32(b) je také množina $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ residuální v $\mathbb{R}$. Metrický prostor $\mathbb{R}$ je podle Příkladu 9.7.7 a Věty 9.7.34 druhé kategorie. Podle Věty 9.7.38 tedy platí $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$, což je ale spor. ♣

Riemannova funkce je spojitá právě ve všech iracionálních bodech množiny $\mathbb{R}$ (Příklad 4.4.12). Na otázku, zda existuje reálná funkce, která by byla spojitá naopak právě ve všech racionálních bodech, dostáváme z dokázaných tvrzení možná trochu překvapivě zápornou odpověď.

9.10.33. Příklad. Dokažte, že neexistuje funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro kterou by platilo $C_f = \mathbb{Q}$.

Řešení. Podle Příkladu 9.10.31 musí být C_f typu G_δ, avšak podle Příkladu 9.10.32 množina $\mathbb{Q}$ není typu G_δ. Odtud plyne tvrzení. ♣

Úplné prostory.

9.10.34. Příklad. Dokažte, že prostor c_0 je Banachův.

Řešení. Prostor c_0 je lineárním podprostorem prostoru ℓ_∞ a navíc je také jeho metrickým podprostorem. Prostor ℓ_∞ je podle Příkladu 9.7.17 úplný. Díky Větě 9.7.18 stačí ukázat, že c_0 je uzavřená množina v ℓ_∞. Vezměme posloupnost $\{x^n\}$ prvků c_0, která konverguje k prvku $x \in \ell_\infty$. Naším cílem je ukázat, že $x \in c_0$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $m_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\|x^{m_0} - x\|_\infty < \varepsilon$. Poněvadž $x^{m_0} \in c_0$, platí $\lim_{n\to\infty} x_n^{m_0} = 0$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $|x_n^{m_0}| < \varepsilon$. Pak pro každé $n \geq n_0$ platí

$$|x_n| \leq |x_n - x_n^{m_0}| + |x_n^{m_0}| \leq \|x - x^{m_0}\|_\infty + |x_n^{m_0}| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Tím je dokázáno, že $\lim x_n = 0$, a tedy $x \in c_0$. ♣

9.10.35. Příklad (prostor ℓ_p). Nechť $p \in [1, \infty)$. Definujme ℓ_p jako množinu všech posloupností reálných čísel $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ splňujících $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty$. Sčítání prvků z ℓ_p je definováno po složkách, stejně tak násobení prvků z ℓ_p reálnými čísly. Pro $x = \{x_n\} \in \ell_p$, $y = \{y_n\} \in \ell_p$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ tedy klademe $x + y = \{x_n + y_n\}$ a $\alpha x = \{\alpha x_n\}$. Dále pro $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in \ell_p$ položme

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Dokažte, že prostor ℓ_p je Banachův.

Řešení. Postupně ověříme, že ℓ_p je vektorový prostor, který je normovaný a který je úplný.

Vektorový prostor. Nechť $x, y \in \ell_p$. Ověříme, že $x + y \in \ell_p$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Podle Minkowského nerovnosti (Příklad 5.9.12) platí

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \le \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \le \|x\|_p + \|y\|_p < \infty.$$

Odtud pak dostáváme, že

$$\Big(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \le \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Platí tedy $x + y \in \ell_p$ a navíc jsme odvodili nerovnost $\|x + y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$.

Pokud $x \in \ell_p$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak platí

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} |\alpha x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \cdot \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \cdot \|x\|_p < \infty.$$

Platí tedy $\alpha x \in \ell_p$ a navíc jsme ověřili $\|\alpha x\|_p = |\alpha| \cdot \|x\|_p$.

Normovaný prostor. Z vlastností normy, které jsou uvedené v Definici 9.1.18, jsme již ověřili všechny vyjma vlastnosti (a). Ta ovšem pro zobrazení $x \mapsto \|x\|_p$ na ℓ_p zřejmě platí.

Úplnost. Nechť $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ je cauchyovská posloupnost prvků ℓ_p. Existuje tedy $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall k \ge k_0 \colon \|x^k - x^{k_0}\|_p < 1.$$

Díky trojúhelníkové nerovnosti máme

$$\forall k \ge k_0 \colon \|x^k\|_p < \|x^{k_0}\|_p + 1.$$

Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\|x^k\|_p \le \max\big\{\|x^1\|_p, \dots, \|x^{k_0 - 1}\|_p, \|x^{k_0}\|_p + 1\big\}. \tag{9.28}$$

Odtud plyne, že množina $\{x^k;\ k \in \mathbb{N}\}$ je omezená v ℓ_p. Konstantu na pravé straně předchozí nerovnosti označme K.

Zvolme nyní $n \in \mathbb{N}$. Potom pro každé $k, l \in \mathbb{N}$ platí $|x_n^k - x_n^l| \le \|x^k - x^l\|_p$. Odtud plyne, že posloupnost reálných čísel $\{x_n^k\}_{k=1}^{\infty}$ je cauchyovská, a tedy konvergentní. Limitu této posloupnosti označíme x_n. O posloupnosti $x = \{x_n\}$ nejprve ukážeme, že patří do ℓ_p a pak že je hledanou limitou naší cauchyovské posloupnosti.

Pro každé $m, k \in \mathbb{N}$ díky (9.28) platí

$$\Big(\sum_{i=1}^{m} |x_i^k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \le \|x^k\|_p \le K.$$

Spočteme limitu levé strany pro $k \to \infty$ a obdržíme pro každé $m \in \mathbb{N}$

$$\Big(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \le K.$$

Odtud již plyne
$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq K.$$
Dokázali jsme tedy $x \in \ell_p$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Znovu použijeme cauchyovskost naší posloupnosti a nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k, l \geq k_0$ platí $\|x^k - x^l\|_p < \varepsilon$. Pro $m \in \mathbb{N}$ a $k, l \geq k_0$ platí
$$\Big(\sum_{i=1}^{m} |x_i^k - x_i^l|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \|x^k - x^l\| < \varepsilon.$$
Pro pevné k a m vypočteme limitu levé strany pro $l \to \infty$. Obdržíme
$$\Big(\sum_{i=1}^{m} |x_i^k - x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon.$$
Vzhledem k tomu, že uvedená nerovnost platí pro každé $m \in \mathbb{N}$ dostaneme
$$\|x^k - x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^k - x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon.$$
Odtud již plyne, že posloupnost $\{x^k\}$ konverguje k x. ♣

9.10.36. Příklad. Nalezněte příklad metrického prostoru a posloupnosti jeho prvků $\{x_n\}$ splňující
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \varrho(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon,$$
která ale není cauchyovská.

Řešení. Položme například $x_n = \log n$, $n \in \mathbb{N}$. Potom platí
$$\lim |x_{n+1} - x_n| = \lim \log(1 + \tfrac{1}{n}) = 0,$$
ale posloupnost $\{x_n\}$ zřejmě není cauchyovská v $\mathbb{R}$. ♣

9.10.37. Příklad. Definujme na $\mathbb{R}$ metriku $\sigma(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$. Nalezněte posloupnost, která je cauchyovská vzhledem k σ, ale nikoliv vzhledem k obvyklé metrice. Dokažte, že prostor $(\mathbb{R}, \sigma)$ není úplný.

Řešení. Uvažujme posloupnost $\{n\}$. Tato posloupnost zřejmě není cauchyovská vzhledem k obvyklé metrice na $\mathbb{R}$. Ukážeme, že je cauchyovská vzhledem k metrice σ. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $|\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n| < \varepsilon$. Pro každé $n \geq m \geq n_0$, potom platí
$$\sigma(n, m) = |\operatorname{arctg} n - \operatorname{arctg} m| = \left|\operatorname{arctg} n - \tfrac{\pi}{2}\right| + \left|\tfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} m\right| < 2\varepsilon.$$

Uvedená posloupnost není v prostoru $(\mathbb{R}, \sigma)$ konvergentní. Kdyby totiž existovala její limita $x \in \mathbb{R}$, pak by platilo $\lim_{n\to\infty} \sigma(x, n) = 0$. Což znamená
$$\lim_{n\to\infty} |\operatorname{arctg} n - \operatorname{arctg} x| = \tfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \neq 0,$$

což je spor. ♣

9.10.38. Příklad. Nechť (P, ϱ) je neprázdný úplný metrický prostor a $T: P \to P$ je zobrazení. Nechť existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že T^n je kontrakce na (P, ϱ), kde $T^n = T \circ T \circ \dots \circ T$ je n-krát složené zobrazení T. Dokažte, že potom má T na P právě jeden pevný bod.

Řešení. Existence pevného bodu. Podle Banachovy věty o kontrakci (Věta 9.7.28) má T^n v P právě jeden pevný bod, označme jej x_0. Potom

$$T^n\big(T(x_0)\big) = T\big(T^n(x_0)\big) = T(x_0),$$

takže $T(x_0)$ je také pevným bodem zobrazení T^n. Takový bod však existuje právě jeden, a tedy musí nutně platit $T(x_0) = x_0$. Bod x_0 je tedy pevným bodem zobrazení T.

Jednoznačnost. Nechť y je pevný bod zobrazení T. Dokážeme matematickou indukcí, že potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ je y pevným bodem zobrazení T^k. Pro $k = 1$ tvrzení platí. Nechť pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ je y pevným bodem zobrazení T^k. Potom

$$T^{k+1}(y) = T\big(T^k(y)\big) = T(y) = y.$$

Tím je naše tvrzení dokázáno. Speciálně je tedy y pevným bodem zobrazení T^n. Zobrazení T^n má však právě jeden pevný bod, a to x_0, tedy platí $y = x_0$. Odtud vyplývá, že pevný bod zobrazení T je jednoznačně určen. ♣

9.10.39. Příklad. Nechť X je Banachův prostor, který je nekonečně dimenzionální. Dokažte, že potom každá báze vektorového prostoru X je nespočetná.

Řešení. Pro spor předpokládejme, že vektorový prostor X má spočetnou bázi B tvořenou vektory x_n, $n \in \mathbb{N}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme symbolem E_n lineární obal množiny $\{x_i;\ i \leq n\}$. Dokážeme následující dvě pozorování.

Množina E_n je uzavřená. Množina E_n tvoří konečně dimenzionální podprostor prostoru X, a proto jde podle Příkladu 9.7.15 o Banachův prostor. Podle Věty 9.7.18 je pak E_n uzavřená v X.

Množina E_n je řídká. Díky předchozímu pozorování stačí ukázat, že vnitřek E_n je prázdný. Předpokládejme pro spor, že tomu tak není a existují $x \in X$ a $r > 0$ taková, že $B(x, r) \subset E_n$. Potom platí také $B(0, r) \subset E_n$, neboť E_n je lineární podprostor. Pak platí

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} kB(0, r) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} kE_n = E_n,$$

což je spor, neboť nekonečně dimenzionální prostor X nemůže být obsažen v konečně dimenzionálním prostoru E_n.

Díky tomu, že B je báze dostáváme $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Prostor X je tedy podle předchozího první kategorie v sobě, což je ale podle Věty 9.7.34 spor s úplností prostoru X. ♣

Kompaktní prostory.

9.10.40. Příklad. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků metrického prostoru P splňující $x_n \to x$ pro nějaké $x \in P$. Dokažte, že množina $K = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ je kompaktní.

Řešení. Nechť $\mathcal{G}$ je nějaký systém otevřených podmnožin pokrývající K. Potom existuje $G \in \mathcal{G}$ taková, že $x \in G$. Protože $x_n \to x$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $x_n \in G$. Pro každé $k \in \{1, \dots, n_0\}$ existuje $G_k \in \mathcal{G}$ splňující $x_k \in G_k$. Potom soubor množin $\mathcal{G}^* = \{G, G_1, \dots, G_{n_0}\}$ tvoří konečný podsystém systému $\mathcal{G}$, který zřejmě pokrývá K. Podle Věty 9.6.28 je tedy množina K kompaktní. ♣

9.10.41. Příklad. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $\varepsilon > 0$ a $A \subset P$ je nekonečná množina taková, že pro každé $x, y \in A$, $x \neq y$, platí $\varrho(x, y) \geq \varepsilon$. Dokažte, že pak prostor P není kompaktní.

Řešení. Ukážeme, že v prostoru P neexistuje konečná $\varepsilon/2$-síť. Pro spor předpokládejme, že $D \subset P$ je konečná $\varepsilon/2$-síť. Potom $A \subset \bigcup_{x \in D} B(x, \varepsilon/2)$. Množina A je nekonečná, množina D je konečná, a proto existuje $x \in D$ takové, že koule $B(x, \varepsilon)$ obsahuje alespoň dva různé body z množiny A. Tyto body však mají vzdálenost menší než ε, což je spor s předpokládanou vlastností množiny A. Prostor P tedy není totálně omezený, a proto podle Věty 9.7.21 není kompaktní. ♣

Předchozí výsledek porovnejte s Větou 9.8.8.

9.10.42. Příklad. Dokažte, že množina

$$A = \left\{\{x_n\} \in \ell_2;\ \forall n \in \mathbb{N}\colon\ |x_n| \leq \tfrac{1}{n}\right\}$$

je kompaktní v ℓ_2.

Řešení. Podle Věty 9.7.21 stačí dokázat, že A je úplný a totálně omezený prostor.

Úplnost množiny A. Prostor ℓ_2 je úplný, a proto podle Věty 9.7.18 stačí ukázat, že A je uzavřená v ℓ_2. Vezměme tedy posloupnost $\{x^k\}$ prvků množiny A, která konverguje k prvku $x \in \ell_2$. Ukážeme, že $x \in A$. Pro každé $n, k \in \mathbb{N}$ platí $|x_n^k - x_n| \leq \|x^k - x\|_2$. Odtud plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme $\lim_{k\to\infty} x_n^k = x_n$. Navíc pro každé $n, k \in \mathbb{N}$ platí $|x_n^k| \leq \frac{1}{n}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tedy máme $|x_n| \leq \frac{1}{n}$. Platí tedy $x \in \ell_2$.

Totální omezenost množiny A. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < (\frac{\varepsilon}{2})^2$. Položme

$$B = \left\{[x_1, \dots, x_m] \in \mathbb{R}^m;\ \forall n \in \{1, \dots, m\}\colon |x_n| \leq \tfrac{1}{n}\right\}.$$

Množina B je omezená a uzavřená v $\mathbb{R}^m$. Podle Věty 9.6.9 je B kompaktní a podle Věty 9.6.26 je totálně omezená. Existuje tedy konečná $\frac{\varepsilon}{2}$-síť C množiny B. Definujme množinu $D \subset \ell_2$, která obsahuje právě všechny prvky tvaru $(x_1, \dots, x_m, 0, \dots)$, kde $(x_1, \dots, x_m) \in C$. Množina D je konečná, neboť C je konečná a zřejmě $D \subset A$. Ukážeme, že D je ε-síť množiny A. Zvolme $y \in A$. Potom $\tilde{y} = (y_1, \dots, y_m) \in B$

a existuje $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_m) \in C$ splňující $\|\tilde{y} - \tilde{x}\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Prvek $x = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots)$ patří do množiny D a platí

$$\begin{aligned}\|y - x\|_2^2 &= \sum_{n=1}^{m} (y_n - x_n)^2 + \sum_{n=m+1}^{\infty} (y_n - x_n)^2 = \|\tilde{y} - \tilde{x}\|^2 + \sum_{n=m+1}^{\infty} y_n^2 \\ &\leq (\tfrac{\varepsilon}{2})^2 + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < (\tfrac{\varepsilon}{2})^2 + (\tfrac{\varepsilon}{2})^2 = \varepsilon^2.\end{aligned}$$

K prvku $y \in \ell_2$ jsme tedy nalezli prvek $x \in D$ splňující $\|y - x\|_2 < \varepsilon$. Tím jsme ověřili, že C je ε-síť. Tedy A je totálně omezená. ♣

9.10.43. Příklad. Dokažte, že množina

$$B = \{x \in c_0;\ \|x_n\|_\infty \leq 1\}$$

není kompaktní v c_0.

Řešení. Uvažujme vektory $e^n \in c_0$, $n \in \mathbb{N}$, kde e^n je n-tý kanonický vektor v c_0, tj.

$$e^n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots),$$

kde pouze n-tý člen je roven 1. Pak pro každé $n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$, platí $\|e^n - e^m\|_\infty = 1$. Množina $A = \{e^n;\ n \in \mathbb{N}\}$ je nekonečná a díky předchozímu splňuje předpoklady Příkladu 9.10.41 pro $\varepsilon = 1$. Pak podle Příkladu 9.10.41 není B kompaktní. ♣

9.10.44. Příklad. Nechť (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor a $f : P \to P$ je **izometrie**, tj. zobrazení splňující

$$\forall x, y \in P : \varrho\big(f(x), f(y)\big) = \varrho(x, y).$$

Dokažte, že $f(P) = P$.

Řešení. Předpokládejme pro spor $f(P) \subsetneq P$. Vezmeme $x_0 \in P \setminus f(P)$ a označíme $d = \operatorname{dist}(x_0, f(P))$. Protože je f spojité, je množina $f(P)$ kompaktní, a tedy $d > 0$. Položme $x_n = f^n(x_0)$. Pak jsou členy posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ obsaženy v $f(P)$, a tedy $\varrho(x_0, x_n) \geq d$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Díky kompaktnosti vybereme podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ konvergující k nějakému $y \in f(P)$. Tedy existují indexy $n < m$ takové, že $\varrho(x_n, x_m) < d$. Protože je f izometrie, platí

$$\begin{aligned}d &> \varrho\big(f^n(x_0), f^m(x_0)\big) = \varrho\big(f^{n-1}(x_0), f^{m-1}(x_0)\big) = \cdots \\ &= \varrho\big(x_0, f^{m-n}(x_0)\big) \geq d,\end{aligned}$$

což je spor. ♣

9.10.45. Příklad. Nechť (K_1, ϱ_1) a (K_2, ϱ_2) jsou kompaktní metrické prostory. Ukažte, že součin $K_1 \times K_2$ opatřený ℓ_2-součtem metrik ϱ_1 a ϱ_2 je kompaktní metrický prostor.

Řešení. Uvažujme posloupnost bodů $\{(x_1^n, x_2^n)\}_{n=1}^{\infty}$ prostoru $K_1 \times K_2$. Metrický prostor (K_1, ϱ_1) je kompaktní, a proto lze z posloupnosti $\{x_1^n\}_{n=1}^{\infty}$ vybrat konvergentní podposloupnost $\{x_1^{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ s limitou $z_1 \in K_1$. Pro $k \in \mathbb{N}$ označme $y_1^k = x_1^{n_k}$ a $y_2^k = x_2^{n_k}$. Prostor (K_2, ϱ_2) je kompaktní, a proto lze z posloupnosti $\{y_2^k\}_{k=1}^{\infty}$ vybrat konvergentní podposloupnost $\{y_2^{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ s limitou $z_2 \in K_2$. Posloupnost $\{y_1^k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k z_1, a tedy i posloupnost $\{y_1^{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ konverguje k z_1 (Věta 9.2.4). Platí tedy

$$\lim_{j\to\infty} \varrho_1\big(y_1^{k_j}, z_1\big) = 0,$$
$$\lim_{j\to\infty} \varrho_2\big(y_2^{k_j}, z_2\big) = 0.$$

Pak ale podle věty o aritmetice limit platí

$$\lim_{j\to\infty} \sqrt{\varrho_1\big(y_1^{k_j}, z_1\big)^2 + \varrho_2\big(y_2^{k_j}, z_2\big)^2} = 0.$$

Odtud plyne, že posloupnost $\{(y_1^{k_j}, y_2^{k_j})\}_{j=1}^{\infty}$ konverguje k bodu (z_1, z_2) v metrice, která je ℓ_2-součtem metrik ϱ_1 a ϱ_2. posloupnost $\{(y_1^{k_j}, y_2^{k_j})\}_{j=1}^{\infty}$ je navíc vybraná z posloupnosti $\{(x_1^n, x_2^n)\}_{n=1}^{\infty}$. Tím je důkaz proveden. ♣

9.10.46. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $T\colon P \to P$ je zobrazení splňující

$$\forall x, y \in P, x \neq y\colon \varrho(T(x), T(y)) < \varrho(x, y).$$

Pak zobrazení T nazýváme **neexpanzívní**.

9.10.47. Příklad. Nechť (P, ϱ) je neprázdný kompaktní metrický prostor a $T\colon P \to P$ je neexpanzívní. Dokažte, že potom T má na P právě jeden pevný bod.

Řešení. Existence pevného bodu. Definujme funkci $f\colon P \to \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = \varrho(x, T(x))$. Podle Příkladu 9.10.1 pro $x, y \in P$ platí

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &= |\varrho(x, T(x)) - \varrho(y, T(y))| \le \varrho(x, y) + \varrho(T(x), T(y))\\ &\le 2\varrho(x, y).\end{aligned}$$

Nechť $x \in P$ a $\varepsilon > 0$. Položme $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$. Potom pro každé $y \in P$ splňující $\varrho(x, y) < \delta$ platí

$$|f(x) - f(y)| \le 2\varrho(x, y) < 2\delta = \varepsilon,$$

takže f je spojité v bodě x. Protože bod x byl zvolen libovolně, je f spojité na P.

Funkce f tedy nabývá na kompaktním metrickém prostoru (P, ϱ) svého minima. Existuje tudíž bod $x_0 \in P$ takový, že pro všechna $y \in P$ platí $f(x_0) \le f(y)$. Předpokládejme, že $f(x_0) > 0$. Potom z neexpanzivnosti zobrazení f vyplývá, že

$$f(T(x_0)) = \varrho(T(x_0), T^2(x_0)) < \varrho(x_0, T(x_0)),$$

což je spor. Platí tedy $f(x_0) = 0$. To znamená, že $\varrho(x_0, T(x_0)) = 0$, neboli že x_0 je pevným bodem zobrazení T.

Jednoznačnost. Nechť $x, y \in P$ jsou dva různé pevné body zobrazení T. Potom

$$\varrho(x, y) = \varrho(T(x), T(y)) < \varrho(x, y),$$

což je spor. Odtud vyplývá, že pevný bod zobrazení T je jednoznačně určen. ♣

Cantorův prostor a Cantorovo diskontinuum.

9.10.48. Označení. (a) Množinu všech konečných posloupností, jejichž členy jsou rovny 0 nebo 1, budeme značit $\mathcal{S}$. Do množiny $\mathcal{S}$ zahrnujeme i prázdnou posloupnost, kterou ztotožňujeme s prázdnou množinou a značíme ji tedy $\emptyset$. Platí proto

$$\mathcal{S} = \{\emptyset\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{0, 1\}^n.$$

(b) Je-li $s \in \mathcal{S}$ a $i \in \{0, 1\}$, značí $s\hat{\ }i$ posloupnost s prodlouženou o prvek i. Délku posloupnosti $s \in \mathcal{S}$ značíme $|s|$, přičemž délka prázdné posloupnosti je 0.

(c) Množinu všech nekonečných posloupností, jejichž členy jsou rovny 0 nebo 1, budeme značit $\mathcal{C}$. Platí tedy $\mathcal{C} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Pro $x \in \mathcal{C}$ a $n \in \mathbb{N}$ značíme $x|n = (x_1, \dots, x_n)$. Pro $s \in \mathcal{S}$ a $x \in \mathcal{C}$ značíme symbolem $s \prec x$ skutečnost, že x prodlužuje s, neboli nekonečná posloupnost x začíná konečnou posloupností s, ještě jinak řečeno platí $s = x||s|$.

(d) Indexovanému systému (vizte 1.4.29) množin $(B_s)_{s\in\mathcal{S}}$ říkáme **Cantorovo schéma**.

9.10.49. Nechť $\mathcal{G}$ je systém otevřených množin v metrickém prostoru $(\mathcal{C}, \varrho)$, kde ϱ je metrika z Příkladu 9.1.16. Dvojici $(\mathcal{C}, \mathcal{G})$ nazýváme **Cantorovým prostorem**. Cantorův prostor je prostor topologický (vizte Poznámku 9.4.22), ale v dalším výkladu se na něj budeme dívat jako na metrický prostor s metrikou ϱ.

9.10.50. Příklad. Nechť $s \in \mathcal{S}$. Označme

$$N_s = \{x \in \mathcal{C};\ s \prec x\}.$$

Množina N_s tedy obsahuje ty nekonečné posloupnosti, které začínají posloupností s. Ukažte, že systém $\{N_s;\ s \in \mathcal{S}\}$ tvoří otevřenou bázi prostoru $\mathcal{C}$.

Řešení. Pro $s \in \mathcal{S}$ a $x \in \mathcal{C}$ splňující $s \prec x$ dokážeme následující rovnost

$$B\big(x, \tfrac{2}{2|s|+1}\big) = N_s. \tag{9.29}$$

Pokud $y \in B\big(x, \frac{2}{2|s|+1}\big)$ a $y \neq x$, pak nejmenší $k \in \mathbb{N}$ takové, že $x_k \neq y_k$, splňuje $\frac{1}{k} < \frac{2}{2|s|+1}$. Máme tedy $k > |s|$, a proto $x||s| = y||s| = s$. Platí tedy $y \in N_s$. Pokud $y = x$, pak zřejmě $y \in N_s$.

Pokud $y \in N_s$, $y \neq x$, pak nejmenší $k \in \mathbb{N}$ takové, že $x_k \neq y_k$, splňuje $k > |s|$, a tedy $\varrho(x, y) = \frac{1}{k} < \frac{2}{|s|+1}$. Pokud $y \in N_s$, $y = x$, pak zřejmě $y \in B(x, \frac{2}{2|s|+1})$.

Z (9.29) plyne, že množina N_s je otevřená pro každé $s \in \mathcal{S}$. Nechť $G \subset \mathcal{C}$ je neprázdná otevřená množina. Dokážeme rovnost

$$G = \bigcup \{N_t;\ t \in \mathcal{S}, N_t \subset G\}. \tag{9.30}$$

Inkluze $\supset$ zřejmě platí. Pro důkaz opačné inkluze zvolme libovolně $x \in G$. Pak díky otevřenosti G nalezneme $k \in \mathbb{N}$ takové, že $B(x, \frac{2}{2k+1}) \subset G$. Odtud plyne

$$x \in B\big(x, \tfrac{2}{2|s|+1}\big) = N_s \subset G.$$

Platí tedy rovnost (9.30). Odtud již plyne, že uvažovaný systém množin tvoří bázi prostoru $\mathcal{C}$. ♣

9.10.51. Definujme Cantorovo schéma $(B_s)_{s\in\mathcal{S}}$ sestávající z neprázdných uzavřených intervalů v $[0,1]$ následujícím způsobem. Položme $B_\emptyset = [0,1]$. Předpokládejme, že již máme zkonstruovány intervaly B_s, kde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $s \in \mathcal{S}$ a $|s| \leq n$. Nechť $s \in \{0,1\}^n$ a $B_s = [a,b]$. Pak položíme

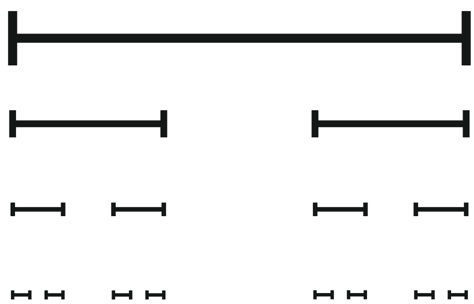
$$B_{s^\wedge 0} = \big[a, a + \tfrac{1}{3}(b-a)\big], \quad B_{s^\wedge 1} = \big[b - \tfrac{1}{3}(b-a), b\big].$$

Množinu

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{s\in\{0,1\}^n} B_s.$$

nazýváme **Cantorovým diskontinuem**.

Popišme ještě konstrukci Cantorova diskontinua méně formálně, ale možná názorněji. Z intervalu $B_\emptyset = [0,1]$ vyjmeme interval $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ a obdržíme intervaly $B_0 = [0, \frac{1}{3}]$ a $B_1 = [\frac{2}{3}, 1]$. Z těchto intervalů opět obdobně vyjmeme prostřední třetiny a dostaneme čtveřici nových intervalů $B_{00}, B_{01}, B_{10}, B_{11}$. Z nich opět vyjmeme prostřední třetiny a tento postup stále opakujeme. Body z intervalu $[0,1]$, které nebudou nikdy vyjmuty, pak tvoří Cantorovo diskontinuum C. Začátek tohoto procesu je znázorněn na následující sérii obrázků.



Obrázek 1.

Všimněme si, že Cantorovo schéma $(B_s)_{s\in\mathcal{S}}$ má následující vlastnosti. Pro každé $s \in \mathcal{S}$ platí

(a) $B_{s^\wedge 0} \cup B_{s^\wedge 1} \subset B_s$,
(b) $B_{s^\wedge 0} \cap B_{s^\wedge 1} = \emptyset$,

(c) diam $B_\emptyset = 1$, diam $B_{s^\wedge 0} =$ diam $B_{s^\wedge 1} = \frac{1}{3} B_s$, a tedy diam $B_s = 3^{-|s|}$.
Všimněme si ještě, že pro Cantorovo diskontinumm platí

$$C = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{C}} \bigcap_{n=0}^{\infty} B_{\alpha|n}. \tag{9.31}$$

Ověření inkluze $\supset$ je snadné. Pro důkaz opačné inkluze uvažujme $x \in C$. Pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existuje $s^n \in \{0,1\}^n$ takové, že $x \in B_{s^n}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je systém intervalů $\{B_s;\ s \in \mathcal{S}, |s| = n\}$ podle vlastností (a) a (b) disjunktní. Odtud plyne, že $s^{n-1} \prec s^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak existuje $\alpha \in \mathcal{C}$ takový, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $s^n \prec \alpha$. Potom $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} B_{s^n} = \bigcap_{n=0}^{\infty} B_{\alpha|n}$.

9.10.52. Příklad (vlastnosti Cantorova diskontinua). Ukažte, že C má následující vlastnosti.

(a) Cantorovo diskontinuum C je homeomorfní s Cantorovým prostorem $\mathcal{C}$.
(b) Množina C je kompaktní a řídká podmnožina $\mathbb{R}$ bez izolovaných bodů.
(c) Množina C má mohutnost kontinua.

Řešení. (a) Nechť $(B_s)_{s \in \mathcal{S}}$ je Cantorovo schéma z 9.10.51. Definujme zobrazení $\varphi\colon \mathcal{C} \to C$ následujícím způsobem. Zvolme $\alpha \in \mathcal{C}$ pevné a položme $\varphi(\alpha) = y$, kde $y \in \bigcap_{n=0}^{\infty} B_{x|n}$. Má-li být $\varphi(\alpha)$ dobře a jednoznačně definováno, je třeba, aby množina $\bigcap_{n=0}^{\infty} B_{\alpha|n}$ byla jednoprvková. To však plyne z Věty 9.7.19, neboť posloupnost množin $\{B_{\alpha|n}\}_{n=0}^{\infty}$ je tvořena uzavřenými množinami v úplném prostoru $\mathbb{R}$, platí $B_{\alpha|n} \subset B_{\alpha|(n-1)}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} B_{\alpha|n} = 0$. Poslední fakt plyne z 9.10.51(c). Přímo z definice φ plyne, že $\varphi(\mathcal{C}) \subset C$.

Spojitost φ. Nechť $\alpha \in \mathcal{C}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $s \in \mathcal{S}$ takové, že $\varphi(\alpha) \in B_s$ a diam $B_s = 3^{-|s|} < \varepsilon$. Potom $\varphi(N_s) \subset B_s \subset B(\varphi(\alpha), \varepsilon)$. Tím je dokázána spojitost φ.

Prostota φ. Vezměme $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, $\alpha \neq \beta$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\alpha|n \neq \beta|n$, a tedy $\varphi(\alpha) \in B_{\alpha|n}$, $\varphi(\beta) \in B_{\beta|n}$ a $B_{\alpha|n} \cap B_{\beta|n} = \emptyset$. Odtud plyne $\varphi(\alpha) \neq \varphi(\beta)$.

Surjektivita φ. Pro $x \in C$ existuje podle (9.31) $\alpha \in \mathcal{C}$ takové, že $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} B_{\alpha|n}$. Máme tedy $\varphi(\alpha) = x$. Tím je surjektivita ověřena. Navíc díky vlastnosti (b) z 9.10.51 a inkluzi $\varphi(N_s) \subset B_s$, $s \in \mathcal{S}$, dostáváme rovnost $\varphi(N_s) = B_s \cap C$ platnou pro každé $s \in \mathcal{S}$.

Spojitost φ^{-1}. Nechť $x \in C$. Označme $\varphi^{-1}(x) = \alpha$. Zvolme $\varepsilon > 0$. S pomocí Příkladu 9.10.50 nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $N_{\alpha|n} \subset B(\alpha, \varepsilon)$. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že $B(x, \delta) \cap C \subset B_{\alpha|n}$. Potom podle předchozího odstavce

$$\varphi^{-1}(B(x,\delta) \cap C) \subset \varphi^{-1}(C \cap B_{\alpha|n}) = N_{\alpha|n} \subset B(\alpha, \varepsilon).$$

Tím je dokázána spojitost φ^{-1}.

(b) Množina C je uzavřená, neboť je definována jako průnik uzavřených množin. Množina C je zřejmě omezená. Podle Věty 9.6.9 je tedy C kompaktní.

Řídkost C ověříme podle Věty 9.3.44. Zvolme neprázdnou otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}$. Pokud $G \cap C = \emptyset$, pak položíme $H = G$ a máme $H \cap C = \emptyset$. Pokud

$H \cap C \neq \emptyset$, pak vezmeme $x \in H \cap C$ a nalezneme $s \in \mathcal{S}$ takové, že $B_s \subset H$. Zde využíváme otevřenost H a vlastnost (c) z 9.10.51. Množina B_s je uzavřený netriviální interval. Označme $B_s = [a, b]$. Potom položíme $H = \left(a + \frac{1}{3}(b-a), b - \frac{1}{3}(b-a)\right)$ a podle konstrukce Cantorova diskontinua dostáváme $H \cap C = \emptyset$. Tím je řídkost množiny C dokázána.

Zvolme $x \in C$. Ukážeme, že nejde o izolovaný bod C. K tomuto cíli zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $s \in \mathcal{S}$ takové, že $x \in B_s \subset B(x, \varepsilon)$. Pak zvolíme $i \in \{0, 1\}$ takové, že $x \notin B_{s^\wedge i}$. Množina $B_{s^\wedge i} \cap C$ je neprázdná. Zvolme tedy y z této množiny. Potom máme $y \in C \cap B(x, \varepsilon)$ a $y \neq x$. Bod x tedy není izolovaný.

(c) Výsledek plyne z Příkladu 3.8.27. ♣

9.10.53. Příklad. Cantorův prostor $\mathcal{C}$ je kompaktní, nemá izolované body a má mohutnost kontinua.

Řešení. Tvrzení plyne z Věty 9.10.52, neboť Cantorovo diskontinuum je homeomorfní s Cantorovým prostorem. ♣

9.10.54. Příklad. Nechť (P, ϱ) je nespočetný separabilní úplný metrický prostor. Pak existuje množina $K \subset P$, která je homeomorfní s Cantorovým prostorem.

Řešení. Podle Příkladu 9.10.23 lze P psát jako $P = F \cup U$, kde U je spočetná otevřená a F je uzavřená množina bez izolovaných bodů. Pak F je též úplný metrický prostor (Věta 9.7.18). Protože je P nespočetný, je F neprázdná množina. Nalezneme zobrazení $\varphi\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to F$, které bude spojité a prosté. Potom podle Věty 9.6.20 bude φ homeomorfismus mezi $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ a $\varphi(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$. Položíme $K = \varphi(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ a K bude pak hledanou množinou.

Nejprve induktivně zkonstruujeme Cantorovo schéma $(U_s)_{s\in\mathcal{S}}$ sestávající z otevřených množin v F, které pro každé $s \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ splňují

- $U_{s^\wedge 0} \cap U_{s^\wedge 1} = \emptyset$,
- $\overline{U_{s^\wedge i}} \subset U_s$, $i \in \{0, 1\}$,
- $\operatorname{diam} U_s \leq 2^{-|s|}$.

Konstrukce schématu. Nejprve položíme $U_\emptyset = B(x, \frac{1}{2}) \cap F$, kde $x \in F$. Předpokládejme nyní, že $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a máme zkonstruovány množiny U_s pro $s \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $|s| \leq n$. Mějme nyní množinu U_s, kde $s \in \{0,1\}^n$. Protože je F perfektní, je U_s nekonečná. Lze tedy nalézt dva různé body $x, y \in U_s$. Nyní zvolíme takové $r \in (0, 2^{-|s|-2})$, že

- $\overline{B(x,r)} \cap \overline{B(y,r)} = \emptyset$,
- $\overline{B(x,r)} \cup \overline{B(y,r)} \subset U_s$

a položíme $U_{s^\wedge 0} = B(x, r)$, $U_{s^\wedge 1} = B(y, r)$. Tím je konstrukce provedena.

Konstrukce homeomorfismu φ. Definujeme $\varphi\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to F$ jako $\varphi(x) = y$, kde

$$y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_{x|n}} \quad x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}.$$

Díky vlastnostem Cantorova schématu je φ dobře definováno, což v tomto případě znamená, že množina $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_{x|n}}$ je jednoprvková (vizte Větu 9.7.19).

Spojitost φ. Nechť $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Potom platí $x \in N_{x|n}$, $\varphi(x) \in \overline{U_{x|n}}$ a

$$\varphi(N_{x|n}) \subset \overline{U_{x|n}} \subset B(\varphi(x), \varepsilon).$$

Tedy φ je spojité v x.

Injektivita φ. Zvolme $x, z \in \mathcal{C}$, $x \neq z$. Nalezneme nejmenší $n \in \mathbb{N}$ takové, že $x|n \neq y|n$. Potom $\varphi(x) \in \overline{U_{x|n}}$, $\varphi(y) \in \overline{U_{y|n}}$ a $\overline{U_{x|n}} \cap \overline{U_{y|n}} = \emptyset$. Odtud plyne $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, a φ je tedy prosté. ♣

Souvislé a křivkově souvislé prostory.

9.10.55. Příklad. Nechť (P, ϱ) je souvislý metrický prostor obsahující alespoň dva body. Potom je P nespočetný.

Řešení. Nechť $x, y \in P$, $x \neq y$. Předpokládejme, že P je spočetný. Pro $r > 0$ označme $A(r) = \{z \in P;\ \varrho(x,z) = r\}$. Potom existuje $r \in \big(0, \varrho(x,y)\big)$ takové, že množina $A(r)$ je prázdná, neboť systém množin $\{A(s);\ s \in \big(0, \varrho(x,y)\big)\}$ je disjunktní a interval $\big(0, \varrho(x,y)\big)$ je nespočetný. Položme $H = B(x,r)$. Potom H je zřejmě neprázdná (neboť $x \in H$) a otevřená. Podle Příkladu 9.10.4 je $\overline{B}(x,r)$ uzavřená množina, a tedy podle Věty 9.3.28(g) platí $\overline{H} \subset \overline{B}(x,r)$. Pak máme

$$\overline{H} \subset \overline{B}(x,r) = B(x,r) \cup A(r) = B(x,r) = H,$$

takže H je uzavřená, a tedy obojetná. Protože $r < \varrho(x,y)$, platí $y \in P \setminus H$, takže $P \setminus H$ je neprázdná. To je podle Věty 9.9.8 spor s tím, že P je souvislý. Odtud plyne tvrzení. ♣

9.10.56. Příklad. Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f\colon P \to Q$ je spojité zobrazení. Nechť $A \subset P$ je křivkově souvislá množina v prostoru P. Pak $f(A)$ je křivkově souvislá množina v prostoru Q.

Řešení. Zvolme body $a, b \in f(A)$. Potom existují body $x, y \in A$ takové, že $f(x) = a$ a $f(y) = b$. Množina A je křivkově souvislá, a proto existuje spojité zobrazení $h\colon [0,1] \to A$ takové, že $h(0) = x$ a $h(1) = y$. Zobrazení $f \circ h$ je spojité zobrazení z $[0,1]$ do Q a platí $f \circ h(0) = a$ a $f \circ h(1) = b$. Tím je nalezena příslušná křivka pro body a a b, a je tak ověřena křivková souvislost množiny $f(A)$. ♣

9.10.57. Příklad. Dokažte, že prostor $[0,1]^2$ s metrikou zděděnou z $\mathbb{R}^2$ není homeomorfní s intervalem $[0,1]$.

Řešení. Pro spor předpokládejme, že $f\colon [0,1] \to [0,1]^2$ je homeomorfismus prostoru $[0,1]$ na prostor $[0,1]^2$. Zobrazení f je bijekce, a proto musí existovat $a \in (0,1)$ takové, že $f(a) \in (0,1)^2$. Potom je zobrazení $f|_{[0,1]\setminus\{a\}}$ homeomorfismus prostoru $A = [0,1] \setminus \{a\}$ a prostoru $B = [0,1]^2 \setminus \big\{f(a)\big\}$.

Prostor B je křivkově souvislý. Stačí ukázat, že pro každý bod $[x, y] \in B$ existuje křivka $\gamma\colon [0,1] \to B$ splňující $\gamma(0) = [0,0]$ a $\gamma(1) = [x, y]$. Předpokládejme tedy, že $[x, y] \in B$. Definujme křivku γ předpisem

$$\gamma(t) = \begin{cases} [t(x+y), 0], & t \in [0, \frac{x}{x+y}], \\ [x, t(x+y) - x], & t \in (\frac{x}{x+y}, 1]. \end{cases}$$

Je snadné ověřit, že γ je spojité zobrazení splňující $\gamma(0) = [0,0]$, $\gamma(1) = [x, y]$ a $\gamma([0,1]) \subset [0,1] \times [0,1]$. Pokud navíc $f(a) \notin \gamma([0,1])$, pak jsme hotovi. Pokud ale $f(a) \in \gamma([0,1])$, použijeme místo γ křivku η definovanou předpisem

$$\eta(t) = \begin{cases} [0, t(x+y)], & t \in [0, \frac{y}{x+y}], \\ [t(x+y) - y, y], & t \in (\frac{y}{x+y}, 1]. \end{cases}$$

Opět je snadné ověřit, že η je spojité zobrazení splňující $\eta(0) = [0,0]$, $\eta(1) = [x, y]$ a $\eta([0,1]) \subset [0,1]^2$. Vzhledem k tomu, že $f(a) \in (0,1)^2 \cap \gamma([0,1])$, musí být $x > 0$ a $y > 0$. Potom $\gamma((0,1)) \cap \eta((0,1)) = \emptyset$, a tedy $f(a) \notin \eta([0,1])$. Máme tak $\eta([0,1]) \subset B$.

Prostor B je křivkově souvislý, a proto je i prostor A křivkově souvislý podle Příkladu 9.10.56. To znamená, že A je také souvislý podle Věty 9.9.17, což je ovšem spor s Větou 9.9.10. ♣

9.10.58. Příklad. Dokažte, že uzávěr křivkově souvislé množiny nemusí být křivkově souvislá množina.

Řešení. Položme $B = \{[x, \sin(\frac{1}{x})];\ x \in (0,1]\}$. Interval $(0,1]$ je zřejmě křivkově souvislá množina. Množina B je pak křivkově souvislá podle Příkladu 9.10.56, neboť je obrazem intervalu $(0,1]$ při spojitém zobrazení $x \mapsto [x, \sin(\frac{1}{x})]$. Množina $\overline{B}$ však není křivkově souvislá, neboť pro body $[0,0]$ a $[\frac{1}{\pi}, 0]$, které leží v $\overline{B}$, neexistuje příslušná křivka, což lze nahlédnout obdobně jako v Příkladu 9.9.20. ♣

9.10.59. Příklad. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $I \neq \emptyset$ a pro každé $\alpha \in I$ je A_α křivkově souvislá množina v P. Nechť platí

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset. \tag{9.32}$$

Dokažte, že $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ je křivkově souvislá množina v P.

Řešení. Zvolme body $a, b \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Potom existují $\alpha_1, \alpha_2 \in I$ taková, že $a \in A_{\alpha_1}$ a $b \in A_{\alpha_2}$. Dále díky (9.32) existuje $c \in A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2}$. Množina A_{α_1} je křivkově souvislá, a proto existuje křivka $h_1\colon [0,1] \to A_{\alpha_1}$ splňující $h_1(0) = a$, $h_1(1) = c$. Podobně díky křivkové souvislosti množiny A_{α_2} nalezneme křivku $h_2\colon [0,1] \to A_{\alpha_2}$ splňující $h_2(0) = c$ a $h_2(1) = b$. Pomocí křivek h_1, h_2 sestrojíme příslušnou křivku h pro dvojici bodů a, b následujícím způsobem:

$$h(t) = \begin{cases} h_1(2t) & \text{pro } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ h_2(2t-1) & \text{pro } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Ověření spojitosti zobrazení h není těžké a snadno vidíme, že $h([0,1]) \subset A_{\alpha_1} \cup A_{\alpha_2} \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, $h(0) = a$, $h(1) = b$. Tím je křivková souvislost uvažované množiny dokázána. ♣

KAPITOLA 10

Funkce více proměnných

V této kapitole zavedeme a prozkoumáme základní pojmy diferenciálního počtu funkcí více proměnných. Při výkladu budeme potřebovat některé pojmy a výsledky z teorie vektorových prostorů. Podrobný výklad této teorie je obsažen například v [**4**].

10.1. Parciální derivace a totální diferenciál

10.1.1 ($\mathbb{R}^n$ jako vektorový prostor)**.** Připomeňme, že množina $\mathbb{R}^n$, kde $n \in \mathbb{N}$, je množina všech uspořádaných n-tic reálných čísel, neboť jde o kartézský součin o n faktorech:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\text{-krát}}.$$

Je-li $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, potom jeho i-tou souřadnici značíme x_i, a můžeme tedy psát $\boldsymbol{x} = [x_1, \dots, x_n]$. Množina $\mathbb{R}^n$ obsahuje některé významné prvky. Je to především **počátek**, to jest prvek, jehož všechny souřadnice jsou nulové. Značíme jej $\boldsymbol{o}$. Zvolme $i \in \{1, \dots, n\}$ a definujme prvek $\boldsymbol{e}^i \in \mathbb{R}^n$ takto:

$$\boldsymbol{e}^i = [0, \dots, 0, \underset{\substack{i\text{-tá sou-}\\ \text{-řadnice}}}{1}, 0, \dots, 0].$$

I tyto prvky budou pro nás později důležité.

Prvky $\mathbb{R}^n$ můžeme mezi sebou sčítat a můžeme je násobit reálným číslem.Je-li $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} = [x_1, \dots, x_n]$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{y} = [y_1, \dots, y_n]$, $\lambda \in \mathbb{R}$, pak definujeme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} &= [x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n], \\ \lambda \cdot \boldsymbol{x} &= [\lambda x_1, \dots, \lambda x_n]. \end{aligned}$$

Trojice $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, kde $+$ a $\cdot$ jsou výše uvedené operace, tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Množina $B = \{\boldsymbol{e}^i;\ i \in \{1, \dots, n\}\}$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^n$, tj. jde o lineárně nezávislou množinu a každý prvek $\boldsymbol{x} = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ můžeme psát jako lineární kombinaci vektorů z množiny B. Zde konkrétně máme $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n x_i \boldsymbol{e}^i$.

O množině $\mathbb{R}^n$ s operacemi sčítání a násobení reálným číslem budeme mluvit jako o prostoru $\mathbb{R}^n$ a o prvcích z $\mathbb{R}^n$ jako o bodech tohoto prostoru. Někdy je ovšem užitečné pohlížet na daný prvek $\boldsymbol{x}$ z $\mathbb{R}^n$ jako na *vektor*, tj. orientovanou úsečku s počátečním bodem v počátku a koncovým v bodě $\boldsymbol{x}$.

Použijeme-li v dalším textu symbol $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^m$ a podobně, budou n, m, k vždy přirozená čísla.

10.1.2. V průběhu celé kapitoly budeme na $\mathbb{R}^n$ uvažovat eukleidovskou normu

$$\|\boldsymbol{x}\| = \big\|[x_1, \dots, x_n]\big\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,$$

a eukleidovskou metriku $\varrho_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. Vizte Příklad 9.1.21.

10.1.3. Podrobné pojednání o skalárních součinech naleznete v [**4**, kapitola 26]. Zde pouze připomeneme několik základních faktů. **Skalární součin** prvků $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ definujeme předpisem $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Skalární součin má následující vlastnosti

(a) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \|\boldsymbol{x}\|^2 \geq 0$,
(b) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n \colon \langle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$,
(c) $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \colon \langle \alpha \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$,
(d) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \colon \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$.

Vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ jsou **navzájem ortogonální** (**kolmé**), jestliže platí $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$. Řekneme, že vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je **ortogonální** (**kolmý**) na množinu M, jestliže je ortogonální na každý vektor množiny M. Symbol $M^{\perp}$ značí množinu těch vektorů, které jsou ortogonální na množinu M.

10.1.4 (lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$)**.** Řekneme, že zobrazení $L \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je **lineární**, jestliže splňuje

(a) $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \colon L(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = L(\boldsymbol{u}) + L(\boldsymbol{v})$,
(b) $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n \colon L(\alpha \boldsymbol{u}) = \alpha L(\boldsymbol{u})$.

Množinu všech lineárních zobrazení prostoru $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ budeme značit symbolem $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Každé $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ je reprezentováno maticí $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$ o m řádcích a n sloupcích ve smyslu, že pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$L(\boldsymbol{x}) = \mathbb{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Vizte [**4**, kapitola 11].

10.1.5. Úmluva. V souladu s definicí $\mathbb{R}^n$ budeme prvky $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ chápat jako řádkové vektory. Pokud budeme ale pracovat s maticovou reprezentací lineárních zobrazení, tak budeme $\boldsymbol{x}$ uvažovat jako sloupcový vektor neboli matici typu $n \times 1$. Potom bude součin $\mathbb{A}\boldsymbol{x}$ z předchozího paragrafu dobře definován.

10.1.6. Termínem **reálná funkce** n **proměnných** budeme rozumět funkci z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$.

Nechť f je reálná funkce n proměnných a $\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_n] \in \mathbb{R}^n$. Chování f v blízkosti bodu $\boldsymbol{a}$ můžeme zkoumat následujícím způsobem. Zvolíme jednu souřadnici, například první, a budeme se dívat, jak se mění hodnoty funkce f, měníme-li pouze tuto souřadnici nezávisle proměnné funkce f a ostatní souřadnice zůstávají rovny příslušným souřadnicím bodu $\boldsymbol{a}$. Velikost změny funkční hodnoty pak porovnáme se změnou velikosti první souřadnice, tj. zkoumáme výraz

$$\frac{f(x_1, a_2, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{x_1 - a_1},$$

který lze pomocí vektorového zápisu zapsat jako

$$\frac{f(\boldsymbol{a} + (x_1 - a_1)\boldsymbol{e}^1) - f(\boldsymbol{a})}{x_1 - a_1},$$

Při tomto přístupu je ale uvedený výraz funkcí jedné proměnné, totiž proměnné x_1, a je tedy možné jej vyšetřovat pomocí metod Kapitoly 4. Tyto úvahy nás vedou k následující důležité definici.

10.1.7. Definice. Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pak **parciální derivaci funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ podle i-té proměnné** definujeme předpisem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^i) - f(\boldsymbol{a})}{t}. \tag{10.1}$$

Symbolem $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ označujeme parciální derivaci funkce f podle i-té proměnné, tj. funkci z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \boldsymbol{x} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}).$$

V některých případech se používá místo symbolu $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})$ i značení $\partial_i f(\boldsymbol{a})$, $D_i f(\boldsymbol{a})$ a podobně.

10.1.8. Nechť f, $\boldsymbol{a}$ a i jsou jako v předchozí definici.

(a) Pokud jde o vztah (10.1), můžeme rozlišit následující možnosti:

$$\text{limita v (10.1)} \begin{cases} \text{neexistuje} \\ \text{existuje} & \begin{cases} \text{vlastní, tj. je rovna reálnému číslu} \\ \text{nevlastní a je rovna} \begin{cases} \infty \\ -\infty. \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

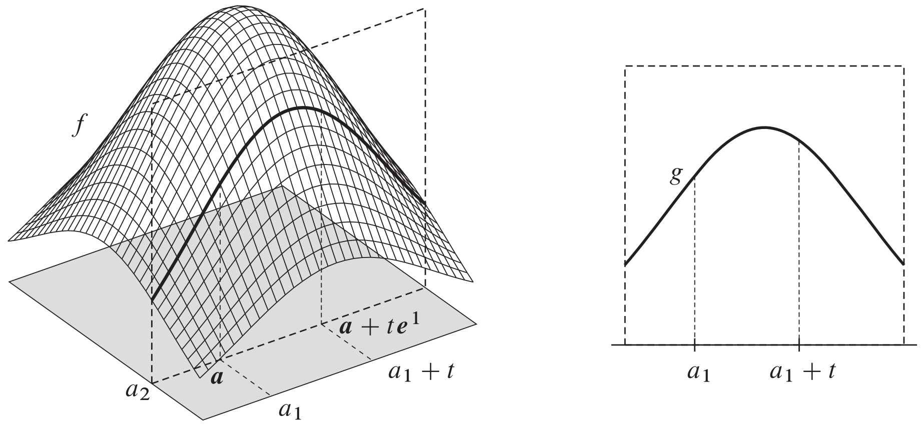
(b) Pokud parciální derivace podle i-té proměnné v bodě $\boldsymbol{a}$ existuje, pak pro nějaké $\delta > 0$ platí $\{\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^i;\ |t| < \delta\} \subset \mathcal{D}(f)$, neboli funkce f musí ve svém definičním oboru obsahovat usečku, která prochází bodem $\boldsymbol{a}$.

10.1.9 (derivace parciální funkce)**.** Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a $i \in \{1, \ldots, n\}$. Položíme-li

$$g(y) = f(a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \ldots, a_n),$$

pak $g'(a_j)$ existuje právě tehdy, když existuje $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$, neboť výpočet vede v obou případech na stejnou limitu. Pokud obě derivace existují, pak jsou si rovny.

Na následujícím obrázku je pro jistou funkci f dvou proměnných vidět geometrický význam funkce g, které říkáme parciální.



Obrázek 1.

10.1.10 (aritmetika parciálních derivací)**.** Z předchozího paragrafu plynou některá pravidla pro výpočet parciálních derivací, neboť lze použít větu o aritmetice derivací pro funkce jedné proměnné (Věta 5.1.17). Pro reálné funkce f a h z $\mathbb{R}^n$, bod $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a $i \in \{1, \dots, n\}$ tak dostáváme

$$\frac{\partial(f+h)}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) + \frac{\partial h}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}),$$
$$\frac{\partial(fh)}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})h(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{a})\frac{\partial h}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}),$$

pokud $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})$, $\frac{\partial h}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})$ existují vlastní.

10.1.11. Úmluva. V dalším textu bude výrok „parciální derivace existuje“ znamenat, že parciální derivace existuje *vlastní*.

10.1.12. Příklad. Pro funkci $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem $f(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2^2}$ spočtěte $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ a $\frac{\partial f}{\partial x_2}$.

Řešení. Podle 10.1.10 v každém bodě $[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2$ platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2^2} x_2^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2^2} 2x_1 x_2.$$

♣

10.1.13. Nechť $n, m \in \mathbb{N}$. Množinu všech reálných matic typu $n \times m$ budeme značit $M(n \times m)$. Tyto matice jednoznačně reprezentují lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$.

Nechť f je reálná funkce n proměnných a $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Existují-li derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})$, $i = 1, \dots, n$, pak nám poskytují informaci o chování funkce f blízko bodu $\boldsymbol{a}$ na úsečkách, které jsou určeny pomocí vektorů $\boldsymbol{e}^1, \dots, \boldsymbol{e}^n$. O chování funkce f například na úsečce tvaru $\{\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{e}^1 + \boldsymbol{e}^2);\ t \in (-\delta, \delta)\}$, kde $\delta > 0$, však žádnou informaci nemáme. Funkce f dokonce nemusí být definována v žádném bodě takové úsečky vyjma bodu $\boldsymbol{a}$. Abychom mohli zkoumat chování funkce f v malých okolích bodu $\boldsymbol{a}$ a ne pouze na některých úsečkách, zavedeme v následující definici nový pojem, který nám to umožní.

10.1.14. Definice. Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je lineární zobrazení. Řekneme, že L je **totální diferenciál funkce** f **v bodě** $\boldsymbol{a}$, pokud platí

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}} \frac{f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0. \tag{10.2}$$

10.1.15. Nechť f a $\boldsymbol{a}$ jsou jako v předchozí definici.

(a) Výrok (10.2) je ekvivalentní výroku

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \frac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|} = 0. \tag{10.3}$$

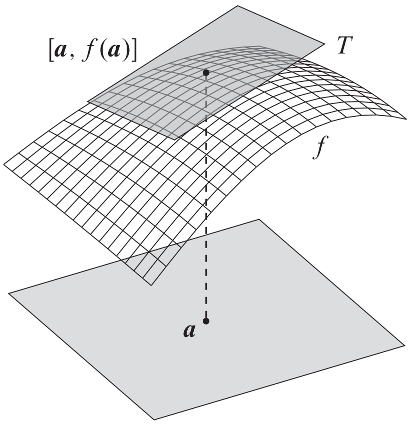
(b) Z existence totálního diferenciálu v bodě $\boldsymbol{a}$ plyne, že funkce f je definována na nějakém okolí bodu $\boldsymbol{a}$.

10.1.16 (geometrický význam totálního diferenciálu)**.** Předpokládejme, že f je reálná funkce n proměnných, která má v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ totální diferenciál L. Definujme funkci $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ předpisem $T(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + L(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$. Podle (10.3) platí

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \frac{f(\boldsymbol{x}) - T(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|} = 0.$$

Tento vztah - neformálně řečeno - ukazuje, že funkce T aproximuje velmi dobře funkci f v blízkosti bodu $\boldsymbol{a}$. Rozdíl funkčních hodnot $f(\boldsymbol{x}) - T(\boldsymbol{x})$ je ve srovnání se vzdáleností $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|$ malý.

Grafem funkce T je afinní podprostor prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$. V uvedené situaci jej nazýváme **tečnou rovinou**, pokud $n = 2$, nebo **tečnou nadrovinou**, pokud $n > 2$, ke grafu funkce f v bodě $[\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a})]$. Graf totálního diferenciálu je potom afinní (dokonce vektorový) podprostor $\mathbb{R}^{n+1}$, který obsahuje počátek prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$ a je rovnoběžný s tečnou (nad)rovinou.



Obrázek 2.

10.1.17. Věta (vztah totálního diferenciálu a parciálních derivací)**.** Nechť f je funkce n proměnných, která má v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ totální diferenciál L. Pak existují parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})$ a pro každé $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$L(\boldsymbol{h}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a})h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})h_n.$$

Důkaz. Zobrazení L je lineární, a proto existují reálná čísla $A_1, \ldots, A_n$ taková, že pro každé $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$L(\boldsymbol{h}) = L(h_1, \ldots, h_n) = A_1 h_1 + \cdots + A_n h_n.$$

Zvolme $i \in \{1, \ldots, n\}$. Zobrazení $\varphi\colon t \mapsto t\boldsymbol{e}^i$ je spojité a $\varphi(t) \neq \boldsymbol{o}$ pro $t \neq 0$. Tedy dle Věty 9.4.18 platí

$$0 = \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + \varphi(t)) - f(\boldsymbol{a}) - L(\varphi(t))}{\|\varphi(t)\|} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^i) - f(\boldsymbol{a}) - A_i t}{|t|}.$$

Odtud

$$\lim_{t\to 0} \left| \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^i) - f(\boldsymbol{a})}{t} - A_i \right| = 0,$$

neboli

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^i) - f(\boldsymbol{a})}{t} = A_i.$$

Tím je důkaz dokončen. ■

10.1.18. Z Věty 10.1.17 plyne, že existuje-li totální diferenciál, je určen jednoznačně, protože je reprezentován maticí $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\right)$, která je určena jednoznačně. To nás opravňuje k zavedení následujícího značení. Existuje-li tedy totální diferenciál funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$, pak jej značíme symbolem $f'(\boldsymbol{a})$. Hodnotu lineárního zobrazení $f'(\boldsymbol{a})$ v bodě $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ pak značíme $f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})$.

Upozorněme, že v případě $n = 1$ zde, bohužel, vzniká kolize ve značení. Symbol $f'(a)$ pak totiž jednak označuje derivaci funkce f v bodě a, tedy reálné číslo, a jednak totální diferenciál funkce f v bodě a, tedy lineární zobrazení. Toto lineární zobrazení je však reprezentováno maticí 1×1, jejímž jediným prvkem je právě hodnota derivace. Z kontextu však bude vždy zřejmé, který význam máme na mysli.

10.1.19. Věta. Nechť f je funkce n proměnných, která má v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ totální diferenciál. Potom je funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ spojitá.

Důkaz. Díky spojitosti zobrazení $\boldsymbol{x} \mapsto \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|$ a $\boldsymbol{h} \mapsto f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})$ máme

$$\begin{aligned}\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) &= \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}\Big(\frac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) - f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|} \cdot \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| \\ &\qquad + f(\boldsymbol{a}) + f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\Big) \\ &= 0 \cdot 0 + f(\boldsymbol{a}) + 0 = f(\boldsymbol{a}).\end{aligned}$$

Tedy f je spojitá v $\boldsymbol{a}$. ■

10.1.20. Z pouhé existence parciálních derivací v daném bodě ještě spojitost funkce v tomto bodě nevyplývá, jak ukazuje následující příklad. Definujme funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } x_1 = 0 \text{ nebo } x_2 = 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak platí $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{o}) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{o}) = 0$, ale f není v $\boldsymbol{o}$ spojitá. Tedy ani $f'(\boldsymbol{o})$ neexistuje. Uvědomme si, že v tomto případě lze definovat lineární zobrazení, které je reprezentováno maticí parciálních derivací, ale toto zobrazení není totálním diferenciálem funkce f v bodě $\boldsymbol{o}$, protože nesplňuje vztah s limitou z definice totálního diferenciálu.

Pokud ale předpoklad ohledně existence parciálních derivací vhodně zesílíme, pak je možné existenci totálního diferenciálu odvodit. Tento výsledek je obsahem Věty 10.1.22, v jejímž důkazu využijeme následující lemma, které je vícedimenzionální variantou Lagrangeovy věty o střední hodnotě.

10.1.21. Lemma. Nechť f je reálná funkce n proměnných, $I = (\alpha_1, \beta_1) \times \cdots \times (\alpha_n, \beta_n) \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in I$. Nechť v každém bodě I existují všechny parciální derivace prvního řádu funkce f. Potom existují body $\boldsymbol{c}^1, \dots, \boldsymbol{c}^n \in I$ takové, že

$$f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{c}^i)(b_i - a_i).$$

Důkaz. Označme

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p}^0 &= (a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n) = \boldsymbol{a},\\
\boldsymbol{p}^1 &= (b_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n),\\
\boldsymbol{p}^2 &= (b_1, b_2, a_3 \dots, a_{n-1}, a_n),\\
&\ \vdots\\
\boldsymbol{p}^{n-1} &= (b_1, b_2, b_3 \dots, b_{n-1}, a_n),\\
\boldsymbol{p}^n &= (b_1, b_2, b_3 \dots, b_{n-1}, b_n) = \boldsymbol{b}.
\end{aligned}$$

Potom platí

$$f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{n} \big(f(\boldsymbol{p}^i) - f(\boldsymbol{p}^{i-1}) \big). \tag{10.4}$$

Pro $i \in \{1, \dots, n\}$ položme

$$g_i(x) = f(b_1, \dots, b_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n), \quad x \in (\alpha_i, \beta_i).$$

Funkce g_i má v (α_i, β_i) vlastní derivaci rovnou

$$g_i'(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(b_1, \dots, b_{i-1}, x, b_{i+1}, \dots, a_n). \tag{10.5}$$

Pokud $a_i \neq b_i$, existuje podle Lagrangeovy věty (Věta 5.2.4) bod z_i v intervalu s krajními body a_i a b_i takový, že

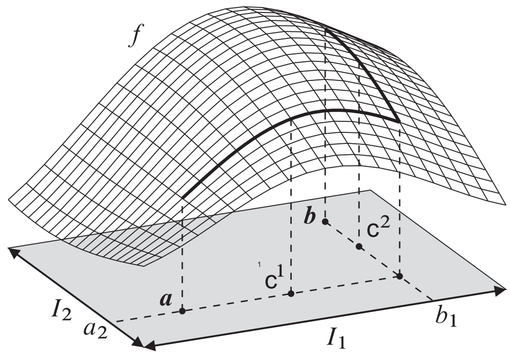
$$f(\boldsymbol{p}^i) - f(\boldsymbol{p}^{i-1}) = g_i(b_i) - g_i(a_i) = g_i'(z_i) \cdot (b_i - a_i) \tag{10.6}$$

V případě, že $a_i = b_i$, volme $z_i = a_i$. Pak (10.6) platí i v tomto případě. Položme

$$\boldsymbol{c}^i = (b_1, b_2, \dots, b_{i-1}, z_i, a_{i+1}, \dots, a_n), \quad i = 1, \dots, n.$$

Potom podle (10.5) a (10.6) platí $f(\boldsymbol{p}^i) - f(\boldsymbol{p}^{i-1}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{c}^i)(b_i - a_i)$. Odtud a z (10.4) dostáváme dokazovaný vztah.

Následující obrázek ilustruje základní myšlenku důkazu pro $n = 2$.



Obrázek 3.

■

10.1.22. Věta. Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ jsou spojité v bodě $\boldsymbol{a}$. Pak má funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ totální diferenciál.

Důkaz. Ukážeme, že lineární zobrazení $L \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definované předpisem

$$L(\boldsymbol{h}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) h_i, \quad \boldsymbol{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n,$$

je totálním diferenciálem funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\tilde{\delta} > 0$, takové, že

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \ \forall x \in B(\boldsymbol{a}, \tilde{\delta}) \colon \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) \right| < \varepsilon.$$

Položme $\delta = \frac{\tilde{\delta}}{\sqrt{n}}$ a označme

$$I = (a_1 - \delta, a_1 + \delta) \times \cdots \times (a_n - \delta, a_n + \delta).$$

Potom platí $B(\boldsymbol{a}, \delta) \subset I \subset B(\boldsymbol{a}, \tilde{\delta})$. Nechť $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}, \delta)$ je libovolné. Pak podle Lemmatu 10.1.21 existují body $\boldsymbol{c}^1, \dots, \boldsymbol{c}^n \in I$ takové, že

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{c}^i)(x_i - a_i).$$

Pak máme

$$\begin{aligned}|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})| &= \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{c}^i)(x_i - a_i) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})(x_i - a_i)\right| \\ &= \left|\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{c}^i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})\Big)(x_i - a_i)\right| \\ &\le \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{c}^i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})\right| |x_i - a_i| \le \varepsilon \sum_{i=1}^{n} |x_i - a_i| \\ &\le \varepsilon n \, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| \,.\end{aligned}$$

Tedy pro $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}, \delta) \setminus \{\boldsymbol{a}\}$ máme

$$\frac{|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|} \le n\varepsilon,$$

čímž je důkaz proveden. ■

V definici parciální derivace jsme pracovali s kanonickými vektory $\boldsymbol{e}^1, \dots, \boldsymbol{e}^n$. Stejný přístup použijeme i v následující definici, kde ale budeme uvažovat libovolný vektor z $\mathbb{R}^n$.

10.1.23. Definice. Nechť f je funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$. Pak **derivací funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ podle vektoru $\boldsymbol{v}$** rozumíme limitu

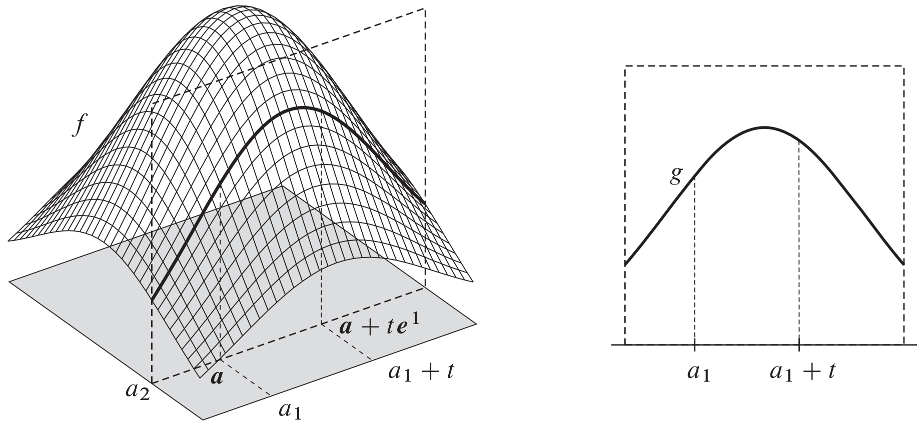
$$D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})}{t},$$

pokud existuje *vlastní*.

10.1.24. (a) Jestliže je f funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a $i \in \{1, \dots, n\}$, potom zřejmě platí $D_{\boldsymbol{e}^i} f(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})$.

(b) Pokud parciální derivace podle vektoru $\boldsymbol{v}i$ v bodě $\boldsymbol{a}$ existuje, pak pro nějaké $\delta > 0$ platí $\{\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v};\ |t| < \delta\} \subset \mathcal{D}(f)$, neboli funkce f musí ve svém definičním oboru obsahovat úsečku, která prochází bodem $\boldsymbol{a}$.

(c) Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$. Položíme-li $g(t) = f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v})$ pro t splňující $\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v} \in \mathcal{D}(f)$, pak $g'(0)$ existuje právě tehdy, když existuje $D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a})$, neboť výpočet vede v obou případech na stejnou limitu. Pokud obě derivace existují, pak jsou si rovny. Na následujícím obrázku je pro jistou funkci f dvou proměnných vidět geometrický význam funkce g.



Obrázek 4.

(d) Podobně jako v případě parciálních derivací plynou z předchozího výkladu některá pravidla pro počítání s derivacemi podle vektoru. Pro reálné funkce f a h z $\mathbb{R}^n$, bod $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ tak dostáváme

$$\begin{aligned} D_{\boldsymbol{v}}(f+h)(\boldsymbol{a}) &= D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) + D_{\boldsymbol{v}} h(\boldsymbol{a}), \\ D_{\boldsymbol{v}}(fh)(\boldsymbol{a}) &= D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) \cdot h(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{a}) \cdot D_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}), \end{aligned}$$

pokud $D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a})$, $D_{\boldsymbol{v}} h(\boldsymbol{a})$ existují.

10.1.25. Definice. Nechť f je funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a $f'(\boldsymbol{a})$ existuje. Pak definujeme vektor $\nabla f(\boldsymbol{a})$ z $\mathbb{R}^n$ předpisem

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \right)$$

a nazýváme jej **gradient funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$**.

10.1.26. Nechť f a $\boldsymbol{a}$ jsou jako v předchozí definici. Chápeme-li $\nabla f(\boldsymbol{a})$ jako matici typu $1 \times n$, pak jde o reprezentující matici totálního diferenciálu $f'(\boldsymbol{a})$. Pokud se na $\nabla f(\boldsymbol{a})$ díváme jako na vektor, pak můžeme pomocí skalárního součinu psát $f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) = \langle \nabla f(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{h} \rangle$ pro každé $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$.

Souvislost totálního diferenciálu, derivace podle vektoru a gradientu zachycuje následující věta.

10.1.27. Věta. Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ a existuje $f'(\boldsymbol{a})$. Potom platí:

(a) $f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{v}) = D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a})$,
(b) $\max\{D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a});\ \|\boldsymbol{v}\| = 1\} = \|\nabla f(\boldsymbol{a})\|$.

Důkaz. (a) Pokud $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ potom dokazovaná rovnost zřejmě platí. Předpokládejme, že $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$. Potom platí

$$\begin{aligned} D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \left(\frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a}) - f'(\boldsymbol{a})(t\boldsymbol{v})}{\|t\boldsymbol{v}\|} \cdot \frac{\|t\boldsymbol{v}\|}{t} + f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{v}) \right). \end{aligned}$$

Funkce $t \mapsto \frac{\|t\boldsymbol{v}\|}{t}$ je omezená na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ a platí

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a}) - f'(\boldsymbol{a})(t\boldsymbol{v})}{t} = 0.$$

Odtud plyne $D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) = 0 + f'(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{v})$.

(b) Z Cauchyovy nerovnosti (Věta **??**) máme

$$\begin{aligned} D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{v}) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) v_i \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) \right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2} = \|\nabla f(\boldsymbol{a})\| \cdot \|\boldsymbol{v}\|. \end{aligned} \tag{10.7}$$

Pokud $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}$, pak dokazovaná rovnost platí, neboť obě strany jsou rovny nule. Předpokládejme, že platí $\nabla f(\boldsymbol{a}) \neq \boldsymbol{o}$. Položme

$$\boldsymbol{v} = \|\nabla f(\boldsymbol{a})\|^{-1} \cdot \nabla f(\boldsymbol{a}).$$

Pak podle již dokázané části (a) platí $D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{v})$ a můžeme psát

$$D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{v}) = \|\nabla f(\boldsymbol{a})\|^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \|\nabla f(\boldsymbol{a})\|.$$

Odtud a z (10.7) již plyne (b). ■

10.1.28. (a) Pokud $\nabla f(\boldsymbol{a}) \neq \boldsymbol{o}$, pak se v (b) nabývá maxima právě pro $\boldsymbol{v} = \|\nabla f(\boldsymbol{a})\|^{-1} \cdot \nabla f(\boldsymbol{a})$.

(b) Nechť $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a $f'(\boldsymbol{a})$ existuje. Jestliže vektory $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ a $\nabla f(\boldsymbol{a})$ svírají úhel menší než $\frac{\pi}{2}$, neboli $\langle \nabla h(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{v} \rangle > 0$, pak existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $t \in (0, \delta)$ platí $f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}) > f(\boldsymbol{a})$ a pro každé $t \in (-\delta, 0)$ platí $f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}) < f(\boldsymbol{a})$. Uvažujme funkci g z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ definovanou předpisem $g(t) = f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v})$, pokud $\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v} \in G$. Potom platí

$$g'(0) = \langle \nabla f(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{v} \rangle > 0$$

a podle Věty **??** dostáváme uvedené tvrzení.

10.1.29. Příklad. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je souvislá a otevřená množina a $f: G \to \mathbb{R}$ je funkce taková, že pro každé $x \in G$ platí $f'(x) = 0$. Dokažte, že potom f je konstantní na G.

Řešení. ♣

10.2. Derivace vektorových funkcí

Pojem totálního diferenciálu pro funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ je možné zobecnit i pro **vektorové funkce**, tj. funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$. To je provedeno v následující definici.

10.2.1. Definice. Nechť F je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lineární zobrazení. Řekneme, že L je **derivací zobrazení** F **v bodě** $\boldsymbol{a}$, pokud platí

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{o}} \frac{F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} = \boldsymbol{o}. \tag{10.8}$$

10.2.2. Ve vztahu (10.8) se vyskytuje dvakrát symbol označující nulový vektor. V případě výrazu $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{o}$ jde o vektor z $\mathbb{R}^n$, ve druhém případě jde o vektor z $\mathbb{R}^m$. Vzhledem k tomu, že je z kontextu jasné, z kterých prostorů jsou uvedené vektory, používáme jeden symbol v obou případech, ačkoliv jde o rozdílné vektory, pokud $n \neq m$.

Vztah (10.8) je splněn právě tehdy, když platí

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{o}} \frac{\|F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{h})\|}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0. \tag{10.9}$$

Ve výrazu (10.9) se dvakrát vyskytuje symbol normy. Podobně jako pro nulový vektor vyplývá z kontextu, že norma v čitateli je normou na prostoru $\mathbb{R}^m$ a norma ve jmenovateli je normu na prostoru $\mathbb{R}^n$.

10.2.3. Zobrazení F z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ má v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ derivaci právě tehdy, když každá jeho složka, tedy každé zobrazení F_i z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, má v bodě $\boldsymbol{a}$ totální diferenciál. Podívejme se postupně na obě implikace v předchozím tvrzení.

$\Rightarrow$ Podle Věty **??** platí (10.8) právě tehdy, když každá složka funkce, jejíž limitu počítáme, má limitu rovnou nule, tj. pro každé $i \in \{1, \ldots, m\}$ platí

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{o}} \Big(\frac{F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|}\Big)_i = \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{o}} \frac{F_i(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - F_i(\boldsymbol{a}) - L_i(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0. \tag{10.10}$$

Z druhé rovnosti plyne, že funkce F_i má v bodě $\boldsymbol{a}$ totální diferenciál rovný lineárnímu zobrazení L_i.

$\Leftarrow$ Definujme zobrazení $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ předpisem $L(\boldsymbol{h}) = (F_1'(a)(\boldsymbol{h}), \ldots, F_m'(a)(\boldsymbol{h}))$. Zobrazení L je lineární, neboť $F_1'(a), \ldots, F_m'(a)$ jsou lineární. Z definice totálního diferenciálu platí pro každé $i \in \{1, \ldots, m\}$

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{o}} \frac{F_i(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - F_i(\boldsymbol{a}) - F_i'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0.$$

Podle Věty **??** dostáváme

$$\begin{aligned}
&\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{o}} \frac{F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-F(\boldsymbol{a})-L(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} \\
&= \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{o}} \left[\frac{F_1(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-F_1(\boldsymbol{a})-F_1'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|}, \dots, \frac{F_m(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-F_m(\boldsymbol{a})-F_m'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|}\right] \\
&= \underbrace{[0,\dots,0]}_{m\text{-krát}} = \boldsymbol{o}.
\end{aligned}$$

Lineární zobrazení L je tedy derivace zobrazení F v bodě $\boldsymbol{a}$.

10.2.4. Označení. (a) Z 10.2.3 je vidět, že má-li F v bodě $\boldsymbol{a}$ derivaci $L = (L_1, \dots, L_m)$, pak je L_i totálním diferenciálem F_i v bodě $\boldsymbol{a}$ pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$. Totální diferenciál je určen jednoznačně, pokud existuje, a tedy derivace zobrazení F v bodě $\boldsymbol{a}$ je určena jednoznačně, pokud existuje. Tato úvaha nás opravňuje označit lineární zobrazení, které je derivací funkce F v bodě a, symbolem $F'(a)$.

(b) Pokud v Definici 10.2.1 derivace $m = 1$, pak je vztah (10.8) ekvivalentní s (10.2). V tomto případě tedy znovu definujeme pojem totálního diferenciálu. V dalším textu již nebudeme termín totální diferenciál používat a dáme přednost termínu derivace.

10.2.5. (a) Nechť $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je zobrazení, které je konstantní na jistém okolí bodu $\boldsymbol{a}$. Pak $F'(\boldsymbol{a})$ je lineární zobrazení, které libovolnému vektoru $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ přiřazuje nulový vektor v prostoru $\mathbb{R}^m$. Stačí nalézt $\eta > 0$ a $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ takové, že $F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ pro každé $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}, \eta)$. Potom pro každé $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$, $\|\boldsymbol{h}\| < \eta$, platí

$$F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a}) - F'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}.$$

Odtud okamžitě plyne naše tvrzení.

(b) Je-li $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineární zobrazení, pak v každém bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ platí $L'(\boldsymbol{a}) = L$, neboť pro každé $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\|L(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - L(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{h})\| = \|\boldsymbol{o}\| = 0.$$

10.2.6 (geometrický význam derivace)**.** Předpokládejme, že F je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, které má v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ derivaci. Na zobrazení F se můžeme podívat jako na m-tici funkcí $F_1, \dots, F_m$ a pro každou z těchto funkcí uvažovat její derivaci, pomocí které můžeme aproximovat její chování v okolí bodu $\boldsymbol{a}$ ve smyslu 10.1.16. Pomocí derivace $F'(\boldsymbol{a})$, která má složky $F_1'(\boldsymbol{a}), \dots, F_m'(\boldsymbol{a})$, pak můžeme aproximovat chování funkce F v okolí bodu $\boldsymbol{a}$, neboť můžeme aproximovat chování jednotlivých složek. Jinými slovy, definujeme-li funkci $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ předpisem $T(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{a}) + F'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$, pak podle definice platí

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{F(\boldsymbol{x}) - T(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|} = \boldsymbol{o}.$$

Afinní funkce T, která je obecně jednodušší objekt než F, aproximuje velmi dobře funkci F v blízkosti bodu $\boldsymbol{a}$. Vektor $F(\boldsymbol{x}) - T(\boldsymbol{x})$ je totiž ve srovnání s velikostí vektoru $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$ malý.

10.2.7. Věta. Nechť F je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, které má v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ derivaci. Pak je $F'(\boldsymbol{a})$ reprezentována maticí

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}. \tag{10.11}$$

Důkaz. Podle 10.2.3 víme, že derivace $F_j'(a)$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, existuje a je podle 10.1.18 reprezentována maticí $\left(\frac{\partial F_j}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial F_j}{\partial x_n}(a)\right)$. Lineární zobrazení $F'(a)$ má složky $F_j'(a)$, $j = 1, \ldots, m$, takže je reprezentováno maticí (10.11). ■

10.2.8. Označení. Matice reprezentující $F'(\boldsymbol{a})$ se nazývá **Jacobiho matice**. Pokud $m = n$, pak determinant Jacobiho matice nazýváme **jacobián** a značíme ho $J_F(\boldsymbol{a})$, případně

$$\frac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}(\boldsymbol{a}).$$

10.2.9. Věta. Nechť F je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, které má v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ derivaci. Pak je F spojité v a.

Důkaz. Podle 10.2.3 existují derivace $F_i'(a)$, $i = 1, \ldots, m$, takže všechny funkce F_i jsou spojité v a podle Věty 10.1.19. Odtud plyne podle Věty **??** spojitost F v a. ■

10.2.10. Věta. Nechť F je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a $\frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ jsou spojité v $\boldsymbol{a}$ pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$. Pak $F'(\boldsymbol{a})$ existuje.

Důkaz. Podle Věty 10.1.22 existují derivace $F_1'(\boldsymbol{a}), \ldots, F_m'(\boldsymbol{a})$. Z 10.2.3 dostáváme existenci $F'(\boldsymbol{a})$. ■

10.2.11. Lemma. Nechť $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lineární zobrazení. Pak existuje $C \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\colon \ \|L\boldsymbol{x}\| \leq C\,\|\boldsymbol{x}\|\,.$$

Důkaz. Nechť matice $\mathbb{A} = (a_{ji})_{\substack{j=1..m\\ i=1..n}} \in M(m \times n)$ reprezentuje L. Pak máme z Cauchyovy nerovnosti (Věta **??**)

$$\begin{aligned} \|L\boldsymbol{x}\| &= \sqrt{\sum_{j=1}^{m}\big(L(\boldsymbol{x})_j\big)^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i\Big)^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\Big)} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ji}^2} \cdot \|\boldsymbol{x}\|\,. \end{aligned}$$

Položíme-li

$$C = \sqrt{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ji}^2},$$

dostáváme požadovaný výsledek. ■

10.2.12. Definice. Na množině $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ zavedeme operace sčítání prvků a násobení prvku reálným číslem takto

$$(L_1 + L_2)(\boldsymbol{x}) = L_1(\boldsymbol{x}) + L_2(\boldsymbol{x}), \qquad L_1, L_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,$$

$$(cL)(\boldsymbol{x}) = cL(\boldsymbol{x}), \qquad L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), c \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Vzhledem k těmto operacím tvoří $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ vektorový prostor nad reálnými čísly. Definujeme pro $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ normu

$$\|L\| = \sup\left\{\frac{\|L(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|};\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}\right\}.$$

10.2.13. Lemma. Vektorový prostor $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ je s výše definovanou normou normovaný lineární prostor.

Důkaz. Musíme ověřit, že zobrazení $L \mapsto \|L\|$ je norma na $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Zjevně je norma nulového zobrazení rovna nule a $\|L\| = 0$ právě tehdy, když $\|L(\boldsymbol{x})\| = 0$ pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, tj. když $L = 0$.

Snadno též odvodíme pro $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ a $c \in \mathbb{R}$ rovnost

$$\begin{aligned}
\|cL\| &= \sup\left\{\frac{\|cL(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|};\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}\right\} \\
&= |c| \sup\left\{\frac{\|L(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|};\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}\right\} \\
&= |c|\,\|L\|.
\end{aligned}$$

Zbývá ověřit trojúhelníkovou nerovnost. Pro $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

$$\begin{aligned}
\|L_1 + L_2\| &= \sup\left\{\frac{\|L_1(\boldsymbol{x}) + L_2(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|};\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}\right\} \\
&\le \sup\left\{\frac{\|L_1(\boldsymbol{x})\| + \|L_2(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|};\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}\right\} \\
&\le \sup\left\{\frac{\|L_1(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|};\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}\right\} + \sup\left\{\frac{\|L_2(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|};\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}\right\} \\
&= \|L_1\| + \|L_2\|.
\end{aligned}$$

■

10.2.14. Poznámka. Povšimněme si, že pro každé $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ a $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ platí $\|L(\boldsymbol{x})\| \le \|L\|\,\|\boldsymbol{x}\|$. Mějme totiž $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$ v $\mathbb{R}^n$ dáno. Pak

$$\frac{\|L(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \le \|L\|,$$

a tedy

$$\|L(\boldsymbol{x})\| \le \|L\|\,\|\boldsymbol{x}\|.$$

Pro $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ platí nerovnost triviálně.

10.2.15. Lemma. Nechť F je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ mající derivaci v bodě $a \in \mathbb{R}^n$. Pak existují $C > 0$ a $\delta > 0$ taková, že

$$\forall h \in B(\boldsymbol{o}, \delta)\colon\ \|F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a})\| \le C\,\|\boldsymbol{h}\|\,.$$

Důkaz. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro každé $\boldsymbol{h} \in B(\boldsymbol{o}, \delta)$ platí

$$\left\|F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a}) - F'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})\right\| \le \|\boldsymbol{h}\|\,.$$

Potom pro $\boldsymbol{h} \in B(\boldsymbol{o}, \delta)$ máme

$$\begin{aligned}\|F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a})\| &\le \left\|F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a}) - F'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})\right\| + \left\|F'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})\right\| \\ &\le \|\boldsymbol{h}\| + \left\|F'(\boldsymbol{a})\right\|\,\|\boldsymbol{h}\| = (1 + \left\|F'(\boldsymbol{a})\right\|)\,\|\boldsymbol{h}\|\,.\end{aligned}$$

Číslo $C = 1 + \|F'(\boldsymbol{a})\|$ tedy vyhovuje požadované nerovnosti. ■

10.2.16. Věta (derivace složeného zobrazení)**.** Nechť F je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$, G je zobrazení z $\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}^s$, F má derivaci v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ a G má derivaci v bodě $b = F(a) \in \mathbb{R}^k$. Pak existuje derivace $(G \circ F)'(a)$ a platí

$$(G \circ F)'(a) = G'(b) \circ F'(a).$$

Důkaz. Díky Lemmatu 10.2.15 nalezneme $C \in \mathbb{R}$ a $\delta_0 > 0$, takové, že

$$\forall \boldsymbol{h} \in B(\boldsymbol{o}, \delta_0)\colon\ \|F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a})\| \le C\,\|\boldsymbol{h}\|\,. \tag{10.12}$$

Ukážeme, že lineární zobrazení $G'(\boldsymbol{b}) \circ F'(\boldsymbol{a})\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$ je derivací zobrazení $G \circ F$ v bodě $\boldsymbol{a}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Poněvadž existuje derivace $G'(b)$, můžeme nalézt $\eta > 0$ takové, že platí

$$\forall \boldsymbol{u} \in B(\boldsymbol{o}, \eta)\colon\ \left\|G(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{u}) - G(\boldsymbol{b}) - G'(\boldsymbol{b})(\boldsymbol{u})\right\| \le \varepsilon\,\|\boldsymbol{u}\|\,. \tag{10.13}$$

Dále díky existenci derivace $F'(a)$ nalezneme $\delta \in (0, \frac{\eta}{C})$ takové, že platí

$$\forall \boldsymbol{h} \in B(\boldsymbol{o}, \delta)\colon\ \left\|F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a}) - F'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})\right\| \le \varepsilon\,\|\boldsymbol{h}\|\,. \tag{10.14}$$

Navíc dostáváme

$$\forall \boldsymbol{h} \in B(\boldsymbol{o}, \delta)\colon\ \|F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a})\| \le C\,\|\boldsymbol{h}\| < \eta. \tag{10.15}$$

Pak pro $\boldsymbol{h} \in B(\boldsymbol{o}, \delta)$ máme díky (10.13) a (10.15) odhad

$$\begin{aligned}&\left\|G\big(\boldsymbol{b} + (F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a}))\big) - G(\boldsymbol{b}) - G'(\boldsymbol{b})\big(F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a})\big)\right\| \\ &\le \varepsilon\,\|F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a})\| \le C\varepsilon\,\|\boldsymbol{h}\|\,.\end{aligned}$$

Dále pro $\boldsymbol{h} \in B(\boldsymbol{o}, \delta)$ platí z (10.14)

$$\begin{aligned}&\left\|G'(b)(F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a})) - G'(\boldsymbol{b}) \circ F'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})\right\| \\ &\le \left\|G'(\boldsymbol{b})\right\|\,\left\|F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a}) - F'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})\right\| \\ &\le \varepsilon\left\|G'(\boldsymbol{b})\right\|\,\|\boldsymbol{h}\|\,.\end{aligned}$$

Kombinací předcházejících dvou odhadů dostaneme

$$\begin{aligned}
&\left\|G(F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}))-G(F(\boldsymbol{a}))-G'(\boldsymbol{b})\circ F'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})\right\| \\
&\le \left\|G(\boldsymbol{b}+(F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-F(\boldsymbol{a})))-G(\boldsymbol{b})-G'(\boldsymbol{b})(F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-F(\boldsymbol{a}))\right\| \\
&\quad\cdot \left\|G'(\boldsymbol{b})(F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-F(\boldsymbol{a}))-G'(\boldsymbol{b})\circ F'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})\right\| \\
&\le (C+\left\|G'(\boldsymbol{b})\right\|)\varepsilon\left\|\boldsymbol{h}\right\|,
\end{aligned}$$

čímž je důkaz hotov. ■

10.2.17. Poznámka. Diferenciál $(G\circ F)'(\boldsymbol{a})$ je reprezentován součinem matic, které reprezentují $F'(\boldsymbol{a})$ a $G'(\boldsymbol{b})$. Tedy $(G\circ F)'(\boldsymbol{a})$ je reprezentován maticí

$$\left(\frac{\partial g_l}{\partial y_j}\right)_{\substack{l=1..s\\ j=1..k}}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)_{\substack{j=1..k\\ i=1..n}}.$$

10.2.18. Věta (řetízkové pravidlo)**.** Nechť funkce $f_1,\dots,f_k$ z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ mají v bodě $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n$ derivaci a funkce g z $\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}$ má v bodě $\boldsymbol{b}=(f_1(\boldsymbol{a}),\dots,f_k(\boldsymbol{a}))$ derivaci. Definujme funkci h z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ předpisem

$$h(\boldsymbol{x})=g(f_1(\boldsymbol{x}),f_2(\boldsymbol{x}),\dots,f_k(\boldsymbol{x})).$$

Pak má funkce h v bodě $\boldsymbol{a}$ derivaci a pro $i\in\{1,\dots,n\}$ platí

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial g}{\partial y_j}(\boldsymbol{b})\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}). \tag{10.16}$$

Důkaz. Existence derivace plyne z Věty 10.2.16. Dle Poznámky 10.2.17 platí (10.16), jelikož

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}),\dots,\frac{\partial h}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\right)=\left(\frac{\partial g}{\partial y_1}(\boldsymbol{b}),\dots,\frac{\partial g}{\partial y_k}(\boldsymbol{b})\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\end{pmatrix}.$$

■

10.2.19. Příklad. Nechť $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ má derivaci v každém bodě. Definujme $h\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ předpisem

$$h(r,t)=f(r\cos t,r\sin t),\quad (r,t)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}.$$

Potom pro $(r,t)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}$ platí

$$\left(\frac{\partial h}{\partial r}(r,t),\frac{\partial h}{\partial t}(r,t)\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos t,r\sin t),\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos t,r\sin t)\right)\begin{pmatrix}\cos t & -r\sin t\\ \sin t & r\cos t\end{pmatrix},$$

a tedy

$$\frac{\partial h}{\partial r}(r,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos t, r\sin t)\cos t + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos t, r\sin t)\sin t,$$
$$\frac{\partial h}{\partial t}(r,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos t, r\sin t)(-r\sin t) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos t, r\sin t)(r\cos t).$$

10.2.20. Poznámka. Nechť f_1, f_2 jsou funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, které mají v $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ derivaci. Pak platí

(a) $(f_1 + f_2)'(a) = f_1'(a) + f_2'(a)$,
(b) $(f_1 f_2)'(a) = f_2(a) f_1'(a) + f_1(a) f_2'(a)$,
(c) $(f_1/f_2)'(a) = f_2^{-2}(a)\big(f_2(a) f_1'(a) - f_1(a) f_2'(a)\big)$, pokud $f_2(a) \neq 0$.

K důkazu (a) uvažujme $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované jako

$$g(y_1, y_2) = y_1 + y_2$$

a $f = (f_1, f_2)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$. Pak $(g \circ f)(\boldsymbol{x}) = f_1(\boldsymbol{x}) + f_2(\boldsymbol{x})$ a $g'(\boldsymbol{b}) = (1, 1)$ pro každý bod $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$. V bodě $\boldsymbol{a}$ tedy platí

$$\begin{aligned}
(f_1 + f_2)'(\boldsymbol{a}) &= (g \circ f)'(\boldsymbol{a}) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix} \\
&= f_1'(\boldsymbol{a}) + f_2'(\boldsymbol{a}).
\end{aligned}$$

Podobně postupujeme v případech (b) a (c) za pomoci funkcí $g(y_1, y_2) = y_1 y_2$, respektive $g(y_1, y_2) = y_1/y_2$.

10.2.21. Věta (o přírůstku funkce)**.** Nechť f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, která má diferenciál v každém bodě otevřené množiny $G \subset \mathbb{R}^n$. Nechť $\boldsymbol{va}, \boldsymbol{b} \in G$ a úsečka L spojující body $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ je obsažena v G, tj. $\{t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b};\ t \in [0,1]\} \subset G$. Pak existuje $\boldsymbol{c} \in L$ takové, že

$$f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}).$$

Důkaz. Definujme funkci $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ předpisem

$$g(t) = f\big((1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}\big), \quad t \in [0,1].$$

Zobrazení $t \mapsto (1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ má spojitou derivaci, takže g je spojité na $[0,1]$ a v každém bodě $(0,1)$ má derivaci. Potom podle Lagrangeovy věty (Věta 5.2.4) existuje $t_0 \in (0,1)$ takové, že

$$g(1) - g(0) = g'(t_0),$$

neboli pro $\boldsymbol{c} = (1 - t_0)\boldsymbol{a} + t_0\boldsymbol{b}$ máme

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) &= g(1) - g(0) = g'(t_0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{c})(b_i - a_i) \\ &= f'(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}). \end{aligned}$$

■

10.2.22. Definice. Nechť A je množina v $\mathbb{R}^n$. Řekneme, že je **konvexní**, pokud pro každé dva body z A platí, že úsečka je spojující je obsažena v A.

10.2.23. Příklad. Pro zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ nemusí analogie Věty 10.2.21 platit. Uvažujme zobrazení $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definované předpisem

$$F(t) = (\cos t, \sin t)$$

Pak $F'(t) = (-\sin t, \cos t) \neq \boldsymbol{o}$ pro každé $t \in \mathbb{R}$,

$$F(2\pi) - F(0) = (1, 0) - (1, 0) = (0, 0),$$

ale

$$F'(c)(2\pi - 0) = 2\pi(-\sin c, \cos c) \neq (0, 0), \quad c \in (0, 1).$$

10.2.24. Věta. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená konvexní množina a $f : G \to \mathbb{R}^k$ je zobrazení mající derivaci v každém bodě G. Potom platí

$$\forall a, b \in G : \|f(b) - f(a)\| \leq \sup\{\|f'(x)\|;\ x \in G\} \cdot \|b - a\|.$$

Důkaz. Mějme dány body $a, b \in G$. Pokud $f(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{b})$, tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že $f(a) \neq f(b)$ a položme

$$\boldsymbol{v} = \frac{f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a})}{\|f(b) - f(a)\|}.$$

Definujeme-li funkci $\varphi : G \to \mathbb{R}$ jako

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \langle f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{v}\rangle = \sum_{j=1}^{k} f_j(\boldsymbol{x})v_j,$$

platí

$$|\varphi(\boldsymbol{b}) - \varphi(\boldsymbol{a})| = |\langle f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{v}\rangle| = \|f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a})\|.$$

Dále máme

$$\varphi'(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{k} v_j f_j'(\boldsymbol{x}), \quad x \in G,$$

a pro libovolné $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$, $\|h\| \le 1$, platí

$$\begin{aligned}\left|\varphi'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{h})\right| &= \left|\sum_{j=1}^{k} v_j f_j'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{h})\right| = \left|\langle f'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{h}), \boldsymbol{v}\rangle\right| \\ &\le \left\| f'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{h})\right\| \cdot \|\boldsymbol{v}\| \le \left\| f'(\boldsymbol{x})\right\| \cdot \|\boldsymbol{v}\| \\ &\le \left\| f'(\boldsymbol{x})\right\| \le K.\end{aligned}$$

Tedy

$$\left\|\varphi'(\boldsymbol{x})\right\| = \sup\left\{\left|\varphi'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{h})\right|;\ \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{h}\| \le 1\right\} \le \sup\left\{\|f'(x)\|;\ x \in G\right\}.$$

Podle Věty 10.2.21 existuje $\boldsymbol{c} \in G$ splňující

$$\varphi(\boldsymbol{b}) - \varphi(\boldsymbol{a}) = \varphi'(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}).$$

Tedy

$$\begin{aligned}\|f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a})\| &= \left|\varphi'(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})\right| \le \|\varphi'(\boldsymbol{c})\| \cdot \|b - a\| \\ &\le \sup\left\{\|f'(x)\|;\ x \in G\right\} \cdot \|b - a\|.\end{aligned}$$

■

10.3. Derivace vyšších řádů

10.3.1. Definice. Nechť f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$ a $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Parciální derivaci funkce $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ podle j-té proměnné v bodě $\boldsymbol{a}$ značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{a})$, pokud $i \neq j$, případně $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\boldsymbol{a})$, pokud $i = j$. Analogicky značíme parciální derivace vyšších řádů.

10.3.2. Poznámka. Všimněte si pořadí symbolů

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}).$$

10.3.3. Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f : G \to \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}$. Řekneme, že f je **třídy** C^k, pokud jsou všechny parciální derivace funkce f až do řádu k včetně spojité na G. Množinu všech funkcí $f : G \to \mathbb{R}$ třídy C^k označujeme $C^k(G)$ a klademe $C^\infty(G) = \bigcap_{k=1}^\infty C^k(G)$.

O funkci g řekneme, že je **třídy** C^k **na** G ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$), pokud $g|_G \in C^k(G)$.

10.3.4. Příklad. Dokažte, že funkce $\pi_i(\boldsymbol{x}) = x_i$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, leží v množině $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Řešení. ♣

10.3.5. Poznámky. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina.

(a) Jestliže $f \in C^1(G)$, pak má dle Věty 10.1.22 derivaci v každém bodě G.

(b) Zřejmě platí

$$C^0(G) \supset C^1(G) \supset C^2(G) \supset \dots,$$

přičemž funkcemi třídy $C^0(G)$ se rozumí spojité funkce na G.

(c) Nechť $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Pokud $f, g \in C^k(G)$, pak i $f + g$, fg a cf, $c \in \mathbb{R}$, leží v $C^k(G)$. Je-li navíc g nenulová na G, tak i $f/g \in C^k(G)$. K ověření těchto tvrzení stačí použít vzorce pro výpočet derivace součtu, součinu, podílu a matematickou indukci dle k.

10.3.6. Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}$ je otevřená množina, $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ a f je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$. Řekneme, že F je zobrazení **třídy** C^k, pokud jeho složky $f_1, \dots, f_m$ jsou třídy C^k.

10.3.7. Poznámka. Zobrazení třídy C^1 na otevřené množině G má derivaci v každém bodě množiny G.

10.3.8. Věta (skládání zobrazení třídy $\mathcal{C}^k$). Nechť $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $m, n, s \in \mathbb{N}$ a $G \subset \mathbb{R}^n$, $H \subset \mathbb{R}^m$ jsou otevřené množiny. Nechť $f : G \to \mathbb{R}^m$, $g : H \to \mathbb{R}^s$ jsou po řadě tříd $\mathcal{C}^k(G)$ a $\mathcal{C}^k(H)$ a platí $f(G) \subset H$. Pak zobrazení $g \circ f$ je třídy $\mathcal{C}^k(G)$.

Důkaz. Označme $h = (h_1, \dots, h_s) = g \circ f$. Protože $f : G \to \mathbb{R}^m$, $g : H \to \mathbb{R}^s$ a $f(G) \subset H$, je zobrazení h definované na G. Dále budeme postupovat pomocí matematické indukce podle k. Předpokládejme nejprve, že $k = 1$. Pro každé $\boldsymbol{x} \in G$ existují podle Věty 14.4 derivace $f'(\boldsymbol{x})$ a $g'\big(f(\boldsymbol{x})\big)$. Podle Věty 14.11 pak platí pro každé $\boldsymbol{x} \in G$, $l \in \{1, \dots, s\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ vztah

$$\frac{\partial h_l}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_l}{\partial y_j}\big(f(\boldsymbol{x})\big)\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}). \tag{10.17}$$

Funkce $\boldsymbol{x} \mapsto \frac{\partial g_l}{\partial y_j}\big(f(\boldsymbol{x})\big)$, $\boldsymbol{x} \mapsto \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$ jsou spojité, a proto je funkce $\frac{\partial h_l}{\partial x_i}$ podle (10.17) spojitá. Odtud vyplývá, že zobrazení $g \circ f$ je třídy $\mathcal{C}^1$ na G.

Předpokládejme nyní platnost tvrzení pro $k - 1$, kde $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Stejně jako v předchozím případě platí pro každé $\boldsymbol{x} \in G$, $l \in \{1, \dots, s\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ vztah (10.17).

Nechť $l \in \{1, \dots, s\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ a $j \in \{1, \dots, m\}$. Funkce $\boldsymbol{x} \mapsto \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$ je třídy $\mathcal{C}^{k-1}$ na G. Funkce $x \mapsto \frac{\partial g_l}{\partial y_j}\big(f(\boldsymbol{x})\big)$ je dle indukčního předpokladu třídy $\mathcal{C}^{k-1}$ na G, neboť funkce $y \mapsto \frac{\partial g_l}{\partial y_j}(\boldsymbol{y})$ je třídy $\mathcal{C}^{k-1}$ na H a $f \in \mathcal{C}^k(G) \subset \mathcal{C}^{k-1}(G)$. Podle výše uvedené poznámky (c) je funkce $\boldsymbol{x} \mapsto \frac{\partial h_l}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$ též třídy $\mathcal{C}^{k-1}$ na G. Tedy je funkce h třídy $\mathcal{C}^k(G)$.

Je-li $k = \infty$, tvrzení plyne přímo z definice podle předchozího. ■

10.3.9. Věta (záměnnost parciálních derivací)**.** Nechť f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Jestliže obě funkce $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ mají totální diferenciál v a, potom

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $n = 2$. Nechť $\boldsymbol{a} = [a_1, a_2] \in \mathbb{R}^2$ a $\delta > 0$, je takové, že

$$(a_1 - \delta, a_1 + \delta) \times (a_2 - \delta, a_2 + \delta) \subset \mathcal{D}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) \cap \mathcal{D}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big).$$

Položme

$$W(t) = \frac{f(a_1 + t, a_2 + t) - f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2 + t) + f(a_1, a_2)}{t^2} \quad \text{pro } t \in (0, \delta).$$

Zvolme $t \in P_+(0, \delta)$. Položme

$$\varphi(x) = f(x, a_2 + t) - f(x, a_2) \quad \text{pro } x \in [a_1, a_1 + \delta).$$

Potom

$$W(t) = \frac{1}{t^2}\big(\varphi(a_1 + t) - \varphi(a_1)\big)$$

a

$$\varphi'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, a_2 + t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, a_2) \quad \text{pro každé } x \in [a_1, a_1 + \delta).$$

Podle Lagrangeovy věty existuje $\xi(t) \in (a_1, a_1 + t)$ takové, že

$$\varphi(a_1 + t) - \varphi(a_1) = \varphi'(\xi(t)) \cdot t.$$

Pak

$$W(t) = \frac{\varphi'(\xi(t))}{t} = \frac{1}{t}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t), a_2 + t) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t), a_2)\Big). \tag{10.18}$$

Protože $\frac{\partial f}{\partial x}$ má v bodě $\boldsymbol{a}$ totální diferenciál, existuje funkce $z_1 \colon (-\delta, \delta)^2 \to \mathbb{R}$ splňující

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_1+\alpha, a_2+\beta) = \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{a}) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{a})\alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\boldsymbol{a})\beta + z_1(\alpha, \beta) \quad \text{pro každé } [\alpha, \beta] \in (-\delta, \delta)^2 \tag{10.19}$$

a

$$\lim_{[\alpha,\beta]\to \boldsymbol{o}} \frac{z_1(\alpha, \beta)}{\|[\alpha, \beta]\|} = 0. \tag{10.20}$$

Dosaďme do (10.19) postupně $[\alpha, \beta] = [\xi(t) - a_1, t]$ a $[\alpha, \beta] = [\xi(t) - a_1, 0]$. Dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t), a_2 + t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{a}) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{a})(\xi(t) - a_1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\boldsymbol{a})t + z_1(\xi(t) - a_1, t),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t), a_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{a}) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{a})(\xi(t) - a_1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\boldsymbol{a}) \cdot 0 + z_1(\xi(t) - a_1, 0).$$

Díky tomu, že t bylo zvoleno libovolně, obdržíme kombinací posledních dvou rovností s (10.18) vztah

$$W(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\boldsymbol{a}) + \frac{z_1(\xi(t) - a_1, t) - z_1(\xi(t) - a_1, 0)}{t} \quad \text{pro každé } t \in (0, \delta).$$

Pro každé $t \in (0, \delta)$ platí

$$\frac{z_1(\xi(t) - a_1, t)}{t} = \frac{z_1(\xi(t) - a_1, t)}{\|[\xi(t) - a_1, t]\|} \cdot \frac{\|[\xi(t) - a_1, t]\|}{t}$$

a

$$\frac{\|[\xi(t) - a_1, t]\|}{t} \leq \frac{\sqrt{(\xi(t) - a_1)^2 + t^2}}{t} \leq \frac{\sqrt{t^2 + t^2}}{t} = \sqrt{2}.$$

Z (10.20) plyne, že

$$\lim_{t \to 0_+} \frac{z_1(\xi(t) - a_1, t)}{\|[\xi(t) - a_1, t]\|} = 0,$$

a tedy celkem

$$\lim_{t \to 0_+} \frac{z_1(\xi(t) - a_1, t)}{t} = 0.$$

Podobně odvodíme

$$\lim_{t \to 0_+} \frac{z_1(\xi(t) - a_1, 0)}{t} = 0.$$

Odtud vyplývá

$$\lim_{t \to 0_+} W(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\boldsymbol{a}).$$

Nyní vyjádříme funkci W jiným způsobem. Zvolme $t \in (0, \delta)$ a definujme

$$\psi(y) = f(a_1 + t, y) - f(a_1, y) \quad \text{pro } y \in [a_2, a_2 + \delta).$$

Potom

$$W(t) = \frac{\psi(a_2 + t) - \psi(a_2)}{t^2} \quad \text{pro } t \in (0, \delta).$$

Obdobně jako v první části důkazu odvodíme

$$W(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{a}) + \frac{z_2(t, \eta(t) - a_2) - z_2(0, \eta(t) - a_2)}{t}$$

pro nějaké $\eta(t) \in (a_2, a_2 + t)$, kde z_2 je funkce splňující

$$\lim_{[\alpha, \beta] \to \boldsymbol{o}} \frac{z_2(\alpha, \beta)}{\|[\alpha, \beta]\|} = 0.$$

Odtud plyne podobně jako v předchozím případě

$$\lim_{t \to 0_+} W(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{a}).$$

Platí tedy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{a}).$$

Nechť nyní $n \in \mathbb{N}$ a $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i < j$. Definujme funkci $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ předpisem

$$g(x, y) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \dots, a_n).$$

Položme dále

$$\gamma(x, y) = (a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \dots, a_n).$$

Potom

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(x, y)), & \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\gamma(x, y)) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma(x, y)), & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\gamma(x, y)). \end{aligned}$$

Zobrazení $\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ má derivaci v každém bodě $\mathbb{R}^2$, a tedy $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ mají totální diferenciál v (a_i, a_j). Odtud plyne tvrzení. ■

10.3.10. Parciální derivace nejsou obecně záměnné, jak ukazuje následující příklad.

10.3.11. Příklad. Dokažte, že funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{jestliže } [x, y] \neq [0, 0], \\ 0, & \text{jestliže } [x, y] = [0, 0]. \end{cases}$$

splňuje

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0).$$

Řešení. Platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} y \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right), & \text{jestliže } [x, y] \neq [0, 0], \\ 0, & \text{jestliže } [x, y] = [0, 0]. \end{cases}$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} x \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right), & \text{jestliže } [x, y] \neq [0, 0], \\ 0, & \text{jestliže } [x, y] = [0, 0]. \end{cases}$$

Odtud vyplývá, že $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Dále pro každá $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = x,$$

takže

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$$

a
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1.$$
Odtud plyne tvrzení. ♣

10.3.12. Důsledek. Nechť $n \in \mathbb{N}$, f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f \in \mathcal{C}^2(G)$, $a \in G$ a $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Potom
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

10.3.13. Důsledek. Nechť $k, n \in \mathbb{N}$, f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f \in \mathcal{C}^k(G)$, $a \in G$, $\pi\colon \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, k\}$ je permutace a $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$. Potom
$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}(a) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_{\pi(k)}} \dots \partial x_{i_{\pi(1)}}}(a).$$

Důkaz. Je-li $k = 1$, tvrzení zřejmě platí. Pro $k > 1$ stačí tvrzení dokázat pro permutaci ve formě „sousední transpozice“, neboť každá permutace je konečnou kombinací sousedních transpozic. Nechť $j \in \{1, \dots, k-1\}$. Položme
$$\pi(\ell) = \begin{cases} j+1, & \text{jestliže } \ell = j, \\ j, & \text{jestliže } \ell = j+1, \\ \ell, & \text{jinak,} \end{cases} \quad \text{pro } \ell \in \{1, \dots, k\}.$$
Označme
$$g = \frac{\partial^{j-1} f}{\partial x_{i_{j-1}} \cdots \partial x_{i_1}}.$$
Potom $g \in \mathcal{C}^2(G)$, a tedy podle předcházejícího důsledku Věty 10.3.9 platí
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_{i_{j+1}} \partial x_{i_j}}(a) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_{i_j} \partial x_{i_{j+1}}}(a) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_{i_{\pi(j+1)}} \partial x_{i_{\pi(j)}}}(a).$$
Odtud plyne tvrzení. ■

10.3.14. Definice. Nechť $m, n, k \in \mathbb{N}$. Zobrazení $L\colon (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}^m$ se nazývá **k-lineární**, jestliže
$$u \mapsto L(v^1, \dots, v^{i-1}, u, v^{i+1}, \dots, v^k)$$
je lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$, $v^1, \dots, v^{i-1}, v^{i+1}, \dots, v^k \in \mathbb{R}^n$. Množinu všech k-lineárních zobrazení z $(\mathbb{R}^n)^k$ do $\mathbb{R}^m$ značíme $\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

10.3.15. Poznámka. Nechť $m, n, k \in \mathbb{N}$. Pro $B \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ platí
$$B(u,v) = B(\sum_{i=1}^n u_i e^i, \sum_{j=1}^n v_j e^j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j B(e^i, e^j).$$

Obdobně pro $L \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dostaneme

$$L(u^1, \dots, u^k) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} u^1_{i_1} \dots u^k_{i_k} L(e^{i_1}, \dots, e^{i_k}). \tag{10.21}$$

Je-li $L \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ a $h \in \mathbb{R}^n$, potom zobrazení $(u^2, u^3, \dots, u^k) \mapsto L(h, u^2, \dots, u^k)$ patří do $\mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

10.3.16. Lemma (norma obrazu při k-lineárním zobrazení)**.** Nechť $m, n, k \in \mathbb{N}$ a $L \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Potom existuje $C \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $u^1, \dots, u^k \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\|L(u^1, \dots, u^k)\|_{\mathbb{R}^m} \le C \|u^1\|_{\mathbb{R}^n} \dots \|u^k\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Důkaz. Položme

$$K = \max \left\{ \left\| L(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i_1}}, \dots, \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i_k}}) \right\| ;\ i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Pak dle (10.21) pro každá $\boldsymbol{u^1}, \dots, \boldsymbol{u^k} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\begin{aligned}\left\| L(\boldsymbol{u^1}, \dots, \boldsymbol{u^k}) \right\| &\le \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} |u^1_{i_1} \dots u^k_{i_k}| \, \|L(e^{i_1}, \dots, e^{i_k})\| \le K \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \left\|\boldsymbol{u^1}\right\| \cdots \left\|\boldsymbol{u^k}\right\| \\ &\le K n^k \left\|\boldsymbol{u^1}\right\| \cdots \left\|\boldsymbol{u^k}\right\|.\end{aligned}$$

Tedy stačí položit $C = Kn^k$. ■

10.3.17. Definice. Nechť $m, n, k \in \mathbb{N}$ a $L \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Pak **normou** zobrazení L rozumíme číslo

$$\|L\|_{\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)} = \sup \left\{ \|L(u^1, \dots, u^k)\|_{\mathbb{R}^m},\ \|u^1\|_{\mathbb{R}^n} \le 1, \dots, \|u^k\|_{\mathbb{R}^n} \le 1 \right\}.$$

10.3.18. Poznámka. Nechť $m, n, k \in \mathbb{N}$. Potom $(\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \|\cdot\|_{\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)})$ tvoří normovaný lineární prostor.

10.3.19. Definice. Nechť $m, n, k \in \mathbb{N}$, $k \ge 2$, f je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ a $a \in \mathbb{R}^n$. Pak **derivací k-tého řádu zobrazení f v bodě** a nazýváme k-lineární zobrazení L z $(\mathbb{R}^n)^k$ do $\mathbb{R}^m$ splňující

$$\lim_{h \to \boldsymbol{o}} \frac{\|f^{(k-1)}(a+h) - f^{(k-1)}(a) - L(h, \cdot, \dots, \cdot)\|_{\mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0,$$

značíme $L = f^{(k)}(a)$.

10.3.20. Poznámky. (a) Povšimněme si, že přecházející definice má induktivní charakter, tj. k-tá derivace je definována na základě znalosti definice $(k-1)$-ní derivace.

(b) Navíc je definice korektní, jelikož pro $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$f^{(k-1)}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}), f^{(k-1)}(\boldsymbol{a}), L(\boldsymbol{h}, ., \dots, .) \in L_{k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m),$$

a tedy
$$\left\| f^{(k-1)}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f^{(k-1)}(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{h}, ., \dots, .) \right\|$$
je dobře definovaný výraz.

10.3.21. Věta (derivace vyššího řádu a totální diferenciál)**.** Nechť $n, k \in \mathbb{N}$, f je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $L \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ je k-tá derivace f v a. Potom mají všechny parciální derivace f řádu $(k-1)$ totální diferenciál v a a pro každé $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ platí
$$L(e^{i_1}, e^{i_2}, \dots, e^{i_k}) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}(a).$$

Důkaz. Budeme postupovat matematickou indukcí dle k. Pro $k = 1$ tvrzení plyne z definice.

Předpokládejme, že $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, a tvrzení platí pro $k-1$. Zvolme $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$. Předpokládejme, že $L \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ je k-tá derivace f v a. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že všechny parciální derivace f řádu $(k-1)$ existují na $B(a, \delta)$. Podle indukčního předpokladu pro $x \in B(a, \delta)$ a $[\boldsymbol{u}^2, \dots, \boldsymbol{u}^k] \in (\mathbb{R}^n)^{k-1}$ platí
$$f^{(k-1)}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{u}^2, \dots, \boldsymbol{u}^k) = \sum_{j_2=1}^{n} \cdots \sum_{j_k=1}^{n} \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}}(\boldsymbol{x}) u^2_{j_2} \dots u^k_{j_k},$$
a tedy zobrazení $g\colon B(a, \delta) \to \mathbb{R}$ definované předpisem
$$g(x) = f^{(k-1)}(x)(\boldsymbol{e}^{i_2}, \dots, \boldsymbol{e}^{i_k})$$
splňuje
$$g(x) = \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}(\boldsymbol{x}) \quad \text{pro } x \in B(a, \delta).$$
Označme
$$\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{e}^{i_2}, \dots, \boldsymbol{e}^{i_k}).$$
Pak pro $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{o}\}$, $\|\boldsymbol{h}\| < \delta$, platí
$$\begin{aligned} &\frac{\left| f^{(k-1)}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})(\boldsymbol{w}) - f^{(k-1)}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{w}) - L(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{w}) \right|}{\|\boldsymbol{h}\|} \\ &\quad \le \frac{\left\| f^{(k-1)}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f^{(k-1)}(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{h}, ., \dots, .) \right\|}{\|\boldsymbol{h}\|}, \end{aligned}$$
a tedy
$$\lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{o}} \frac{\left| f^{(k-1)}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})(\boldsymbol{w}) - f^{(k-1)}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{w}) - L(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{w}) \right|}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0.$$
Odtud vyplývá, že
$$\lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{o}} \frac{|g(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - g(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{h}, w)|}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0.$$

Tudíž pro $i_1 \in \{1,\dots,n\}$ platí

$$\lim_{t\to 0}\left|\frac{g(\boldsymbol{a}+te^{i_1})-g(\boldsymbol{a})}{t}-L(e^{i_1},w)\right|=0,$$

a tedy

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_k}}(\boldsymbol{a})=\frac{\partial g}{\partial x_{i_1}}(\boldsymbol{a})=\lim_{t\to 0}\frac{g(\boldsymbol{a}+te^{i_1})-g(\boldsymbol{a})}{t}=L(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i_1}},\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i_2}},\dots,\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i_k}}).$$

■

10.3.22. Poznámky. (a) Z předchozí věty plyne jednoznačnost $f^k(a)$, a tedy zpětně i korektnost tohoto značení.

(b) Je-li f funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ a $a\in\mathbb{R}^n$, pak $f^k(a)$ existuje právě tehdy, když existují $f_j^k(a)$ pro každé $j\in\{1,\dots,m\}$.

10.3.23. Věta (symetrie derivace)**.** Nechť $m,n,k\in\mathbb{N}$, f je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, $a\in\mathbb{R}^n$ a $f^{(k)}(a)$ existuje. Potom je $f^{(k)}(a)$ symetrické zobrazení, tj. je-li $\pi\colon\{1,\dots,k\}\to\{1,\dots,k\}$ permutace, pak

$$f^{(k)}(a)(u^1,\dots,u^k)=f^{(k)}(a)(u^{\pi(1)},\dots,u^{\pi(k)})$$

pro každá $u^1,\dots,u^k\in\mathbb{R}^n$.

Důkaz. Nechť $f=(f_1,\dots,f_m)$ a $j\in\{1,\dots,m\}$. Stačí dokázat tvrzení pro f_j.

Díky Větě 10.3.21 stačí dokázat, že pro $i_1,\dots,i_k\in\{1,\dots,n\}$ a permutaci $\pi\colon\{1,\dots,k\}\to\{1,\dots,k\}$ platí

$$\frac{\partial^k f_j}{\partial x_{i_k}\dots\partial x_{i_1}}(\boldsymbol{a})=\frac{\partial^k f_j}{\partial x_{i_{\pi(k)}}\dots\partial x_{i_{\pi(1)}}}(\boldsymbol{a}). \tag{10.22}$$

Uvedený vztah stačí dokázat pouze pro sousední transpozice. Nechť tedy $\ell\in\{1,\dots,k-1\}$ a

$$\pi(s)=\begin{cases}\ell+1, & s=\ell,\\ \ell, & s=\ell+1,\\ s & \text{jinak,}\end{cases}\quad s\in\{1,\dots,k\}.$$

Potom funkce

$$g(\boldsymbol{x})=\frac{\partial^{\ell-1} f_j}{\partial x_{i_{\ell-1}}\dots\partial x_{i_1}}(\boldsymbol{x})$$

splňuje

$$g(\boldsymbol{x})=\frac{\partial^{\ell-1} f_j}{\partial x_{i_{\pi(\ell-1)}}\dots\partial x_{i_{\pi(1)}}}(\boldsymbol{x})$$

na okolí bodu $\boldsymbol{a}$. Funkce f má derivaci $(\ell+1)$-ního řádu v $\boldsymbol{a}$. Z Věty 10.3.21 tedy plyne, že funkce

$$x\mapsto\frac{\partial g}{\partial x_{i_\ell}}(\boldsymbol{x}),\quad x\mapsto\frac{\partial g}{\partial x_{i_{\ell+1}}}(\boldsymbol{x})$$

mají derivaci v $\boldsymbol{a}$. Podle Věty 10.3.9 tedy platí

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_{i_{\ell+1}} \partial x_{i_\ell}}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_{i_\ell} \partial x_{i_{\ell+1}}}(\boldsymbol{a}).$$

Odtud plyne (10.22). ■

10.3.24. Věta (postačující podmínka pro existenci derivace vyššího řádu)**.** Nechť $m, n, k \in \mathbb{N}$, f je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f \in \mathcal{C}^k(G)$ a $a \in G$. Potom $f^{(k)}(a)$ existuje.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $m = 1$. Použijeme matematickou indukci podle k. Pro $k = 1$ tvrzení platí díky Větě 14.4.

Předpokládejme, že $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, a že tvrzení platí pro $k - 1$. Označme $A = \{1, \dots, n\}^{k-1}$. Potom A je konečná množina, označme $\#A$ počet jejích prvků. Položme

$$g_\alpha = \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{k-1}}} \quad \text{pro } \alpha = (i_1, \dots, i_{k-1}) \in A.$$

Potom pro každé $\alpha \in A$ je g_α třídy $\mathcal{C}^1(G)$, a tedy g_α má na G totální diferenciál. Zvolme $\varepsilon > 0$. Díky tomu, že A je konečná, nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall \alpha \in A \ \forall \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{h}\| < \delta : \left| g_\alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - g_\alpha(\boldsymbol{a}) - g'_\alpha(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) \right| < \varepsilon \|h\|.$$

Položme

$$L(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{v^1}, \dots, \boldsymbol{v^{k-1}}) = \sum_{\alpha \in A} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) h_i v^1_{\alpha_1} \cdots v^{k-1}_{\alpha_{k-1}} \quad \text{pro } h \in \mathbb{R}^n \text{ a } (v^1, \dots, v^{k-1}) \in (\mathbb{R}^n)^{k-1}.$$

Potom $L \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ a

$$L(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{v^1}, \dots, \boldsymbol{v^{k-1}}) = \sum_{\alpha \in A} g'_\alpha(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) v^1_{\alpha_1} \cdots v^{k-1}_{\alpha_{k-1}}.$$

Zvolme $\boldsymbol{u^1}, \dots, \boldsymbol{u^{k-1}} \in \mathbb{R}^n$ splňující $\|\boldsymbol{u^j}\|_{\mathbb{R}^n} \le 1$ pro každé $j \in \{1, \dots, k-1\}$. Označme $\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{u^1}, \dots, \boldsymbol{u^{k-1}})$. Potom pro každé $h \in \mathbb{R}^n$, $\|\boldsymbol{h}\| < \delta$, platí podle indukčního předpokladu a Věty 10.3.21

$$\begin{aligned}
&f^{(k-1)}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h})(\boldsymbol{w}) - f^{(k-1)}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{w}) - L(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{w}) \\
&\quad = \sum_{\alpha \in A} g_\alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) u^1_{\alpha_1} \cdots u^{k-1}_{\alpha_{k-1}} - \sum_{\alpha \in A} g_\alpha(\boldsymbol{a}) u^1_{\alpha_1} \cdots u^{k-1}_{\alpha_{k-1}} - \sum_{\alpha \in A} g'_\alpha(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) u^1_{\alpha_1} \cdots u^{k-1}_{\alpha_{k-1}} \\
&\quad = \sum_{\alpha \in A} \left(g_\alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - g_\alpha(\boldsymbol{a}) - g'_\alpha(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) \right) u^1_{\alpha_1} \cdots u^{k-1}_{\alpha_{k-1}}.
\end{aligned}$$

Odtud a z definice normy $(k-1)$-lineárního zobrazení vyplývá, že

$$\begin{aligned}
\|f^{(k-1)}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f^{(k-1)}(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{h}, \cdot, \dots, \cdot)\|_{\mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})} &\le \sum_{\alpha \in A} \left| g_\alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - g_\alpha(\boldsymbol{a}) - g'_\alpha(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) \right| \\
&< (\#A) \varepsilon \, \|\boldsymbol{h}\|.
\end{aligned}$$

Tedy
$$\lim_{h\to o} \frac{\|f^{(k-1)}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f^{(k-1)}(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{h},\cdot,\dots,\cdot)\|_{\mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0,$$
a tudíž $L = f^{(k)}(\boldsymbol{a})$.

Nechť $m \in \mathbb{N}$. Pro každé $j \in \{1,\dots,m\}$ nalezneme podle z již dokázaného zobrazení $L_j \in \mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ splňující
$$\lim_{h\to o} \frac{\|f_j^{(k-1)}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f_j^{(k-1)}(\boldsymbol{a}) - L_j(\boldsymbol{h},\cdot,\dots,\cdot)\|_{\mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0.$$
Položme $L = (L_1,\dots,L_m)$. Potom $L \in \mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ a platí
$$\lim_{h\to o} \frac{\|f^{(k-1)}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f^{(k-1)}(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{h},\cdot,\dots,\cdot)\|_{\mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0,$$
takže $L = f^{(k)}(\boldsymbol{a})$. ■

10.3.25. Poznámka. Nechť $n \in \mathbb{N}$, f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $f''(a)$ existuje. Potom je $f''(a)$ bilineární zobrazení reprezentované maticí
$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ & \dots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$
ve smyslu
$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n: \quad f''(a)(u,v) = u^T \mathbb{H} v.$$
Matice $\mathbb{H}$ je symetrická.

10.3.26. Definice. Nechť f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $f''(a)$ existuje. Potom matici $\mathbb{H}$ nazýváme **Hessovou maticí**.

10.3.27. Definice. Nechť $k, n \in \mathbb{N}$, f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $f^{(k)}(a)$ existuje. Potom **Taylorovým polynomem k-tého řádu** funkce f v bodě a rozumíme polynom n proměnných
$$T_k^{f,a}(x) = f(a) + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!} f^{(j)}(a)(x-a,\dots,x-a),$$
přičemž vektor $(x-a,\dots,x-a)$ má j složek.

10.3.28. Věta (Lagrangeův tvar zbytku). Nechť $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, f je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená konvexní množina, $f \in \mathcal{C}^{k+1}(G)$ a $a, x \in G$. Potom existuje ξ ležící na úsečce spojující body a a x takové, že
$$f(x) = T_k^{f,a}(x) + \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi)(x-a,\dots,x-a)$$
(přičemž vektor $(x-a,\dots,x-a)$ má $k+1$ složek).

Důkaz. Díky konvexitě a otevřenosti G nalezneme interval (α, β) splňující $[0,1] \subset (\alpha, \beta)$ a takový, že

$$a + t(x-a) \in G \quad \text{pro každé } t \in (\alpha, \beta).$$

Položme

$$\varphi(t) = f(\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})) \quad \text{pro } t \in (\alpha, \beta).$$

Zobrazení $t \mapsto \boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$ je třídy $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, a tedy podle Věty 10.3.8 je φ třídy $\mathcal{C}^k(\alpha, \beta)$. Podle Lagrangeova tvaru zbytku pro funkci jedné proměnné (Věta 6.4) existuje $\eta \in (0,1)$ takové, že

$$\varphi(1) - T_k^{\varphi,0}(1) = \frac{\varphi^{(k+1)}(\eta)}{(k+1)!},$$

tedy

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} + \frac{\varphi^{(k+1)}(\eta)}{(k+1)!}. \tag{10.23}$$

Použitím řetízkového pravidla dostaneme pro každé $t \in (\alpha, \beta)$

$$\varphi'(t) = \sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}))(x_{i_1} - a_{i_1}) = f'(a + t(x-a))(x-a),$$

$$\varphi''(t) = \sum_{i_2=1}^{n} \sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}(\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}))(x_{i_1} - a_{i_1})(x_{i_2} - a_{i_2} = f''(a + t(x-a))(x-a, x-a)),$$

$$\vdots$$

Pro každé $j \in \{1, \dots, k+1\}$ a $t \in (\alpha, \beta)$ platí

$$\begin{aligned} \varphi^{(j)}(t) &= \sum_{i_j=1}^{n} \cdots \sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial^j f}{\partial x_{i_j} \dots \partial x_{i_1}}(\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}))(x_{i_1} - a_{i_1}) \cdots (x_{i_j} - a_{i_j}) \\ &= f^{(j)}(a + t(x-a))(x-a, \dots, x-a). \end{aligned}$$

Dosazením do (10.23) dostaneme podle definice Taylorova polynomu

$$f(x) = T_k^{f,a}(x) + \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(a + \eta(x-a))(x-a, \dots, x-a).$$

Položme $\xi = \boldsymbol{a} + \eta(x - \boldsymbol{a})$. Potom ξ leží na úsečce spojující body a a x a splňuje požadované tvrzení. ■

10.3.29. Věta (Peanův tvar zbytku)**.** Nechť $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, f je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a f je třídy $\mathcal{C}^k$ na jistém okolí a. Potom

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_k^{f,a}(x)}{\|x - a\|^k} = 0.$$

Důkaz. Pro $k = 0$ tvrzení triviálně platí. Předpokládejme, že $k \geq 1$. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že $f \in \mathcal{C}^k(B(\boldsymbol{a}, \delta))$. Zvolme $x \in B(\boldsymbol{a}, \delta)$. Protože množina $B(\boldsymbol{a}, \delta)$ je otevřená a konvexní, můžeme podle Věty 10.3.28 nalézt $\xi(\boldsymbol{x})$ ležící na úsečce spojující $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{x}$ takové, že

$$f(\boldsymbol{x}) = T_{k-1}^{f,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{k!} f^{(k)}(\xi(\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}, \dots, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}).$$

Potom platí

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) - T_k^{f,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{k!} \left(f^{(k)}(\xi(\boldsymbol{x})) - f^{(k)}(\boldsymbol{a}) \right) (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}, \dots, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(\xi(\boldsymbol{x})) - \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(\boldsymbol{a}) \right) (x_{i_1} - a_{i_1}) \cdots (x_{i_k} - a_{i_k}). \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} &\left| f(\boldsymbol{x}) - T_k^{f,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(\xi(\boldsymbol{x})) - \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(\boldsymbol{a}) \right) (x_{i_1} - a_{i_1}) \cdots (x_{i_k} - a_{i_k}) \right| \\ &\leq \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \left| \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(\xi(\boldsymbol{x})) - \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(\boldsymbol{a}) \right| \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|^k . \end{aligned}$$

Odtud vyplývá, že pro každé $x \in B(a, \delta) \setminus \{a\}$ platí

$$0 \leq \frac{\left| f(\boldsymbol{x}) - T_k^{f,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) \right|}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|^k} \leq \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \left| \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(\xi(\boldsymbol{x})) - \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(\boldsymbol{a}) \right| .$$

Všechny parciální derivace až do řádu k včetně jsou spojité v $\boldsymbol{a}$, a tedy

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \left| \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(\xi(\boldsymbol{x})) - \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(\boldsymbol{a}) \right| = 0,$$

neboť $\|\xi(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{a}\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|$. Odtud plyne tvrzení. ■

10.3.30. Poznámka. Symbol o můžeme zřejmým způsobem definovat i pro funkce více proměnných. Pak lze tvrzení předcházející věty psát ve tvaru

$$f(x) = T_k^{f,a}(x) + o(\|x - a\|^k), \quad x \to a.$$

10.4. Věty o implicitně zadaných funkcích

Před formulací hlavních výásledků této části připomeňme, že symbol $\exists!$ znamená „existuje právě jeden“ (vizte Definici 1.1.20).

10.4.1. Věta (o implicitně zadané funkci)**.** Nechť $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina, $F : G \to \mathbb{R}$, $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}$, $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in G$ a nechť platí:

(a) $F \in \mathcal{C}^k(G)$,
(b) $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$,
(c) $\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq 0$.

Potom existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\tilde{x}$ a okolí $V \subset \mathbb{R}$ bodu $\tilde{y}$ tak, že $U \times V \subset G$ a pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi \in \mathcal{C}^k(U)$ a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}, \quad \text{kde } i \in \{1, \dots, n\} \text{ a } x \in U.$$

Důkaz. Existence φ. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}) > 0$. Díky spojitosti funkce $\frac{\partial F}{\partial y}$ v bodě $[\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}]$ nalezneme $\delta_1 > 0$ a $\xi_1 > 0$ taková, že

$$\forall [\boldsymbol{x}, y] \in B(\tilde{\boldsymbol{x}}, \delta_1) \times [\tilde{y} - \xi_1, \tilde{y} + \xi_1] : \frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x}, y) > 0.$$

Funkce $t \mapsto F(\tilde{\boldsymbol{x}}, t)$ je rostoucí na $[\tilde{y} - \xi_1, \tilde{y} + \xi_1]$. Máme proto

$$F(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y} - \xi_1) < 0 \quad \text{a} \quad F(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y} + \xi_1) > 0.$$

Díky spojitosti F nalezneme $\delta_2 \in (0, \delta_1)$ takové, že

$$\forall \boldsymbol{x} \in B(\tilde{\boldsymbol{x}}, \delta_2) \colon \quad F(\boldsymbol{x}, \tilde{y} - \xi_1) < 0 \quad \& \quad F(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y} + \xi_1) > 0.$$

Položme $U = B(\tilde{\boldsymbol{x}}, \delta_2)$ a $V = (\tilde{y} - \xi_1, \tilde{y} + \xi_1)$. Zvolme $\boldsymbol{x} \in U$. Funkce $t \mapsto F(\boldsymbol{x}, t)$ je na $[\tilde{y} - \xi_1, \tilde{y} + \xi_1]$ rostoucí, spojitá a splňuje $F(\boldsymbol{x}, \tilde{y} - \xi_1) < 0$ a $F(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y} + \xi_1) > 0$. To znamená, že existuje právě jedno $y \in (\tilde{y} - \xi_1, \tilde{y} + \xi_1)$ takové, že $F(x, y) = 0$.

Spojitost φ. Zvolme $\boldsymbol{x}^* \in U$. Budeme dokazovat, že φ je spojitá v $\boldsymbol{x}^*$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Položme

$$G^* = U \times ((\varphi(\boldsymbol{x}^*) - \varepsilon, \varphi(\boldsymbol{x}^*) + \varepsilon) \cap V)$$

a $F^* = F|_{G^*}$. Potom je G^* otevřená a platí

$$F^* \in \mathcal{C}^k(G^*), \quad F^*(\boldsymbol{x}^*, \varphi(\boldsymbol{x}^*)) = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial F^*}{\partial y}(\boldsymbol{x}^*, \varphi(\boldsymbol{x}^*)) > 0.$$

Podle již dokázaného existují okolí $U^* \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\boldsymbol{x}^*$ a okolí $V^* \subset \mathbb{R}$ bodu $\varphi(x^*)$ taková, že $U^* \times V^* \subset G^*$ a

$$\forall \boldsymbol{x} \in U^* \ \exists! y \in V^* : F^*(\boldsymbol{x}, y) = 0.$$

Odtud plyne

$$\varphi(U^*) \subset V^* \subset (\varphi(\boldsymbol{x}^*) - \varepsilon, \varphi(\boldsymbol{x}^*) + \varepsilon).$$

Tím je dokázána spojitost φ v bodě $\boldsymbol{x}^*$.

Platí $\varphi \in \mathcal{C}^1(U)$. Zvolme $i \in \{1, \dots, n\}$ a $\boldsymbol{x}^* \in U$. Nalezneme $\delta > 0$ a $\eta > 0$ taková, že $B(\boldsymbol{x}^*, \delta) \subset U$, $\varphi(B(\boldsymbol{x}^*, \delta)) \subset V$ a

$$B(\boldsymbol{x}^*, \delta) \times \varphi(B(\boldsymbol{x}^*, \delta)) \subset B([\boldsymbol{x}^*, \varphi(\boldsymbol{x}^*)], \eta) \subset G.$$

Zvolme $t \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$. K němu nalezneme $\xi(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ležící na úsečce spojující body $[\boldsymbol{x}^*, \varphi(\boldsymbol{x}^*)]$ a $[\boldsymbol{x}^* + t\boldsymbol{e^i}, \varphi(\boldsymbol{x}^* + t\boldsymbol{e^i})]$ takové, že

$$0 = F(\boldsymbol{x}^* + t\boldsymbol{e^i}, \varphi(\boldsymbol{x}^* + t\boldsymbol{e^i})) - F(\boldsymbol{x}^*, \varphi(\boldsymbol{x}^*)) = F'(\xi(t))(t\boldsymbol{e^i}, \varphi(\boldsymbol{x}^* + t\boldsymbol{e^i}) - \varphi(\boldsymbol{x}^*)).$$

Tedy platí

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x_i}(\xi(t)) \cdot t + \frac{\partial F}{\partial y}(\xi(t))(\varphi(\boldsymbol{x}^* + t\boldsymbol{e^i}) - \varphi(\boldsymbol{x}^*)).$$

Odtud vyplývá, že

$$\frac{\varphi(\boldsymbol{x}^* + t\boldsymbol{e}^i) - \varphi(\boldsymbol{x}^*)}{t} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\xi(t))}{\frac{\partial F}{\partial y}(\xi(t))}.$$

Platí $\lim_{t\to 0} \xi(t) = [\boldsymbol{x}^*, \varphi(\boldsymbol{x}^*)]$, neboť

$$\|\xi(t) - [\boldsymbol{x}^*, \varphi(\boldsymbol{x}^*)]\| \leq |t| + \left|\varphi(\boldsymbol{x}^* + t\boldsymbol{e^i}) - \varphi(\boldsymbol{x}^*)\right| \to 0, \quad t \to 0.$$

Tedy

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}^*) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}^*, \varphi(\boldsymbol{x}^*))}{\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x}^*, \varphi(\boldsymbol{x}^*))}. \tag{10.24}$$

Platí $\varphi \in \mathcal{C}^k(U)$. Pro $k = 1$ jsme tvrzení již dokázali. Předpokládejme, že platí pro nějaké $k - 1$, kde $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Zobrazení $\boldsymbol{x} \mapsto [\boldsymbol{x}, \varphi(\boldsymbol{x})]$ je tedy třídy $\mathcal{C}^{k-1}(U)$. Funkce $\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}, \frac{\partial F}{\partial y}$ jsou třídy $\mathcal{C}^{k-1}(G)$, a tedy podle Věty 10.3.8 a (10.24) jsou také funkce $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}$ třídy $\mathcal{C}^{k-1}(U)$. Proto je φ třídy $\mathcal{C}^k(U)$. ∎

10.4.2. Příklad. Uvažujme množinu

$$M = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2) - 2(x^2 - y^2) = 0\right\}.$$

Ukažte, že v jistém okolí bodu $[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$ lze množinu M popsat jako graf nějaké funkce φ proměnné x. Spočtěte též $\varphi'(\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Řešení. Položme ve Větě 10.4.1

$$F(x, y) = (x^2 + y^2) - 2(x^2 - y^2) \quad \text{a} \quad [\tilde{x}, \tilde{y}] = [\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}].$$

Pak

(i) $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$,
(ii) $F(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = 0$,
(iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = (2(x^2 + y^2)2y + 4y)_{[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]} = 4 \neq 0$.

Tedy dle Věty 10.4.1 existuje na nějakém okolí bodu $\frac{\sqrt{3}}{2}$ funkce φ třídy C^∞, která splňuje $F(x,\varphi(x)) = 0$. Dále platí

$$\varphi'(\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})}{\frac{\partial F}{\partial y}(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})} = \left(-\frac{(2(x^2+y^2)2y+4y)}{2(x^2+y^2)2x-4x}\right)\Big|_{[\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}]} = 0.$$

♣

10.4.3. Věta (o implicitně zadaných funkcích)**.** Nechť $m,n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $G \subset \mathbb{R}^{n+m}$ je otevřená množina, $F\colon G \to \mathbb{R}^m$, $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}^m$, $[\tilde{x},\tilde{y}] \in G$ a nechť platí:

(a) $F \in \mathcal{C}^k(G)$,
(b) $F(\tilde{x},\tilde{y}) = \boldsymbol{o}$,
(c)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\tilde{x},\tilde{y}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\tilde{x},\tilde{y}) \\ & \dots & \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\tilde{x},\tilde{y}) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\tilde{x},\tilde{y}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Potom existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\tilde{x}$ a okolí $V \subset \mathbb{R}^m$ bodu $\tilde{y}$ tak, že $U \times V \subset G$ a pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ s vlastností $F(x,y) = \boldsymbol{o}$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi \in \mathcal{C}^k(U)$.

Důkaz. Použijeme matematickou indukci podle m. Je-li $m = 1$, platí tvrzení podle Věty 10.4.1.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro nějaké $m \in \mathbb{N}$. Dokažme ho pro $m+1$. Nechť F a $[\tilde{\boldsymbol{x}},\tilde{y}]$ splňují předpokladech věty, kde m je nahrazeno $(m+1)$. Matice

$$\mathbb{A}_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\tilde{\boldsymbol{x}},\tilde{y}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{m+1}}(\tilde{\boldsymbol{x}},\tilde{y}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_{m+1}}{\partial y_1}(\tilde{\boldsymbol{x}},\tilde{y}) & \dots & \frac{\partial F_{m+1}}{\partial y_{m+1}}(\tilde{\boldsymbol{x}},\tilde{y}) \end{pmatrix}$$

je regulární dle předpokladu.

Ukážeme, že bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $\mathbb{A}_F = \mathbb{I}$, kde $\mathbb{I}$ označuje jednotkovou matici typu $M((m+1)\times(m+1))$. Uvažujme zobrazení $L\colon \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$ definované předpisem $L(\boldsymbol{y}) = (\mathbb{A}_F)^{-1}\boldsymbol{y}$. Toto zobrazení je lineární bijekce $\mathbb{R}^{m+1}$ na $\mathbb{R}^{m+1}$ a je třídy $\mathcal{C}^\infty$ na $\mathbb{R}^{m+1}$. Dále uvažujme zobrazení $T\colon G \to \mathbb{R}^{m+1}$ definované předpisem $T = L \circ F$. Zobrazení T má následující vlastnosti:

- $T \in \mathcal{C}^k(G)$,
- $\forall [\boldsymbol{x}, y] \in G\colon T(\boldsymbol{x},y) = \boldsymbol{o} \Leftrightarrow F(\boldsymbol{x},y) = \boldsymbol{o}$,
- $\mathbb{A}_T = \mathbb{A}_F^{-1} \circ \mathbb{A}_F = \mathbb{I}$.

První dvě vlastnosti jsou zřejmě splněny. Ověřme třetí vlastnost. Zobrazení $\boldsymbol{y} \mapsto F(\tilde{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y})$ má derivaci v bodě $\tilde{\boldsymbol{y}}$ reprezentovanou maticí $\mathbb{A}_F$. Zobrazení $\boldsymbol{y} \mapsto T(\tilde{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) = L \circ F(\tilde{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y})$ má podle věty o derivaci složeného zobrazení (Věta 14.10) v bodě $\tilde{\boldsymbol{y}}$ derivaci reprezentovanou maticí $(\mathbb{A}_F)^{-1}\mathbb{A}_F = \mathbb{I}$. Protože

$$F_{m+1}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}) = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial F_{m+1}}{\partial y_{m+1}}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}) = 1 \neq 0,$$

existuje dle Věty 10.4.1 okolí $U^* \subset \mathbb{R}^{n+m}$ bodu $[\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m]$ a okolí $V^* \subset \mathbb{R}$ bodu $\tilde{y}_{m+1}$ takové, že

$$\forall [\boldsymbol{x}, y_1, \dots, y_m] \in U^* \ \exists! y_{m+1} \in V^* : F_{m+1}(\boldsymbol{x}, y_1, \dots, y_m, y_{m+1}) = 0.$$

Označme tento bod symbolem $\psi(\boldsymbol{x}, y_1, \dots, y_m)$. Pak $\psi \in \mathcal{C}^k(U^*)$. Definujme $H : U^* \to \mathbb{R}^m$ předpisem

$$H_i(\boldsymbol{x}, y_1, \dots, y_m) = F_i(\boldsymbol{x}, y_1, \dots, y_m, \psi(\boldsymbol{x}, y_1, \dots, y_m)), \quad i \in \{1, \dots, m\}.$$

Pak $H \in \mathcal{C}^k(U^*)$ podle Věty 10.3.8 a platí $H(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m) = \boldsymbol{o}$. Dále platí

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_i}{\partial y_j}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m) &= \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m) + \frac{\partial F_i}{\partial y_{m+1}}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m)\frac{\partial \psi}{\partial y_j}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m) \\ &= \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j \in \{1, \dots, m\},\end{aligned}$$

neboť

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_{m+1}}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m) = 0, \quad i \in \{1, \dots, m\}.$$

Můžeme tedy aplikovat indukční předpoklad na H v bodě $[\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m]$. Nalezneme okolí $S \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\tilde{\boldsymbol{x}}$ a okolí $T \subset \mathbb{R}^m$ bodu $[\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m]$ taková, že $S \times T \subset U^*$ a

$$\forall \boldsymbol{x} \in S \ \exists! [y_1, \dots, y_m] \in T : H(\boldsymbol{x}, y_1, \dots, y_m) = \boldsymbol{o}$$

Označme $\varphi_i(\boldsymbol{x}) = y_i$, $i \in \{1, \dots, m\}$, a $\varphi_{m+1}(\boldsymbol{x}) = \psi(\boldsymbol{x}, \varphi_1(\boldsymbol{x}), \dots, \varphi_m(\boldsymbol{x}))$. Potom $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{m+1})$ je třídy $\mathcal{C}^k$ na S a pro každé $\boldsymbol{x} \in S$ platí

$$\begin{aligned}F_i(\boldsymbol{x}, \varphi(\boldsymbol{x})) &= F_i(x, \varphi_1(\boldsymbol{x}), \dots, \varphi_m(\boldsymbol{x}), \varphi_{m+1}(\boldsymbol{x})) \\ &= F_i(x, \varphi_1(\boldsymbol{x}), \dots, \varphi_m(\boldsymbol{x}), \psi(\boldsymbol{x}, \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(\boldsymbol{x}))) \\ &= \begin{cases} H_i(\boldsymbol{x}, \varphi_1(\boldsymbol{x}), \dots, \varphi_m(\boldsymbol{x})) = 0, & i \in \{1, \dots, m\}, \\ 0, & i = m + 1. \end{cases}\end{aligned}$$

Nalezneme okolí $V \subset T \times V^* \subset \mathbb{R}^{m+1}$ bodu $\tilde{y}$ a okolí $U \subset \varphi^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\tilde{\boldsymbol{x}}$. Jestliže $[\boldsymbol{x}, y] \in U \times V$ splňuje $F(\boldsymbol{x}, y) = \boldsymbol{o}$, pak $\boldsymbol{x} \in S$ a $y \in T \times V^*$, a tedy $[x, y_1, \dots, y_m] \in S \times T \subset U^*$. Potom $y_{m+1} = \psi(\boldsymbol{x}, y_1, \dots, y_m)$, neboť $y_{m+1} \in V^*$. Dále $y_i = \varphi_i(\boldsymbol{x})$, $i \in \{1, \dots, m\}$, takže $y_{m+1} = \varphi_{m+1}(x)$. Odtud plyne tvrzení. ■

10.4.4 (vzorec pro výpočet parciálních derivací)**.** I v případě věty o implicitních funkcích je možné odvodit analogii vzorce (10.24), tj. explicitní vzorec pro hodnotu parciálních derivací vypočtených funkcí. Nechť $n, m, p, G, \tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}$ a F jsou jako ve

znění Věty 10.4.3, podle které existuje okolí U bodu $\tilde{\boldsymbol{x}}$ a okolí V bodu $\tilde{\boldsymbol{y}}$ taková, že platí
$$\forall \boldsymbol{x} \in U\ \exists! \boldsymbol{y} \in V\colon F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{o}.$$
Označme toto $\boldsymbol{y}$ jako $\varphi(\boldsymbol{x})$. Pak víme, že platí $\varphi \in C^p(U)$. Ukážeme, jak lze vypočítat parciální derivace složek funkce φ. Zvolme $i \in \{1, \ldots, n\}$ (číslo proměnné podle které budeme derivovat). Potom pro každé $j \in \{1, \ldots, m\}$ má parciální derivace funkce $\boldsymbol{x} \mapsto F_j(\boldsymbol{x}, \varphi(\boldsymbol{x}))$ podle proměnné x_i tvar
$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}, \varphi(\boldsymbol{x})) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F_j}{\partial y_k}(\boldsymbol{x}, \varphi(\boldsymbol{x}))\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$$
pro každé $\boldsymbol{x} \in U$. Protože platí $F_j(\boldsymbol{x}, \varphi(\boldsymbol{x})) = 0$ pro každé $\boldsymbol{x} \in U$, musí být právě uvedená derivace rovna nule. Za $\boldsymbol{x}$ dosadíme $\tilde{\boldsymbol{x}}$, potom $\varphi(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \tilde{\boldsymbol{y}}$ a dostáváme tedy soustavu m rovnic
$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}})) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F_j}{\partial y_k}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}}))\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = 0, \qquad j = 1, \ldots, m,$$
kde neznámými jsou hodnoty $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\tilde{\boldsymbol{x}})$, $k = 1, \ldots, m$. Soustavu můžeme přepsat tedy jako
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F_1}{\partial y_k}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}}))\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\tilde{\boldsymbol{x}}) &= -\frac{\partial F_1}{\partial x_i}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}}))\\
\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F_2}{\partial y_k}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}}))\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\tilde{\boldsymbol{x}}) &= -\frac{\partial F_2}{\partial x_i}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}}))\\
&\ \vdots\\
\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F_m}{\partial y_k}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}}))\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\tilde{\boldsymbol{x}}) &= -\frac{\partial F_m}{\partial x_i}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}})).
\end{aligned}$$
Hodnotu $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\tilde{\boldsymbol{x}})$ můžeme vypočítat pomocí Cramerova pravidla takto
$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \frac{\begin{vmatrix}
\frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}})) & \ldots & -\frac{\partial F_1}{\partial x_i}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}})) & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}}))\\
\frac{\partial F_2}{\partial y_1}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}})) & \ldots & -\frac{\partial F_2}{\partial x_i}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}})) & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}}))\\
\vdots & & \vdots & & \vdots\\
\frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}})) & \ldots & -\frac{\partial F_m}{\partial x_i}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}})) & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}}))
\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}
\frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}})) & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_k}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}})) & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}}))\\
\frac{\partial F_2}{\partial y_1}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}})) & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial y_k}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}})) & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}}))\\
\vdots & & \vdots & & \vdots\\
\frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}})) & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_k}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}})) & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}}))
\end{vmatrix}}.$$

Matice ve výše uvedeném vzorci se liší pouze ve vyznačeném k-tém sloupci.

10.4.5. Příklad. Jsou dány vztahy

$$\exp(u/x)\cos(v/y) = \frac{x}{\sqrt{2}},$$
$$\exp(u/x)\sin(v/y) = \frac{y}{\sqrt{2}}.$$

Dokažte, že vztahy definují na okolí bodu $[1, 1, 0, \frac{\pi}{4}]$ funkce $[x, y] \mapsto u(x, y)$, $[x, y] \mapsto v(x, y)$ třídy C^∞. Spočtěte parciální derivace u a v v bodě $[1, 1]$.

Řešení. Definujme $F\colon \mathbb{R}^{2+2} \to \mathbb{R}^2$ jako $F = (F_1, F_2)$, kde

$$F_1(x, y, u, v) = \exp(u/x)\cos(v/y) - \frac{x}{\sqrt{2}},$$
$$F_2(x, y, u, v) = \exp(u/x)\sin(v/y) - \frac{y}{\sqrt{2}}.$$

Pak F je třídy C^∞ na $(0, \infty) \times (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a $F(1, 1, 0, \frac{\pi}{4}) = [0, 0]$. Dále máme

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix}_{[x,y,u,v]=[1,1,0,\frac{\pi}{4}]} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x}\exp(u/x)\cos(v/y) & -\frac{1}{y}\exp(u/x)\cos(v/y) \\ \frac{1}{x}\exp(u/x)\sin(v/y) & \frac{1}{y}\exp(u/x)\cos(v/y) \end{pmatrix}_{[x,y,u,v]=[1,1,0,\frac{\pi}{4}]}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

a tedy

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(1, 1, 0, \frac{\pi}{4}) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(1, 1, 0, \frac{\pi}{4}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(1, 1, 0, \frac{\pi}{4}) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(1, 1, 0, \frac{\pi}{4}) \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Díky Větě 10.4.3 tedy existují na nějakém okolí U bodu $[1, 1]$) funkce $u, v\colon U \to \mathbb{R}$ třídy C^∞ splňující

$$F_1(x, y, u(x, y), v(x, y)) = F_2(x, y, u(x, y), v(x, y)) = 0.$$

Derivováním těchto vztahů podle x dostáváme

$$\exp(u/x)\frac{\frac{\partial u}{\partial x} \cdot x - u}{x^2}\cos(v/y) + \exp(u/x)(-\sin(v/y)\frac{1}{y}\frac{\partial v}{\partial x}) - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,$$
$$\exp(u/x)\frac{\frac{\partial u}{\partial x} \cdot x - u}{x^2}\sin(v/y) + \exp(u/x)\cos(v/y)\frac{1}{y}\frac{\partial v}{\partial x}) = 0.$$

Dosazením $x = y = 1$, $u(1, 1) = 0$ a $v(1, 1) = \frac{\pi}{4}$ dostaneme soustavu

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1, 1)\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial v}{\partial x}(1, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(1, 1)\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial v}{\partial x}(1, 1) = 0,$$

jejímž řešením je
$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,1) = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(1,1) = -\frac{1}{2}.$$
Výpočet parciálních derivací $\frac{\partial u}{\partial y}(1,1)$ a $\frac{\partial v}{\partial y}(1,1)$ by proběhl obdobně. ♣

10.5. Lokální extrémy funkce více proměnných

10.5.1. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $M \subset P$, $a \in M$ a f je funkce z P do $\mathbb{R}$ splňující $M \subset D(f)$. Řekneme, že f nabývá v bodě a svého **maxima** (**minima**) **na** M, jestliže platí
$$\forall x \in M: \ f(x) \leq f(a) \quad (f(x) \geq f(a)).$$
Řekneme, že f nabývá v bodě a svého **lokálního maxima** (**lokálního minima**) **na** M, jestliže existuje takové $\delta > 0$, že
$$\forall x \in B(a,\delta) \cap M: \ f(x) \leq f(a) \quad (f(x) \geq f(a)).$$
Řekneme, že f nabývá v bodě a svého **ostrého lokálního maxima** (**ostrého lokálního minima**) **na** M, jestliže existuje takové $\delta > 0$, že
$$\forall x \in (B(a,\delta) \cap M) \setminus \{a\}: \ f(x) < f(a) \quad (f(x) > f(a)).$$

10.5.2. Poznámka. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$, $h \in \mathbb{R}^n$, $f: G \to \mathbb{R}$ a $f \in \mathcal{C}^2(G)$. Nalezneme $\delta > 0$ splňující $a + th \in G$ pro $|t| < \delta$ a definujeme funkci $g: (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ předpisem $g(t) = f(a + th)$. Potom $g'(0) = f'(a)(h)$ a $g''(0) = f''(a)(h,h)$.

10.5.3. Věta (nutná podmínka existence lokálního extrému)**.** Nechť $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$ a $i \in \{1, \dots, n\}$. Nechť funkce $f: G \to \mathbb{R}$ má v bodě a lokální extrém. Potom buď $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ neexistuje nebo $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

Důkaz. Položme $g(t) = f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}})$. Pak má g v bodě 0 lokální extrém, a tedy $g'(0)$ buď neexistuje nebo je rovna 0. Odtud plyne tvrzení. ■

10.5.4. Věta (elipticita positivně definitiní kvadratické formy)**.** Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je positivně definitní kvadratická forma. Potom
$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^n: \ Q(h) \geq \varepsilon \|h\|^2.$$

Důkaz. Jest
$$Q(\boldsymbol{h}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j, \quad h \in \mathbb{R}^n,$$
pro vhodná $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, a tedy je zobrazení Q spojité na $\mathbb{R}^n$. Označme
$$S = \{\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n; \ \|\boldsymbol{h}\| = 1\}$$
a
$$\varepsilon = \inf\{Q(\boldsymbol{h}); \ h \in S\}.$$

Množina S je omezená a uzavřená, a tedy je podle Věty 9.6.9 kompaktní. Podle Věty 9.6.15 tedy existuje $h_0 \in S$ takové, že $Q(h_0) = \varepsilon$. Odtud a z positivní definitnosti Q vyplývá, že $\varepsilon > 0$. Tvrzení věty zřejmě platí pro $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{o}$. Zvolme $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}$. Potom

$$Q(\boldsymbol{h}) = Q\left(\|\boldsymbol{h}\| \frac{\boldsymbol{h}}{\|\boldsymbol{h}\|}\right) = \|\boldsymbol{h}\|^2 \, Q\left(\frac{\boldsymbol{h}}{\|\boldsymbol{h}\|}\right) \geq \varepsilon \|h\|^2.$$

■

10.5.5. Věta (podmínky druhého řádu pro existenci lokálního extrému)**.** Nechť $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f \in \mathcal{C}^2(G)$, $a \in G$ a $\nabla f(a) = 0$. Potom platí:

(a) je-li kvadratická forma $h \mapsto f''(a)(h,h)$ positivně definitní, pak funkce f nabývá v bodě a svého ostrého lokálního minima;

(b) je-li kvadratická forma $h \mapsto f''(a)(h,h)$ negativně definitní, pak funkce f nabývá v bodě a svého ostrého lokálního maxima;

(c) je-li kvadratická forma $h \mapsto f''(a)(h,h)$ indefinitní, pak funkce f nenabývá v bodě a lokálního extrému.

Důkaz. (a) Předpokládejme, že $\boldsymbol{h} \mapsto f''(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h},\boldsymbol{h})$ je positivně definitní. Podle Věty 10.5.4 nalezneme $\varepsilon > 0$ takové, že

$$\forall \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n : f''(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h},\boldsymbol{h}) \geq \varepsilon \, \|\boldsymbol{h}\|^2 .$$

Označme

$$\omega(\boldsymbol{x}) = \frac{f(\boldsymbol{x}) - T_2^{f,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|^2}, \quad \boldsymbol{x} \in G \setminus \{\boldsymbol{a}\}.$$

Podle Věty 10.3.29 platí $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \omega(\boldsymbol{x}) = 0$. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall \boldsymbol{x} \in P(\boldsymbol{a},\delta) : \omega(\boldsymbol{x}) > -\frac{\varepsilon}{4}.$$

Potom pro každé $\boldsymbol{x} \in P(\boldsymbol{a},\delta)$ platí

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) - f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) - \frac{1}{2} f''(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) &= f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) - \frac{1}{2} f''(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) \\ &> -\frac{\varepsilon}{4} \, \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|^2 . \end{aligned}$$

Odtud vyplývá, že pro každé $\boldsymbol{x} \in P(\boldsymbol{a},\delta)$ platí

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) > \frac{1}{2} f''(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) - \frac{1}{4}\varepsilon \, \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|^2 \geq \frac{1}{4}\varepsilon \, \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|^2 > 0.$$

Tedy f nabývá v bodě $\boldsymbol{a}$ svého ostrého lokálního minima.

Obdobně lze dokázat tvrzení (b).

(c) Díky tomu, že kvadratická forma $\boldsymbol{h} \mapsto f''(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h},\boldsymbol{h})$ je indefinitní, nalezneme $\boldsymbol{h}^1, \boldsymbol{h}^2 \in \mathbb{R}^n$ taková, že

$$f''(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}^1,\boldsymbol{h}^1) > 0 \quad \text{a} \quad f''(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}^2,\boldsymbol{h}^2) < 0.$$

Nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro každé $t \in (-\delta,\delta)$ platí $\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{h}^1 \in G$ a $\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{h}^2 \in G$. Pro $t \in (-\delta,\delta)$ položme $g_1(t) = f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{h}^1)$ a $g_2(t) = f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{h}^2)$. Potom

$$g_1'(0) = f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}^1) = 0, \quad g_1''(0) = f''(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}^1,\boldsymbol{h}^1) > 0.$$

Tedy g_1 má v 0 ostré lokální minimum. Obdobně lze dokázat, že g_2 má v 0 ostré lokální maximum. Odtud plyne, že f nemá v $\boldsymbol{a}$ lokální extrém. ∎

10.5.6. Poznámka. Je-li kvadratická forma $h \mapsto f''(a)(h,h)$ semidefinitní, pak pouze na základě této informace nelze rozhodnout, zda má f v a extrém, případně jakého typu, jak ilustrují příklady $f(x,y) = \pm x^4 \pm y^4$.

10.5.7. Příklad. Nalezněte lokální extrémy funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, jestliže

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y - y^2.$$

Řešení. Z rovnic

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 2x - 2y \\ 0 &= \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 - 2x - 2y \end{aligned}$$

dostáváme, že $x = y$. Tedy máme rovnici

$$4x^3 - 4x = 0.$$

Body splňující nutnou podmínku extrému jsou tedy $[-1,-1]$, $[0,0]$, $[1,1]$. Protože

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - 2 \quad \text{a} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 - 2,$$

máme

$$f''([1,1]) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}, f''([0,0]) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, f''([-1,-1]) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Vzhledem k tomu, že v bodech $[1,1]$ a $[-1,-1]$ je druhá derivace f pozitivně definitní, má v těchto bodech f lokální minimum. V bodě $[0,0]$ lze pomocí vektorů $(1,1)$ a $(1,-1)$ odvodit indefinitnost $f''(0,0)$. Tedy f nemá extrém v $[0,0]$. ♣

10.5.8. Věta (Lagrangeova věta o multiplikátorech)**.** Nechť $m,n \in \mathbb{R}$, $m < n$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f, g_1, \dots, g_m : G \to \mathbb{R}$, $f, g_1, \dots, g_m \in \mathcal{C}^1(G)$,

$$M = \{z \in G;\ g_1(z) = 0, \dots, g_m(z) = 0\}$$

a bod $\tilde{z}$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M. Potom je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(a) vektory $\nabla g_1(\tilde{z}), \dots, \nabla g_m(\tilde{z})$ jsou lineárně závislé;

(b) existují reálná čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ splňující

$$\nabla f(\tilde{z}) + \lambda_1 \nabla g_1(\tilde{z}) + \dots + \lambda_m \nabla g_m(\tilde{z}) = \boldsymbol{o}.$$

Důkaz. Předpokládejme, že výrok (a) neplatí. Označme $s = n-m$ a $g = (g_1, \dots, g_m)$. Pišme $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^m$, přičemž proměnné prostoru $\mathbb{R}^s$ značíme $\boldsymbol{x}$ a proměnné prostoru $\mathbb{R}^m$ značíme y. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(\tilde{z}) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(\tilde{z}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1}(\tilde{z}) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial y_m}(\tilde{z}) \end{vmatrix} \neq 0,$$

a tedy dle Věty 10.4.3 existují okolí $U \subset \mathbb{R}^s$ bodu $\tilde{\boldsymbol{x}} = [\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_s]$ a okolí $V \subset \mathbb{R}^m$ bodu $\tilde{y} = [\tilde{z}_{s+1}, \dots, \tilde{z}_n]$ taková, že pro každé $\boldsymbol{x} \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ (označme jej $\varphi(\boldsymbol{x})$) splňující

$$g(\boldsymbol{x}, \varphi(\boldsymbol{x})) = o.$$

Definujme funkci $\psi\colon U \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\psi(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}, \varphi(\boldsymbol{x})).$$

Protože $\varphi \in C^1(U)$, platí $\psi \in C^1(U)$. Funkce ψ má v bodě $\tilde{\boldsymbol{x}}$ zřejmě lokální extrém. Podle Věty 10.5.3 tedy platí $\nabla\psi(\tilde{\boldsymbol{x}}) = o$. Zvolme $j \in \{1, \dots, s\}$. Potom

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\tilde{z}) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_i}(\tilde{z}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\tilde{\boldsymbol{x}}). \tag{10.25}$$

Funkce $x \mapsto g(x, \varphi(x))$ je konstantní na U, a tedy

$$\frac{\partial g_l}{\partial x_j}(\tilde{z}) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_l}{\partial y_i}(\tilde{z}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = 0, \quad l \in \{1, \dots, m\},\ j \in \{1, \dots, s\}. \tag{10.26}$$

Označme

$$\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{j}} = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j}, 0, \dots, 0, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}(\tilde{\boldsymbol{x}}), \dots, \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j}(\tilde{\boldsymbol{x}})) \in \mathbb{R}^n, \quad j \in \{1, \dots, s\},$$

a

$$H = \operatorname{Lin}[\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{1}}, \dots, \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{s}}].$$

Zřejmě platí $\dim H = s$. Tedy $\dim H^{\perp} = m$. Podle (10.26) máme

$$\nabla g_l(\tilde{z}) \in H^{\perp}, \quad l \in \{1, \dots, m\},$$

takže vektory $\nabla g_1(\tilde{z}), \dots, \nabla g_m(\tilde{z})$ tvoří bázi $H^{\perp}$. Z (10.25) vyplývá, že $\nabla f(\tilde{z}) \in H^{\perp}$. Odtud plyne, že $\nabla f(\tilde{z})$ je lineární kombinací vektorů $\nabla g_1(\tilde{z}), \dots, \nabla g_m(\tilde{z})$, takže platí výrok (b). ∎

10.6. Regulární zobrazení

10.6.1. Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ a f je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$. Řekneme, že f je **difeomorfismus** na G, jestliže je prosté na G, $f(G)$ je otevřená množina v $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^1(G)$ a $f^{-1} \in \mathcal{C}^1(f(G))$.

10.6.2. Věta (o lokálním difeomorfismu)**.** Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a f je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$, které je třídy $\mathcal{C}^1$ na jistém okolí V bodu a. Jestliže $J_f(a) \neq 0$, pak existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu a takové, že $f|_U$ je difeomorfismus na U.

Důkaz. Položme $G = \mathbb{R}^n \times V$, $\boldsymbol{b} = f(\boldsymbol{a})$ a definujme funkci $F : G \to \mathbb{R}^n$ předpisem

$$F(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{y}.$$

Potom $F \in \mathcal{C}^1(G)$, $F(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}$ a

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Podle Věty 10.4.3 existují okolí $U_1 \subset V$ bodu $\boldsymbol{a}$ a okolí $W \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\boldsymbol{b}$ taková, že pro každé $\boldsymbol{y} \in W$ existuje právě jedno $\boldsymbol{x} \in U_1$ (označme $x = \varphi(\boldsymbol{y})$) takové, že $F(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}$. Navíc platí $\varphi \in \mathcal{C}^1(W)$ a

$$\boldsymbol{o} = F(\boldsymbol{y}, \varphi(\boldsymbol{y})) = f(\varphi(\boldsymbol{y})) - \boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y} \in W.$$

Tedy

$$f(\varphi(\boldsymbol{y})) = \boldsymbol{y} \quad \text{pro každé } \boldsymbol{y} \in W.$$

Zobrazení f je tudíž prosté na množině $U_1 \cap f^{-1}(W)$. Položme $U = U_1 \cap f^{-1}(W)$. Pak U je otevřená množina, $\boldsymbol{a} \in U \subset V$ a $(f|_U)^{-1} = \varphi \in \mathcal{C}^1(W)$. ■

10.6.3. Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}$, a $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Řekneme, že $f : G \to \mathbb{R}^n$ je **regulární**, jestliže $f \in \mathcal{C}^1(G)$ a pro každé $a \in G$ platí $J_f(a) \neq 0$.

10.6.4. Věta (vztah difeomorfismu a regulárního zobrazení)**.** Nechť $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f : G \to \mathbb{R}^n$. Pak f je difeomorfismus na G právě tehdy, když je regulární a prosté.

Důkaz. $\Rightarrow$ Předpokládejme, že f je na G difeomorfismus. Potom f je zřejmě prosté a třídy $\mathcal{C}^1$ na G. Pro $\boldsymbol{a} \in G$ platí

$$\mathrm{Id}(\boldsymbol{a}) = \mathrm{Id}'(\boldsymbol{a}) = (f^{-1} \circ f)'(\boldsymbol{a}) = (f^{-1})'(f(\boldsymbol{a})) \circ f'(\boldsymbol{a}),$$

a proto je $f'(\boldsymbol{a})$ regulární v každém bodě $a \in G$. Tedy je jacobián $f'(\boldsymbol{a})$ nenulový v každém bodě $\boldsymbol{a} \in G$.

$\Leftarrow$ Nyní předpokládejme, že f regulární a prosté na G. Potom $f \in \mathcal{C}^1(G)$. Zvolme $\boldsymbol{y} \in f(G)$. K němu nalezneme $\boldsymbol{x} \in G$ splňující $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$. Podle Věty 10.6.2 existuje otevřená množina $U \subset G$ obsahující $\boldsymbol{x}$ taková, že $f|_U$ je difeomorfismus. Tedy $f(U)$ je otevřená a $y \in f(U) \subset f(G)$. Tudíž je $f(G)$ otevřená. Navíc je $f^{-1} \in \mathcal{C}^1(f(U))$. Protože y bylo zvoleno libovolně, plyne odtud, že $f^{-1} \in \mathcal{C}^1(f(G))$. ■

10.7. Teoretické příklady

10.7.1. Příklad. Uvažujte funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & [x,y] \neq [0,0], \\ 0, & [x,y] = [0,0], \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, & [x,y] \neq [0,0], \\ 0, & [x,y] = [0,0], \end{cases}$$

a

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}y}{e^{-\frac{2}{x^2}}+y^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Dokažte následující tvrzení.

(a) Funkce f je spojitá v počátku vzhledem k ose x i y, ale není v počátku spojitá.
(b) Funkce g je spojitá v počátku vzhledem ke každé přímce počátkem procházející, ale není v počátku spojitá.
(c) Funkce h je spojitá v počátku vzhledem ke každé křivce tvaru $y = c\,|x|^d$, $c \in \mathbb{R}$, $d \in (0,\infty)$, ale h není spojitá v počátku.
(d) Funkce f, g, i h mají v počátku obě parciální derivace.

Řešení. (a) Položme

$$\varphi(x) = f(x,0), \quad x \in \mathbb{R},$$

tj. $\varphi(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}$. Zjevně existuje $\lim_{x\to 0} \varphi(x)$ a rovná se 0. Obdobně odvodíme, že $\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$. Blížíme-li se však k počátku po přímce $y = x$,

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}.$$

Limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ tedy neexistuje.

(b) Zjevně platí, že

$$\lim_{y\to 0} g(0,y) = 0 = \lim_{x\to 0} g(x,0).$$

Pro přímku tvaru $y = cx$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, platí

$$\lim_{x\to 0} g(x,cx) = \lim_{x\to 0} \frac{c^2x^3}{x^4+c^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{c^2x}{x^2+c^2} = 0.$$

Ale

$$\lim_{x\to 0} g(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2}.$$

Limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ tedy neexistuje.

(c) Zřejmě máme $\lim_{y\to 0} h(0,y) = 0 = \lim_{x\to 0} h(x,0)$. Nechť $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $d \in (0,\infty)$. Pak pro křivku $y = c\,|x|^d$ dle Příkladu **??** platí

$$\lim_{x\to 0} h(x, c\,|x|^d) = \lim_{x\to 0} \frac{ce^{-\frac{1}{x^2}}\,|x|^d}{e^{-\frac{2}{x^2}} + c^2\,|x|^{2d}}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{ce^{-\frac{1}{x^2}}\,|x|^{-d}}{e^{-\frac{2}{x^2}}\,|x|^{-2d} + c^2} = 0.$$

Funkce h však není spojitá v počátku, neboť vzhledem ke křivce $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$ platí

$$\lim_{x\to 0} f(x, e^{-\frac{1}{x^2}}) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} e^{-\frac{1}{x^2}}}{e^{-\frac{2}{x^2}} + e^{-\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y)$ tedy neexistuje.

(d) Tvrzení je zřejmé z faktu, že všechny tři funkce jsou nulové na osách x a y. ♣

10.7.2. Příklad. Nechť $[a,b] \in \mathbb{R}^2$ a f je reálná funkce definována $\mathbb{R}^2 \setminus [a,b]$ mající vlastní limitu v $[a,b]$. Nechť pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje $\lim_{y\to b} f(x,y)$ a pro každé $y \in \mathbb{R}$ existuje $\lim_{x\to a} f(x,y)$. Pak

$$\lim_{[x,y]\to[a,b]} f(x,y) = \lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y) = \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y).$$

Řešení. Označme pro $x \in \mathbb{R}$ funkci $\varphi_x(y) = f(x,y)$, $y \in \mathbb{R} \setminus \{b\}$, a pro $y \in \mathbb{R}$ nechť $\psi_y(x) = f(x,y)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$. Dle předpokladu existují pro $x, y \in \mathbb{R}$ limity $\lim_{y\to b} \varphi_x(y)$ a $\lim_{x\to a} \psi_y(x)$. Označme je symboly $\varphi_x(b)$ a $\psi_y(a)$.

Nechť $L = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ a $\varepsilon \in (0,\infty)$ je dáno. Najdeme $r \in (0,\infty)$ takové, že $|f(x,y) - L| < \varepsilon$ pro $(x,y) \in B((a,b),r) \setminus \{(a,b)\}$. Vezměme $\delta \in (0,\infty)$ takové, že $(a-\delta, a+\delta)\times(b-\delta, b+\delta) \subset B((a,b),r)$. Nechť $x \in P^\delta(a)$ je pevné. Nalezneme $r_x \in (0,\infty)$ takové, že $B((x,b),r_x) \subset B((a,b),r)$. Pak pro $y \in \mathbb{R}$ splňující $(x,y) \in B((x,b),r_x)$ platí $|f(x,y) - L| < \varepsilon$. Tedy pro hodnotu $\varphi_x(b)$ máme odhad

$$L - \varepsilon \le \varphi_x(b) \le L + \varepsilon.$$

Tedy pro $x \in P^\delta(a)$ platí

$$|\varphi_x(b) - L| \le \varepsilon,$$

tj.

$$L = \lim_{x\to a} \varphi_x(b) = \lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y).$$

Obdobně odvodíme, že $L = \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y)$. ♣

10.7.3. Příklad. Uvažujte funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{y}) + y\sin(\frac{1}{x}), & xy \neq 0,\\ 0, & xy = 0,\end{cases}$$

$$g(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}+y\sin(\frac{1}{x}), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

a

$$h(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & y\neq 0,\\ 0 & , y=0.\end{cases}$$

Dokažte následující tvrzení.

(a) Limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ existuje, ale limity $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$ a $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$ neexistují.

(b) Limita $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} g(x,y)=0$ existuje , ale limity $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} g(x,y)$ a $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ neexistují.

(c) Limita $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} h(x,y)=0$ existuje, ale limity $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} h(x,y)$ a $\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y)$ neexistují.

Řešení. (a) Jelikož

$$|f(x,y)|\leq |x|+|y|\,,(x,y)\in\mathbb{R}^2,$$

máme $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$. Na druhou stranu však pro x,y nenulové limity $\lim_{y\to 0} f(x,y)$ a $\lim_{x\to 0} f(x,y)$ neexistují.

(b) Máme

$$\lim_{x\to 0} g(x,0)=0=\lim_{y\to 0} g(0,y).$$

Na druhou stranu však platí

$$\lim_{x\to 0} g(x,x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x^2}+x\sin(\frac{1}{x})=\frac{1}{2}.$$

Limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ proto neexistuje.

Pro každé $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ však existuje limita

$$\lim_{y\to 0} g(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}+y\sin(\frac{1}{x})=0.$$

Tedy $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} g(x,y)=0$.

Zřejmě však pro žádné $y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ neexistuje $\lim_{x\to 0} g(x,y)$.

(c) Důkaz tvrzení je analogický důkazu tvrzení (b). ♣

10.7.4. Příklad. Uvažujte funkce

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=y=0,\end{cases}$$

$$g(x,y)=\begin{cases}y+x\sin(\frac{1}{y}), & y\neq 0,\\ 0, & y=0,\end{cases}$$

a

$$h(x,y)=\begin{cases}x+y\sin(\frac{1}{x}), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Dokažte následující tvrzení.

(a) Limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ neexistuje, ale limity $\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f(x,y)$ a $\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f(x,y)$ existují a rovnají se.
(b) Limita $\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} g(x,y) = 0$ neexistuje, ale limity $\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} g(x,y)$ a $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ existují a rovnají se.
(c) Limita $\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} h(x,y) = 0$ neexistuje, ale limity $\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} h(x,y)$ a $\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y)$ existují a rovnají se.

Řešení. (a) Tvrzení plyne z Příkladu 10.7.1(a).
Tvrzení (b) a (c) se dokáží obdobně jako v Příkladu 10.7.3. ♣

10.7.5. Příklad. Uvažujte funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0, \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} 1, & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0. \end{cases}$$

Dokažte následující tvrzení.
(a) Limity $\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f(x,y)$ a $\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f(x,y)$ existují a nerovnají se. Navíc neexistuje $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.
(b) Limity $\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} g(x,y)$ a $\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} g(x,y)$ existují a rovnají se, ale $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ neexistuje.

Řešení. (a) Máme

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

a

$$\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1.$$

Limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ neexistuje dle Příkladu 10.7.2.
(b) Zřejmě platí

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} g(x,y) = \lim_{x\to 0} 1 = 1 = \lim_{y\to 0} 1 = \lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} g(x,y),$$

ale

$$\lim_{x\to 0} g(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ tedy neexistuje dle Heineovy věty pro metrické prostory (Věta 9.4.11) a Příkladu 10.7.2. ♣

10.7.6. Příklad. Uvažujte funkci

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

Ukažte, že f existují $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$, ale nerovnají se.

Řešení. Zřejmě $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Spočtěme dále pro body (x,y) mimo počátek derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = xy\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} + y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xy\frac{-4xy^2}{(x^2+y^2)^2} + x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

Tedy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = \lim_{y\to 0}\frac{-y}{y} = -1.$$

♣

10.7.7. Příklad. Uvažujte funkci

$$f(x,y) = (y-x^2)(y-3x^2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ukažte, že f je má ostré lokální minimum v počátku vzhledem ke každé přímce procházející počátkem, ale nemá v počátku lokální minimum.

Řešení. Pro přímku $x = 0$ platí $f(0,y) = y^2$, což je funkce mající v počátku ostré minimum. Pro přímku $y = 0$ platí $f(x,0) = 3x^4$, což je opět funkce mající v počátku ostré minimum. Je-li přímka $y = cx$ pro $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dána, platí

$$g(x) = f(x,cx) = (cx-x^2)(cx-x^3) = c^2x^2 - 4cx^3 + 3x^4.$$

Protože $g'(0) = 0$ a $g''(0) = 2c^2 > 0$, má funkce g v počátku ostré lokální minimum.

Funkce f však nemá v počátku lokální minimum, neboť pro křivku $y = 2x^2$ platí

$$g(x) = f(x, 2x^2) = -x^2,$$

tj. g má v počátku ostré maximum. ♣

10.7.8. parciální diferenciál

10.8. Početní příklady k funkcím více proměnných

10.8.1. Příklad. U následujících množin $A \subset \mathbb{R}$ určete vnitřek, uzávěr a hranici:

$$A = \mathbb{N}, \quad A = \left\{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Řešení. (a) Pokud $A = \mathbb{N}$, pak $\operatorname{Int} A = \emptyset$. Zjevně totiž dle Věty 1.5.34 vidíme, že žádný interval v $\mathbb{R}$ není obsažen v A. Dále si uvědomíme, že A je uzavřená. Vezmeme totiž libovolnou posloupnost $\{x_n\}$ bodů v A konvergující k nějakému $x \in \mathbb{R}$. Jelikož je $\{x_n\}$ cauchyovská a vzdálenost libovolných dvou různých prvků

A je alespoň 1, musí být $\{x_n\}$ od jistého indexu konstantní. Tedy zřejmě $x \in A$. To podle definice znamená, že A je uzavřená. Konečně $\partial A = A$, neboť

$$\partial A \subset \partial A \cup A = \overline{A} = A$$

a obrácená inkluze $A \subset \partial A$ plyne z faktu $\operatorname{Int} A = \emptyset$.

(b) Nechť $A = \left\{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\}$. Stejně jako výše odvodíme z Věty 1.5.34, že $\operatorname{Int} A = \emptyset$. Dále platí $\partial A = \{0\} \cup A$. Vskutku, posloupnost $\{\frac{1}{n}\}$ konverguje k 0 a je obsažena v A a $0 \notin A$, a proto $0 \in \partial A$. Na druhou stranu máme z faktu $\operatorname{Int} A = \emptyset$, že $A \subset \partial A$. Proto $\{0\} \cup A \subset \partial A$. Pro důkaz druhé inkluze uvažujme bod $x \notin \{0\} \cup A$. Pokud $x < 0$, pak interval $B(x, \frac{|x|}{2})$ neprotíná A, a tedy $x \notin \partial A$. Pokud $x > 0$, vezmeme $n_0 \in \mathbb{N}$ a $\delta > 0$ splňující $\frac{1}{n_0} < x - \delta < x$. Pak interval $(x-\delta, x+\delta)$ protíná A v konečné množině, a tedy existuje $\eta \in (0, \delta)$ takové, že $(x - \eta, x + \eta) \cap A = \emptyset$. Proto $x \notin \partial A$. Tím je druhá inkluze ukázána. Uzávěr A je tedy roven $\overline{A} = A \cup \partial A = \{0\} \cup A$. ♣

10.8.2. Příklad. U následujících množin $A \subset \mathbb{R}^2$ určete vnitřek, uzávěr a hranici:

$$A = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x > 0, y \le 0\right\}, \quad A = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + e^y > 17\right\},$$
$$A = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 + 2xy = 5\right\}.$$

Řešení. (a) V prvním případě platí

$$\operatorname{Int} A = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x > 0, y < 0\right\}.$$

Vskutku, označme $G = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x > 0, y < 0\right\}$. Pak pro kanonické projekce $\pi_x, \pi_y \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ platí

$$G = \pi_x^{-1}\left((0, \infty)\right) \cap \pi_y^{-1}\left((-\infty, 0)\right),$$

a tedy je díky Příkladu 9.4.3 a Větě 9.4.6 množina G otevřená. Jelikož $G \subset A$, dle Věty 9.3.15 plyne $\operatorname{Int} A \supset G$.

Pro důkaz obrácené inkluze uvažujme $\boldsymbol{a} = [x, y] \in \operatorname{Int} A \setminus G \subset A \setminus G$. Pak $x > 0$ a $y = 0$. Posloupnost bodů $\{[x, \frac{1}{n}]\}$ pak neleží v A a konverguje k $\boldsymbol{a}$, tedy $\boldsymbol{a} \notin \operatorname{Int} A$, což je spor. Proto $\operatorname{Int} A = G$.

Dále máme

$$\overline{A} = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x \ge 0, y \le 0\right\}.$$

Vskutku, označme $F = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x \ge 0, y \le 0\right\}$. Pak jako výš odvodíme, že F je uzavřená, a jelikož obsahuje A, platí $\overline{A} \subset F$ (vizte Větu 9.3.28(g)). Nechť nyní $\boldsymbol{a} \in F$ je dáno. Pak body $[x + \frac{1}{n}, y - \frac{1}{n}]$, $n \in \mathbb{N}$, leží v A konvergují k $\boldsymbol{a}$. Tedy $\boldsymbol{a} \in \overline{A}$.

Konečně určíme ∂A. Pokud $\boldsymbol{a} = [x, y] \in \partial A$, pak $\boldsymbol{a} \in \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A = F \setminus G$, a tedy $x \ge 0$, $y \le 0$ a alespoň jedno z čísel x, y je nulové. Obráceně, nechť $\boldsymbol{a} = [x, y]$, kde $x \ge 0$, $y \le 0$ a $xy = 0$. Nechť například $x = 0$. Pak body $[\frac{1}{n}, y - \frac{1}{n}]$, $n \in \mathbb{N}$, leží v A konvergují k $\boldsymbol{a}$. Dále body $[-\frac{1}{n}, y]$, $n \in \mathbb{N}$, leží v doplňku A konvergují k $\boldsymbol{a}$. Tedy $\boldsymbol{a} \in \partial A$. Podobně se ověří, že $\boldsymbol{a} \in \partial A$ v případě $y = 0$. Tedy

$$\partial A = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x \ge 0, y \le 0, xy = 0\right\}.$$

(b) Nechť
$$A=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ x^2+e^y>17\right\}.$$
Jelikož je funkce $f\colon[x,y]\mapsto x^2+e^y$ spojitá, je množina
$$A=f^{-1}((17,\infty))$$
otevřená (vizte Větu 9.4.6). Proto $\operatorname{Int}A=A$.

Označme
$$F=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ x^2+e^y\geq 17\right\}.$$
Pak $\overline{A}=F$. Vskutku, množina F je uzavřená (to opět plyne z Věty 9.4.6), obsahuje A, a tedy $\overline{A}\subset F$. Pro důkaz opačné inkluze uvažujme $\boldsymbol{a}=[x,y]\in F$. Pokud $\boldsymbol{a}\in A$, je zjevně $\boldsymbol{a}\in\overline{A}$. Nechť tedy $\boldsymbol{a}\in F\setminus A$, tj. $x^2+e^y=17$. Pak body $[x,y+\frac{1}{n}]$, $n\in\mathbb{N}$, splňují
$$17=x^2+e^y<x^2+e^{y+\frac{1}{n}},$$
tj. leží v A. Jelikož tyto body konvergují k $\boldsymbol{a}$, leží $\boldsymbol{a}$ v $\overline{A}$.

Hranice A je pak rovna množině
$$H=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ x^2+e^y=17\right\}.$$
Vskutku,
$$\partial A\subset\overline{A}\setminus\operatorname{Int}A=F\setminus A=H.$$
Na druhou stranu, je-li $\boldsymbol{a}=[x,y]\in H$ dáno, dle předchozího již víme, že $\boldsymbol{a}\in\overline{A}$. Jelikož $\boldsymbol{a}\notin A$, je i v $\overline{\mathbb{R}^2\setminus A}$. Tedy $\boldsymbol{a}\in\partial A$ a $H=\partial A$.

(c) Nechť
$$A=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2+2xy=5\right\}.$$
Postupem analogickým k přechozímu odvodíme, že A je uzavřená. Dokážeme, že $\partial A=A$. Vskutku, je-li $[x,y]\in A$ dáno, body $[x,y+\frac{1}{n}]$, $n\in\mathbb{N}$, splňují
$$x^2+\left(y+\frac{1}{n}\right)^2+2x\left(y+\frac{1}{n}\right)=5+\frac{1}{n}\left(2x+2y+\frac{1}{n}\right),\quad n\in\mathbb{N}.$$
Tedy všechny až nejvýše na jeden leží mimo množinu A. Jelikož konvergují k $\boldsymbol{a}$, je $\boldsymbol{a}\in\partial A$.

Na závěr si uvědomme, že vztah $\overline{A}=A=\partial A$ implikuje $\operatorname{Int}A=\emptyset$. ♣

10.8.3. Příklad. U množiny
$$A=\left\{[x,y,z]\in R^3;\ x\geq 0, y>0, z\geq 0, x+y=2\right\}$$
určete vnitřek, uzávěr a hranici.

Řešení. Nejprve si uvědomme, že $\operatorname{Int}A=\emptyset$. Vskutku, pokud $\boldsymbol{a}=[x,y,z]\in A$, pak body $[x+\frac{1}{n},y,z]$, $n\in\mathbb{N}$, leží v doplňku A a konvergují k $\boldsymbol{a}$. Tedy $\boldsymbol{a}\notin\operatorname{Int}A$ a $\boldsymbol{a}\in\partial A$. Dále označme
$$F=\left\{[x,y,z]\in R^3;\ x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0, x+y=2\right\}.$$

Pak platí $\partial A = \overline{A} = F$. Vskutku, F je uzavřená množina, neboť obsahuje A a pro spojitou funkci $f : [x, y, z] \mapsto x + y$ platí

$$F = \pi_x^{-1}([0, \infty)) \cap \pi_y^{-1}([0, \infty) \cap \pi_z^{-1}([0, \infty)) \cap f^{-1}(\{2\}).$$

Tedy

$$\partial A \subset \overline{A} \subset F.$$

Mějme $\boldsymbol{a} = [x, y, z] \in F$ dáno. Pomocí bodů $[x + \frac{1}{n}, y, z]$, $n \in \mathbb{N}$, jako výše odvodíme, že $\boldsymbol{a} \in \overline{\mathbb{R}^3 \setminus A}$. Pokud $\boldsymbol{a} \in A$, je dle přechozího prvkem ∂A. Pokud $\boldsymbol{a} \in F \setminus A$, pak $z \geq 0$, $x \geq 0$, $y = 0$ a $x + y = 2$, tj. $x = 2$. Body $[x - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, z]$, $n \in \mathbb{N}$, pak leží v A a konvergují k $\boldsymbol{a}$. Proto $\boldsymbol{a} \in \overline{A}$. Jelikož $\partial A = \overline{A} \cap \overline{\mathbb{R}^3 \setminus A}$, máme $F \subset \partial A$. ♣

10.8.4. Příklad. Nechť $[a, b] \in \mathbb{R}^2$. Spočtěte limitu

$$\lim_{[x,y]\to[a,b]} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Řešení. Funkce $f : [x, y] \mapsto x$ a $g : [x, y] \mapsto y$ jsou spojitá na $\mathbb{R}^2$ dle Příkladu 9.4.3. Tedy dle Věty 9.4.17 máme

$$\begin{aligned}
\lim_{[x,y]\to[a,b]} \sqrt{x^2 + y^2} &= \lim_{[x,y]\to[a,b]} \sqrt{(f(x, y))^2 + (g(x, y))^2} \\
&= \sqrt{\left(\lim_{[x,y]\to[a,b]} f(x, y)\right)^2 + \left(\lim_{[x,y]\to[a,b]} g(x, y)\right)^2} \\
&= \sqrt{a^2 + b^2}.
\end{aligned}$$

♣

10.8.5. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Řešení. Položíme-li ve funkce $f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ $y = 0$, dostáváme

$$\lim_{x\to 0} f(x, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Obdobně pro $x = 0$ máme

$$\lim_{y\to 0} f(0, y) = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1.$$

Dle Heineovy věty 9.4.11 tedy limita neexistuje. ♣

10.8.6. Příklad. Spočtěte $\lim_{[x,y]\to[0,0]} f(x, y)$, kde

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2 \setminus \{[0, 0]\}.$$

Řešení. Jelikož
$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} |y| = 0$$
a platí
$$0 \le |f(x,y)| = \left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{x^2 y}{x^2}\right| \le |y|,$$
dostáváme $\lim_{[x,y]\to[0,0]} f(x,y) = 0$. ♣

10.8.7. Příklad. Spočtěte $\lim_{[x,y]\to[0,0]} f(x,y)$, kde
$$f(x,y) = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad [x,y] \in \mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\}.$$

Řešení. Povšimneme si, že k bodu $[0,0]$ se můžeme blížit po ose y zprava a dostaneme
$$\lim_{x\to 0+} f(x,0) = \lim_{x\to 0+} \frac{x^2+0}{\sqrt{x^2+0^2}} = 1.$$
K bodu $[0,0]$ se však můžeme blížit i po přímce $y = x$ a pak dostaneme
$$\lim_{x\to 0_+} f(x,x) = \lim_{x\to 0_+} \frac{x+x}{\sqrt{x^2+x^2}} = \sqrt{2}.$$
Podle Věty 9.4.11 tedy limita neexistuje. ♣

10.8.8. Příklad. Spočtěte $\lim_{[x,y]\to[0,0]} f(x,y)$, kde
$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad [x,y] \in \mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\}.$$

Řešení. Zadanou funkci můžeme odhadnout
$$0 \le \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \left|\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}.$$
Jelikož $\lim_{[x,y]\to[0,0]} \sqrt{x^2+y^2} = 0$, je zadaná limita rovna 0. ♣

10.8.9. Příklad. Spočtěte
$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{\sqrt{x^6+y^6}}}.$$

Řešení. Nejprve si rozmyslíme, že existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $[x,y] \in P(\boldsymbol{o},\delta)$ platí odhad
$$\log(1+x^2y^2) \le 2x^2y^2. \tag{10.27}$$
Vskutku, díky platnosti vztahu $\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$ lze nalézt $\eta > 0$ takové, že $\log(1+t) \le 2t$ pro libovolné $t \in P(0,\eta)$. Jelikož $\lim_{[x,y]\to[0,0]} x^2y^2 = 0$, existuje $\delta > 0$ splňující $x^2y^2 \in B(0,\eta)$ kdykoliv $[x,y] \in B(\boldsymbol{o},\delta)$. To je však již hledané δ, neboť pokud $[x,y] \in P(\boldsymbol{o},\delta)$ splňuje $xy = 0$, pak nerovnost (10.27) zjevně platí. Pokud $xy \ne 0$, je $x^2y^2 \in P(0,\eta)$, a tedy (10.27) platí díky volbě η.

Nyní můžeme pro $[x, y] \in P(\boldsymbol{o}, \delta)$ odhadnout

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{x^6 + y^6}} \log(1 + x^2 y^2) \leq \frac{2x^2 y^2}{\sqrt{x^6 + y^6}} \leq \frac{x^4 + y^4}{\sqrt{x^6 + y^6}}$$
$$\leq \frac{x^4}{\sqrt{x^6}} + \frac{y^4}{\sqrt{y^6}} \leq |x| + |y| \,.$$

Jelikož limita posledního výrazu v bodě $[0, 0]$ je 0, dostáváme z Věty 9.4.18 rovnost $\lim_{[x,y]\to[0,0]} f(x, y) = e^0 = 1$.

(Poznamenejme, že výpočet je možno zjednodušit použitím odhadu $\log(1 + t) \leq t$, $t \in (0, \infty)$.) ♣

10.8.10. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{2 - \cos x - \cos y}{x^2 + y^2}.$$

Řešení. Pišme $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \varphi(t)$, kde $\lim_{t0} \frac{\varphi(t)}{t^2} = 0$. Pak

$$\frac{2 - \cos x - \cos y}{x^2 + y^2} = \frac{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2}{x^2 + y^2} + \frac{\varphi(x)}{x^2 + y^2} + \frac{\varphi(y)}{x^2 + y^2}.$$

Jelikož

$$0 \leq \left| \frac{\varphi(x)}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{\varphi(x)}{x^2} \right|$$

a pravá strana konverguje k 0 pro x jdoucí k 0, máme $\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\varphi(x)}{x^2+y^2} = 0$. Obdobně odvodíme nulovost limity druhého členu.

Celkem tedy vyjde

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{2 - \cos x - \cos y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}.$$

♣

10.8.11. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^6}}.$$

Řešení. Nejprve si všimneme rovnosti

$$0 \leq \left| \frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^6}} \right| = \frac{|x|\, y^2}{\sqrt{x^4 + y^6}} = \sqrt{\frac{x^2 y^4}{x^4 + y^6}}.$$

Dále platí

$$\left| \frac{x^2 y^4}{x^4 + y^6} \right| = \frac{x^2 |y|^3}{x^4 + y^6} \cdot |y| = \frac{x^2 |y|^3}{(x^2)^2 + (|y|^3)^2} \cdot |y| \leq |y| \,,$$

neboť

$$\frac{ab}{a^2+b^2} \le \frac{2ab}{a^2+b^2} \le 1, \quad a,b \ge 0, [a,b] \ne [0,0].$$

Tedy

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^6}} = 0.$$

♣

10.8.12. Příklad. Rozhodněte, zda lze funkci $\frac{\sin xy}{x}$ rozšířit spojitě na celou rovinu $\mathbb{R}^2$.

Řešení. Uvažujme spojitou funkci $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou jako

$$g(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

Pak je funkce

$$f(x,y) = g(xy) \cdot y, \quad [x,y] \in \mathbb{R}^2,$$

spojitá dle Věty 9.4.17 a pro $[x,y] \in \mathbb{R}^2$, $x \ne 0$, platí

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{xy} \cdot y = \frac{\sin xy}{x}, & y \ne 0, \\ 0 = \frac{\sin xy}{x}, & y = 0. \end{cases}$$

Funkce f je tak spojité rozšíření zadaná funkce na $\mathbb{R}^2$. ♣

10.8.13. Příklad. Spočtěte parciální derivace funkce

$$f(x,y) = x^2 \sin y, \quad [x,y] \in \mathbb{R}^2,$$

v každém bodě roviny $\mathbb{R}^2$.

Řešení. Nechť $\boldsymbol{a} = [a,b]$ je daný bod v $\mathbb{R}^2$. Spočteme nejprve $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{a})$. Podle 10.1.9 platí pro funkci

$$g_1(t) = f(t,b) = t^2 \sin b, \quad t \in \mathbb{R},$$

vztah $g_1'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{a})$. Tedy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{a}) = g_1'(a) = [t \mapsto t^2 \sin b]'_{t=a} = [t \mapsto 2t \sin b]_{t=a} = 2a \sin b.$$

Analogicky máme pro funkci

$$g_2(t) = f(a,t) = a^2 \sin t, \quad t \in \mathbb{R},$$

vztah $g_2'(b) = \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{a})$. Tedy

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{a}) = g_2'(b) = [t \mapsto a^2 \sin t]'_{t=b} = [t \mapsto a^2 \cos t]_{t=b} = a^2 \cos b.$$

♣

10.8.14. Příklad. Spočtěte parciální derivace funkce

$$f(x,y,z) = x^{y^z}, \quad [x,y,z] \in (0,\infty)^3,$$

a najděte rovnici tečné nadroviny ke grafu f v bodě $[2,1,2,2]$.

Řešení. Funkci f vyjádříme jako

$$f(x,y,z) = e^{y^z \log x} = e^{e^{z \log y} \log x}.$$

Tedy pro $[x,y,z] \in (0,\infty)^3$ máme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}([x,y,z]) &= e^{e^{z\log y}\log x} \cdot e^{z \log y} \cdot \frac{1}{x} = y^z \cdot x^{y^z - 1}\\
\frac{\partial f}{\partial y}([x,y,z]) &= e^{e^{z\log y}\log x} \cdot \log x \cdot e^{z \log y} \cdot \frac{z}{y} = x^{y^z} y^z \frac{z \log x}{y},\\
\frac{\partial f}{\partial z}([x,y,z]) &= e^{e^{z\log y}\log x} \cdot \log x \cdot e^{z \log y} \cdot \log y = x^{y^z} y^z \log x \log y.
\end{aligned}$$

Parciální derivace jsou zjevně spojité na $(0,\infty)^3$, a tedy v každém bodě definičního oboru existuje derivace (Věta 10.1.22). Z právě provedených výpočtů plyne, že

$$\nabla f([2,1,2]) = [1, 4\log 2, 0].$$

Dle 10.1.16 je tedy rovnice tečné nadroviny rovna

$$\begin{aligned}
t(x,y,z) &= 2 + 1(x-2) + 4\log 2(y-1) + 0(z-2)\\
&= 2 + (x-2) + 4\log 2(y-1), \quad [x,y,z] \in \mathbb{R}^3.
\end{aligned}$$

♣

10.8.15. Příklad. Zjistěte, ve kterých bodech existují parciální derivace a derivace funkce

$$f(x,y) = |x|\,|y|, \quad [x,y] \in \mathbb{R}^2.$$

Řešení. Pro body $[x,y] \in \mathbb{R}^2$ mimo souřadnicové osy platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}([x,y]) = (\operatorname{sign} x)\,|y|, \quad \frac{\partial f}{\partial y}([x,y]) = |x| \operatorname{sign} y.$$

Tyto funkce jsou spojité v každém bodě mimo souřadnicové osy, a tedy v nich existuje derivace. Dle Věty 10.1.17 platí

$$\begin{aligned}
f'(x,y)\colon (h_1,h_2) \mapsto \langle \nabla f(x,y), h\rangle &= \frac{\partial f}{\partial x}([x,y])h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}([x,y])h_2\\
&= ((\operatorname{sign} x)y\,|y|)h_1 + (|x| \operatorname{sign} y)h_2, \quad ([h_1,h_2] \in \mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$

Podívejme se nyní na body ležící na ose x, tj. na body tvaru $[x,0]$, kde $x \in \mathbb{R}$. Pak

$$\frac{\partial f}{\partial x}([x,0]) = [t \mapsto f(t,0)]'_{t=x} = [t \mapsto 0]'_{t=x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Naproti tomu pro $x \neq 0$ parciální derivace podle y v bodě $[x, 0]$ neexistuje, neboť pro funkci
$$g(t) = f(x,t) = |x|\,|t|, \quad t \in \mathbb{R},$$
platí
$$g'_+(0) = |x|, \quad g'_-(0) = -|x|,$$
což implikuje neexistenci
$$\frac{\partial f}{\partial y}([x,0]) = g'(0).$$
V bodech $[x, 0]$, $x \neq 0$, tak neexistuje ani derivace.

Pro body tvaru $[0, y]$, $y \in \mathbb{R}$, podobně jako výše odvodíme, že $\frac{\partial f}{\partial y}([0, y]) = 0$ a že $\frac{\partial f}{\partial x}([0, y])$ neexistuje, pokud $y \neq 0$. To opět implikuje neexistenci derivace v bodech $[0, y]$, $y \neq 0$.

Zbývá nám vyšetřit bod $[0, 0]$. Z předchozího víme, že parciální derivace f v $[0, 0]$ jsou nulové. Dle Věty 10.1.17 je tak jediným kandidátem na derivaci nulové zobrazení. Dle definice tak derivace existuje právě tehdy, když
$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{f([0,0]+[x,y]) - f([0,0]) - \langle [0,0],[x,y]\rangle}{\|[x,y]\|} = 0.$$
Tedy zkoumáme výraz
$$\frac{|x|\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right|.$$
Ten má však dle Příkladu 10.8.8 limitu rovnou nule. Tedy derivace f v bodě $[0, 0]$ je rovne $[0, 0]$. ♣

10.8.16. Příklad. Zjistěte, ve kterých bodech existují parciální derivace a derivace funkce
$$f(x,y) = \sqrt[5]{x^5+y^5}, \quad [x,y] \in \mathbb{R}^2.$$

Řešení. V bodech $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ mimo přímku $y = -x$ máme spojité parciální derivace
$$\frac{\partial f}{\partial x}([x,y]) = \frac{x^4}{\sqrt[5]{(x^5+y^5)^4}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}([x,y]) = \frac{y^4}{\sqrt[5]{(x^5+y^5)^4}},$$
a tedy v těchto bodech existuje derivace a je roven $\nabla f([x, y])$.

Uvažujme nyní bod $\boldsymbol{a} = (a, -a)$, kde $a \neq 0$. Pak pro funkci
$$g(x) = \sqrt[5]{x^5 - a^5}$$
platí
$$\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{a}) = [x \mapsto f(x,-a)]'_{x=a} = g'(a).$$
Derivace $g'(a)$ je však nevlastní, neboť díky spojitosti g lze odvodit
$$g'(a) = \lim_{x\to a} g'(x) = \lim_{x\to a} \frac{x^4}{\sqrt[5]{(x^5-a^5)^4}} = \infty.$$

Obdobně obdržíme, že $\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{a})$ neexistuje.

Zbývá vyšetřit bod $[0,0]$. Pro něj platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}([0,0]) = [x \mapsto f(x,0)]'_{x=0} = \left[x \mapsto \sqrt[5]{x^5}\right]'_{x=0} = 1$$

a podobně $\frac{\partial f}{\partial y}([0,0]) = 1$. Pokud tedy existuje derivace, je reprezentován vektorem $[1,1]$. Nutnou a postačující podmínkou pro jeho existenci je nulovost limity

$$\begin{aligned}&\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{f([0,0]+[x,y]) - f([0,0]) - \langle [1,1],[x,y]\rangle}{\|[x,y]\|}\\ &= \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\sqrt{x^5+y^5} - (x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}}.\end{aligned}$$

Uvažujeme-li přímku $y = x$, dostáváme

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x^5+x^5} - (x+x)}{\sqrt{x^2+x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt[5]{2x^5} - 2x}{\sqrt{2x^2}} = \frac{\sqrt[5]{2} - 2}{\sqrt{2}} \neq 0.$$

Dle Věty 9.4.11 tak derivace v $[0,0]$ neexistuje. ♣

10.8.17. Příklad. Zjistěte, zdali má funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5+y^4}{x^4+y^2}, & [x,y] \neq [0,0],\\ 0, & [x,y] = [0,0], \end{cases}$$

totální diferenciál v $[0,0]$.

Řešení. Jelikož

$$x \mapsto f(x,0) = x, \quad x \in \mathbb{R},$$

a

$$y \mapsto f(0,y) = y^2, \quad y \in \mathbb{R},$$

máme $\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{o}) = 1$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{o}) = 0$. Existence totálního diferenciálu tak odvisí od nulovosti limity

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\frac{x^5+y^4}{x^4+y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{y^4 - xy^2}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Uvažujeme-li přímku $y = x$, obdržíme

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^4 - x^3}{(x^4+x^2)\sqrt{2x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{x-1}{\sqrt{2}(x^2+1)} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \neq 0.$$

Tedy totální $f'(\boldsymbol{o})$ neexistuje. ♣

10.8.18. Příklad. Spočtěte parciální derivace a totální diferenciál funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & [x,y] \neq [0,0],\\ 0, & [x,y] = [0,0]. \end{cases}$$

Ukažte navíc, že parciální derivace f nejsou spojité v počátku.

Řešení. Pro $[x,y] \neq [0,0]$ spočteme parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x}([x,y]) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + (x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\frac{-1}{(x^2+y^2)^2}2x$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial y}([x,y]) = 2y \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + (x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\frac{-1}{(x^2+y^2)^2}2y.$$

Obě parciální derivace jsou spojité funkce na $\mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\}$, a proto podle Věty 10.1.22 existuje totální diferenciál pro všechna $[x,y] \neq [0,0]$. Ten má tvar

$$f'(x,y) \colon [h_1,h_2] \mapsto \langle [\frac{\partial f}{\partial x}([x,y]), \frac{\partial f}{\partial y}([x,y]), [h_1,h_2] \rangle, \quad [h_1,h_2] \in \mathbb{R}^2.$$

V bodě $[0,0]$ spočteme parciální derivace dle definice

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{o}) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2\sin(\frac{1}{t^2})-0}{t} = \lim_{t\to 0} t\sin\left(\frac{1}{t^2}\right) = 0$$

a analogicky

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{o}) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2\sin(\frac{1}{t^2})-0}{t} = 0.$$

Ukažme nyní, že $\frac{\partial f}{\partial x}$ není spojitá v počátku. Již však její restrikce na přímku $y=0$ není spojitá, neboť

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}([x,0]) = \lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x^2} - x^2\left(\cos\frac{1}{x^2}\right)\frac{2x}{x^4}\right)$$

neexistuje vlastní. (K tomu stačí uvažovat body $[\frac{1}{\sqrt{2n\pi}},0]$, $n \in \mathbb{N}$.)

Přesto v bodě $\boldsymbol{o}$ existuje totální diferenciál

$$f'(0,0)(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{o})h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{o})h_2 = 0h_1 + 0h_2.$$

Vskutku, pro nulové linární zobrazení máme totiž

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{[x,y]\to[0,0]}\sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right).$$

Jelikož

$$\left|\sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leq \sqrt{x^2+y^2},$$

je limita nulová. Tím je existence totálního diferenciálu ověřena. ♣

10.8.19. Příklad. Ukažte, že funkci

$$f(x,y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2+xy}}$$

lze spojitě rozšířit do bodu $[0,0]$ a že má v tomto bodě totální diferenciál.

Řešení. Nejprve ukážeme, že $x^2 + y^2 + xy > 0$ pro $[x, y] \in \mathbb{R}^2 \setminus \{[0, 0]\}$. Vyjádříme totiž bod $[x, y] \in \mathbb{R}^2 \setminus \{[0, 0]\}$ v polárních souřadnicích jako

$$[x, y] = [r\cos\alpha, r\sin\alpha], \quad r > 0, \alpha \in [0, 2\pi).$$

Pak

$$x^2 + y^2 + xy = r^2 + r^2\cos\alpha\sin\alpha = r^2\left(1 + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right) > 0.$$

(Mohli bychom též použít odhad $x^2 + y^2 + xy \geq \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$.)

Dále odhadneme

$$x^2 + y^2 + xy \leq x^2 + y^2 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq 2(x^2 + y^2),$$

a tedy

$$0 \leq e^{-\frac{1}{x^2+y^2+xy}} \leq e^{-\frac{1}{2(x^2+y^2)}}.$$

Jelikož

$$\lim_{t \to 0_+} \frac{e^{-\frac{1}{2t}}}{t} = 0,$$

existuje $\delta > 0$ tak, že pro $[x, y] \in P([0, 0], \delta)$ platí

$$0 \leq e^{-\frac{1}{x^2+y^2+xy}} \leq e^{-\frac{1}{2(x^2+y^2)}} \leq (x^2 + y^2)\,.$$

Tedy vidíme, že danou funkci lze spojitě dodefinovat v bodě $[0, 0]$ hodnotou 0.

Parciální derivace v počátku spočteme z definice:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{o}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{t^2}}}{t} = 0$$

a analogicky $\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{o}) = 0$.

Existence totálního diferenciálu je pak ekvivalentní s nulovostí limity

$$\lim_{[x,y] \to [0,0]} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f'(0, 0)(x, y)}{\|[x, y]\|} = \lim_{[x,y] \to [0,0]} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2+xy}}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Jelikož pro $[x, y] \in P(\boldsymbol{o}, \delta)$ platí

$$\frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2+xy}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{e^{-\frac{1}{2(x^2+y^2)}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

je daná limita nulová. Tedy totální diferenciál funkce f v počátku existuje. ♣

10.8.20. Příklad. Ukažte, že totální diferenciál funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y(|x|+|y|)}{x^4+y^2}, & [x, y] \neq [0, 0], \\ 0, & [x, y] = [0, 0]. \end{cases}$$

v počátku neexistuje.

Řešení. Jelikož je funkce f nulová na osách, jsou parciální derivace f v počátku nulové. Totální diferenciál v $\boldsymbol{o}$ tak existuje právě tehdy, když je limita

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{f(x,y)}{\|[x,y]\|} = \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2y(|x|+|y|)}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

nulová. Uvažujeme-li však parabolu $y = x^2$, dostáváme

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^2x^2(|x|+|x^2|)}{(x^4+x^4)\sqrt{x^2+x^4}} = \lim_{x\to 0+} \frac{x+x^2}{2x\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{1+x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}.$$

Totální diferenciál v počátku proto neexistuje. ♣

10.8.21. Příklad. Spočtěte totální diferenciál funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2+y}\log(x^2+y^2), & [x,y] \neq [0,0], \\ 0, & [x,y] = [0,0]. \end{cases}$$

všude, kde existuje.

Řešení. Nejprve si uvědomme, že f je spojitá na $\mathbb{R}^2$. K tomu je třeba ověřit, že $\lim_{[x,y]\to[0,0]} f(x,y) = 0$. To však plyne z odhadu

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &\le \sqrt[3]{|x^2|+|y|}\log(x^2+y^2) \le \sqrt[3]{|x|+|y|}|\log(x^2+y^2)| \\ &\le \sqrt[6]{2(x^2+y^2)}|\log(x^2+y^2)| \end{aligned}$$

platného pro $[x,y] \in \mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\}$ splňující $|x| \le 1$ a z faktu $\lim_{r\to 0+} r^{\frac{1}{6}}|\log r| = 0$.

V každém bodě $[x,y] \in \mathbb{R}^2$ splňujícím $y \neq -x^2$ platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}([x,y]) &= \frac{1}{3}\left(x^2+y\right)^{-\frac{2}{3}} 2x\log(x^2+y^2) + \sqrt[3]{x^2+y}\frac{2x}{x^2+y^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}([x,y]) &= \frac{1}{3}\left(x^2+y\right)^{-\frac{2}{3}} \log(x^2+y^2) + \sqrt[3]{x^2+y}\frac{2y}{x^2+y^2}, \end{aligned}$$

Uvažujme nyní bod $\boldsymbol{a} = (a, -a^2)$, kde $a \neq 0$ a $a^2 + a^4 \neq 1$. Protože

$$\lim_{x\to a} \frac{\partial f}{\partial x}([x,-a^2]) = \lim_{x\to a} \left(\frac{1}{3}\left(x^2-a^2\right)^{-\frac{2}{3}} 2x\log(x^2+a^4) + \sqrt[3]{x^2-a^2}\frac{2x}{x^2+a^4}\right)$$

neexistuje vlastní, neexistuje ani

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{a}) = \lim_{x\to a} \frac{\partial f}{\partial x}([x,-a^2]).$$

Podobně neexistuje $\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{a})$, protože

$$\lim_{y\to -a^2} \frac{\partial f}{\partial y}([a,y]) = \lim_{y\to -a^2} \left(\frac{1}{3}\left(a^2+y\right)^{-\frac{2}{3}} 2a\log(a^2+y^2) + \sqrt[3]{a^2+y}\frac{2a}{a^2+y^2}\right)$$

neexistuje vlastní.

Uvažujme nyní bod $\boldsymbol{o}$. Pak $x \mapsto f(x,0) = \sqrt[3]{x^2}\log x^2$, a tedy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{o}) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{t^2}\log t^2}{t}$$

neexistuje vlastní. Podobně

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{o}) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{t}\log t^2}{t}$$

neexistuje.

Konečně vezměme do úvahy bod $\boldsymbol{a} = (a,-a^2)$, kde $a^2+a^4=1$. Počítejme $\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{a})$ jako limitu parciálních derivací. Pak

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{a}) &= \lim_{x\to a}\frac{\partial f}{\partial x}([x,-a^2])\\
&= \lim_{x\to a}\left(\frac{1}{3}\left(x^2-a^2\right)^{-\frac{2}{3}}2x\log(x^2+a^4) + \sqrt[3]{x^2-a^2}\,\frac{2x}{x^2+a^4}\right)\\
&= \lim_{x\to a}\frac{1}{3}\left(x^2-a^2\right)^{-\frac{2}{3}}2x\log(x^2+a^4)\\
&= \lim_{x\to a}\frac{2x}{3}\frac{\log(x^2+a^4)}{x^2+a^4-1}\cdot\frac{x^2+a^4-1}{(x^2-a^2)^{\frac{2}{3}}} = 0,
\end{aligned}$$

neboť dle Věty 5.4.1(a) platí

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2+a^4-1}{(x^2-a^2)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{x\to a}\frac{2x}{\frac{2}{3}2x(x^2-a^2)^{-\frac{1}{3}}} = 0.$$

Podobně pro $\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{a})$ máme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{a}) &= \lim_{y\to -a^2}\frac{\partial f}{\partial x}([a,y]) = \lim_{y\to -a^2}\left(\frac{1}{3}\left(a^2+y\right)^{-\frac{2}{3}}\log(a^2+y^2) + \sqrt[3]{a^2+y}\,\frac{2y}{a^2+y^2}\right)\\
&= \lim_{y\to -a^2}\frac{1}{3}\left(a^2+y\right)^{-\frac{2}{3}}\log(a^2+y^2)\\
&= \lim_{y\to -a^2}\frac{1}{3}\frac{\log(a^2+y^2}{a^2+y^2-1}\cdot\frac{a^2+y^2-1}{(a^2+y)^{\frac{2}{3}}} = 0,
\end{aligned}$$

jelikož

$$\lim_{y\to -a^2}\frac{a^2+y^2-1}{(a^2+y)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{y\to -a^2}\frac{2y}{\frac{2}{3}(a^2+y)^{-\frac{1}{3}}} = 0.$$

Zbývá vyšetřit existenci totálního diferenciálu v bodě $\boldsymbol{a}(a) = (a,-a^2)$, kde $a^2+a^4=1$. Dle předchozího výpočtu je kandidát na $f'(\boldsymbol{a})$ roven 0. Vyšetřujeme tedy výraz

$$
\begin{aligned}
&\left| \frac{f([a,-a^2]+[x,y]) - f([a,-a^2])}{\|[x,y]\|} \right| \\
&= \left| \frac{\sqrt[3]{(a+x)^2+(-a^2+y)} \log\left((a+x)^2+(-a^2+y)^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \\
&= \left| \frac{\sqrt[3]{x^2+2ax+y} \log(x^2+y^2+2ax-2a^2y+1)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \\
&\leq \frac{\sqrt[3]{|x^2+2ax+y|}\, |x^2+y^2+2ax-2a^2y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \left(\sqrt[3]{|x^2+2ax+y|} \left(\left(x^2+y^2\right) + 2\,|a|\,(|x|+|a|\,|y|) \right) \right) \\
&\leq \sqrt[3]{|x^2+2ax+y|}\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt[3]{|x^2+2ax+y|} \frac{|2a| \max\{1,|a|\}\,(|x|+|y|)}{\sqrt{x^2+y^2}},
\end{aligned}
$$

přičemž jsme použili odhad $\log(t+1) \leq t$, $t \in (-1,\infty)$. Poslední výraz však konverguje k 0 pro $[x,y] \to [0,0]$, neboť

$$
\lim_{[x,y]\to[0,0]} \sqrt[3]{|x^2+2ax+y|} = 0 \quad \text{a} \quad \frac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \sqrt{2}.
$$

Tím je existence totálního diferenciálu v bodě $\boldsymbol{a}$ dokázána. ♣

10.8.22. Příklad. Vypočtěte derivaci $D_{\boldsymbol{v}} f(1,1,2)$ funkce

$$
f(x,y,z) = x^y + y^z, \quad [x,y,z] \in (0,\infty)^3,
$$

kde $\boldsymbol{v} = [1,1,1]$.

Řešení. Funkce f má zřejmě všechny parciální derivace na svém definičním oboru, a tedy existuje $\nabla f(1,1,2) = f'(1,1,2)$. Jelikož $f'(1,1,2)(\boldsymbol{v}) = D_{\boldsymbol{v}} f(1,1,2)$ (vizte Větu 10.1.27), stačí nalézt $\nabla f(1,1,2)$. Protože na $\mathcal{D}(f)$ platí

$$
\frac{\partial f}{\partial x} = y x^{y-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \log x + z y^{z-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = y^z \log y,
$$

máme

$$
\nabla f(1,1,2) = [1,2,0].
$$

Proto

$$
D_{\boldsymbol{v}} f(1,1,2) = \langle [1,2,0], [1,1,1] \rangle = 3.
$$

♣

10.8.23. Příklad. Nechť $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce třídy $C^1(\mathbb{R})$. Vyjádřete parciální derivace funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pomocí parciálních derivací funkce g, pokud

$$
f(x,y) = g(x+y, x-y), \quad f(x,y) = g(\sin x, xy), \quad [x,y] \in \mathbb{R}^2.
$$

Řešení. (a) Uvažujme zobrazení $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definované jako $h(x,y) = [x+y, x-y]$, $[x,y] \in \mathbb{R}^2$. To má složky $h_1(x,y) = x+y$ a $h_2(x,y) = x-y$. Funkce h je třídy $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, a tak dle řetízkového pravidla (Věta 10.2.18) platí

$$\begin{aligned}\partial_1 f(x,y) &= \sum_{j=1}^{2} \partial_j g(h(x,y))\partial_1 h_j(x,y)\\ &= \partial_1 g(x+y, x-y)\cdot 1 + \partial_2 g(x+y, x-y)\cdot 1\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\partial_2 f(x,y) &= \sum_{j=1}^{2} \partial_j g(h(x,y))\partial_2 h_j(x,y)\\ &= \partial_1 g(x+y, x-y)\cdot 1 + \partial_2 g(x+y, x-y)\cdot(-1).\end{aligned}$$

(b) Podobně jako výše počítáme pro $h(x,y) = [\sin x, xy]$, $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\partial_1 f(x,y) &= \sum_{j=1}^{2} \partial_j g(h(x,y))\partial_1 h_j(x,y)\\ &= \partial_1 g(\sin x, xy)\cdot \cos x + \partial_2 g(\sin x, xy)\cdot y\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\partial_2 f(x,y) &= \sum_{j=1}^{2} \partial_j g(h(x,y))\partial_2 h_j(x,y)\\ &= \partial_1 g(\sin x, xy)\cdot 0 + \partial_2 g(\sin x, xy)\cdot x.\end{aligned}$$

♣

10.8.24. Příklad. Nechť $f:\mathbb{R}^2 \to (0,\infty)$ je funkce třídy $C^1(\mathbb{R}^2)$. Vyjádřete parciální derivace funkce $g(x,y) = f(x,y)^{f(y,x)}$, $[x,y] \in \mathbb{R}^2$, pomocí parciálních derivací f a hodnot f.

Řešení. Uvažujme zobrazení $h(x,y) = [f(x,y), f(y,x)]$, $[x,y] \in \mathbb{R}^2$, a funkci $u(x,y) = x^y$, $[x,y] \in (0,\infty)^2$. Pak platí $g = u \circ h$. Dle Věty 10.2.16 platí

$$g'(x,y) = u'\big(h(x,y)\big) \circ h'(x,y), \qquad [x,y] \in \mathbb{R}^2.$$

Máme

$$\begin{aligned}u'(a,b) &= [ba^{b-1}, a^b \log a], \quad [a,b] \in (0,\infty)^2,\\ h_1'(x,y) &= [\partial_1 f(x,y), \partial_2 f(x,y)]\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\partial_1 h_2(x,y) &= \partial_1 f(y,x)\cdot 0 + \partial_2 f(y,x)\cdot 1 = \partial_2 f(y,x),\\ \partial_2 h_2(x,y) &= \partial_1 f(y,x)\cdot 1 + \partial_2 f(y,x)\cdot 0 = \partial_1 f(y,x),\end{aligned}$$

tj.

$$h_2'(x,y) = [\partial_2 f(y,x), \partial_1 f(y,x)].$$

Tedy

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} ba^{b-1} & a^b \log a \end{pmatrix}_{[a,b]=[f(x,y),f(y,x)]} \cdot \begin{pmatrix} \partial_1 f(x,y) & \partial_2 f(x,y) \\ \partial_2 f(y,x) & \partial_1 f(y,x) \end{pmatrix},$$

tj.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = f(y,x) \cdot f(x,y)^{f(y,x)-1} \cdot \partial_1 f(x,y) + f(x,y)^{f(y,x)} \cdot \log f(x,y) \cdot \partial_2 f(y,x),$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = f(y,x) \cdot f(x,y)^{f(y,x)-1} \cdot \partial_2 f(x,y) + f(x,y)^{f(y,x)} \cdot \log f(x,y) \cdot \partial_1 f(y,x).$$

♣

10.8.25. Příklad. Nechť existuje $f'(1,1)$ a $g(x,y) = f(f(y,x), f(x,y))$. Určete $g'(1,1)$, pokud $f(1,1) = \partial_1 f(1,1) = 1$ a $\partial_2 f(1,1) = 2$.

Řešení. Zobrazení $h(x,y) = [f(y,x), f(x,y)]$ splňuje $h(1,1) = [1,1]$, přičemž dle Věty 10.2.16 existuje i $h'(1,1)$ a $g'(1,1)$. Dále platí

$$g'(1,1) = (f \circ h)'(1,1) = f'(h(1,1)) \circ h'(1,1) = f'(1,1) \circ h'(1,1).$$

Jelikož

$$f'(1,1) = [\partial_1 f(1,1), \partial_2 f(1,1)] = [1,2]$$

a

$$\begin{aligned} \partial_1 h_1(x,y) &= \partial_1 f(y,x) \cdot 0 + \partial_2 f(y,x) \cdot 1 = \partial_2 f(y,x), \\ \partial_2 h_1(x,y) &= \partial_1 f(y,x) \cdot 1 + \partial_2 f(y,x) \cdot 0 = \partial_1 f(y,x), \\ h_2'(x,y) &= [\partial_1 f(x,y), \partial_2 f(x,y)], \end{aligned}$$

tj.

$$h'(x,y) = \begin{pmatrix} h_1'(x,y) \\ h_2'(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 f(y,x) & \partial_1 f(y,x) \\ \partial_1 f(x,y) & \partial_2 f(x,y) \end{pmatrix}.$$

Proto

$$g'(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

♣

10.8.26. Příklad. Vypočtěte $g'(1,1)$, pokud pro $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derivace $g'(1,1)$ existuje a funkce $f(r,\alpha) = g(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ splňuje $f'\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right) = [0,4]$.

Řešení. Zobrazení $h(r,\alpha) = [r\cos\alpha, r\sin\alpha]$ splňuje $h\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right) = [1,1]$ a

$$h'(r,\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -r\sin\alpha \\ \sin\alpha & r\cos\alpha \end{pmatrix},$$

tj.

$$h'\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Z Věty 10.2.16 tak máme

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 4 \end{pmatrix} = f'\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right) &= g'(1,1) \circ h'\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \partial_1 g(1,1) & \partial_2 g(1,1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tedy máme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \partial_1 g(1,1)\frac{1}{\sqrt{2}} + \partial_2 g(1,1)\frac{1}{\sqrt{2}} &= 0 \\ -\partial_1 g(1,1) + \partial_2 g(1,1) &= 4, \end{aligned}$$

jejímž řešením je dvojice

$$g'(1,1) = [-2, 2].$$

♣

10.8.27. Příklad. Ukažte, že rovnice

$$\sin(xy) + \cos(xy) = 1$$

určuje v jistém okolí bodu $[\pi, 0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x. Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě π a nalezněte tečnou přímku ke grafu této funkce v bodě $[\pi, 0]$.

Řešení. Položme

$$F(x,y) = \sin(xy) + \cos(xy) - 1, \quad [x,y] \in \mathbb{R}^2.$$

Funkce F je zjevně třídy $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ a platí $F(\pi, 0) = 0$ a

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\pi, 0) = [\cos(xy) \cdot x - \sin(xy) \cdot x]_{[x,y]=[\pi,0]} = \pi \neq 0.$$

Dle Věty 10.4.1 tak existuje interval $(\pi - \delta, \pi + \delta)$ a interval $(-\delta, \delta)$ tak, že pro každé $x \in B(\pi, \delta)$ existuje právě jedno $y \in B(0, \delta)$ splňující $F(x,y) = 0$. Označme tuto funkci definovanou na $B(\pi, \delta)$ jako φ. Dle Věty 10.4.1 je φ třídy $C^\infty(B(\pi, \delta))$, $\varphi(\pi) = 0$ a splňuje vztah

$$\sin(x\varphi(x)) + \cos(x\varphi(x)) - 1 = 0, \quad x \in B(\pi, \delta).$$

Dvojnásobným derivováním této rovnice obdržíme postupně pro $x \in B(\pi, \delta)$ rovnosti

$$\begin{gathered} \cos(x\varphi) \cdot (\varphi + x\varphi') - \sin(x\varphi) \cdot (\varphi + x\varphi') = 0, \\ -\sin(x\varphi) \cdot (\varphi + x\varphi')^2 + \cos(x\varphi) \cdot (2\varphi' + x\varphi'') \\ -\cos(x\varphi) \cdot (\varphi + x\varphi')^2 - \sin(x\varphi) \cdot (2\varphi' + x\varphi'') = 0, \end{gathered}$$

kde píšeme $\varphi, \varphi', \varphi''$ místo $\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)$. Dosadíme-li bod $x = \pi$, dostáváme $\varphi'(\pi) = \varphi''(\pi) = 0$. Tedy tečná přímka ke grafu φ v bodě π má tvar

$$t(x) = \varphi(\pi) + \varphi'(\pi)(x - \pi) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

♣

10.8.28. Příklad. Dokažte, že množina

$$A = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ e^y + \log x + xy = 0\right\}$$

je grafem nějaké funkce f třídy C^2 na $(0, \infty)$.

(a) Najděte nulový bod x_0 funkce f a $f'(x_0)$.
(b) Vypočtěte $\lim_{x\to 0+} f(x)$ a $\lim_{x\to\infty} f(x)$.
(c) Dokažte, že f nabývá absolutního minima právě v jednom bodě.

Řešení. Pro pevné $x \in (0, \infty)$ uvažujme funkci $f_x(y) = e^y + \log x + xy$, $y \in \mathbb{R}$. Jelikož $f_x'(y) = e^y + x$, je f_x rostoucí na $\mathbb{R}$. Dále platí $\lim_{y\to-\infty} f_x(y) = -\infty$ a $\lim_{y\to\infty} f_x(y) = \infty$. Existuje tedy právě jedno $y(x) = f(x) \in \mathbb{R}$ takové, že $f_x(y(x)) = 0$. Množina A je tedy grafem funkce f. Jelikož pro funkci $F(x, y) = e^y + \log x + xy$ platí $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = e^y + x > 0$, popisuje rovnice $F(x, y) = 0$ lokálně funkci třídy C^∞. Tedy f je nekonečně diferencovatelná funkce na $(0, \infty)$.

(a) Pokud $f(x) = 0$, pak z rovnice

$$e^{f(x)} + \log x + xf(x) = 0 \tag{10.28}$$

vidíme, že $x = e^{-1}$. Derivováním této rovnice obdržíme

$$e^{f(x)} f'(x) + \frac{1}{x} + f(x) + xf'(x) = 0, \tag{10.29}$$

což po dosazení $x = e^{-1}$ dává $f'(e^{-1}) = -\frac{e^2}{e+1}$. Funkce f je tak kladná na $(0, e^{-1})$ a záporná na (e^{-1}, ∞).

(b) Jelikož

$$|f(x)| = \left|\frac{-e^{f(x)} - \log x}{x}\right| \le \frac{e^{f(x)}}{x} + \frac{|\log x|}{x} \le \frac{1}{x} + \frac{|\log x|}{x}, \quad x \in (e^{-1}, \infty),$$

je $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Dále ukážeme, že $\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$. Vskutku, pokud by tomu tak nebylo, existuje posloupnost $\{x_n\}$ kladných čísel konvergující k 0 taková, že $\{f(x_n)\}$ je omezená. Limitním přechodem v (10.28) pak dostaneme $-\infty = 0$, což je spor. Proto $\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$.

(c) Jelikož $f(e^{-1}) = 0$, $f(x) < 0$ pro $x \in (e^{-1}, \infty)$ a $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, existuje alespoň jeden bod, kde funkce nabývá svého absolutního minima. Předpokládejme, že existují dva takové body $x_1 < x_2$. Pak $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$ a $f(x_1) = f(x_2)$. Z rovnice (10.29) nyní plyne

$$\frac{1}{x_1} + f(x_1) = 0 = \frac{1}{x_2} + f(x_2),$$

tedy $x_1 = x_2$. To je však spor s naším předpokladem.

♣

10.8.29. Příklad. Uvažujte množinu
$$A = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^3 + y^3 - 2xy = 0\right\}.$$

(a) Ukažte, že $A \cap \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x < 0\right\}$ je grafem funkce f, která je třídy $C^\infty((0, \infty))$.
(b) Ukažte, že f je klesající a $\mathcal{H}(f) = (0, \infty)$.
(c) Existuje $a > 0$ a funkce $f_1 : [0, \infty) \to (-\infty, 0]$, $f_2, f_3 : [0, a] \to [0, \infty)$ takové, že množina $A \cap \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0\right\}$ je sjednocením grafů f_1, f_2, f_3 a $f_1 < 0$ na $(0, \infty)$ a $0 < f_2 < f_3$ na $(0, a)$.
(d) Funkce f_1, f_2, f_3 jsou třídy C^∞ na vnitřku svého definičního oboru.
(e) Ukažte, že jsou funkce f_1, f_2, f_3 spojité a vyšetřete jejich supremum a infimum.

Řešení. (a) Pro pevné $x < 0$ uvažujeme funkci $f_x(y) = x^3 + y^3 - 2xy$, $y \in \mathbb{R}$. Pak $f_x'(y) = 3y^2 - 2x > 0$, $\lim_{y \to 0_+} f_x(y) = x^3 < 0$ a $\lim_{y\to\infty} f_x(y) = \infty$. Existuje tedy právě jeden bod $y(x) = f(x) \in (0, \infty)$ splňující
$$x^3 + f(x)^3 - 2xf(x) = 0, \quad x \in (-\infty, 0). \tag{10.30}$$

(b) Ukažme, že $\lim_{x\to 0_-} f(x) = 0$. Kdyby tomu tak nebylo, existuje posloupnost $\{x_n\}$ záporných čísel konvergující k 0 zleva taková, že $f(x_n) \to M \in (0, \infty]$. Pak ale z rovnice
$$f(x)\left(f(x)^2 - 2x\right) = -x^3$$
plyne $M^3 = 0$, což je spor.

Podobně ukážeme, že $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. Jinak by totiž existovala posloupnost $\{x_n\}$ záporných čísel konvergující do $-\infty$ taková, že $f(x_n) \to M \in [0, \infty)$. Pak ale z (10.30) máme
$$f(x_n) = \frac{-x_n^3}{f(x_n)^2 - 2x_n} = \frac{x^2}{2 - \frac{f(x_n)}{x_n}},$$
což v limitním přechodu dá rovnost $M = \infty$.

Dále si uvvědomme, že z Věty 10.4.1 plyne, že $f \in C^\infty((-\infty, 0))$. Vskutku, funkce $F(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$ třídy $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ a splňuje $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 2x > 0$ kdykoliv $x < 0$. Tedy rovnice $F(x, y) = 0$ lokálně určuje nekonečně diferencovatelnou funkci. Proto je f třídy C^∞.

Vzhledem k vypočteným limitám funkce f musí existovat bod, kde je její derivace záporná. Předpokládejme, že v nějakém bodě $a < 0$ platí $f'(a) = 0$. Pak derivováním rovnice (10.30) dostáváme
$$3x^2 + 3f(x)^2 f'(x) - 2f(x) - 2xf'(x) = 0, \quad x \in (-\infty, 0),$$
což po dosazení $x = a$ implikuje rovnost $2f(x) = 3x^2$. Další dosazení do (10.30) dává rovnici,
$$x^3 + \left(\frac{3}{2}x^2\right)^3 - 2x\frac{3}{2}x^2 = 0$$

jež nemá řešení v intervalu $(-\infty, 0)$. Proto $f'(x) \neq 0$ pro $x \in (-\infty, 0)$. Z Darbouxovy vlastnosti derivace (vizte Větu **??**) nyní plyne, že f' je záporná na $(-\infty, 0)$. Z výše uvedených vlastností nyní plyne, že f je klesající $\mathcal{H}(f) = (0, \infty)$.

(c) Pro pevné $x \geq 0$ opět uvažujme funkci $f_x(y) = x^3 + y^3 - 2xy$, $y \in \mathbb{R}$. Pokud $x = 0$, má funkce $f_x(y)$ jediný kořen, a to 0. Nechť tedy $x > 0$. Pak $\lim_{y\to-\infty} f_x(y) = 0$ a $\lim_{y\to\infty} f_x(y) = \infty$. Dále $f_x'(y) = 0$ právě tehdy, když $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}x}$. Označme $y_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}x}$ a $y_2 = \sqrt{\frac{2}{3}x}$. Pak f_x má v y_1 lokální maximum, y_2 lokální minimum, f_x roste na $(-\infty, y_1]$ a $[y_2, \infty$ a klesá na $[y_1, y_2]$. Dále platí $f_x(y_1) > f_x(0) > 0$. Položme $a = \frac{2}{3}2^{\frac{2}{3}}$. Pokud $x < a$, je $f_x(y_2) < 0$, pokud $x = a$, platí $f_x(y_2) = 0$ a pokud $x > a$, platí $f_x(y_2) > 0$. Z těchto informací nyní plyne, že pro interval $(0, a)$ má rovnice $f_x(y) = 0$ tři kořeny $f_1(x) < 0 < f_2(x) < f_3(x)$, pro $x = a$ má dva kořeny $f_1(x) < 0 < f_2(x) = f_3(x)$ a pro $x > a$ má pouze jeden kořen $f_1(x) < 0$.

(d) Nekonečná diferencovatelnost funkcí f_1, f_2, f_3 nyní plyne z Věty 10.4.1, neboť pro funkci $F(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$ platí $\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 2x = 0$ v nějakém bodě $[x, y] \in A$ právě tehdy, když $[x, y] = [a, \sqrt{\frac{2}{3}a}]$.

(e) Uvažujme libovolnou funkci f_i. Pak pro její derivaci platí

$$3x^2 + 3f_i(x)^2 f_i'(x) - 2f_i(x) - 2xf_i'(x) = 0, \quad x \in \operatorname{Int} \mathcal{D}(f_i).$$

Pokud $f_i'(x) = 0$ pro nějaké x, pak x splňuje $f_i(x) = \frac{3}{2}x^2$. Po dosazení do rovnice $x^3 + f_i^3(x) - 2xf_i(x) = 0$ pak dostáváme $x = \frac{2}{3}2^{\frac{1}{3}}$ a $f_i(x) = \frac{2}{3}2^{\frac{2}{3}}$. Přímým výpočtem vidíme, že $\frac{2}{3}2^{\frac{2}{3}}$ je největší z tří kořenů funkce $f_{\frac{2}{3}2^{\frac{1}{3}}}(y)$, a proto pouze funkce f_3 má v nějakém bodě nulovou derivaci (konkrétně v bodě $b = \frac{2}{3}2^{\frac{1}{3}}$).

Ukážeme, že $\lim_{x\to0_+} f_i(x) = 0$. Kdyby tomu tak nebylo, pro nějaké $i \in \{1, 2, 3\}$ existuje posloupnost $\{x_n\}$ kladných čísel konvergující k 0, pro niž $f(x_n) \to M \in [-\infty, \infty] \setminus \{0\}$. Z rovnice $x_n^3 + f_i(x_n)(f_i^2(x_n) - 2x_n) = 0$ pak ale plyne limitním přechodem $M^3 = 0$, což je spor.

Podobně ukážeme, že $\lim_{x\to\infty} f_1(x) = -\infty$. Kdyby tomu tak nebylo, nalezneme posloupnost $\{x_n\}$ konvergující do ∞, pro niž $f_1(x_n) \to M \in (-\infty, 0]$. Pak z rovnosti

$$f_1(x) = \frac{-x^3}{f_1^2(x) - 2x} = \frac{-x^2}{\frac{f_1(x)}{x} - 2}$$

plyne limitním přechodem $M = \infty$, tj. spor.

Z výše uvedených faktů nyní máme, že $f_1' < 0$ na $(-\infty, 0)$, $f_2' > 0$ na $(0, a)$ a $f_3' > 0$ na $(0, b)$.

Dále ukážeme, že $\lim_{x\to a_-} f_2(x) = \lim_{x\to a_-} f_3(x) = \sqrt{\frac{2}{3}a}$. K tomuto účelu nejdříve dokážeme omezenost množiny A v prvním kvadrantu. Nechť tedy $[x, y] \in A$ splňuje $x \geq 0$, $y \geq 0$. Zřejmě můžeme předpokládat, že $\max\{x, y\} > 0$. Pak máme

$$0 = x^3 + y^3 - 2xy \geq (\max\{x, y\})^3 - 2(\max\{x, y\})^2,$$

neboli

$$2\,(\max\{x,y\})^2 \geq (\max\{x,y\})^3\,.$$

To implikuje $\max\{x,y\} \leq 2$. Dostáváme tedy, že funkce f_2 i f_3 jsou omezené. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost v $[0,a)$ konvergující k a. Pokud $f_2(x_n) \not\to \sqrt{\frac{2}{3}a}$, existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ a $M \neq \sqrt{\frac{2}{3}a}$ takové, že $f_2(x_{n_k}) \to M$. Limitním přechodem v rovnosti $x^3 + f_2^3(x_{n_k}) - 2xf(x_{n_k}) = 0$ pak máme, že M je nezáporným kořenem funkce f_a různým od $\sqrt{\frac{2}{3}a}$. To je však spor s úvahami v (c). Tedy $f(x_n) \to \sqrt{\frac{2}{3}a}$. Podobně se ukáže, že $\lim_{x\to a-} f_3(x) = \sqrt{\frac{2}{3}a}$.

Nyní již můžeme učinit závěr. Funkce f_1 je klesající a $\mathscr{H}(f_1) = (-\infty,0]$, $\mathscr{H}(f_2) = [0,\sqrt{\frac{2}{3}a}]$ a $\mathscr{H}(f_3) = [0, f_3(b)] = [0, \frac{2}{3}2^{\frac{2}{3}}]$. ♣

10.8.30. Příklad. Dokažte, že existuje okolí V bodu $[3,-2,2]$ takové, že množina $\big\{[x,y,z] \in V;\ z^3 - xz + y = 0\big\}$ je grafem funkce $z = z(x,y)$. Vypočtěte tečnou rovinu ke grafu funkce z v bodě $[3,-2,2]$ a $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}([3,-2])$.

Řešení. Použijeme Větu 10.4.1 pro funkci $F(x,y,z) = z^3 - xz + y$ a bod $[3,-2,2]$. Zjevně je F třídy $C^\infty(\mathbb{R}^3)$, $F(3,-2,2) = 0$ a

$$\frac{\partial F}{\partial z}(3,-2,2) = \big[3z^2 - x\big]_{[x,y,z]=[3,-2,2]} = 9 \neq 0.$$

Předpoklady Věty 10.4.1 jsou tak splněny, a tedy máme existenci požadovaného okolí V. Tedy $z = z(x,y)\colon U \to \mathbb{R}$ je funkce třídy C^∞ definovaná na nějakém okolí U obsahujícím bod $[3,-2]$ a splňující $F(x,y,z(x,y)) = 0$ spolu s podmínkou $z(3,-2) = 2$.

Derivujme rovnost $z^3 - xz + y = 0$ podle x a podle y na U. Dostáváme tak

$$0 = 3z^2 z_x - z - xz_x \quad \text{a} \quad 3z^2 z_y - xz_y + 1 = 0. \tag{10.31}$$

Po dosazení $[x,y,z] = [3,-2,2]$ máme $z_x(3,-2) = \frac{2}{9}$ a $z_y(3,-2) = -\frac{1}{9}$. Tedy tečná nadrovina t k funkci z v bodě $[3,-2,2]$ je

$$t(x,y,z) = 2 + \frac{2}{9}(x-3) - \frac{1}{9}(y+2), \quad [x,y,z] \in \mathbb{R}^3.$$

Derivujeme-li druhou rovnici v (10.31) podle y, dostáváme

$$6z(z_y)^2 + 3z^2 z_{yy} - xz_{yy} = 0.$$

Po dosazení $[x,y,z] = [3,-2,2]$ a $z_y = -\frac{1}{9}$ vyjde $z_{yy}(3,-2) = -\frac{4}{243}$. ♣

10.8.31. Příklad. Nechť je funkce $z = z(x,y)$ třídy C^1 na nějakém okolí U bodu $[a,b]$ a splňuje na něm rovnici $z = x + \operatorname{arctg} \frac{y}{z-x}$.

(a) Vyjádřete z_x pomocí x, y a $z(x,y)$ na U.
(b) Ukažte, že pro každý bod $[a,b]$, kde $b > 0$, existuje U a $z(x,y)$ s výše uvedenými vlastnostmi.

Řešení. (a) Nechť $[x, y, z]$ splňuje rovnici $z = x + \operatorname{arctg} \frac{y}{z-x}$. Pokud $y = 0$, $z = x$ a pravá strana rovnosti není definována. Tedy $y \neq 0$. Jelikož $z - x = \operatorname{arctg} \frac{y}{z-x}$, je $z - x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Proto

$$y = (z - x) \operatorname{tg}(z - x) > 0$$

(funkce $u \operatorname{tg} u$ je kladná na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$).

Derivujeme-li rovnost $z = x + \operatorname{arctg} \frac{y}{z-x}$ podle x, dostáváme

$$z_x = 1 - \frac{y(z_x - 1)}{(z - x)^2 + y^2}.$$

Úpravou obdržíme

$$z_x((z - x)^2 + y^2 + y) = (z - x)^2 + y^2 + y,$$

tj. $z_x = 1$ (díky předchozím úvahám víme, že $(z - x)^2 + y^2 + y > 0$).

(b) Nechť $[a, b] \in \mathbb{R}^2$ splňující $b > 0$ je dáno. Uvažujme funkci $f(z) = -z + a + \operatorname{arctg} \frac{b}{z-a}$. Pak f je spojitá na (a, ∞) a splňuje $\lim_{z \to a+} f(z) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{z \to \infty} f(z) = -\infty$. Existuje tedy $c \in (a, \infty)$ splňující $f(c) = 0$. Uvažujme nyní bod $[a, b, c]$ a funkci $F(x, y, z) = -z + x + \operatorname{arctg} \frac{y}{z-x}$. Pak $F(a, b, c) = 0$, F je třídy C^∞ na nějakém okolí $[a, b, c]$ a

$$\frac{\partial F}{\partial z}([a, b, c]) = -1 - \frac{b}{(c - a)^2 + b^2} < 0.$$

Dle Věty 10.4.1 existuje požadované okolí bodu $[a, b, c]$ a příslušná funkce z. ♣

10.8.32. Příklad. Ukažte, že existují funkce $u = u(x, y)$ a $v(x, u)$ definované na nějakém okolí U bodu $[1, 2]$, které jsou na U třídy C^1, splňují $u(1, 2) = 0$, $v(1, 2) = 0$ a platí pro ně rovnice

$$xe^{u+v} + 2uv = 1, \quad ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x.$$

Dále vypočtěte $u'(1, 2)$ a $v'(1, 2)$.

Řešení. Uvažujme bod $\boldsymbol{a} = [1, 2, 0, 0]$ a funkci

$$F \colon [x, y, u, v] \mapsto \left[xe^{u+v} + 2uv - 2, ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} - 2x\right].$$

Pak $F(\boldsymbol{a}) = 0$, F je třídy C^∞ na nějakém okolí $\boldsymbol{a}$ a platí

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(\boldsymbol{a}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(\boldsymbol{a}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} xe^{u+v} + 2v & xe^{u+v} + 2u \\ ye^{u-v} - \frac{1}{1+v} & -ye^{u-v} + \frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix}_{[x,y,u,v]=[1,2,0,0]}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3.$$

Jsou tak splněny předpoklady Věty 10.4.3. Existuje proto okolí U obsahující $[1, 2]$ a V obsahující $[0, 0]$ takové, že pro každé $\boldsymbol{x} \in U$ existuje právě jedno $\boldsymbol{y} = \varphi(\boldsymbol{x}) \in$

V splňující $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$. Označíme-li složky φ jako $u(x, y)$ a $v(x, y)$, dostáváme požadované funkce třídy C^∞ na U.

Derivujeme-li nyní vztahy

$$\begin{aligned} xe^{u+v} + 2uv - 2 &= 0 \\ ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} - 2x &= 0 \end{aligned} \tag{10.32}$$

podle x, dostáváme

$$\begin{aligned} e^{u+v} + xe^{u+v}(u_x + v_x) + 2u_x v + 2uv_x &= 0 \\ ye^{u-v}(u_x - v_x) - \frac{1}{(1+v)^2}(u_x(1+v) - uv_x) - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Po dosazení $[x, y, u, v] = [1, 2, 0, 0]$ máme systém

$$\begin{aligned} u_x + v_x &= -1 \\ u_x - 2v_x &= 2, \end{aligned}$$

jehož řešením je $u_x(1, 2) = 0$ a $v_x(1, 2) = -1$.

Zderivováním (10.32) podle y dostaneme

$$\begin{aligned} xe^{u+v}(u_y + v_y) + 2u_y v + 2uv_y &= 0 \\ e^{u-v} + ye^{u-v}(u_y - v_y) - \frac{1}{(1+v)^2}\big(u_y(1+v) - uv_y\big) &= 0. \end{aligned}$$

Po dosazení máme rovnice

$$\begin{aligned} u_y + v_y &= 0 \\ y_y - 2v_y &= -1. \end{aligned}$$

Řešení je $u_y(1, 2) = -\frac{1}{3}$ a $v_y(1, 2) = \frac{1}{3}$.

Proto $u'(1, 2) = [0, -\frac{1}{3}]$ a $v'(1, 2) = [-1, \frac{1}{3}]$. ♣

10.8.33. Příklad. Dokažte, že existují funkce $z(x, y)$, $t(x, y)$, které jsou třídy C^∞ na nějakém okolí U obsahujícím $[1, -1]$ a splňují rovnice

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3 = 0, \quad x + y + z - t - 2 = 0,$$

spolu se vztahy $z(1, -1) = 2$, $t(1, -1) = 0$.

Spočtěte $z''(1, -1)$.

Řešení. Uvažujme bod $\boldsymbol{a} = [1, -1, 2, 0]$ a funkci

$$F : [x, y, z, t] \mapsto \left[x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3, x + y + z - t - 2\right].$$

Pak $F(\boldsymbol{a}) = 0$, F je třídy C^∞ na$\mathbb{R}^4$ a platí

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial F_1}{\partial t}(\boldsymbol{a}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial z}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial F_2}{\partial t}(\boldsymbol{a}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -z & -3t^2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}_{[x,y,z,t]=[1,-1,2,0]} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2.$$

Jsou tak splněny předpoklady Věty 10.4.3. Existuje proto okolí U obsahující $[1,-1]$ a V obsahující $[2,0]$ takové, že pro každé $\boldsymbol{x} \in U$ existuje právě jedno $\boldsymbol{y} = \varphi(\boldsymbol{x}) \in V$ splňující $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$. Označíme-li složky φ jako $z(x,y)$ a $t(x,y)$, dostáváme požadované funkce třídy C^∞ na U.

Derivujeme-li nyní rovnice

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3 &= 0 \\ x + y + z - t - 2 &= 0 \end{aligned}$$

podle x, máme

$$\begin{aligned} 2x - zz_x - 3t^2 t_x &= 0 \\ 1 + z_x - t_x &= 0. \end{aligned} \tag{10.33}$$

Po dosazení $[x,y,z,t] = [1,-1,2,0]$ dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} -2z_z &= 0 \\ z_x - t_x &= -1, \end{aligned}$$

jejímž řešením je $z_x(1,-1) = 1$ a $t_x(1,-1) = 2$.

Zderivováním podle y dostáváme

$$\begin{aligned} 2y - zz_y - 3t^2 t_y &= 0 \\ 1 + z_y - t_y &= 0. \end{aligned}$$

Po dosazení obdržíme $z_y(1,-1) = -1$, $t_y(1,-1) = 0$.

Obdržené vztahy znovu zderivujeme podle x, y a (10.33) podle y a dostaneme

$$\begin{aligned} 2 - (z_x)^2 - zz_{xx} - 6t(t_x)^2 - 3t^2 t_{xx} &= 0 \\ z_{xx} - t_{xx} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 - (z_y)^2 - zz_{yy} - 6t(t_y)^2 - 3t^2 t_{yy} &= 0 \\ z_{yy} - t_{yy} &= 0, \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} -z_y z_x - zz_{xy} - 6tt_y t_x - 3t^2 t_{xy} &= 0 \\ z_{xy} - t_{xy} &= 0. \end{aligned}$$

Po dosazení vyjde $z_{xx}(1,-1) = t_{xx}(1,-1) = \frac{1}{2}$, $z_{yy}(1,-1) = t_{yy}(1,-1) = \frac{1}{2}$ a $z_{xy}(1,-1) = t_{xy}(1,-1) = \frac{1}{2}$. Tedy

$$z''(1,-1)\colon [h_1,h_2] \mapsto \frac{1}{2}h_1^2 + h_1h_2 + \frac{1}{2}h_2^2.$$

♣

10.8.34. Příklad. Ukažte, že rovnice

$$x = u + v^2, \quad y = u^2 - v^3$$

definují na jistém okolí bodu $[3,3]$ funkce $u(x,y)$, $v(x,y)$ třídy C^∞, které splňují $u(3,3) = 2$, $v(3,3) = 1$. Spočtěte $z_{xy}(3,3)$, pokud $z = 2uv$.

Řešení. Uvažujme bod $\boldsymbol{a} = [3,3,2,1]$ a funkci

$$F\colon [x,y,u,v] \mapsto \left[x - u - v^2, y - u^2 + v^3\right].$$

Pak $F(\boldsymbol{a}) = 0$, F je třídy C^∞ na $\mathbb{R}^4$ a platí

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(\boldsymbol{a}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(\boldsymbol{a}) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -1 & -2v \\ -2u & 3v^2 \end{vmatrix}_{[x,y,u,v]=[3,3,2,1]} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -11.\end{aligned}$$

Jsou tak splněny předpoklady Věty 10.4.3. Existuje proto okolí U obsahující $[3,3]$ a V obsahující $[2,1]$ takové, že pro každé $\boldsymbol{x} \in U$ existuje právě jedno $\boldsymbol{y} = \varphi(\boldsymbol{x}) \in V$ splňující $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$. Označíme-li složky φ jako $u(x,y)$ a $v(x,y)$, dostáváme požadované funkce třídy C^∞ na U.

Vzhledem k tomu, že

$$z_{xy} = 2\left(u_{xy}v + u_xv_y + u_yv_x + uv_{xy}\right), \tag{10.34}$$

potřebujeme vypočítat jednotlivé derivace u a v. K tomuto účelu derivujeme rovnice

$$\begin{aligned} u + v^2 &= x \\ u^2 - v^3 &= y \end{aligned}$$

podle x a podle y. Dostaneme tak systémy

$$\begin{aligned} u_x + 2vv_x &= 1 \\ 2uu_x - 3v^2v_x &= 0 \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} u_y + 2vv_y &= 0 \\ 2uu_y - 3v^2v_y &= 1. \end{aligned}$$

Po dosazení máme

$$u_x(3,3) = \frac{3}{11}, v_x(3,3) = \frac{4}{11}, u_y(3,3) = \frac{2}{11}, v_y(3,3) = -\frac{1}{11}.$$

Dalším derivováním obdržíme soustavu

$$\begin{aligned} u_{yx} + 2v_x v_y + 2v v_{yx} &= 0 \\ 2u_x u_y + 2u u_{yx} - 6v v_x v_y - 3v^2 v_{yx} &= 0, \end{aligned}$$

jejímž řešením po dosazení je

$$u_{yx}(3,3) = \frac{224}{11^3}, \quad v_{yx}(3,3) = -\frac{68}{11^3}.$$

Díky záměnnosti parciálních derivací můžeme dosadit do (10.34) a obdržet $z_{xy}(3,3) = \frac{26}{121}$. ♣

10.8.35. Příklad. Nechť C^1-funkce $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ splňuje rovnici

$$x u_y - y u_x = 0.$$

Zjistěte, jakou rovnici splňuje na $\mathbb{R}^2$ funkce $u^*(r,\alpha) = u(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$, $(r,\alpha) \in \mathbb{R}^2$. Výsledek použijte k nalezení nějakého nekonstantního řešení původní rovnice.

Řešení. Pomocí Věty 10.2.18 máme

$$\begin{aligned} u_r^* &= u_x \cos\alpha + u_y \sin\alpha \\ u_\alpha^* &= u_x(-r\sin\alpha) + u_y(r\cos\alpha). \end{aligned}$$

Vyjádříme u_x a u_y a dostáváme

$$\begin{aligned} -r u_x &= -r\cos\alpha u_r^* + \sin\alpha u_\alpha^* \\ r u_y &= r\sin\alpha u_r^* + \cos\alpha u_\alpha^*. \end{aligned}$$

Pro $r \neq 0$ tak platí

$$\begin{aligned} -u_x &= -\cos\alpha u_r^* + \frac{1}{r}\sin\alpha u_\alpha^* \\ u_y &= \sin\alpha u_r^* + \frac{1}{r}\cos\alpha u_\alpha^*. \end{aligned}$$

Tedy pro $r \neq 0$ platí

$$0 = x u_y - y u_x = r\cos\alpha u_x - r\sin\alpha u_y = r u_\alpha^*.$$

Tedy $u_\alpha^* = 0$ na $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$. Jelikož je u^* třídy C^1, platí tato rovnost na $\mathbb{R}^2$.

Nyní stačí zvolit funkci nezávislou na α, například $u^*(r,\alpha) = r^2$. Pak $u(x,y) = x^2 + y^2$, $[x,y] \in \mathbb{R}^2$, je nekonstantní řešení zadané rovnice.

♣

10.8.36. Příklad. Nechť C^2-funkce $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ splňuje Laplaceovu rovnici

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Zjistěte, jakou rovnici splňuje funkce $u^*(r,\alpha) = u(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ na množině $(0,\infty) \times \mathbb{R}$.

Řešení. Z Příkladu 10.8.35 víme, že

$$\partial_1 u(r\cos\alpha, r\sin\alpha) = \cos\alpha u_r^*(r,\alpha) - \frac{1}{r}\sin\alpha u_\alpha^*(r,\alpha)$$
$$\partial_2 u(r\cos\alpha, r\sin\alpha) = \sin\alpha u_r^*(r,\alpha) + \frac{1}{r}\cos\alpha u_\alpha^*(r,\alpha).$$

Označíme $f(x,y) = \partial_1 u(x,y)$ a

$$f^*(r,\alpha) = f(r\cos\alpha, r\sin\alpha) = \partial_1 u(r\cos\alpha, r\sin\alpha).$$

Dosazením do přechozích vztahů za $u = f$ dostáváme

$$\begin{aligned}
&\partial_{11} u(r\cos\alpha, r\sin\alpha) = \partial_1\left(\partial_1 u(r\cos\alpha, r\sin\alpha)\right) = \partial_1\left(f(r\cos\alpha, r\sin\alpha)\right)\\
&= \frac{\partial f^*}{\partial r}(r,\alpha)\cos\alpha - \frac{\sin\alpha}{r}\frac{\partial f^*}{\partial\alpha}(r,\alpha)\\
&= \frac{\partial}{\partial r}\left(f(r\cos\alpha, r\sin\alpha)\right)\cos\alpha - \frac{\sin\alpha}{r}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(f(r\cos\alpha, r\sin\alpha)\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\alpha u_r^*(r,\alpha) - \frac{\sin\alpha}{r}u_\alpha^*(r,\alpha)\right)\\
&- \frac{\sin\alpha}{r}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\cos\alpha u_r^*(r,\alpha) - \frac{\sin\alpha}{r}u_\alpha^*(r,\alpha)\right)\\
&= \cos\alpha\left(\cos\alpha u_{rr}^* + \frac{\sin\alpha}{r^2}u_\alpha^* - \frac{\sin\alpha}{r}u_{\alpha r}^*\right)\\
&- \frac{\sin\alpha}{r}\left(u_{r\alpha}^*\cos\alpha - \sin\alpha u_r^* - \frac{\sin\alpha}{r}u_{\alpha\alpha}^* - \frac{\cos\alpha}{r}u_\alpha^*\right)\\
&= u_{rr}^*\cos^2\alpha - \frac{2}{r}u_{r\alpha}^*\cos\alpha\sin\alpha + \frac{1}{r^2}u_{\alpha\alpha}^*\sin^2\alpha\\
&+ \frac{1}{r}u_r^*\sin^2\alpha + \frac{2}{r^2}u_\alpha^*\sin\alpha\cos\alpha.
\end{aligned}$$

Obdobně vyjde

$$\begin{aligned}
\partial_{22} u(r\cos\alpha, r\sin\alpha) &= u_{rr}^*\sin^2\alpha + \frac{2}{r}u_{r\alpha}^*\sin\alpha\cos\alpha + \frac{1}{r^2}u_{\alpha\alpha}^*\cos^2\alpha\\
&- \frac{2}{r^2}u_\alpha^*\sin\alpha\cos\alpha + \frac{1}{r}u_r^*\cos^2\alpha.
\end{aligned}$$

Tedy dostáváme rovnost

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_{11} u(r\cos\alpha, r\sin\alpha) + \partial_{22} u(r\cos\alpha, r\sin\alpha)\\
&= u_{rr}^* + \frac{1}{r^2}u_{\alpha\alpha}^* + \frac{1}{r}u_r^*.
\end{aligned}$$

♣

10.8.37. Příklad.

10.8.38. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M, pokud

$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2, \quad M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ |x| + |y| \le 1\right\}.$$

Řešení. Množina M je zjevně omezená a uzavřená, tj. kompaktní (Věta 9.6.9). Funkce f je třídy C^∞ na $\mathbb{R}^2$, a tedy nabývá na M svého minima a maxima. Máme $\operatorname{Int} M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ |x|+|y|<1\}$. Bod podezřelý z extrému ležící v $\operatorname{Int} M$ musí splňovat $\nabla f(x,y) = [0,0]$ (vizte Větu 10.5.3), tj.

$$[2x-y, 2y-x] = [0,0].$$

To nastává právě tehdy, když $[x,y]=[0,0]$.

Další body podezřelé z extrému budeme hledat na $\partial M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ |x|+|y|=1\}$. Hranici M můžeme popsat pomocí čtyř úseček, například

$$M_1 = \{[x, 1-x];\ x \in [0,1]\}.$$

Pak funkce $g(x) = f(x, 1-x)$ má tvar

$$g(x) = x^2 - x(1-x) + (1-x)^2 = 3x^2 - 3x + 1, \quad x \in [0,1],$$

která má body podezřelé z extrému v krajních bodech intervalu $[0,1]$ a dále v bodě, kde $g'(x)=0$, tj. v bodě $\frac{1}{2}$. Celkově dostáváme $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $[1,0]$, $[0,1]$ jako body, kde f může nabývat extrému na M.

Podobným způsobem popíšeme zbývající hrany ∂M a dostaneme další body

$$[-1,0], [0,-1], [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}].$$

Porovnáním hodnot funkce f ve všech podezřelých bodech zjistíme, že $\min f(M) = f(0,0) = 0$ a

$$\max f(M) = f(1,0) = f(0,1) = f(-1,0) = f(0,-1) = 1.$$

♣

10.8.39. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M, pokud $a>0, b>0$ a

$$f(x,y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, \quad M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \le 1\}.$$

Řešení. Množina M je zjevně kompaktní, takže C^∞ funkce f na ní nabývá svých extrémů. Jelikož $\nabla f(x,y) = [\frac{1}{a}, \frac{1}{b}]$, žádný bod podezřelý z extrému neleží v $\operatorname{Int} M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2<1\}$. Parametrizujeme ∂M jako dvě půlkružnice

$$M_1 = \left\{[x, \sqrt{1-x^2}];\ x \in [0,1]\right\}, \quad M_2 = \left\{[x, -\sqrt{1-x^2}];\ x \in [0,1]\right\}.$$

Pak funkce $f|_{M_1}$ má tvar

$$g(x) = f(x, \sqrt{1-x^2}) = \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{b}, \quad x \in [0,1].$$

Její derivace je rovna

$$g'(x) = \frac{1}{a} - \frac{x}{b\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (0,1).$$

Tedy pokud $g'(x) = 0$, pak $x = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Máme tedy podezřelé body $[\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}]$. Zahrneme ještě do úvahy krajní body $[1, 0]$ a $[-1, 0]$.

Při vyšetřování f na M_2 nám vyjdou body $[\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}]$. Porovnáním hodnot ve všech podezřelých bodem zjistíme, že

$$\min f(M) = f\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab},$$
$$\max f(M) = f\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}.$$

♣

10.8.40. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M, pokud

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z, \quad M = \mathbb{R}^3.$$

Řešení. Množina M není omezená. Vzhledem k tomu, že

$$f(x, y, z) = (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 - 14, \quad [x, y, z] \in \mathbb{R}^3,$$

nabývá f svého minima $\min f(M) = -14$ v bodě $[-1, -2, 3]$. Jelikož

$$\lim_{n\to\infty} f(n, -2, 3) = \infty,$$

supremum f na M je rovno ∞. ♣

10.8.41. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M, pokud

$$f(x, y, z) = (x + y + z)e^{-(x+2y+3z)}, \quad M = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x > 0, y > 0, z > 0\right\}.$$

Řešení. Funkce f je třídy C^∞ na $\mathbb{R}^3$ a $\overline{M} = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\right\}$. Ze spojitosti f na $\mathbb{R}^3$ plyne rovnost $\sup f(M) = \sup f(\overline{M})$ a $\inf f(M) = \inf f(\overline{M})$. Vyšetříme nejprve body podezřelé z extrému, které leží v $\operatorname{Int} \overline{M} = M$. V těchto bodech musí být $\nabla f(x, y, z) = \boldsymbol{o}$, tj.

$$e^{-(x+2y+3z)}\,[1 - (x + y + z), 1 - 2(x + y + z), 1 - 3(x + y + z)] = \boldsymbol{o}.$$

Tato soustava však nemá řešení, a tedy v M žádný bod podezřelý z extrému neleží.

Uvažujme nyní jednu ze „stěn“ tvořící ∂M, například

$$M_1 = \{[x, y, 0];\ x \ge 0, y \ge 0\}.$$

Pak máme funkci $g(x, y) = f(x, y, 0) = (x + y)e^{-(x+2y)}$ na $N = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x \ge 0, y \ge 0\}$. Jako výše dostaneme, že g nemá v $\operatorname{Int} N$ podezřelý bod. Musíme tedy uvažovat $\partial N = N_1 \cup N_2$, kde

$$N_1 = \{[x, 0];\ x \ge 0\}, \quad N_2 = \{[0, y];\ y \ge 0\}.$$

Funkce $h(x) = g(x, 0) = xe^{-x}$, $x \in [0, \infty)$, má bod podezřelý z extrému v 0 a v bodě, kde $h'(x) = e^{-x}(1 - x) = 0$, tj. v $x = 1$. Dostáváme tak body

$$[0, 0, 0], [1, 0, 0].$$

V množině N_2 dostáváme další podezřelý bod $[0, \frac{1}{2}, 0]$. Tím máme vyřešenu otázku množiny N.

Zbývající stěny tvořící ∂M poskytnou bod $[0, 0, \frac{1}{3}]$.

Funkce f je zjevně nezáporná na $\overline{M}$, tedy

$$\inf f(M) = \min f(\overline{M}) = f(0,0,0) = 0.$$

Zbývá dokázat, že

$$\sup f(M) = \max f(\overline{M}) = f(1,0,0) = e^{-1}.$$

K tomuto účelu uvažujme odhad

$$f(x,y,z) \le \frac{x+y+z}{e^{x+y+z}}, \quad [x,y,z] \in \overline{M}. \tag{10.35}$$

Jelikož $\lim_{r\to\infty} \frac{r}{e^r} = 0$, existuje $r > 1$ takové, že $\frac{r}{e^r} < e^{-1}$. Uvažujme množinu

$$K = \left\{[x,y,z] \in \overline{M};\ x + y + z \le r\right\}.$$

Pak K je omezená a uzavřená, tedy kompaktní. Funkce f tedy nabývá na K svého maxima, přičemž z výpočtů výše a (10.35) plyne, že $\max f(K) = f(1,0,0)$. Díky (10.35) dále máme, že $\max f(K) = \max f(\overline{M})$. Tím je důkaz dokončen. ♣

10.8.42. Příklad. Určete supremum a infimum funkce f na množině M, kde

$$f(x,y,z) = (x+y)^2 + (x-y)^2 + z, \quad M = [-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1].$$

Řešení. Množina M je zjevně kompaktní a f je třídy C^∞ na $\mathbb{R}^3$. Proto nabývá na M svých extrémů. Pokud $x, y, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ splňují $z_1 < z_2$, pak $f(x,y,z_1) < f(x,y,z_2)$. Tedy f nabývá své maximum na $M_1 = [-1,1] \times [-1,1] \times \{1\}$ a minimum na $M_2 = [-1,1] \times [-1,1] \times \{-1\}$.

K určení maxima tak vyšetřujeme maximum funkce $g(x,y) = (x+y)^2 + (x-y)^2 + 1 = 2x^2 + 2y^2 + 1$ na množině $[-1,1] \times [-1,1]$. Jelikož $g(x,y) = 2\operatorname{dist}([x,y],[0,0])^2 + 1$, vidíme, že body v $[-1,1] \times [-1,1]$ nejvzdálenější od počátku jsou $[1,1], [-1,1], [-1,-1], [1,-1]$.

Podobně postupujeme při hledání minima a dospějeme k bodu $[0,0]$. Tedy

$$\begin{aligned}
&\min f(M) = f(0,0,-1) = -1,\\
&\max f(M) = f(1,1,1) = f(1,-1,1) = f(-1,-1,1) = f(-1,1,1) = 5.
\end{aligned}$$

♣

10.8.43. Příklad. Určete supremum a infimum funkce f na množině M, kde

$$f(x,y) = x + y, \quad M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^3 + y^3 - 2xy = 0, x \ge 0, y \ge 0\right\}.$$

Řešení. Množina M je zřejmě uzavřená. Díky Příkladu 10.8.29 víme, že M je omezená a tedy je kompaktní. Funkce f je spojitá, a tedy nabývá na M svých extrémů. Použijeme Větu 10.5.8 pro $G = \mathbb{R}^2$, $m = 1$ a $g(x,y) = x^3 + y^3 - 2xy$. Platí

$$\nabla g(x,y) = (3x^2 - 2y, 3y^2 - 2x),$$

a tedy $\nabla g(x,y) = (0,0)$ právě tehdy, když $[x,y] = [0,0]$. Tím jsme získali podezřelý bod z extrému prvního druhu. Protože $\nabla f(x,y) = (1,1)$, dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 1 + \lambda(3x^2 - 2y) &= 0 \\ 1 + \lambda(3y^2 - 2x) &= 0 \\ x^3 + y^3 - 2xy &= 0. \end{aligned}$$

Z první rovnice plyne, že $\lambda \neq 0$. Odečtením druhé rovnice od první dostaneme

$$3x^2 - 3y^2 = 2y - 2x,$$

tj.

$$(x-y)\,(3(x+y)+2) = 0.$$

Vzhledem k tomu, že uvažujeme pouze body v prvním kvadrantu, plyne odtud $y = x$. Po dosazení do třetí rovnice obdržíme

$$x = y = 0 \quad \text{nebo} \quad x = y = 1.$$

Tedy

$$\max f(M) = f(1,1) = 2, \quad \min f(M) = f(0,0) = 0.$$

♣

10.8.44. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M, pokud

$$f(x,y) = xyz, \quad M = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\right\}.$$

Řešení. Množina M je zjevně kompaktní a f je třídy $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Použijeme Větu 10.5.8 pro funkci f a vazební funkce $g_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$ a $g_2(x,y,z) = x+y+z$. Jelikož

$$\nabla g_1(x,y,z) = 2[x,y,z], \quad \nabla g_2(x,y,z) = [1,1,1],$$

jsou vektory $[x,y,z]$ a $[1,1,1]$ lineárně závislé právě tehdy, když $x = y = z$. Takový bod však splňuje rovnice $g_1(x,x,x) = 3x^2 - 1 = 0$ a $g_2(x,x,x) = 3x = 0$, což nelze.

Jelikož $\nabla f(x,y,z) = [yz, xz, xy]$, řešíme tuto soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} yz + \lambda_1 2x + \lambda_2 &= 0 \\ xz + \lambda_1 2y + \lambda_2 &= 0 \\ xy + \lambda_1 2z + \lambda_2 &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ x + y + z &= 0. \end{aligned}$$

Odečtením první rovnice od druhé dostáváme

$$-z(x-y) + 2\lambda_1(x-y) = 0.$$

Odtud plyne, že musí být $x = y$ nebo $z = 2\lambda_1$. Podobně odečtením třetí rovnice od druhé obdržíme

$$-x(y-z) + 2\lambda_1(y-z) = 0.$$

Toto dává $x = 2\lambda_1$ nebo $y = z$. Dostáváme proto, že musí být buď $x = y$ nebo $y = z$ nebo $x = z$. Podívejme se nejprve na případ $x = y$. Z páté rovnice máme $z = -2x$, což po dosazení do čtvrté rovnice dá $6x^2 = 1$. K bodům $x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ dopočítáme y a z. Případy $y = z$ a $z = x$ pak vyřešíme obdobně. Obdržíme tak tyto podezřelé body:

$$\left[\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right], \left[\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right], \left[\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right],$$
$$\left[\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right], \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right], \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right].$$

Výpočtem hodnot f v jednotlivých bodech zjistíme, že f nabývá maxima v bodech z prvního řádku a minima v bodech druhého řádku. ♣

10.8.45. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M, pokud

$$f(x, y, z) = x^2+2xz+y^2+z, \quad M = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = y^2 + z^2\right\}.$$

Řešení. Množina M je zjevně kompaktní a f je třídy $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Nabývá tak na M svých extrémů. Povšimneme si, že bod $[x, y, z] \in M$ splňuje $x \geq 0$ a zároveň pro něj platí $x^2 + x - 1 = 0$, tj. $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$. Označme $a = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$. Pak lze M popsat jako

$$\left\{[a, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ a = y^2 + z^2\right\}.$$

Tedy extremalizujeme funkci

$$g(y, z) = f(a, y, z) = a^2 + 2az + y^2 + z$$

na kružnici

$$N = \left\{[y, z] \in \mathbb{R}^2;\ a = y^2 + z^2\right\}.$$

Na tuto úlohu použijeme Větu 10.5.8. Vazební podmínka $g(y, z) = y^2 + z^2 - a$ má gradient roven $\nabla g(y, z) = [2y, 2z]$, který je roven $\boldsymbol{o}$ pouze v počátku, což však není prvek N. Musíme tedy vyřešit soustavu

$$\begin{aligned} 2y + \lambda 2y &= 0 \\ 2a + 1 + \lambda 2z &= 0 \\ y^2 + z^2 &= a. \end{aligned}$$

Z první rovnice odvodíme $\lambda = -1$ nebo $y = 0$. Pokud $y = 0$, z třetí rovnice máme $z = \pm\sqrt{a}$. Pokud $\lambda = -1$, druhá rovnice implikuje $z = a + \frac{1}{2}$. Dosadíme-li do třetí rovnice, máme

$$y^2 = a - z^2 = a - \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 = -a^2 - \frac{1}{4} < 0,$$

což je nemožné.

Dostali jsem tedy dva podezřelé body

$$[a, 0, \sqrt{a}], \quad [a, 0, -\sqrt{a}].$$

Dosazením zjistíme, že v prvním bodě nabývá f maxima a v druhém minima. ♣

10.8.46. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M, pokud

$$f(x,y,z) = 10z + x - y, \quad M = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \le 1, x+y \ge 0\right\}.$$

Řešení. Množima M je zjevně kompaktní a f je třídy $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Rozdělíme M na množiny

$$M_1 = \operatorname{Int} M = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 < 1, x+y > 0\right\},$$
$$M_2 = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 1, x+y > 0\right\},$$
$$M_3 = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 < 1, x+y = 0\right\},$$
$$M_4 = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 1, x+y = 0\right\}.$$

Jelikož $\nabla f = [1,-1,10]$, nemá dle Věty 10.5.3 funkce f v M_1 bod podezřelý z extrému.

Použijeme nyní Větu 10.5.8 pro

$$G = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x+y > 0\right\}$$

a vazební funkci $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$. Jelikož $\nabla g(z,y,z) = [2x,2y,2z]$, je ∇g nenulový na množině $\{\boldsymbol{x} \in G;\ g(\boldsymbol{x}) = 0\}$. Musíme tak vyřešit soustavu

$$\begin{aligned} 1 - 2\lambda x &= 0 \\ -1 - 2\lambda y &= 0 \\ 10 - 2\lambda z &= 0 \\ x^2+y^2+z^2 &= 1. \end{aligned}$$

Zjevně platí $\lambda \neq 0$. Dostáváme tak

$$x = \frac{1}{2\lambda}, \quad y = \frac{-1}{2\lambda}, \quad z = \frac{5}{\lambda}.$$

Tedy

$$x + y = 0,$$

což znamená, že $[x,y,z] \notin G$. Nemáme tak žádný podezřelý bod ležící v množině M_2.

Uvažujme nyní množinu M_3. Pro body $[x,y,z] \in M_3$ platí $y = -x$, tj. $2x^2 + z^2 < 1$. Extremalizujeme tak funkci

$$h(x,z) = 10z + 2x$$

na množině

$$N = \left\{[x,z] \in \mathbb{R}^2;\ 2x^2+z^2 < 1\right\}.$$

Jelikož $\nabla h = [2,10]$, nemá h v N bod podezřelý z extrému.

Zbývá nám tak množina M_4. Použijeme-li rovnost $y = -x$, dostáváme extremalizaci funkce

$$h(x,z) = 10z + 2x$$

na množině

$$N = \left\{[x, z] \in \mathbb{R}^2;\ 2x^2 + z^2 = 1\right\}.$$

Evidentně neexistují v N podezřelé body prvního druhu. Řešíme tak soustavu

$$\begin{aligned} 2 - \lambda 4x &= 0 \\ 10 - \lambda 2z &= 0 \\ 2x^2 + z^2 &= 1. \end{aligned}$$

Z první a druhé rovnice máme $\lambda \neq 0$, a tedy $x = \frac{1}{2\lambda}$, $z = \frac{5}{\lambda}$. Po dosazení do třetí rovnice dostáváme

$$\lambda^2 = \frac{51}{2}.$$

Máme tak body

$$\left[\frac{1}{\sqrt{102}}, -\frac{1}{\sqrt{102}}, \frac{10}{\sqrt{102}}\right], \quad \left[-\frac{1}{\sqrt{102}}, \frac{1}{\sqrt{102}}, -\frac{10}{\sqrt{102}}\right].$$

V prvním z nich má f maximum o hodnotě $\sqrt{102}$, v druhém minimum o hodnotě $-\sqrt{102}$. ♣

10.8.47. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M, pokud

$$f(x, y) = y, \quad M = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0\right\}.$$

Řešení. Množina M je zjevně uzavřená a f třídy $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Množina M je též omezená. Vskutku, uvažujme libovolné $\boldsymbol{a} = [x, y] \in \boldsymbol{M}$. Zapišme ho v polárních souřadnicích jako $[r \cos\alpha, r \sin\alpha]$, kde $r \geq 0$ a $\alpha \in [0, 2\pi)$. Pak $\boldsymbol{a}$ splňuje rovnici

$$0 = r^4 - 2r^2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha).$$

Uvažujeme-li $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}$, máme rovnost

$$r^2 = 2\cos(2\alpha).$$

Tedy $r \leq \sqrt{2}$. Proto je množina M obsažena v kruhu o středu $\boldsymbol{o}$ a poloměru $\sqrt{2}$.

Funkce f tak nabývá na M svých extrémů. Pro vazební funkci $g(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$ platí

$$\nabla g(x, y) = \left[4x(x^2 + y^2 - 1), 4y(x^2 + y^2 + 1)\right] = \boldsymbol{o}$$

právě tehdy, když $[x, y] = [0, 0]$.

Dále řešíme soustavu

$$\begin{aligned} \lambda 4x(x^2 + y^2 - 1) &= 0 \\ 1 - \lambda 4y(x^2 + y^2 + 1) &= 0 \\ (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) &= 0. \end{aligned}$$

První dvě rovnice implikují $\lambda \neq 0$. Pokud $x = 0$, pak ze třetí rovnice plyne $y = 0$. Pak však neplatí druhá rovnice. Tedy $x \neq 0$, což dává $x^2 + y^2 = 1$. Ze třetí rovnice tak máme $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$, což spolu s rovností $x^2 + y^2 = 1$ dává body

$$\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right], \left[\frac{-\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right].$$

Tedy

$$\min f(M) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

a

$$\max f(M) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

♣

10.8.48. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M, pokud

$$f(x, y) = x^2 + y, \quad M = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ 4y^3 - 4y + x^2 = 0, y \geq 0\right\}.$$

Řešení. Nejprve ověříme, že (zřejmě) uzavřená množina M je omezená. Nechť $\{[x_n, y_n]\}$ je libovolná posloupnost bodů v M splňující $\|[x_n, y_n]\| \to \infty$. Pokud $y_{n_k} \to \infty$ pro nějakou podposloupnost $\{y_{n_k}\}$ (připomeňme, že $y_n \geq 0$ dle definice M), platí

$$0 = x_{n_k}^2 + 4y_{n_k}(y_{n_k}^2 - 1) \geq 4y_{n_k}(y_{n_k}^2 - 1) \to \infty,$$

což je zřejmý spor. Tedy $\{y_n\}$ je omezená posloupnost. Pak je ale i $\{x_n\}$ omezená, neboť v případě nějaké podposloupnosti $\{x_{n_k}\}$ splňující $|x_{n_k}| \to \infty$ máme

$$0 = x_{n_k}^2 + 4y_{n_k}(y_{n_k}^2 - 1) \to \infty,$$

tedy opět spor. Proto je M omezená množina.

Rozdělíme M na množiny

$$\begin{aligned} M_1 &= \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ 4y^3 - 4y + x^2 = 0, y > 0\right\}, \\ M_2 &= \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ 4y^3 - 4y + x^2 = 0, y = 0\right\} = \{[0, 0]\}. \end{aligned}$$

Pro množinu M_1 použijeme Větu 10.5.8, kde

$$G = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ y > 0\right\}.$$

Snadno zjistíme, že podezřelé body prvního druhu neexistují. Řešíme tak soustavu

$$\begin{aligned} 2x + \lambda 2x &= 0 \\ 1 + \lambda(12y^2 - 4) &= 0 \\ 4y^3 - 4y + x^2 &= 0. \end{aligned}$$

Pokud $x = 0$, máme z třetí rovnice $y = 1$, tj. bod $[0, 1]$. Pokud $x \neq 0$, platí $\lambda = -1$. Tedy druhá rovnice dává $y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$. Z třetí rovnice pak dopočteme body

$$\left[\sqrt{\frac{7}{6}\sqrt{\frac{5}{3}}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}\right], \quad \left[-\sqrt{\frac{7}{6}\sqrt{\frac{5}{3}}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}\right].$$

Maximum nabývá f v těchto bodech, minimum pak v $[0, 0]$.

♣

10.8.49. Příklad. Nalezněte $C^2(\mathbb{R}^2)$-funkci $z(x, y)$ splňující

$$\frac{\partial z}{\partial x \partial y} = x + y, \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2,$$

přičemž pro ni platí $z(x, 0) = x$ a $z(0, y) = y^2$.

Řešení. Funkce

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2} + yx + \varphi_0(y),$$

kde φ_0 je spojitě diferencovatelná funkce, zjevně splňuje $u_x = x + y$. Tedy

$$z(x, y) = \frac{x^2 y}{2} + \frac{y^2 x}{2} + \varphi(y) + \psi(x),$$

kde φ je primitivní k φ_0, $\varphi(0) = 0$ a ψ je třídy C^1, splňuje $z_y = u$. Tedy $z_{yx} = x + y$.

Jelikož

$$x = z(x, 0) = \psi(x)$$

a

$$y^2 = z(0, y) = \varphi(y),$$

máme

$$z(x, y) = \frac{x^2 y}{2} + \frac{y^2 x}{2} + y^2 + x.$$

♣

10.8.50. Příklad. Rozviňte funkci $f(x, y) = x^y$ do Taylorova polynomu řádu 2 na okolí bodu $[1, 1]$.

Řešení. Počítejme pro $[x, y] \in (0, \infty)^2$:

$$f_x = yx^{y-1}, \quad f_y = x^y \log x$$

a dále

$$f_{xx} = y(y-1)x^{y-2}, \ f_{xy} = (1 + y \log x)x^{y-1}, \ f_{yy} = x^y \log^2 x.$$

Tedy $f(1, 1) = 1$, $\nabla f(1, 1) = [1, 0]$ a

$$f''(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proto
$$T_2^{f,[1,1]}(x,y) = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1).$$

♣

10.8.51. Příklad. Vyšetřete extrémy funkce
$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\log x - 10\log y, \quad [x,y] \in (0,\infty)^2.$$

Řešení. Máme
$$\nabla f(x,y) = \left[2x + y - \frac{4}{x}, 2y + x - \frac{10}{y}\right].$$
Soustavu
$$2x + y = \frac{4}{x}$$
$$x + 2y = \frac{10}{y}$$
upravíme na soustavu
$$2x^2 + yx = 4$$
$$xy + 2y^2 = 10.$$
Odečtením rovnic dostáváme $y^2 - x^2 = 3$, tj. $y = \sqrt{3 + x^2}$. Po dosazení do druhé rovnice máme
$$2(3 + x^2) + x\sqrt{3 + x^2} = 10.$$
Řešením této rovnice je bod $x = 1$, a tedy $y = 2$.

Dále je
$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{4}{x^2} & 1 \\ 1 & 2 + \frac{10}{y^2} \end{pmatrix},$$
a tedy
$$f''(1,2) = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}.$$
Z pozitivní definitnosti této matice nyní vyplývá, že f má v $[1,2]$ lokální minimum o hodnotě $m = 7 - 10\log 2$. Ukážeme, že se jedná o globální minimum.

Jelikož
$$f(x,y) \geq x\left(x - 4\frac{\log x}{x}\right) + y\left(y - 10\frac{\log y}{y}\right),$$
existuje $c_1 > 0$ takové, že pokud $\max\{x,y\} \geq c_1$, pak $f(x,y) > m$. Dále platí
$$f(x,y) > -4\log x - 10\log y,$$
a tedy existuje $c_2 \in (0, c_1)$ takové, že $f(x,y) > m$ kdykoliv $0 < \min\{x,y\} < c_2$. Tedy $f(x,y) > m$, kdykoliv $[x,y] \in (0,\infty)^2 \setminus ((c_2,c_1) \times (c_2,c_1))$. Na kompaktní množině $[c_2,c_1] \times [c_2,c_1]$ nabývá f svého minima. Vzhledem k předchozím úvahám je bod $[1,2]$ jediný kandidát na toto minimum.

Tedy f má vskutku v $[1, 2]$ globální minimum. Zjevně také platí $\sup f(\mathcal{D}(f)) = \infty$. ♣

10.8.52. Příklad. Vyšetřete lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xy - 3xz - 3yz, \quad [x, y, z] \in \mathbb{R}^3.$$

Řešení. Jelikož

$$\nabla f(x, y, z) = \left[3x^2 - 3y - 3z, 3y^2 - 3x - 3z, 3z^2 - 3x - 3y\right],$$

řešíme soustavu

$$\begin{aligned} x^2 &= y + z \\ y^2 &= x + z \\ z^2 &= x + y. \end{aligned}$$

Odečtením druhé rovnice od prvé dostáváme

$$x^2 - y^2 = y - x.$$

Tedy $x = y$ nebo $x + y = -1$. V prvním případě mám ze třetí rovnice $y = \frac{z^2}{2}$, což po dosazení do druhé rovnice dává

$$\frac{z^4}{4} = \frac{z^2}{2} + z.$$

Pokud $z = 0$, máme podezřelý bod $[0, 0, 0]$. V opačném případě platí

$$0 = z^3 - 2z - 4 = (z - 2)(z^2 + 2z + 2),$$

tj. $z = 2$ a máme bod $[2, 2, 2]$. Pokud $x + y = -1$, máme ve třetí rovnici vztah $z^2 = -1$, což nelze. Tedy body $[0, 0, 0]$ a $[2, 2, 2]$ jsou jediné podezřelé z lokálního extrému.

Jelikož

$$f''(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6x & -3 & -3 \\ -3 & 6y & -3 \\ -3 & -3 & 6z \end{pmatrix},$$

platí

$$f''(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad f''(2, 2, 2) = \begin{pmatrix} 12 & -3 & -3 \\ -3 & 12 & -3 \\ -3 & -3 & 12 \end{pmatrix}.$$

První matici upravíme pomocí symetrických elementárních úprav na matici

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix},$$

která je indefinitní, a tedy f nemá v $[0,0,0]$ lokální extrém. Druhou matici převedeme na

$$\begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & \frac{45}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{54}{5} \end{pmatrix},$$

což je pozitivně definitní matice. Funkce f má tak v $[2,2,2]$ lokální minimum. ♣

10.8.53. Příklad. Nechť $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}^2$, $Z = \mathbb{R}$, ϱ a σ jsou eukleidovské metriky na $\mathbb{R}^2$ a τ je eukleidovská metrika na $\mathbb{R}$. Nechť zobrazení $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je definováno předpisem

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{pokud buď } x \neq 0 \text{ nebo } y \neq 0; \\ 0, & \text{pokud } x = y = 0. \end{cases}$$

(a) Nechť $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$. Dokažte, že

$$\lim_{x\to 0} F(x,kx) = 0.$$

(b) Dokažte, že

$$\lim_{x\to 0} F(x,x^2) = \frac{1}{2}.$$

10.9. Početní příklady k metrickým prostorům

10.9.1. Příklad. Vyšetřete otevřenost, uzavřenost a omezenost množiny

$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \colon 9x^2 + 4y^2 \leq 36\}.$$

Řešení. Víme, že polynomy jsou spojité funkce, a proto je $f(x,y) = 9x^2 + 4y^2$ spojitá funkce z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$. Zadaná množina se dá zapsat jako

$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \colon f(x,y) \in [36,\infty)\} = f^{-1}([36,\infty)).$$

Z Příkladu 9.3.2(a) víme, že interval $[36,\infty)$ je uzavřená množina v $\mathbb{R}$. Podle Věty 9.4.6 je tedy M uzavřená množina, neboť je to vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení.

Zadaná množina je elipsa, a proto je omezená. Formálně můžeme například ze zadané nerovnosti usoudit $x^2 \leq 9x^2 + 4y^2 \leq 36$, a tedy $x \in [-6,6]$. Podobně z nerovnosti $y^2 \leq 9x^2 + 4y^2 \leq 36$ odvodíme $y \in [-6,6]$. Tedy $M \subset [-6,6]^2 \subset B([0,0],10)$, což ukazuje omezenost M. ♣

10.9.2. Příklad. Vyšetřete otevřenost, uzavřenost a omezenost množiny

$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \colon xy > 1\}.$$

Řešení. Funkce $f(x,y) = xy$ je polynom, a tedy spojitá funkce. Zadaná množina se dá napsat jako $M = f^{-1}((1,\infty))$. Množina $(1,\infty)$ je otevřená, a tedy podle Příkladu 9.3.8 je M otevřená jakožto vzor otevřené množiny při spojitém zobrazení.

Pro $k \in \mathbb{N}, k > 1$, snadno vidíme, že $[k,k] \in M$, ale $\operatorname{dist}([k,k],[0,0]) \to \infty$. Zadaná množina není tedy obsažena v žádné kouli, a proto není omezená. ♣

10.9.3. Příklad. Vyšetřete otevřenost, uzavřenost a omezenost množiny

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + 6x + y^2 - 8y + z^2 + 10z = 0\}.$$

Řešení. Funkce $f(x,y,z) = x^2 + 6x + y^2 - 8y + z^2 + 10z$ je polynom, a tedy spojitá funkce. Zadaná množina se dá napsat jako $M = f^{-1}(\{1\})$. Jednobodová množina $\{1\}$ je uzavřená, a tedy podle Věty 9.4.6 je M uzavřená jakožto vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení.

Zadanou rovnost si můžeme přepsat jako

$$(x+3)^2 + (y-4)^2 + (z+5)^2 = 50,$$

odkud snadno vidíme

$$|x+3| \le \sqrt{50},\ |y-4| \le \sqrt{50} \text{ a } |z+5| \le \sqrt{50}.$$

Tedy

$$\begin{aligned} M &\subset \left[-3-\sqrt{50}, -3+\sqrt{50}\right] \times \left[4-\sqrt{50}, 4+\sqrt{50}\right] \times \left[-5-\sqrt{50}, -5+\sqrt{50}\right] \\ &\subset B([0,0,0],30) \end{aligned}$$

z čehož dostaneme omezenost M. ♣

10.9.4. Příklad. Vyšetřete otevřenost, uzavřenost a omezenost množiny

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \text{ a } x + y \ge 1\}.$$

Řešení. Zadefinujme si množiny

$$M_1 = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 \le 1\} \text{ a } M_2 = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \colon x + y \ge 1\}.$$

Snadno vidíme, že $M = M_1 \cap M_2$. Funkce $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ je spojitá, a tedy je $M_1 = f^{-1}([1,\infty))$ uzavřená množina podle Věty ???. Dále $g(x,y,z) = x + y$ je spojitá funkce, a tedy je $M_2 = g^{-1}([1,\infty))$ uzavřená množina podle Věty ???. Podle Věty ??? je tedy i $M = M_1 \cap M_2$ uzavřená jakožto průnik dvou uzavřených množin. Z

$$M \subset M_1 = \overline{B([0,0,0],1)} \subset B([0,0,0],2)$$

snadno dostáváme omezenost M. ♣

10.9.5. Příklad. Vyšetřete otevřenost, uzavřenost a omezenost množiny

$$M := \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \colon x + y + z = 5 \text{ a } xy + xz + yz = 8\}.$$

Řešení. Zadefinujme si množiny

$$M_1 = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \colon x + y + z = 5\} \text{ a } M_2 = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \colon xy + xz + yz = 8\}.$$

Snadno vidíme, že $M = M_1 \cap M_2$. Funkce $f(x, y, z) = x + y + z = 5$ je spojitá, a tedy je $M_1 = f^{-1}(\{5\})$ uzavřená množina podle Věty ???. Dále $g(x, y, z) = xy + xz + yz$ je spojitá funkce, a tedy je $M_2 = g^{-1}(\{8\})$ uzavřená množina podle Věty ???. Podle Věty ??? je tedy i $M = M_1 \cap M_2$ uzavřená jakožto průnik dvou uzavřených množin.

Důkaz omezenosti této množiny je trochu složitější. Ze zadaných dvou rovností snadno usoudíme, že

$$9 = 25 - 16 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Zadaná M je tedy podmnožina sféry se středem v $[0, 0, 0]$ a poloměru 3. Odtud ihned vidíme, že $M \subset B([0, 0, 0], 4)$, odkud plyne omezenost M. ♣

KAPITOLA 11

Stejnoměrná konvergence posloupností a řad funkcí

11.1. Stejnoměrná konvergence posloupností funkcí

11.1.1. Definice. Nechť M je množina, (Q, σ) je metrický prostor a f, f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou zobrazení definovaná na M s hodnotami v Q. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **konverguje bodově** k f na M, jestliže $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pro každé $x \in M$, neboli

$$\forall x \in M \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \colon \sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Bodovou konvergenci posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ k funkci f značíme symbolem $f_n \to f$.

Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **konverguje stejnoměrně** k f na M, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall x \in M \ \forall n \geq n_0 \colon \sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ k funkci f značíme symbolem $f_n \rightrightarrows f$.

11.1.2. (a) Bude užitečné si uvědomit negaci výroku, který definuje stejnoměrnou konvergenci. Nechť M, (Q, σ), f a f_n jsou jako výše. Potom posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nekonverguje stejnoměrně k f na M, jestliže

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall n_0 \in \mathbb{N} \ \exists x \in M \ \exists n \geq n_0 \colon \sigma(f_n(x), f(x)) \geq \varepsilon.$$

(b) Jestliže posloupnost $\{f_n\}$ bodově konverguje, pak je limitní funkce určena jednoznačně.

(c) Jestliže $f_n \rightrightarrows f$ na M, potom $f_n \to f$ na M.

11.1.3. Příklady. (a) Pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme zobrazení $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ předpisem $f_n(x) = x^n$. Označme dále

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Dokažte, že potom posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje bodově, avšak nikoli stejnoměrně k funkci f na intervalu $[0,1]$.

(b) Pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme zobrazení $g_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ předpisem

$$g_n(x) = \frac{1}{2^n}\sin(nx).$$

Označme dále $g(x) = 0$ pro $x \in [0,1]$. Dokažte, že potom posloupnost $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k funkci g na intervalu $[0,1]$.

Řešení. (a) Bodová konvergence plyne z Příkladu 2.3.34. Dokážeme, že tato konvergence není stejnoměrná na $[0,1]$. Položme $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = |x_n^n - 0| = \frac{1}{2} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Položíme-li $\varepsilon = \frac{1}{2}$, dostaneme z 11.1.2, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nekonverguje stejnoměrně k funkci f na intervalu $[0,1]$.

(b) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro každé $x \in [0,1]$ platí

$$|g_n(x) - g(x)| = \frac{|\sin(nx)|}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, aby platilo $\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$. Potom zřejmě pro každé $n \geq n_0$ platí $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, a tedy pro každé $x \in [0,1]$ dostáváme $|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$. Podle Definice 11.1.1 tedy posloupnost $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k funkci g na intervalu $[0,1]$. ♣

11.1.4. Definice. Nechť (M,ϱ) a (Q,σ) jsou metrické prostory a f, f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou zobrazení definovaná na M s hodnotami v Q. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **konverguje lokálně stejnoměrně** k f na M, jestliže pro každé $x \in M$ existuje $r > 0$ takové, že $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k f na $B_\varrho(x,r)$. Lokálně stejnoměrnou konvergenci značíme symbolem $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$.

11.1.5. Příklad. Dokažte, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ z Příkladu 11.1.3(a) konverguje na intervalu $[0,1)$ lokálně stejnoměrně k nulové funkci.

Řešení. Zvolme $x \in [0,1)$. K němu nalezneme $r > 0$ takové, že $[0,1)\cap(x-r,x+r) \subset (0,1)$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Protože $\lim_{n\to\infty}(x+r)^n = 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $(x+r)^n < \varepsilon$. Nechť $y \in [0,1)\cap(x-r,x+r)$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $y^n < (x+r)^n$, a tedy pro každé $n \geq n_0$, platí $|f_n(y) - 0| = y^n < \varepsilon$. Odtud a z Definice 11.1.1 plyne, že $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k nulové funkci na $[0,1)\cap(x-r,x+r)$. Protože $B_\varrho(x,r) = [0,1)\cap(x-r,x+r)$, podle Definice 11.1.4 posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje lokálně stejnoměrně k nulové funkci na intervalu $[0,1)$.

♣

11.1.6. Věta (charakterizace stejnoměrné konvergence)**.** Nechť M je neprázdná množina, (Q,σ) je metrický prostor, $f_n\colon M \to Q$, $n \in \mathbb{N}$, a $f\colon M \to Q$. Potom $f_n \rightrightarrows f$ na M právě tehdy, když

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{\sigma(f_n(x), f(x));\ x \in M\} = 0.$$

Důkaz. $\Rightarrow$ Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall x \in M \ \forall n \geq n_0 \colon \sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Potom pro každé $n \geq n_0$ platí

$$0 \leq \sup\{\sigma(f_n(x), f(x));\ x \in M\} \leq \varepsilon.$$

Odtud plyne tvrzení.

$\Leftarrow$ Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí

$$\sup\{\sigma(f_n(x), f(x));\ x \in M\} < \varepsilon.$$

Potom zřejmě pro každá $n \geq n_0$ a $x \in M$ platí $\sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$, a tedy $f_n \rightrightarrows f$ na M. ■

11.1.7. Věta (Moore-Osgood)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $x_0 \in P$, f, f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou funkce z P do $\mathbb{R}$ a platí

(a) existuje $r > 0$ takové, že $f_n \rightrightarrows f$ na $B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$,

(b) pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $a_n \in \mathbb{R}$ splňující $\lim_{x \to x_0} f_n(x) = a_n$.

Potom existují vlastní limity $\lim_{n \to \infty} a_n$ a $\lim_{x \to x_0} f(x)$ a jsou si rovny.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\} \ \forall n \geq n_0 \colon |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Potom platí

$$\forall x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\} \ \forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq n_0 \colon |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Odtud vyplývá, že platí

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq n_0 \colon |a_n - a_m| \leq \varepsilon,$$

a tedy posloupnost $\{a_n\}$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Podle Věty 2.4.26 je tato posloupnost konvergentní, tedy existuje $a \in \mathbb{R}$ splňující $\lim a_n = a$.

Dokážeme, že $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|a_{n_0} - a| < \varepsilon$ a zároveň

$$\forall x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\} \colon |f_{n_0}(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

K tomuto n_0 nyní nalezneme $\delta \in (0, r)$ takové, že

$$\forall x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} \colon |f_{n_0}(x) - a_{n_0}| < \varepsilon.$$

Potom pro každé $x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ platí

$$|f(x) - a| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - a_{n_0}| + |a_{n_0} - a| < 3\varepsilon.$$

Odtud plyne dokazované tvrzení. ■

11.1.8. Věta. Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, $f_n \colon P \to Q$ jsou spojitá zobrazení, $n \in \mathbb{N}$, $f \colon P \to Q$ je zobrazení a $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na P. Potom f je spojité.

Důkaz. Zvolme $a \in P$. K němu nalezneme $r > 0$ takové, že $f_n \rightrightarrows f$ na $B(a,r)$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall x \in B(a,r)\colon \sigma(f(x), f_{n_0}(x)) < \varepsilon.$$

K tomuto n_0 dále nalezneme $\delta \in (0,r)$ takové, že

$$\forall x \in B(a,\delta)\colon \sigma(f_{n_0}(x), f_{n_0}(a)) < \varepsilon.$$

Potom pro každé $x \in B(a,\delta)$ platí

$$\sigma(f(x), f(a)) \le \sigma(f(x), f_{n_0}(x)) + \sigma(f_{n_0}(x), f_{n_0}(a)) + \sigma(f_{n_0}(a), f(a)) < 3\varepsilon.$$

Funkce f je tedy spojitá v bodě a. Protože bod a byl zvolen libovolně, je f spojitá na P. ■

11.1.9. Rovnost $\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ovšem neplatí obecně. Uvažujme funkce $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$ a bod $a = 1$. Zřejmě platí $\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1-} x^n = 1$, ale $\lim_{x\to 1-} \lim_{n\to\infty} x^n = 0$. Předpoklad lokálně stejnoměrné konvergence ve Větách 11.1.7 a 11.1.8 tedy nelze vynechat.

Z uvedených vět je zřejmé, že lokálně stejnoměrná konvergence je velice důležitým pojmem. Ověřit lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí z definice může však být velice obtížné. V případě, kdy definičním oborem funkcí je otevřený interval, existuje snazší způsob ověření stejnoměrné konvergence, jak vyplývá z následující věty.

11.1.10. Věta (charakterizace lokálně stejnoměrné konvergence na intervalu)**.** Nechť $a,b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $f_n\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom $\{f_n\}$ konverguje lokálně stejnoměrně na (a,b) právě tehdy, když $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na každém intervalu $[c,d] \subset (a,b)$, kde $c,d \in (a,b)$, $c < d$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Označme f bodovou limitu posloupnosti f_n na (a,b). Předpokládejme, že existují $c,d \in (a,b)$ taková, že $c < d$, $[c,d] \subset (a,b)$ a $\{f_n\}$ nekonverguje stejnoměrně na $[c,d]$. Podle 11.1.2 nalezneme $\varepsilon > 0$, rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}$ a posloupnost $\{x_k\}$ prvků $[c,d]$ takové, že

$$\forall k \in \mathbb{N}\colon |f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \ge \varepsilon.$$

Podle Bolzanovy-Weierstrassovy věty nalezneme rostoucí posloupnost $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ a $x^* \in [c,d]$ splňující $\lim_{j\to\infty} x_{k_j} = x^*$. Nalezneme $r > 0$ takové, že $f_n \rightrightarrows f$ na $B(x^*,r)$. K tomuto r nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \ge n_0\ \forall x \in B(x^*,r)\colon |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Nyní nalezneme $j \in \mathbb{N}$ takové, že $n_{k_j} \ge n_0$ a $x_{k_j} \in B(x^*,r)$. Potom

$$\varepsilon \le |f_{n_{k_j}}(x_{k_j}) - f(x_{k_j})| < \varepsilon,$$

což je spor.

$\Leftarrow$ Pro $x_0 \in (a,b)$ nalezneme $r > 0$ takové, že $[x_0 - r, x_0 + r] \subset (a,b)$. Potom $f_n \rightrightarrows f$ na $(x_0 - r, x_0 + r)$. ■

11.1.11. Definice. Nechť M je množina a $g_n\colon M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že posloupnost $\{g_n\}$ je **stejnoměrně cauchyovská** na M, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0\ \forall x \in M : |g_n(x) - g_m(x)| < \varepsilon.$$

11.1.12. Věta (Bolzanova-Cauchyova podmínka pro stejnoměrnou konvergenci)**.** Nechť M je množina a $f_n\colon M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Posloupnost $\{f_n\}$ je stejnoměrně konvergentní na M právě tehdy, když je stejnoměrně cauchyovská na M.

Důkaz. $\Rightarrow$ Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \geq n_0\ \forall x \in M : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Zvolme $m, n \geq n_0$. Potom

$$\forall x \in M : |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < 2\varepsilon,$$

a tedy je posloupnost $\{f_n\}$ stejnoměrně cauchyovská na M.

$\Leftarrow$ Zvolme $x \in M$. Potom je posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská v $\mathbb{R}$, a má tedy vlastní limitu, kterou označíme symbolem $f(x)$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall m, n \geq n_0\ \forall x \in M : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Protože $\lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x)$, plyne odtud, že

$$\forall n \geq n_0\ \forall x \in M : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

a tedy $f_n \rightrightarrows f$ na M. ■

11.1.13. Věta (stejnoměrná konvergence derivací)**.** Nechť (a, b) je neprázdný omezený interval a $f_n\colon (a, b) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Nechť

(a) pro každé $n \in \mathbb{N}$ má f_n vlastní derivaci na (a, b),
(b) existuje $x_0 \in (a, b)$ takové, že $\{f_n(x_0)\}$ konverguje,
(c) $\{f_n'\}$ konverguje stejnoměrně na (a, b).

Potom existuje $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ taková, že $f_n \rightrightarrows f$ na (a, b), f má vlastní derivaci na (a, b) a platí $f_n' \rightrightarrows f'$ na (a, b).

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall m, n \geq n_0\ \forall x \in (a, b) : |f_n'(x) - f_m'(x)| < \varepsilon \tag{11.1}$$

(to je možné díky Větě 11.1.12) a zároveň

$$\forall m, n \geq n_0 : |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon.$$

Zvolme $x \in (a, b)$. Potom

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|.$$

Užitím Lagrangeovy věty pro funkci $f_n - f_m$ na intervalu $[x, x_0]$, nebo $[x_0, x]$ nalezneme $\xi \in (a, b)$ takové, že

$$|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| = |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| \cdot |x - x_0|.$$

Potom dle (11.1) platí $|f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| < \varepsilon$. Navíc platí $|x - x_0| \leq b - a$, neboť (a, b) je omezený interval. Kombinací odhadů dostaneme

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon(b - a) + \varepsilon = \varepsilon(b - a + 1).$$

Posloupnost $\{f_n\}$ je tedy stejnoměrně cauchyovská na (a, b), a tudíž je podle Věty 11.1.12 stejnoměrně konvergentní na (a, b). Její limitu označíme f.

Zbývá dokázat, že f má vlastní derivaci na (a, b) a $f_n' \rightrightarrows f'$ na (a, b). Protože f_n' konverguje stejnoměrně na (a, b), stačí dokázat, že $f_n' \to f'$ na (a, b). Zvolme $z \in (a, b)$ a $n \in \mathbb{N}$. Definujme funkci φ_n předpisem

$$\varphi_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(z)}{x - z}, \quad x \in (a, b) \setminus \{z\}. \tag{11.2}$$

Zvolme $x \in (a, b) \setminus \{z\}$ a $m, n \geq n_0$. Podle Lagrangeovy věty existuje η ležící mezi x a z takové, že

$$|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(z) - f_m(z))| = |f_n'(\eta) - f_m'(\eta)| \cdot |x - z|.$$

Tedy podle (11.2) a (11.1) platí

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = |f_n'(\eta) - f_m'(\eta)| < \varepsilon.$$

Protože x bylo zvoleno libovolně, je posloupnost $\{\varphi_n\}$ stejnoměrně cauchyovská, a tedy podle Věty 11.1.12 také stejnoměrně konvergentní na $(a, b) \setminus \{z\}$. Podle Mooreovy-Osgoodovy věty (Věta 11.1.7) tudíž existují vlastní limity $\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to z} \varphi_n(x)$ a $\lim_{x\to z} \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$ a jsou si rovny. Protože

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to z} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(z)$$

a

$$\lim_{x\to z} \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{x\to z} \frac{f(x) - f(z)}{x - z} = f'(z),$$

existuje vlastní $f'(z)$ a platí $f'(z) = \lim_{n\to\infty} f_n'(z)$. Protože z bylo zvoleno libovolně, plyne odtud tvrzení věty. ∎

11.1.14. Důležitým předpokladem Věty 11.1.13 je omezenost intervalu (a, b). Bez tohoto předpokladu věta neplatí. Pomocí Věty 11.1.10 však lze zformulovat variantu Věty 11.1.13 pro libovolný otevřený interval a lokálně stejnoměrnou konvergenci.

11.1.15. Věta (záměna limity a Newtonova integrálu). Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na neprázdném omezeném intervalu (a, b) a $f_n \in \mathcal{N}(a, b)$, $n \in \mathbb{N}$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$ a platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Důkaz. Zvolme $x_0 \in (a, b)$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje funkce $F_n : (a, b) \to \mathbb{R}$ taková, že $F_n' = f_n$ na (a, b) a $F_n(x_0) = 0$. Potom podle Věty 11.1.13 je posloupnost $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ stejnoměrně konvergentní na (a, b). Označme $F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$,

$x \in (a,b)$. Podle Věty 11.1.13 potom platí $F' = f$ na (a,b). Podle Mooreovy-Osgoodovy věty platí

$$\lim_{x\to a_+} F(x) = \lim_{x\to a_+} \lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a_+} F_n(x)$$

a

$$\lim_{x\to b_-} F(x) = \lim_{x\to b_-} \lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to b_-} F_n(x),$$

přičemž obě tyto limity jsou vlastní. Celkem tedy dostáváme vztah

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x)\\ &= \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to b_-} F_n(x) - \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a_+} F_n(x)\\ &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.\end{aligned}$$

Tím je tvrzení věty dokázáno. ■

11.1.16. Nechť M je množina a f, g, f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou funkce z M do $\mathbb{R}$. Píšeme $f \le g$ na M, jestliže $f(x) \le g(x)$ pro každé $x \in M$. Speciálně symbolem $f \ge 0$ na M značíme, že f je nezáporná funkce na M. Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}$ je **neklesající** na M, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $f_n \le f_{n+1}$ na M. Obdobně definujeme posloupnost funkcí **nerostoucí**, **klesající**, **rostoucí**, **monotónní** a **ryze monotónní** na M.

11.1.17. Věta (Dini)**.** Nechť (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor a $\{f_n\}$ je monotónní posloupnost spojitých zobrazení P do $\mathbb{R}$. Nechť $f: P \to \mathbb{R}$ je spojité a $f_n \to f$ na P. Potom $f_n \rightrightarrows f$ na P.

Důkaz. Vzhledem k tomu, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $f_n - f$ spojité, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $f(x) = 0$ pro každé $x \in P$, jinak bychom uvažovali posloupnost $\{f_n - f\}$. Dále můžeme předpokládat, že na $\{f_n\}$ je nerostoucí, neboť v opačném případě bychom uvažovali posloupnost $\{-f_n\}$. Předpokládejme, že tvrzení věty neplatí. Nalezneme $\varepsilon > 0$ a posloupnost $\{x_n\}$ prvků P takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $f_n(x_n) \ge \varepsilon$. Díky kompaktnosti P nalezneme podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a bod $x^* \in P$ takové, že $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x^*$. Protože $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x^*) = 0$, nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $f_{n_m}(x^*) < \varepsilon$. Díky spojitosti f_{n_m} nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in B(x^*, \delta)$ platí $f_{n_m}(x) < \varepsilon$. Protože $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x^*$, nalezneme $l \ge m$ takové, že $x_{n_l} \in B(x^*, \delta)$. Posloupnost $\{f_{n_k}(x_{n_l})\}_{k=1}^{\infty}$ je nerostoucí, a tedy

$$\varepsilon \le f_{n_l}(x_{n_l}) \le f_{n_m}(x_{n_l}) < \varepsilon,$$

což je spor. ■

11.1.18. Definice. Nechť M je množina a $A \subset M$. Pak **charakteristickou funkcí** množiny A nazýváme funkci $\chi_A\colon M \to \mathbb{R}$, definovanou předpisem

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in A; \\ 0 & \text{pro } x \in M \setminus A. \end{cases}$$

11.1.19. Příklad. Dokažte, že jestliže vynecháme kterýkoli z předpokladů Diniovy věty (kompaktnost množiny K, spojitost funkcí $\{f_n\}$, spojitost funkce f nebo monotonii posloupnosti $\{f_n\}$), pak věta neplatí.

Řešení. (a) Položme $K = [0, 1)$ a $f_n(x) = x^n$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0, 1)$. Potom K není kompaktní. Posloupnost $\{f_n\}$ je nerostoucí na K a její bodovou limitou f je nulová funkce. Zřejmě jsou tedy všechny funkce f_n i funkce f spojité na K. Posloupnost $\{f_n\}$ ale nekonverguje k f stejnoměrně. To lze dokázat obdobně jako v Příkladu 11.1.3(a).

(b) Položme $K = [0, 1]$ a $f_n(x) = \chi_{(0,\frac{1}{n})}(x)$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0, 1]$. Potom K je kompaktní, posloupnost $\{f_n\}$ je nerostoucí na K a její bodovou limitou f je nulová funkce. Funkce f je tedy zřejmě spojitá na $[0, 1]$, ale funkce f_n spojité nejsou. Posloupnost $\{f_n\}$ nekonverguje k f stejnoměrně, neboť pro $x_n = \frac{1}{2n}$ platí $f_n(x_n) \geq \frac{1}{2}$ a stačí použít 11.1.2.

(c) Položme $K = [0, 1]$ a $f_n(x) = x^n$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0, 1]$. Potom K je kompaktní, všechny funkce f_n jsou spojité na K, posloupnost $\{f_n\}$ je nerostoucí na K a její bodovou limitou je funkce f definovaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Funkce f tedy není spojitá na $[0, 1]$. Z Příkladu 11.1.3(a) víme, že posloupnost $\{f_n\}$ nekonverguje k f stejnoměrně.

(d) Položme $K = [0, 1]$ a definujme pro $n \in \mathbb{N}$ funkce f_n předpisem

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx, & x \in [0, \frac{1}{2n}], \\ 2 - 2nx, & x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}], \\ 0, & x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

Potom K je kompaktní, všechny funkce f_n jsou spojité na K a bodovou limitou f posloupnosti $\{f_n\}$ je nulová funkce, která je zřejmě spojitá. Posloupnost $\{f_n\}$ ovšem není monotónní na K a nekonverguje k f stejnoměrně, neboť pro $x_n = \frac{1}{n}$ platí $f_n(x_n) = 1$. ♣

11.2. Weierstrassova věta

11.2.1. Definice. Nechť L je lineární zobrazení z $(\mathcal{C}([0,1]), \sup)$ do $(\mathcal{C}([0,1]), \sup)$. Řekneme, že L je **pozitivní operátor**, jestliže pro každou funkci $f \in \mathcal{C}([0,1])$ splňující $f \geq 0$ na $[0,1]$ platí $L(f) \geq 0$ na $[0,1]$.

11.2.2. Je-li L pozitivní operátor na $\mathcal{C}([0,1])$, pak pro každé funkce $f, g \in \mathcal{C}([0,1])$ splňující $f \leq g$ na $[0,1]$ platí $L(f) \leq L(g)$ na $[0,1]$. To plyne z linearity operátoru L, neboť

$$0 \leq L(g - f) = L(g) - L(f).$$

11.2.3. Věta (Korovkinova věta o třech funkcích). [1] Nechť $\{L_n\}$ je posloupnost pozitivních lineárních operátorů z $\mathcal{C}([0,1])$ do $\mathcal{C}([0,1])$. Potom $L_n f \rightrightarrows f$ na $[0,1]$ pro každou funkci $f \in \mathcal{C}([0,1])$ právě tehdy, když $L_n(g_j) \rightrightarrows (g_j)$ na $[0,1]$ pro každou ze tří funkcí $g_j(x) = x^j$, $x \in [0,1]$, $j = 0, 1, 2$.

Důkaz. Zvolme $f \in C([0,1])$ a $\varepsilon > 0$. Potom je f omezená a stejnoměrně spojitá na $[0,1]$. Nalezneme tedy $M > 0$ takové, že pro každé $x \in [0,1]$ platí $|f(x)| \leq M$, a $\delta \in (0,1)$ takové, že pro každé $x, y \in [0,1]$ splňující $|x - y| < \delta$ platí $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. K δ a ε nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, každé $x \in [0,1]$ a každé $j \in \{0, 1, 2\}$ platí

$$|L_n(g_j)(x) - g_j(x)| < \varepsilon\delta^2.$$

Zvolme $y \in [0,1]$. Potom pro každé $x \in [0,1]$ nastane buď $|x - y| < \delta$ a potom $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, nebo $|x - y| \geq \delta$ a potom

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq 2M \leq \frac{2M(x-y)^2}{\delta^2}.$$

V každém případě, tedy pro každé $x \in [0,1]$, platí

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + \frac{2M(x-y)^2}{\delta^2}.$$

Odtud plyne, že pro každé $x \in [0,1]$ platí

$$f(x) \leq f(y) + \varepsilon + \frac{2M(x-y)^2}{\delta^2}.$$

Označme

$$h(x) = f(y) + \varepsilon + \frac{2M(x-y)^2}{\delta^2}, \quad x \in [0,1].$$

Pak pro speciální volbu $x = y$ dostáváme

$$h(y) = f(y) + \varepsilon.$$

Z definice funkcí g_0, g_1 a g_2 plyne, že

$$h = c_0 g_0 + c_1 g_1 + c_2 g_2,$$

[1] Pavel Petrovič Korovkin (1913–1985)

kde
$$c_0 = f(y) + \varepsilon + \frac{2My^2}{\delta^2}, \quad c_1 = -\frac{4My}{\delta^2}, \quad c_2 = \frac{2M}{\delta^2}.$$
Navíc platí $f \leq h$ na $[0,1]$, a tedy díky positivitě operátorů $\{L_n\}$ také
$$L_n(f) \leq L_n(h) \quad \text{na } [0,1] \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}.$$
Zřejmě pro každé $x \in [0,1]$ platí
$$\begin{aligned}|L_n(h)(x) - h(x)| &\leq |c_0||L_n(g_0)(x) - g_0(x)| + \\ &+ |c_1||L_n(g_1)(x) - g_1(x)| + c_2|L_n(g_2)(x) - g_2(x)|.\end{aligned}$$
Protože $y \in [0,1]$, platí
$$|c_0| \leq M + \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \quad \text{a} \quad |c_1| \leq \frac{4M}{\delta^2}.$$
Tedy pro každé $x \in [0,1]$ a každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí
$$\begin{aligned}|L_n(h)(x) - h(x)| &\leq (M + \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2})|L_n(g_0)(x) - g_0(x)| + \\ &+ \frac{4M}{\delta^2}|L_n(g_1)(x) - g_1(x)| + \frac{2M}{\delta^2}|L_n(g_2)(x) - g_2(x)| \\ &\leq \varepsilon\delta^2\left(M + \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} + \frac{4M}{\delta^2} + \frac{2M}{\delta^2}\right) = \varepsilon\left(M\delta^2 + \varepsilon\delta^2 + 8M\right),\end{aligned}$$
a tudíž
$$L_n(h)(x) \leq h(x) + \varepsilon\left(M\delta^2 + \varepsilon\delta^2 + 8M\right).$$
Pro speciální volbu $x = y$ dostáváme
$$L_n(f)(y) \leq L_n(h)(y) \leq h(y) + \varepsilon\left(M\delta^2 + \varepsilon\delta^2 + 8M\right),$$
a tedy
$$L_n(f)(y) \leq f(y) + \varepsilon + \varepsilon\left(M\delta^2 + \varepsilon\delta^2 + 8M\right) = f(y) + \varepsilon\left(M\delta^2 + \varepsilon\delta^2 + 8M + 1\right).$$
Obdobně lze dokázat, že
$$L_n(f)(y) \geq f(y) - \varepsilon\left(M\delta^2 + \varepsilon\delta^2 + 8M + 1\right).$$
Protože y bylo zvoleno libovolně, plyne odtud, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí
$$\sup_{y\in[0,1]} |L_n(f)(y) - f(y)| \leq \varepsilon\left(M\delta^2 + \varepsilon\delta^2 + 8M + 1\right),$$
tedy
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in[0,1]} |L_n(f)(y) - f(y)| = 0,$$
což podle Věty 11.1.6 znamená, že
$$L_n(f) \rightrightarrows f \quad \text{na } [0,1].$$
Tvrzení věty je dokázáno. ■

11.2.4. Definice. Nechť $f \in \mathcal{C}[0,1]$ a $n \in \mathbb{N}$. Potom polynom

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme **Bernsteinovým polynomem** funkce f stupně n.

11.2.5. Poznámka. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je zobrazení $B_n : \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$, definované předpisem $B_n : f \mapsto B_n f$ přiřazující každé funkci $f \in \mathcal{C}[0,1]$ „její" Bernsteinův polynom stupně n pozitivním lineárním operátorem na $\mathcal{C}[0,1]$.

11.2.6. Věta (Weierstrassova)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a,b]$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje polynom $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takový, že

$$\forall x \in [a,b] : \ |f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $[a,b] = [0,1]$. Víme, že $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost pozitivních lineárních operátorů na $\mathcal{C}([0,1])$. Tvrzení věty tedy vyplyne z Korovkinovy věty pokud ověříme, že pro $j = 0, 1, 2$ platí

$$B_n(g_j) \rightrightarrows g_j \quad \text{na } [0,1].$$

Pro $j = 0$, $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0,1]$ jest

$$B_n(g_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + 1 - x)^n = 1 = g_0(x),$$

takže platí dokonce $L_n(g_0) = g_0$ na $[0,1]$.

Připomeneme, že pro každé $k, n \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le n$, platí

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

Pro $j = 1$, $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0,1]$ jest

$$\begin{aligned}
B_n(g_1)(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= x \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\
&= x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} \\
&= x(x+1-x)^{n-1} = x = g_1(x),
\end{aligned}$$

a tedy i pro $j = 1$ platí $L_n(g_1) = g_1$ na $[0, 1]$.

Zbývá ověřit případ $j = 2$. Pro tuto funkci a pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0, 1]$ máme

$$\begin{aligned}
B_n(g_2)(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^2 x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} k x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (k-1) \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{x}{n} \\
&= x^2 \frac{n-1}{n} \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} (1-x)^{n-2-(k-2)} + \frac{x}{n} \\
&= \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{x}{n}.
\end{aligned}$$

To znamená, že pro každé $n \in N$ a $x \in [0, 1]$ máme

$$|B_n(g_2)(x) - g_2(x)| = \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n},$$

a tedy

$$B_n(g_2) \rightrightarrows g_2 \quad \text{na } [0, 1].$$

Tím je ověřeno tvrzení věty ve speciálním případě $[a, b] = [0, 1]$.

Nechť nyní je $[a, b]$ obecný interval. Definujeme zobrazení $\varphi\colon [0, 1] \to [a, b]$ předpisem

$$\varphi(x) = (b-a)x + a.$$

Potom φ je bijekce $[0, 1]$ na $[a, b]$. Položme $\tilde{f} = f \circ \varphi$. Podle již dokázaného tvrzení nalezneme polynom $\tilde{P}$ takový, že pro každé $x \in [0, 1]$ platí

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{P}(x)| < \varepsilon.$$

Položíme dále $P = \tilde{P} \circ \varphi^{-1}$. Protože funkce φ^{-1} má tvar

$$\varphi^{-1}(y) = \frac{1}{b-a}(y-a), \quad y \in [a, b],$$

je P zřejmě polynom. Navíc pro každé $y \in [a, b]$ platí

$$|f(y) - P(y)| = |\tilde{f}(\varphi^{-1}(y) - \tilde{P}(\varphi^{-1}(y)| < \varepsilon.$$

Tím je tvrzení věty dokázáno. ■

11.2.7. Poznámka. Weierstrassova věta by neplatila, pokud by interval nebyl omezený a uzavřený. To lze doložit na následujících příkladech: pro $f(x) = e^x$ na $(0,\infty)$ a libovolný polynom P platí $\lim_{x\to\infty} |f(x) - P(x)| = \infty$, podobně pro $f(x) = \frac{1}{x}$ na $(0,1)$ a libovolný polynom P platí $\lim_{x\to 0+} |f(x) - P(x)| = \infty$.

11.2.8. Poznámka. Nechť f_n, $n \in \mathbb{N}$, je posloupnost funkcí z $\mathcal{C}[0,1]$. Potom $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,1]$ právě tehdy, když $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\sup} = 0$.

11.3. Stejnoměrná konvergence řad funkcí

11.3.1. Definice. Nechť M je množina, $(Q, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor, $f_n\colon M \to Q$, $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že řada zobrazení $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je **bodově konvergentní** na M, jestliže posloupnost funkcí $\{\sum_{k=1}^{n} f_k\}_{n=1}^{\infty}$ je bodově konvergentní na M. Obdobně definujeme pojmy **stejnoměrné konvergence** a **lokálně stejnoměrné konvergence** řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Stejnoměrnou konvergenci značíme symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$, lokálně stejnoměrnou konvergenci symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$.

11.3.2. Poznámky. Nechť M je množina a $f_n, g_n\colon M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) *Bolzanova-Cauchyova podmínka*: řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na množině M právě tehdy, když platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N},\ m \geq n \geq n_0\ \forall x \in M : \left|\sum_{j=n}^{m} f_j(x)\right| < \varepsilon.$$

(b) *Nutná podmínka konvergence*: pokud $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na M, potom $f_n \rightrightarrows 0$ na M, neboť $|f_n(x)| = \left|\sum_{j=n}^{n} f_j(x)\right|$.

(c) *Linearita*: pokud $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$, $\sum_{n=1}^{\infty} g_n \rightrightarrows$ na M a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak také řady $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha f_n)$ a $\sum_{n=1}^{\infty}(f_n \pm g_n)$ konvergují stejnoměrně na M.

11.3.3. Věta (Weierstrassovo kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je řada reálných funkcí definovaných na neprázdné množině M. Označme

$$\sigma_n = \sup_{x\in M} |f_n(x)|.$$

Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n < \infty$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na M.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0\colon \sum_{j=n}^{m} \sigma_j < \varepsilon.$$

Potom pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ splňující $m \geq n \geq n_0$ a pro každé $x \in M$ platí

$$|\sum_{j=n}^{m} f_j(x)| \leq \sum_{j=n}^{m} |f_j(x)| \leq \sum_{j=n}^{m} \sigma_j < \varepsilon.$$

Ověřili jsme Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Řada je tedy konvergentní podle Poznámky 11.3.2(a). ■

11.3.4. Příklad. Nechť $\alpha > 1$. Dokažte, že řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^\alpha}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$$

jsou stejnoměrně konvergentní na $\mathbb{R}$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$\sigma_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|\cos(nx)|}{n^\alpha}.$$

Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty,$$

a tedy je řada konvergentní podle Weierstrassova kritéria. Důkaz stejnoměrné konvergence druhé řady je možné provést obdobně. ♣

11.3.5. Poznámka. Weierstrassovo kritérium nedává odpověď na otázku, zda jsou řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^\alpha}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$$

stejnoměrně konvergentní na $\mathbb{R}$ pro $\alpha \in (0, 1]$.

11.3.6. Věta (Abelovo kritérium stejnoměrné konvergence)**.** Nechť M je množina, $f_n\colon M \to \mathbb{R}$, $g_n\colon M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Nechť platí

(i) pro každé $x \in M$ je posloupnost reálných čísel $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ monotónní (libovolným způsobem),

(ii) $\{g_n\}$ je posloupnost stejně omezených funkcí, tj.

$$\exists K > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in M : |g_n(x)| \leq K,$$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na M.

Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \rightrightarrows \quad \text{na } M.$$

Důkaz. Označme
$$M^{\downarrow} = \{x \in M;\ \{g_n(x)\} \text{ je nerostoucí}\}$$
a
$$M^{\uparrow} = \{x \in M;\ \{g_n(x)\} \text{ je neklesající}\}.$$
Potom dle (a) platí $M = M^{\downarrow} \cup M^{\uparrow}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že
$$\forall m, n \in \mathbb{N},\ m \geq n \geq n_0\ \forall x \in M : \left| \sum_{j=n}^{m} f_j(x) \right| < \varepsilon.$$
Zvolme $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n$ a každé $x \in M$ označme
$$\sigma_k(x) = \sum_{j=n}^{k} f_j(x).$$
Potom
$$\forall k \in \mathbb{N},\ k \geq n\ \forall x \in M : |\sigma_k(x)| < \varepsilon. \tag{11.3}$$
Zvolme $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$. Z Abelovy parciální sumace vyplývá, že
$$\forall x \in M : \sum_{j=n}^{m} f_j(x) g_j(x) = \sum_{j=n}^{m-1} \sigma_j(x) \bigl(g_j(x) - g_{j+1}(x)\bigr) + \sigma_m(x) g_m(x). \tag{11.4}$$
Zvolme $x \in M^{\downarrow}$. Potom z předpokladu (a) a odhadu (11.3) vyplývá, že
$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=n}^{m} f_j(x) g_j(x) \right| &\leq \sum_{j=n}^{m-1} |\sigma_j(x)| \bigl(g_j(x) - g_{j+1}(x)\bigr) + |\sigma_m(x)||g_m(x)| \\ &< \varepsilon \sum_{j=n}^{m-1} \bigl(g_j(x) - g_{j+1}(x)\bigr) + \varepsilon |g_m(x)| \\ &= \varepsilon \left(g_n(x) - g_m(x)\right) \leq 3K\varepsilon. \end{aligned}$$
Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \rightrightarrows$ na $M^{\downarrow}$. Obdobně lze dokázat, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \rightrightarrows$ na $M^{\uparrow}$. Protože $M = M^{\downarrow} \cup M^{\uparrow}$, plyne odtud tvrzení věty. ■

11.3.7. Věta (Dirichletovo kritérium stejnoměrné konvergence)**.** Nechť M je množina, $f_n \colon M \to \mathbb{R}$, $g_n \colon M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Nechť platí

(i) pro každé $x \in M$ je posloupnost reálných čísel $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ monotónní (libovolným způsobem),

(ii) $g_n \rightrightarrows 0$,

(iii) řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ má **stejnoměrně omezené částečné součty na** M, tj.
$$\exists K \in \mathbb{R}\ \forall m \in \mathbb{N}\ \forall x \in M : \left| \sum_{j=1}^{m} f_j(x) \right| \leq K.$$

Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \rightrightarrows \quad \text{na } M.$$

Důkaz. Označme $M^{\downarrow}$ a $M^{\uparrow}$ stejné množinu jako v důkazu Věty 11.3.6. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu díky předpokladu (b) nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq 2$, takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\ \forall x \in M : |g_n(x)| < \varepsilon.$$

Zvolme $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n$ a každé $x \in M$ označme

$$\sigma_k(x) = \sum_{j=n}^{k} f_j(x).$$

Potom dle předpokladu (c) platí pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n$, a každé $x \in M$

$$|\sigma_k(x)| = \left|\sum_{j=1}^{k} f_j(x) - \sum_{j=1}^{n-1} f_j(x)\right| \leq \left|\sum_{j=1}^{k} f_j(x)\right| + \left|\sum_{j=1}^{n-1} f_j(x)\right| \leq 2K.$$

Zvolme $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$, a $x \in M^{\downarrow}$. Potom dle předpokladu (a), platí

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=n}^{m} f_j(x) g_j(x)\right| & \sum_{j=n}^{m-1} |\sigma_j(x)| \big(g_j(x) - g_{j+1}(x)\big) + |\sigma_m(x)||g_m(x)| \\
&\leq 2K \sum_{j=n}^{m-1} \big(g_j(x) - g_{j+1}(x)\big) + 2K|g_m(x)| \\
&= 2K\,(g_n(x) - g_m(x)) + 2K|g_m(x)| \\
&\leq 2K\,(|g_n(x)| + |g_m(x)| + |g_m(x)|) < 6K\varepsilon.
\end{aligned}$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \rightrightarrows$ na $M^{\downarrow}$. Obdobně lze dokázat, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \rightrightarrows$ na $M^{\uparrow}$. Protože $M = M^{\downarrow} \cup M^{\uparrow}$, plyne odtud tvrzení věty. ■

11.3.8. Poznámka. Pro každé $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ mají řady $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$ stejnoměrně omezené částečné součty na $[\delta, \pi - \delta]$. To plyne ihned z Příkladů 3.3.7 a 3.3.8.

11.3.9. Příklady. (a) Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx) \arccos(\frac{n-1}{n})$ je lokálně stejnoměrně konvergentní na $(0, \pi)$.

(b) Dokažte, že řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{\alpha}}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^{\alpha}}$, kde $\alpha \in (0, \infty)$, jsou lokálně stejnoměrně konvergentní na $(0, \pi)$.

(c) Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x^2}} \operatorname{arctg}(nx)$ je stejnoměrně konvergentní na $\mathbb{R}$.

Řešení. (a) Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $f_n(x) = \sin(nx)$ a $g_n(x) = \arccos(\frac{n-1}{n})$, $x \in (0, \pi)$ (funkce g_n jsou tedy konstantní na $(0, \pi)$). Nechť $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Podle poznámky 11.3.8 má řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ má stejnoměrně omezené částečné součty na

$[\delta, \pi - \delta]$. Posloupnost $\{g_n(x)\}$ je klesající a splňuje $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$. Protože tato posloupnost nezávisí na x, máme $g_n \rightrightarrows 0$ na $(0, \pi)$. Z Dirichletova kritéria tedy plyne, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \rightrightarrows$ na $[\delta, \pi - \delta]$. Je-li $[a, b]$ libovolný interval splňující $0 < a < b < \pi$, potom k němu nalezneme $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ takové, že $[a, b] \subset [\delta, \pi - \delta]$. Z již dokázaného tvrzení víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \rightrightarrows$ na $[\delta, \pi - \delta]$, a tedy i na $[a, b]$. Odtud a z Věty 11.1.10 vyplývá, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$ na $(0, \pi)$.

(b) Důkaz je podobný jako u tvrzení (a), přičemž klademe $g_n(x) = n^{-\alpha}$, $x \in \mathbb{R}$. Stačí si pouze uvědomit, že i v tomto případě platí $g_n \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$ a $\{g_n\}$ je klesající posloupnost.

(c) Důkaz provedeme ve dvou krocích. Nejprve se budeme věnovat řadě $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x^2}}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položíme $f_n(x) = (-1)^n$ a $g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n+x^2}}$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ má stejnoměrně omezené částečné součty na $\mathbb{R}$ a posloupnost $\{g_n(x)\}$ je pro každé $x \in \mathbb{R}$ klesající. Navíc pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $|g_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, takže $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x)| = 0$, a tedy $g_n \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$. Z Dirichletova kritéria tedy plyne, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x^2}} \rightrightarrows$ na $\mathbb{R}$.

Ve druhém kroku položíme $f_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x^2}}$ a $g_n = \operatorname{arctg}(nx)$. Z prvního kroku víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na $\mathbb{R}$. Posloupnost $\{g_n(x)\}$ je pro každé $x \in \mathbb{R}$ monotónní (nerostoucí pro $x \in (-\infty, 0]$ a neklesající pro $x \in [0, \infty)$. Navíc pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|g_n(x)| \leq \frac{\pi}{2}$. Z Abelova kritéria tedy plyne, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x^2}} \operatorname{arctg}(nx) \rightrightarrows$ na $\mathbb{R}$. ♣

11.3.10. Věta (záměna sumy a derivace). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je řada funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ splňující

(i) f_n má vlastní derivaci na omezeném intervalu (a, b), $n \in \mathbb{N}$,
(ii) existuje $x_0 \in (a, b)$ takové, že je číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ konvergentní,
(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n' \rightrightarrows$ na (a, b).

Potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na (a, b) a pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\Big)'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Důkaz. Položme $g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in (a, b)$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ má g_n vlastní derivaci na (a, b), posloupnost $\{g_n(x_0)\}$ je konvergentní a posloupnost $\{g_n'\}$ je stejnoměrně konvergentní na (a, b). Podle Věty 11.1.13 tedy existuje funkce $g\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ taková, že $g_n \rightrightarrows g$ a $g_n' \rightrightarrows g'$ na (a, b). Odtud plyne tvrzení věty, neboť zřejmě platí $g = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$. ■

11.3.11. Věta (záměna sumy a Newtonova integrálu). Nechť (a, b) je omezený neprázdný interval a nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je řada funkcí splňující

(i) $f_n \in \mathcal{N}(a, b)$,
(ii) řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně k funkci f na (a, b).

Potom $f \in \mathcal{N}(a,b)$ a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty}(N)\int_a^b f_n = (N)\int_a^b f.$$

Důkaz. Použijeme Větu 11.1.15 na posloupnost funkcí $\{\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Odtud ihned plyne tvrzení. ■

11.3.12. Věta (o lokálně stejnoměrné konvergenci mocninné řady)**.** Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada, přičemž $x_0 \in \mathbb{R}$, $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, s poloměrem konvergence $\varrho \in (0,\infty]$. Potom tato řada konverguje lokálně stejnoměrně na intervalu $(x_0-\varrho, x_0+\varrho)$.

Důkaz. Nechť $r \in (0,\varrho)$. Potom pro každé $x \in [x_0-r, x_0+r]$ platí $|a_n(x-x_0)^n| \leq |a_n|r^n$. Číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|r^n$ je konvergentní, a tedy podle Weierstrassova kritéria je řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ stejnoměrně konvergentní na $[x_0-r, x_0+r]$. Odtud a z Věty 11.1.10 vyplývá, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ stejnoměrně konvergentní na $[x_0-r, x_0+r]$. Odtud a z Věty 11.1.10 vyplývá, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ lokálně stejnoměrně konvergentní na $(x_0-\varrho, x_0+\varrho)$. ■

11.3.13. Poznámka. Ukážeme, jak z Abelova kritéria snadno vyplývá tvrzení Abelovy věty (Věta 7.3.2). Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada a nechť ϱ je její poloměr konvergence, přičemž $\varrho \in (0,\infty)$. Předpokládejme, že $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varrho^n$ konverguje. Pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [x_0, x_0+\varrho]$ položme $f_n(x) = a_n\varrho^n$ a $g_n(x) = \frac{(x-x_0)^n}{\varrho^n}$. Potom je řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ stejnoměrně konvergentní na $[x_0, x_0+\varrho]$, $\{g_n\}$ je posloupnost stejně omezených funkcí (s konstantou omezenosti rovnou jedné) a pro každé $x \in [x_0, x_0+\varrho]$ je posloupnost $\{g_n(x)\}$ nerostoucí. Podle Abelova kritéria je tedy řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ stejnoměrně konvergentní na $[x_0, x_0+\varrho]$. Podle Mooreovy-Osgoodovy věty pak platí

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0+\varrho}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n &= \lim_{x\to x_0+\varrho}\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k} a_n(x-x_0)^n \\
&= \lim_{k\to\infty}\lim_{x\to x_0+\varrho}\sum_{n=0}^{k} a_n(x-x_0)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\varrho^n.
\end{aligned}$$

Odtud vyplývá tvrzení Abelovy věty.

11.4. Teoretické příklady ke stejnoměrné konvergenci posloupností a řad funkcí

11.4.1. Příklad. Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ jsou posloupnosti funkcí z M do $\mathbb{C}$ konvergující stejnoměrně k $f: M \to \mathbb{C}$, respektive $g: M \to \mathbb{C}$. Ukažte následující tvrzení.

(a) Platí $f_n + g_n \rightrightarrows f + g$.
(b) Jsou-li posloupnosti $\{f_n\}$ a $\{g_n\}$ omezené, platí $f_n g_n \rightrightarrows fg$.
(c) Dokažte, že bez předpokladu omezenosti je tvrzení (b) obecně neplatné.
(d) Jsou-li funkce f_n stejnoměrně spojité, je f stejnoměrně spojitá.

Řešení. (a) Tvrzení plyne z odhadu

$$\|(f_n + g_n) - (f + g)\|_\infty \le \|f_n - f\|_\infty + \|g_n - g\|_\infty .$$

(b) Nechť $M \in (0, \infty)$ splňuje $\|f_n\|_\infty + \|g_n\|_\infty \le M$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak platí

$$\|g\|_\infty = \sup_{x\in M} |g(x)| = \sup_{x\in M} (\lim |g_n(x)|) \le \sup_{x\in M} |g_n(x)| = \|g_n\|_\infty \le M,$$

tj. g je též omezená číslem M. Tedy máme odhad

$$\begin{aligned} \|f_n g_n - fg\|_\infty &= \|f_n g_n - f_n g + f_n g - fg\|_\infty \\ &\le \|f_n\| \, \|g_n - g\| + \|g\| \, \|f_n - f\| \\ &\le M \left(\|g_n - g\| + \|f_n - f\|\right), \end{aligned}$$

který implikuje $f_n g_n \rightrightarrows fg$.

(c) Uvažujme prostor $\mathbb{R}$ s funkcemi definovanými pro $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ jako $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$, $f(x) = x$, $g_n(x) = \frac{1}{n}$, $g = 0$. Pak

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \to 0$$

a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x) - g(x)| = \frac{1}{n} \to 0.$$

Tedy $f_n \rightrightarrows f$ a $g_n \rightrightarrows g$. Na stranu druhou však neplatí $f_n g_n \rightrightarrows fg$, jelikož

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) g_n(x) - f(x) g(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} x \right| = \infty.$$

(d) Nechť $\varepsilon \in (0, \infty)$ je dáno. Nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Nechť $\delta \in (0, \infty)$ ˇje takové, že $|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ pro každou dvojici $x, y \in M$ splňující $\rho(x, y) < \delta$. Pak pro taková x, y platí

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| < 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Tedy f je stejnoměrně spojitá. ♣

11.4.2. Příklad. Nechť M je množina a $f_n : M \to \mathbb{C}$ je posloupnost funkcí splňující

$$\|f_n - f_m\|_\infty \leq |a_n - a_m|, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

pro nějakou konvergentní posloupnost čísel $\{a_n\}$. Pak $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na M.

Řešení. Mějme $\varepsilon \in (0, \infty)$ dáno. Jelikož je posloupnost $\{a_n\}$ konvergentní, splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku, a tak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|a_n - a_m| < \varepsilon$ pro každé indexy $n, m \geq n_0$. Pro tato n, m pak máme

$$\sup_{x \in M} |f_n(x) - f_m(x)| \leq |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Tedy posloupnost $\{f_n\}$ splňuje podmínku z Věty 11.1.12, a tedy $\{f_n\}$ je stejnoměrně konvergentní. ♣

11.4.3. Příklad. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná, přičemž f' je stejnoměrně spojitá. Pak posloupnost

$$g_n(x) = n\left(f(x + \frac{1}{n}) - f(x)\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

konverguje stejnoměrně k f'.

Ukažte, že pouhá spojitost f' ke stejnému závěru nestačí.

Řešení. Jelikož

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad x \in \mathbb{R},$$

platí dle Heineovy věty 4.2.14

$$\lim_{n \to \infty} g_n(x) = f'(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

K dokončení důkazu stačí ověřit, že je posloupnost $\{g_n\}$ stejnoměrně cauchyovská. Mějme tedy $\varepsilon \in (0, \infty)$ dáno. Zvolme $\delta \in (0, \infty)$ takové, že $|f'(x) - f'(y)| < \varepsilon$, kdykoliv $x, y \in \mathbb{R}$ splňují $|x - y| < \delta$. Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je větší než $\frac{1}{\delta}$ a nechť $n, m \in \mathbb{N}$ jsou větší než n_0. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ najdeme dle Lagrangeovy věty 5.2.4 $\alpha \in (x, x + \frac{1}{n})$ a $\beta \in (x, x + \frac{1}{m})$ splňující

$$n\left(f(x + \frac{1}{n}) - f(x)\right) = f'(\alpha), \quad m\left(f(x + \frac{1}{m}) - f(x)\right) = f'(\beta).$$

Pak $|\alpha - \beta| \leq \max\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\} \leq \frac{1}{n_0} < \delta$, a tedy

$$|g_n(x) - g_m(x)| = \left|f'(\alpha) - f'(\beta)\right| < \varepsilon.$$

Protože $x \in \mathbb{R}$ bylo libovolné, máme

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |g_n(x) - g_m(x)| \leq \varepsilon.$$

Tím je důkaz první části tvrzení dokončen.

Uvažujme nyní funkci $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$. Pak platí pro $x \in \mathbb{R}$ rovnosti

$$g_n(x) = n\left((x + \frac{1}{n})^3 - x^3\right) = n\left(3x^2\frac{1}{n} + 3x\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right) = 3x^2 + 3x\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Tedy pro různé indexy n, m platí

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x) - g_m(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|3x(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}) + (\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2})\right| = \infty.$$

Proto není posloupnost $\{g_n\}$ stejnoměrně cauchyovská, a tedy ani stejnoměrně konvergentní. ♣

11.4.4. Příklad. Nechť $s \in \mathbb{N}$, X značí prostor všech polynomů na $\mathbb{R}$ stupně nejvýše s a $\{p_n\}$ je posloupnost v X. Dokažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní.

(i) Posloupnost $\{p_n\}$ konverguje lokálně stejnoměrně.
(ii) Existuje $s+1$ různých bodů $x_0, \dots, x_s$ v $\mathbb{R}$, takové, že $\{P_n(x_i)\}$ konverguje pro každé $i \in \{1, \dots, s+1\}$.
(iii) Posloupnosti koeficientů p_n konvergují.

Řešení. (i) $\Rightarrow$ (ii) platí zřejmě.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Nechť $p_n(x) = a_{n,s}x^s + a_{n,s-1}x^{s-1} + \dots + a_{n,1}x + a_{n,0}$, $n \in \mathbb{N}$. Matice systému lineárních rovnic pro neznámé $a_{n_0}, \dots, a_{n,s}$ je

$$\begin{aligned} a_{n,0} + a_{n,1}x_0 + \dots + a_{n,s}x_0^s &= p_n(x_0), \\ a_{n,0} + a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,s}x_1^s &= p_n(x_1), \\ &\dots \\ a_{n,0} + a_{n,1}x_s + \dots + a_{n,s}x_s^s &= p_n(x_s). \end{aligned} \tag{11.5}$$

je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^s \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_s & x_s^2 & \cdots & x_s^p \end{pmatrix},$$

což je matice s nenulovým determinantem číslo dle [**4**,]. Tedy má systém (11.5) jednoznačné řešení $a_{n,0}, \dots, a_{n,s}$. Toto řešení lze navíc vyjádřit jako

$$a_{n,i} = \frac{\det A_{n,i}}{\det A}, \quad i \in \{0, \dots, s\},$$

kde matice $A_{n,i}$ vznikne z matice A nahrazením i-tého sloupce vektorem pravých stran rovnice (11.5). Tedy konvergence hodnot posloupností $\{p_n(x_i)\}$, $i \in \{0, \dots, s\}$, implikuje konvergenci posloupností $\{a_{n,i}\}$, $i \in \{0, \dots, s\}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Nechť $p_n(x) = a_{n,s}x^p + a_{n,s-1}x^{s-1} + \cdots + a_{n,1}x^+a_{n,0}$, $n \in \mathbb{N}$, přičemž posloupnosti $\{a_{n,i}\}$ konvergují pro $i \in \{0, \dots, s\}$. Pak pro každý interval tvaru $[-M, M]$, $M \geq 1$, platí

$$\sup_{x\in[-M,M]} |p_n(x) - p_m(x)| \leq sM^s \sup_{i\in\{0,\dots,s\}} |a_{n,i} - a_{m,i}|,$$

tedy $\{p_n\}$ konverguje stejnoměrně na každém takovém intervalu, a proto lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}$. ♣

11.4.5. Příklad. Nechť $\{p_n\}$ je posloupnost polynomů na $\mathbb{R}$ stejnoměrně konvergující k f. Pak f je polynom.

Řešení. Nejprve ukažme, že existuje $s \in \mathbb{N}$ takové, že všechny polynomy p_n jsou stupně nejvýše s. Vezmeme totiž $\varepsilon = 1$ a nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n, m \geq n_0$ platí

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |p_n(x) - p_m(x)| < 1. \tag{11.6}$$

Jsou-li nyní p, q dva polynomy splňující (11.6), pak st $p =$ st q, Vskutku, je-li

$$p(x) = a_i x^i + a_{i-1}x^{i-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad \text{a}$$
$$q(x) = b_j x^j + b_{j-1}x^{j-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

přičemž $a_i b_j \neq 0$, $i < j$, pak $p - q$ je polynom stupně j, a tedy

$$\lim_{x\to\infty} |q(x) - p(x)| = \infty.$$

To je ovšem spor s (11.6). Proto st $p =$ st q.

Tedy dostáváme, že všechny polynomy p_n jsou stupně nejvýše s pro nějaké $s \in \mathbb{N}$. Dle Příkladu 11.4.4 proto konvergují posloupnosti koeficientů polynomů p_n, řekněme k číslům $a_s, a_{s-1}, \cdots, a_0$. Pak zjevně $p_n(x) \to p(x) = a_s x^s + a_{s-1}x^{s-1} + \cdots + a_x + a_0$. Protože však $p_n \rightrightarrows f$, platí $f = p$, a f je tedy polynom. ♣

11.4.6. Příklad. Nechť $f_n : (M, \rho) \to \mathbb{C}$ je bodově konvergentní stejně spojitá posloupnost na kompaktním metrickém prostoru M. Pak $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně.

Nalezněte příklad ukazující, že bez předpokladu kompaktnosti prostoru M tvrzení obecně neplatí.

Řešení. Nechť $\varepsilon \in (0, \infty)$ je dáno. Pro každé $x \in M$ nalezneme $r_x \in (0, \infty)$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $y \in B(x, r_x)$ platí $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$. Díky kompaktnosti vybereme body $x_1, \dots, x_k \in M$ takové, že $M \subset \bigcup_{i=1}^k B(x_i, r_{x_i})$. Protože $\{f_n\}$ konverguje bodově, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n, m \geq n_0$ platí

$$|f_n(x_i) - f_m(x_i)| < \varepsilon, \quad i \in \{1, \dots, k\}.$$

Nechť nyní $x \in M$ je libovolné. Nalezneme $i \in \{1, \dots, k\}$ splňující $x \in B(x_i, r_{x_i})$. Pak pro $n, m \geq n_0$ máme

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f_m(x_i)| + |f_m(x_i) - f_m(x)| \\ &< 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy $\{f_n\}$ je stejnoměrně cauchyovská, a proto stejnoměrně konvergentní.

Abychom nalezli požadovaný příklad, uvažujme funkce $f_n(x) = \frac{x}{n}$, $x \in \mathbb{R}$. Pak $f_n \to 0$. Dále jsou všechny funkce f_n 1-lipschitzovské, a tedy je systém $\{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ stejně spojitý. Posloupnost $\{f_n\}$ však nekonverguje stejnoměrně k 0, jelikož

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = \infty.$$

♣

11.4.7. Příklad. Najděte posloupnost $\{f_n\}$ spojitých funkcí na $[0,1]$ s hodnotami v $[0,1]$ takovou, že $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty = \infty$, ale $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně.

Řešení. Uvažujme spojité funkce $f_n\colon [0,1] \to [0,\frac{1}{n}]$, $n \in \mathbb{N}$, s těmito vlastnostmi:

$$f_n = \begin{cases} 0, & \text{vně intervalu } [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}], \\ \frac{1}{n}, & \text{v nějakém bodě intervalu } [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]. \end{cases}$$

Pak zjevně $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

Na druhou stranu však platí pro $n_0 \in \mathbb{N}$ a každé $k \in \mathbb{N}$ odhad

$$\sup_{x\in[0,1]} \sum_{n=n_0}^{n_0+k} f_n(x) \le \frac{1}{n_0}.$$

Tedy je řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ stejnoměrně konvergentní. ♣

11.4.8. Příklad. Nechť $f_n\colon (M,\rho) \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou takové funkce, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je stejnoměrně konvergentní. Nechť $f\colon M \to \mathbb{C}$ je omezená funkce na M. Pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} f(x) f_n(x)$ stejnoměrně konvergentní.

Ukažte, že bez předpokladu omezenosti f je tvrzení obecně neplatné.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $g_n = f$. Pak je pro každé $x \in M$ posloupnost $\{g_n(x)\}$ konstantní, a tudíž monotónní. Navíc je $\{g_n\}$ posloupnost stejně omezených funkcí. Podle Abelova kritéria (Věta 11.3.6) je tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} f(x) f_n(x)$ stejnoměrně konvergentní na M. ♣

11.4.9. Příklad. Nechť M je množina a $f_n\colon M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a $\sup_{x\in M} \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x) < \infty$. Nechť $\{c_n\}$ je posloupnost reálných čísel splňující $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$ konverguje absolutně stejnoměrně.

Řešení. Mějme $\varepsilon \in (0,\infty)$ dáno. Nechť $K = \sup_{x\in M} \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x)$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\sum_{n=n_0}^{n_0+k} c_n^2 < \varepsilon$. Pak pro $k \in \mathbb{N}$ a $x \in M$ platí dle Cauchyovy nerovnosti

$$\sum_{n=n_0}^{n_0+k} |c_n f_n(x)| \le \left(\sum_{n=n_0}^{n_0+k} c_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=n_0}^{n_0+k} f_n^2(x)\right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{\varepsilon K}.$$

Tedy je řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$ stejnoměrně cauchyovská, a tedy stejnoměrně konvergentní. ♣

11.4.10. Příklad. Nechť je $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ řada spojitých funkcí na $[0,1]$. Nechť konverguje stejnoměrně na $[0,1)$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(1)$ konverguje.

Řešení. Jelikož jsou funkce f_n spojité na $[0,1]$, platí pro každé $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, $m_1 \le m_2$, odhad

$$\sup_{x\in[0,1)} \left| \sum_{n=m_1}^{m_2} f_n(x) \right| = \sup_{x\in[0,1]} \left| \sum_{n=m_1}^{m_2} f_n(x) \right|.$$

Díky stejnoměrné cauchyovskosti řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na $[0,1)$ tedy dostáváme stejnoměrnou cauchyovskost této řady na $[0,1]$. Speciálně proto zadaná řada konverguje v bodě 1. ♣

11.4.11. Příklad. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je řada nezáporných spojitých funkcí na kompaktním metrickém prostoru M bodově konvergující ke spojité funkci f. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně k f na M.

Řešení. Posloupnost $\{s_n\}$ částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je neklesající. Tvrzení tedy plyne z Diniovy věty (Věta 11.1.17). ♣

11.4.12. Příklad. Nalezněte řadu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ reálných funkcí na metrickém prostoru M konvergující stejnoměrně na M, která je v každém $x \in M$ absolutně konvergentní, ale $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ nekonverguje stejnoměrně na M.

Řešení. Uvažujme řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n, \qquad x \in [0,1].$$

Definujme pro $x \in [0,1]$ a $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ funkce $f_n(x) = (-1)^n$, $g_n(x) = (1-x)x^n$. Pak $\{g_n(x)\}$ je nerostoucí posloupnost pro každé $x \in [0,1]$. Dále platí

$$\sup_{x\in[0,1]} g_n(x) = g_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to 0.$$

Tedy $g_n \rightrightarrows 0$. Konečně, řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ má stejně omezené částečné součty. Tedy naše řada konverguje stejnoměrně.

Dále $\sum_{n=0}^{\infty} |(-1)^n(1-x)x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$ je konvergentní v každém bodě $x \in [0,1]$.

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} |(-1)^n(1-x)x^n|$ však nekonverguje stejnoměrně, neboť

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n = \begin{cases} 1, & x \in [0,1), \\ 0, & x = 1, \end{cases}$$

což je nespojitá funkce na $[0,1]$. Řada spojitých funkcí tedy nemůže konvergovat stejnoměrně. ♣

11.4.13. Příklad. Nechť $f_n \colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou monotónní funkce. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ konverguje pro $x \in \{a,b\}$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ konverguje stejnoměrně na $[a,b]$.

Řešení. Díky monotonii funkcí f_n máme odhad

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \max\{|f_n(a)|, |f_n(b)|\}, \quad x \in [a,b].$$

Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} \max\{|f_n(a)|, |f_n(b)|\}$ je konvergentní, je dle Weierstrassova kritéria (Věta 11.3.3) řada $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ stejnoměrně konvergentní. ♣

11.4.14. Příklad. Ukažte, že na prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ neexistuje metrika ρ, která pro každou posloupnost $\{f_n\}$ v $\mathcal{C}([0,1])$ a $f \in \mathcal{C}([0,1])$ splňuje

$$\rho(f_n, f) \to 0 \iff f_n \to f.$$

Řešení. Nechť ρ je metrika splňující předepsanou podmínku. Přivedeme tento předpoklad ke sporu. Nechť $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ značí množinu všech konečných posloupností přirozených čísel. Pro $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ značíme délku s jako $|s|$. Symbol $s^\wedge n$, kde $n \in \mathbb{N}$, značí posloupnost s prodlouženou o n, tj. $s^\wedge n = (s_1, \dots, s_{|s|}, n)$. Symbolem $\emptyset$ značíme prázdnou posloupnost. V intervalu $[0,1]$ zkonstruujeme systémy nedegenerovaných intervalů $\{I_s;\ s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ a $\{J_s;\ s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ takové, že

(a) $I_\emptyset = J_\emptyset = [0,1]$,
(b) pro každé $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ platí $\overline{I_s} \subset J_s$,
(c) pro každé $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ je J_s otevřený interval,
(d) pro každé $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ a $n \in \mathbb{N}$ je $\overline{J_{s^\wedge n}} \subset I_s$,
(e) pro každé $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ je systém $\{\overline{J_{s^\wedge n}};\ n \in \mathbb{N}\}$ disjunktní.

Po chvilce rozvažování je zřejmé, že takové systémy množin je snadné sestrojit.

Pro každé $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ nyní najdeme spojitou funkci $f_s \in \mathcal{C}([0,1])$ s hodnotami v intervalu $[0,1]$, které splňuje

$$f_s(x) = \begin{cases} 1, & x \in \overline{I_s}, \\ 0, & x \notin J_s. \end{cases}$$

Z vlastnosti (e) je vidět, že

$$\lim_{n\to\infty} f_{s^\wedge n} = 0, \quad s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}.$$

Tedy

$$\lim_{n\to\infty} \rho(f_{s^\wedge n}, 0) = 0, \quad s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}. \tag{11.7}$$

Indukcí nyní sestrojíme posloupnost $\{s^n\}$ v $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ takovou, že s^n je délky n, s^{n+1} prodlužuje s^n a $\rho(f_{s^n}, 0) < \frac{1}{n}$. V prvním kroku využijeme vlastnost (11.7) pro $s = \emptyset$ a najdeme $s^1 \in \mathbb{N}^1$ takové, že $\rho(f_{s^1}, 0) < 1$.

Mějme nyní posloupnosti $s_1, \dots, s_n$ v $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ takové, že pro $i \in \{1, \dots, n\}$ je s^i délky i, $\rho(f_{s^i}, 0) < \frac{1}{i}$ a s^i prodlužuje s^{i-1} pro $i \in \{2, \dots, n\}$. Použijeme vlastnost (11.7) pro s^n a najdeme $k \in \mathbb{N}$ takové, že $\rho(f_{s^n{}^\wedge k}, 0) < \frac{1}{n+1}$. Položíme $s^{n+1} = s^n{}^\wedge k$. Tím je konstrukce ukončena.

Vzhledem k tomu, že $\rho(f_{s^n}, 0) \to 0$, $f_{s^n} \to 0$ dle našeho předpokladu. Vezmeme-li však posloupnost intervalů $\{\overline{I_{s^n}}\}$, pak se jedná a monotónní posloupnost kompaktních množin v $[0,1]$. Jejich průnik tedy obsahuje nějaký bod (vizte Větu ??). V tomto bodě jsou ale všechny funkce f_{s^n} rovny 1, což je spor s jejich bodovou konvergencí k 0. ♣

11.5. Početní příklady ke stejnoměrné konvergenci posloupností a řad funkcí

11.5.1. Příklad. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) = x^n - x^{n+1}, \quad g_n(x) = x^{2n} - x^{3n}, \quad x \in (0,1).$$

Řešení. Zjevně platí $f_n \to 0$ a $g_n \to 0$ na $(0,1)$. Jelikož

$$f_n'(x) = x^{n-1}\left(n - (n+1)x\right), \quad x \in (0,1),$$

nabývá f_n maxima v bodě $x = \frac{n}{n+1}$ o hodnotě

$$f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}.$$

Tedy

$$\max_{x\in(0,1)} |f_n(x)| = \max_{x\in(0,1)} f_n(x) = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) \to 0.$$

Proto $f_n \rightrightarrows 0$ na $(0,1)$.

Naproti tomu $\{g_n\}$ nekonverguje stejnoměrně na $(0,1)$. Spočítáme-li totiž

$$g_n'(x) = nx^{2n-1}\left(2 - 3x^n\right), \quad x \in (0,1),$$

dostaneme, že

$$\max_{x\in(0,1)} |g_n(x)| = \max_{x\in(0,1)} g_n(x) = g_n\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 \not\to 0.$$

Platí však, že $g_n \rightrightarrows 0$ na každé množině tvaru $(0,q)$, kde $q \in (0,1)$, a tedy $g_n \rightrightarrows 0$ lokálně stejnoměrně na $(0,1)$. Mějme totiž $q \in (0,1)$ libovolné. Zvolíme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{n}} > q$ pro $n \geq n_0$. Pak

$$\max_{x\in(0,q)} g_n(x) = g_n(q), \quad n \geq n_0,$$

a tedy $\max_{x\in(0,q)} g_n(x) \to 0$. ♣

11.5.2. Příklad. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Řešení. Zřejmě $f_n(x) \to f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Odhadneme rozdíl $|f_n - f|$ na $\mathbb{R}$ a dostaneme

$$0 \leq \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{x^2} = \frac{1}{n^2} \frac{1}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}} \leq \frac{1}{n} \to 0,$$

a tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$. ♣

11.5.3. Příklad. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right), \quad x \in (0, \infty).$$

Řešení. Jelikož

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}},$$

konvergují funkce f_n bodově k fubnkci $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x \in (0, \infty)$.

Odhadujeme $|f - f_n|$ jako

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} &= \frac{\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{n}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}\right)^2} \end{aligned}$$

Z tohoto vyjádření vidíme, že

$$\sup_{x \in (0,\infty)} |f(x) - f_n(x)| \geq \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{n}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}\right)^2} = \infty,$$

tj. $\{f_n\}$ nekonvergují stejnoměrně na $(0, \infty)$.

Na druhou stranu $f_n \rightrightarrows f$ na každém intervalu tvaru (q, ∞), kde $q > 0$. Vskutku, je-li $q > 0$, z přechozího máme odhad

$$\sup_{x \in (q,\infty)} |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2\sqrt{q}\left(2\sqrt{q}\right)^2} \to 0.$$

Tedy $f_n \rightrightarrows f$ na (q, ∞). Proto $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na $(0, \infty)$. ♣

11.5.4. Příklad. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Zjevně
$$f_n(x) \to f(x) = x\frac{\pi}{2}\operatorname{sign} x = \frac{\pi}{2}|x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$
Označme $g(y) = \left|y \operatorname{arctg} y - \frac{\pi}{2}|y|\right|$, $y \in \mathbb{R}$. Pak pro $x \in \mathbb{R}$ platí
$$|f_n(x) - f(x)| = \left|x \operatorname{arctg} nx - \frac{\pi}{2}|x|\right| = \frac{1}{n}\left|nx \operatorname{arctg} nx - \frac{\pi}{2}|nx|\right|.$$
Tedy
$$\max_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}\sup_{y\in\mathbb{R}} g(y).$$
K dokončení důkazu stejnoměrné konvergence tak stačí ukázat omezenost funkce g. Ta je však na $\mathbb{R}$ zjevně spojitá a platí
$$\lim_{y\to\infty} g(y) = \left|\lim_{y\to\infty}\frac{\operatorname{arctg} y - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{y}}\right| = 1,$$
$$\lim_{y\to-\infty} g(y) = \left|\lim_{y\to-\infty}\frac{\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{y}}\right| = 1,$$
tedy g je omezená na $\mathbb{R}$. ♣

11.5.5. Příklad. Nechť M je množina a $f_n\colon M \to \mathbb{R}$ jsou nenulové funkce stejnoměrně konvergující k 0 na M. Nechť f je reálná funkce splňující $\lim_{t\to 0} f(t) = L$, kde $L \in \mathbb{R}$. Pak $f \circ f_n \rightrightarrows L$ na M.

Řešení. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Zvolíme $\delta > 0$ takové, že $f\,(P(0,\delta) \subset B(L,\varepsilon)$. Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je takové, že $\sup_{x\in M}|f_n(x)| < \delta$ pro $n \geq n_0$. Pak pro $n \geq n_0$ a $x \in M$ platí $f_n(x) \in P(0,\delta)$, a tedy
$$|f(f_n(x)) - L| < \varepsilon.$$
Proto $f \circ f_n \rightrightarrows L$ na M. ♣

11.5.6. Příklad. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí
$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Jelikož
$$f_n(x) = \begin{cases} e^{x\frac{\log(1+\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}}}, & x \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\\ 1, & x = 0,\end{cases}$$
platí $f_n(x) \to f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Jelikož
$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x) - f(x)| \geq \lim_{x\to\infty}\left|\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - e^x\right| = \infty,$$
konvergence není stejnoměrná.

Uvažujme však libovolný interval tvaru $[-q, q]$, kde $q > 0$. Uvažujme funkce $x \mapsto \frac{x}{n}$, $x \in [-q, q]$. Jelikož $\left|\frac{x}{n}\right| \leq \frac{q}{n}$, platí $\frac{x}{n} \rightrightarrows 0$ na $[-q, q]$. Jelikož $\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$, Příklad 11.5.5 dává

$$\frac{\log(1+\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}} \rightrightarrows 1, \quad \text{na } [-q, q] \setminus \{0\}.$$

Díky omezenosti funkce $x \mapsto x$ na $[-q, q]$ pak plyne

$$n \log(1 + \frac{x}{n}) - x = x \left(\frac{\log(1+\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}} - 1 \right) \rightrightarrows 0 \quad \text{na } [-q, q] \setminus \{0\}.$$

Opětovným použitím Příkladu 11.5.5 a z omezenosti funkce $x \mapsto e^x$ na $[-q, q]$ dostáváme

$$e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x - e^{n \log(1+\frac{x}{n})} = e^x \left(1 - e^{n \log(1+\frac{x}{n}) - x}\right) \rightrightarrows 0$$

na $[-q, q] \setminus \{0\}$. Tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $[-q, q] \setminus \{0\}$. Jelikož $f_n(0) = f(0)$, platí $f_n \rightrightarrows f$ na množině $\{0\}$. Tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $[-q, q]$.

Proto $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na $\mathbb{R}$. ♣

11.5.7. Příklad. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}.$$

Řešení. pokud $x = -1$ a $n \in]N$ je liché, není $f_n(x)$ definována. Tedy uvažujeme pouze $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^{-n}+1} = 1, & x \in (-\infty, -1), \\ 0, & x \in (-1, 1), \\ \frac{1}{2}, & x = 1, \\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^{-n}+1} = 1, & x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Jelikož limitní funkce f není spojitá v bodě 1, konvergence není stejnoměrná na žádném okolí 1. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Ukážeme, že $f_n \rightrightarrows f$ na $(-\infty, -1-\varepsilon] \cup [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon] \cup [1+\varepsilon, \infty)$. Vskutku, toto plyne z odhadů

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} \left|\frac{1}{1+x^n}\right| \leq |1| \, |x|^n - 1 \leq \frac{1}{|-1-\varepsilon|^n - 1}, & x \in (-\infty, -1-\varepsilon], \\ |x^n| \leq (1-\varepsilon)^n, & x \in [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon], \\ \left|\frac{1}{1+x^n}\right| \leq \frac{1}{(1+\varepsilon)^n}, & x \in [1+\varepsilon, \infty). \end{cases}$$

Nakonec ukažme, že konvergence není stejnoměrné na žádném levém nebo pravém okolí bodu -1. Pro $x < -1$ totiž máme

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{|x^n + 1|},$$

což je výraz konvergující k ∞ pro každé $n \in \mathbb{N}$ liché $x \to -1_-$. Tedy

$$\sup_{x\in(-\infty,-1)} |f_n(x) - f(x)| = \infty, \quad n \in \mathbb{N} \text{ liché.}$$

Podobně pro x z pravého okolí bodu -1 a $n \in \mathbb{N}$ sudé máme

$$\lim_{x\to-1_+} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{x\to-1_+} \frac{|x|^n}{1+x^n} = \frac{1}{2}.$$

♣

11.5.8. Příklad. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) = \log\left(1 + \frac{1}{nx^2}\right)\sqrt{n^2+1}.$$

Řešení. Zjevně je třeba uvažovat $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pro tato x máme

$$f_n(x) = \frac{\log\left(1 + \frac{1}{nx^2}\right)}{\frac{1}{nx^2}} \cdot \sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}}\frac{1}{x^2} \to f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Jelikož

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| &\geq \left| f_n\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right) - f\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right)\right| = \left|\log 2\sqrt{n^2+2} - n\right| \\ &= n\left(\log 2\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}} - 1\right) \to \infty,\end{aligned}$$

konvergence není na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stejnoměrná.

Uvažujme libovolné $q > 0$ a množinu $(-\infty, -q] \cup [q, \infty)$. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Jelikož $\log(1+t) = t + \varphi(t)$, kde $\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t)}{t} = 0$, existuje $\delta \in (0, \varepsilon)$ takové, že $\left|\frac{\varphi(t)}{t}\right| < \varepsilon$ kdykoliv $t \in P(0, \delta)$. Nechť $M > 0$ je takové, že

$$\frac{\sqrt{n^2+2}}{n} \leq M, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je takové, že $\frac{1}{nq^2} < \delta$ a

$$\left|\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}} - 1\right| < \varepsilon$$

pro $n \geq n_0$. Pak pro libovolné $x \in (-\infty, -q] \cup [q, \infty)$ a $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, máme

$$\frac{1}{nx^2} \leq \frac{1}{nq^2} < \delta,$$

a tedy

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= \left| \sqrt{n^2+2} \left(\frac{1}{nx^2} + \frac{\varphi\left(\frac{1}{nx^2}\right)}{\frac{1}{nx^2}} \cdot \frac{1}{nx^2} \right) - \frac{1}{x^2} \right| \\
&\le \left| \frac{1}{x^2} \left(\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}} - 1 \right) \right| + \varepsilon \frac{1}{q^2} \frac{\sqrt{n^2+2}}{n} \\
&\le \varepsilon \left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^2} M \right).
\end{aligned}$$

Tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $(-\infty, -q] \cup [q, \infty)$. ♣

11.5.9. Příklad. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) = (x+1)^3 \operatorname{arccotg}(-nx^3), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Jelikož

$$-nx^3 \to \begin{cases} -\infty, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ \infty, & x < 0, \end{cases}$$

platí

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} (x+1)^3 \pi, & x > 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Jelikož f není spojitá v 0, konveregence není stejnoměrná na žádném okolí bodu 0.

Uvažujme libovolné $q > 0$ a množinu $(-\infty, -q]$. Funkce $g(y) = y \operatorname{arccotg} y$, $y \in [0, \infty)$, je omezená, neboť je spojitá a

$$\lim_{y\to\infty} g(y) = \lim_{y\to\infty} \frac{\operatorname{arccotg} y}{\frac{1}{y}} = 1.$$

Pro $x \in (-\infty, -q]$ máme odhad

$$\begin{aligned}
|f_n(x)| &= \left| (x+1)^3 \frac{1}{nx^3} \left((-nx^3) \operatorname{arccotg}(-nx^3) \right) \right| \\
&\le \frac{1}{n} \sup_{x \in (-\infty, -q]} \left| \frac{x+1}{x} \right|^3 \sup_{y \in [0,\infty)} g(y),
\end{aligned}$$

což je výraz konvergující pro $n \to \infty$ k 0. Tedy $f_n \rightrightarrows 0$ na $(-\infty, -q]$.

Uvažujeme-li množinu $[q, \infty)$, dostaneme též stejnoměrnou konvergenci. Funkce

$$h \colon y \mapsto \left| (\pi - \operatorname{arccotg} y) y \right|, \quad y \in (-\infty, 0],$$

je totiž omezená, takže z odhadu platného pro $x \in [q, \infty)$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left|(x+1)^3 \left(\pi - \operatorname{arccotg}(-nx^3)\right)\right| \\ &= \frac{1}{n}\left|\frac{x+1}{x}\right|^3 \left|(-nx^3)(\pi - \operatorname{arccotg}(-nx^3))\right| \\ &\le \frac{1}{n} \sup_{x\in[q,\infty)} \left|\frac{x+1}{x}\right|^3 \sup_{(-\infty,0]} h \end{aligned}$$

dostáváme stejnoměrnou konvergenci na $[q, \infty)$. ♣

11.5.10. Příklad. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) = \sqrt{x} n^{-\sqrt{x}} \log n, \quad x \in [0, \infty).$$

Řešení. Jelikož

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \sqrt{x} \log n e^{-\sqrt{x}\log n}, & x > 0 \end{cases}$$

a $\lim_{t\to\infty} te^{-t} = 0$, platí $f_n \to 0$ na $[0, \infty)$.

Počítejme $\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,\infty)} f_n(x)$. Platí

$$f_n'(x) = e^{-\sqrt{x}\log n} \frac{\log n}{2}\left(-\log n + \frac{1}{\sqrt{x}}\right), \quad x > 0.$$

Tedy pokud $n \ge 2$, $f_n' > 0$ na $(0, \log^{-2} n)$ a $f_n' < 0$ na $(\log^{-2} n, \infty)$. Proto má f_n v bodě $\log^{-2} n$ maximum o hodnotě e^{-1}. Posloupnost $\{f_n\}$ tak nekonverguje stejnoměrně na $[0, \infty)$.

Uvažujeme-li však libovolný interval $[q, \infty)$, kde $q > 0$, dostaneme již na této množině stejnoměrnou konvergenci. Nalezneme totiž $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\log^{-2} n < q$ pro $n \ge n_0$. Pak pro $n \ge n_0$ platí

$$\sup_{x\in[q,\infty)} |f_n(x)| = f_n(q) \to 0,$$

což znamená $f_n \rightrightarrows 0$ na $[q, \infty)$. ♣

11.5.11. Příklad. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) = \sqrt[n]{x^n + 3^n}, \quad x \in [0, \infty).$$

Řešení. Máme

$$3 \le \sqrt[n]{x^n + 3^n} \le \sqrt[n]{2 \cdot 3^n} = 3\sqrt[n]{2}, \quad x \in [0, 3],$$

a

$$x \le \sqrt[n]{x^n + 3^n} \le \sqrt[n]{2x^n} = x\sqrt[n]{2}, \quad x \in (3, \infty).$$

Dle Věty2.2.44 platí

$$f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 3, & x \in [0,3], \\ x, & x \in (3,\infty). \end{cases}$$

Jelikož

$$(f_n - f)'(x) = \frac{1}{n}\,(x^n + 3^n)^{\frac{1}{n}-1}\, n x^{n-1} > 0, \quad x \in (0,3),$$

je $f_n - f$ nezáporná a rostoucí na $[0,3]$. Tedy

$$\sup_{x\in[0,3]} |f_n(x) - f(x)| \leq \sqrt[n]{23^n} - 3 = 3\left(\sqrt[n]{2} - 1\right) \to 0,$$

což znamená, že $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,3]$.

Na intervalu $[3,\infty)$ platí

$$(f_n - f)'(x) = \frac{1}{n}\,(x^n + 3^n)^{\frac{1}{n}-1}\, n x^{n-1} - 1 < 0, \quad x \in (3,\infty),$$

a tedy je $f_n - f$ klesající na $[3,\infty)$. Zjevně je $f_n - f > 0$, a proto

$$\sup_{x\in[3,\infty]} |f_n(x) - f(x)| \leq \sqrt[n]{23^n} - 3 = 3\left(\sqrt[n]{2} - 1\right) \to 0.$$

Tedy $f_n \rightrightarrows f$ i na $[3,\infty)$. Proto $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,\infty)$. ♣

11.5.12. Příklad. Vyšetřete stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je funkce $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^5x^2}$ lichá a v nekonečnu má limitu 0. Jelikož

$$f_n'(x) = \frac{n}{(1+n^5x^2)^2}\left(1 - n^5x^2\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

Má funkce v bodě $-\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ minimum a v bodě $\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ maximum. V absolutní hodnotě lze tak funkci f_n odhadnout číslem $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Jelikož řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ konverguje, zadaná řada konverguje stejnoměrně dle Věty 11.3.3. ♣

11.5.13. Příklad. Vyšetřete stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 + \frac{x^2}{n\log^2 n}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Jelikož $\log(1+t) \le t$, $t \in (-1, \infty)$, a řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$ konverguje, konverguje bodově i zadaná řada. Protože však

$$\lim_{x\to\infty} \log\left(1 + \frac{x^2}{n \log^2 n}\right) = \infty, \quad n \in \mathbb{N},$$

nekonvergují členy řady stejnoměrně k 0. Proto daná řada nekonverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$ dle Poznámky 11.3.2.

Uvažujme nyní libovolný interval $[-q, q]$, kde $q > 0$. Pak

$$\sup_{x\in[-q,q]} \log\left(1 + \frac{x^2}{n \log^2 n}\right) \le \frac{q^2}{n \log^2 n},$$

a tedy dle Věty 11.3.3 řada konverguje stejnoměrně na $[-q, q]$. ♣

11.5.14. Příklad. Ukažte, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

nekonverguje stejnoměrně na $(0, \pi)$.

Řešení. Použijeme Poznámku 11.3.2(a), tj. ukážeme, že daná řada na $(0, \pi)$ nesplňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Uvažujme libovolné $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\begin{aligned}\sup_{x\in(0,\pi)} \left| \sum_{k=n}^{2n} \frac{\sin kx}{k} \right| &\ge \sum_{k=n}^{2n} \frac{\sin(\frac{k}{2n})}{2n} \\ &\ge \frac{\sin(\frac{n}{2n})}{2n} \sum_{k=n}^{2n} 1 \ge \frac{\sin \frac{1}{2}}{2} \nrightarrow 0.\end{aligned}$$

Tedy řada nekonverguje stejnoměrně na $(0, \pi)$. ♣

11.5.15. Příklad. Zjistěte, zda je funkce

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{arctg} x^n}{\sqrt{n+1}}$$

spojitá na svém definičním oboru.

Řešení. Vyzkoumejme nejprve, pro jaké $x \in \mathbb{R}$ je řada konvergentní. Nechť nejprve $x \in [0, \infty)$. Položíme-li $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ a $b_n = \operatorname{arctg}(x^n)$, je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní (Věta 3.3.1) a posloupnost $\{b_n\}$ je omezená a monotónní (neklesající pro $x \ge 1$ a nerostoucí pro $x \in [0, 1]$). Dle Věty 3.3.5 tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje. Pokud $x \in (-1, 0)$, máme

$$(-1)^n \operatorname{arctg}(x^n) = \operatorname{arctg}(|x|^n) \le |x|^n,$$

a tedy řada konverguje dle Věty 3.2.2.

Pokud $x \in (-\infty, -1]$, platí

$$(-1)^n \operatorname{arctg}(x^n) = \operatorname{arctg}(|x|^n) \geq \operatorname{arctg} 1,$$

a proto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{arctg} x^n}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \infty.$$

Tedy $\mathcal{D}(f) = (-1, \infty)$.

Vyšetříme stejnoměrnou konvergenci na $[0, \infty)$. Položíme

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}, \quad g_n(x) = \operatorname{arctg}(x^n), \quad x \in [0, \infty).$$

Pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$, pro každé $x \in [0, \infty)$ je $\{g_n(x)\}$ monotónní a $|g_n(x)| \leq \frac{\pi}{2}$, $x \in [0, \infty)$. Dle Věty 11.3.6 daná řada konverguje stejnoměrně na $[0, \infty)$.

Ukážeme nyní, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{arctg} x^n}{\sqrt{n+1}}$ nekonverguje stejnoměrně na žádném pravém okolí bodu -1. Předpokládejme pro spor, že řada konverguje stejnoměrně na nějakém intervalu $(-1, -1+\delta)$. Položme

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n \operatorname{arctg} x^n}{\sqrt{n+1}}, \quad x \in (-1, -1+\delta).$$

Jelikož

$$\lim_{x \to -1_+} f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\pi}{4\sqrt{n+1}} = a_N \in \mathbb{R},$$

dle Věty 11.1.7 existuje vlastní limita $\lim_{N\to\infty} a_N$. To je však zřejmá nepravda, a tedy náš předpoklad o stejnoměrné konvergenci byl chybný.

Ukážeme však, že řada konverguje stejnoměrně na každém intervalu $[q, 0]$, kde $q \in (-1, 0)$. Pro $x \in [q, 0]$ totiž platí

$$\left| \frac{(-1)^n \operatorname{arctg}(x^n)}{\sqrt{n+1}} \right| \leq \frac{\operatorname{arctg}(|x|^n)}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{|x|^n}{\sqrt{n+1}} \leq |q|^n .$$

Jelikož je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |q|^n$ konvergentní, konverguje daná řada stejnoměrně na $[q, 0]$ dle Věty 11.3.3.

Řada tak konverguje lokálně stejnoměrně na $(-1, \infty)$, což zaručuje spojitost f na tomto intervalu, vizte Větu 11.1.8. ♣

11.5.16. Příklad. Spočtěte $f'(0)$, pokud

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(1 + \frac{x}{n})}{\sqrt{n}}.$$

Řešení. Označíme

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{\sin(1 + \frac{x}{n})}{\sqrt{n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pak

$$\left|f_n'(x)\right| = \left|(-1)^n \frac{\cos(1+\frac{x}{n})}{n\sqrt{n}}\right| \le \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Tedy na každém intervalu tvaru $(-q, q)$, kde $q > 0$, je $\sum_{n=1}^{\infty} f_n' \rightrightarrows$ dle Věty 11.3.3. Jelikož $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0) = \sin(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konverguje, jsou splněny předpoklady Věty **??**. Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na $(-q, q)$ a navíc

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x), \quad x \in (-q, q).$$

Tedy

$$f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos 1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

♣

11.5.17. Příklad. Určete definiční obor funkce

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\operatorname{sign}(\cos x))^n (2\cos(x))^{2n}}{\sqrt{\log n}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

a zjistěte, zda je na něm spojitá.

Řešení. Položme

$$f_n(x) = \frac{(\operatorname{sign}(\cos x))^n (2\cos(x))^{2n}}{\sqrt{\log n}} = \big(\operatorname{sign}(\cos x)\big)^n \frac{\left(4\cos^2 x\right)^n}{\sqrt{\log n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pokud $x \in \mathbb{R}$ splňuje $|\cos x| < \frac{1}{2}$, tj. $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tak

$$|f_n(x)| \le \left(4\cos^2 x\right)^n,$$

a tedy řada $\sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)$ konverguje absolutně. Pokud $|\cos x| > \frac{1}{2}$, tj. $x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tak $f_n(x) \nrightarrow 0$, a tedy řada $\sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)$ diverguje. Pokud $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ nebo $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pak $\cos x = \frac{1}{2}$ a $\operatorname{sign}\cos x = 1$, tedy

$$\sum_{n=2}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\log n}}$$

diverguje. Pokud $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ nebo $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pak $\cos x = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{sign}\cos x = -1$, a tedy

$$\sum_{n=2}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{\log n}}$$

konverguje dle Věty 3.3.1. Definiční obor f je tak

$$\mathcal{D}(f) = \left[\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)\right] + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Zkoumejme nyní stejnoměrnou konvergenci na intervalu $\left[\frac{\pi}{3}+\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right]$. Zde platí

$$|f_n(x)| \le \frac{\left(4\cos^2(\frac{\pi}{3}+\varepsilon)\right)^{2n}}{\sqrt{\log n}},$$

přičemž

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(4\cos^2(\frac{\pi}{3}+\varepsilon)\right)^{n}}{\sqrt{\log n}}$$

konverguje. Tedy $\sum_{n=2}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na $\left[\frac{\pi}{3}+\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right]$ dle Věty 11.3.3.

Na intervalu $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$ použijeme Větu 11.3.6. Řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{\log n}}$ totiž konverguje stejnoměrně, pro každé $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$ je $\left\{(4\cos^2 x)^n\right\}$ monotónní a $\left|(4\cos^2 x)^n\right| \le 1$. Tedy

$$\sum_{n=2}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{\log n}}(4\cos^2 x)^n$$

konverguje stejnoměrně na $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$. Tedy $\sum_{n=2}^{\infty} f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$ na $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

Na intervalu $\left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$ postupujeme obdobně.

Díky Větě 11.1.8 je tak f spojitá na $\mathcal{D}(f)$.

Ukažme ještě, že $\sum_{n=2}^{\infty} f_n$ nekonverguje stejnoměrně na $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$. Kdyby tomu tak bylo, tak z Věty 11.1.7 plyne existence vlastní limity

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{N} f_n\left(\frac{\pi}{3}\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{\sqrt{\log n}},$$

což není pravda. ♣

11.5.18. Příklad. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konveregenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{2x}{x^2+n^2}\right), \quad x \in [0,\infty).$$

Řešení. Jelikož $\log(1+t) \le t$, $t \in [0,\infty)$, máme pro $f_n(x) = \log\left(1+\frac{2x}{x^2+n^2}\right)$ odhad

$$0 \le \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2+n^2} \le 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje na $[0,\infty)$.

Pro libovolný interval $[0,q]$ též máme odhad

$$|f_n(x)| = f_n(x) \le \frac{q}{n^2}, \quad x \in [0,q],$$

což dle Věty 11.3.3 implikuje stejnoměrnou konvergenci na $[0,q]$.

Řada však nekonverguje stejnoměrně na $[0,\infty)$, neboť pro libovolné $N \in \mathbb{N}$ máme odhad

$$\sum_{n=N}^{2N} f_n(N) = \sum_{n=N}^{2N} \log\left(1+\frac{2N}{N^2+n^2}\right) \geq \sum_{n=N}^{2N} \log\left(1+\frac{2N}{N^2+(2N)^2}\right)$$
$$\geq N\log\left(1+\frac{2}{5N}\right) \to \frac{2}{5}$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ nesplňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku na $[0,\infty)$, takže daná řada zde nekonverguje stejnoměrně. ♣

11.5.19. Příklad. Nechť $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, a $x_0 \in \mathbb{R}$ jsou takové, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$$

konverguje. Ukažte, že pak řada konverguje stejnoměrně na $[x_0,\infty)$.

Řešení. Pro $x \in [x_0,\infty)$ máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} \cdot \frac{1}{n^{x-x_0}}.$$

Jelikož $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} \rightrightarrows$ a $\left\{\frac{1}{n^{x-x_0}}\right\}$ je monotónní omezená posloupnost, tvrzení plyne z Věty 11.3.6. ♣

11.5.20. Příklad. Ukažte, že funkce

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}, \quad x \in \mathbb{R},$$

má spojitou derivaci na $\mathbb{R}$ a spojitou druhou derivaci na $(0,2\pi)$.

Řešení. Zjevně platí $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Označme $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^3}$ a uvažujme řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\sin nx}{n}.$$

Z odhadu $|f_n'(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ a Věty 11.3.3 plyne stejnoměrná konvergence řady derivací na $\mathbb{R}$. Z Příkladu **??** plyne lokálně stejnoměrná konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n''$ na $(0,2\pi)$. Z Věty **??** a 11.1.8 tak plyne spojitost $f' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ na $\mathbb{R}$ a spojitost $f'' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n''$ na $(0,2\pi)$. ♣

11.5.21. Příklad. Dokažte, že Riemannova funkce zeta

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

splňuje $\zeta \in C^{\infty}(1,\infty)$.

Řešení. Postupujeme indukcí. Nechť $q > 1$ je libovolné. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$ konverguje, a tedy z Příkladu 11.5.19 plyne stejnoměrná konvergence dané řady na $[q, \infty)$. Tedy ζ je spojitá na $(1, \infty)$.

Dokážeme nyní, že pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí

$$\zeta^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^k n}{n^x}, \quad x \in (1, \infty).$$

Pro $k = 0$ vzorec zjevně platí. Předpokládejme jeho platnost pro nějaké $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^{k+1} n}{n^x}$$

konverguje lokálně stejnoměrně na $(1, \infty)$ (vizte Příklad 11.5.19), a tedy platí díky Větě **??** rovnost

$$\zeta^{(k+1)}(x) = \left(\zeta^k(x)\right)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \log^k n}{n^x}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \log^{k+1} n}{n^x}.$$

Tedy ζ je třídy C^∞ na $(1, \infty)$. ♣

11.5.22. Příklad. Zjistěte, kde jsou diferencovatelné funkce

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n + x}, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2}.$$

Řešení. (a) Označme

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n x}{n + x}, \quad g_n(x) = \frac{|x|}{n^2 + x^2}.$$

Nechť $N = \{-n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Ukážeme, že

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

na každé množině tvaru $[-q, q] \setminus N$. Nechť tedy $q > 0$ je libovolné. Zvolíme $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $n_0 > q$. Pak pro $x \in [-q, q]$ a $n \geq n_0$ platí

$$\frac{1}{(n + x)^2} \leq \frac{1}{(n - q)^2}.$$

Tedy máme

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{n^2}{(n + x)^2},$$

přičemž $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \rightrightarrows$, $\frac{n^2}{(n+x)^2} \le \frac{n^2}{(n-q)^2}$ a pro každé $x \in [-q,q]$ je posloupnost $\left\{\frac{n^2}{(n+x)^2}\right\}_{n=n_0}^{\infty}$ monotónní. (Vskutku,

$$\frac{n^2}{(n+x)^2} \ge \frac{(n+1)^2}{(n+1+x)^2}$$

právě tehdy, když

$$1 + \frac{1}{n+x} \ge 1 + \frac{1}{n}.$$

To však nastává právě tehdy, když $x \le 0$. Tedy daná posloupnost je nerostoucí, pokud $x \in [-q,0]$, a neklesající, pokud $x \in [0,q]$.) Řada $\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n'$ tak konverguje stejnoměrně na $[-q,q]$. Protože původní řada konverguje v bodě $x=0$, máme

$$\left(f(x) - \sum_{n=1}^{n_0-1} f_n(x)\right)' = \sum_{n=n_0}^{\infty} f_n'(x), \quad x \in [-q,q] \setminus N.$$

Z toho však dostáváme

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x), \quad x \in [-q,q] \setminus N.$$

Jelikož q bylo libovolné, je f diferencovatelná na $\mathbb{R} \setminus N$.

(b) Z odhadu $|g_n(x)| \le \frac{q}{n^2}$ platného pro $x \in [-q,q]$ vidíme, že řada definující g konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}$. Máme

$$g_n'(x) = \operatorname{sign} x \frac{n^2 - x^2}{n^2 + x^2}, \quad x \neq 0,$$

a tedy pro interval $(0,q)$ platí

$$\left|g_n'(x)\right| \le \frac{q(n^2+q^2)}{n^4}.$$

Jelikož je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q(n^2+q^2)}{n^4}$ konveregentní, $\sum_{n=1}^{\infty} g_n' \rightrightarrows$ na $(0,q)$. Tedy

$$g' = \sum_{n=1}^{\infty} g_n'$$

na $(0,\infty)$. Obdobně odvodíme, že $g' = \sum_{n=1}^{\infty} g_n'$ na $(-\infty,0)$.

Ukážeme nyní, že $g'(0)$ neexistuje. Díky Větě 11.1.7 máme

$$g_+'(0) = \lim_{h\to 0_+} \frac{g(h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+h^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

a obdobně $g_-'(0) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Tedy $g'(0)$ neexistuje. ♣

11.5.23. Příklad. Dokažte, že platí

$$\lim_{x\to 1-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(1+x^n)}=\lim_{x\to 1-}(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{1-x^{2n}}=\frac{\log 2}{2}$$

Řešení. (a) Dokážeme nejprve rovnost

$$\lim_{x\to 1-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(1+x^n)}=\frac{\log 2}{2}.$$

K tomu dle Věty 11.1.7 stačí ověřit stejnoměrnou konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(1+x^n)}$ na nějakém levém okolí bodu 1. Avšak $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\rightrightarrows$, $0\le\frac{x^n}{1+x^n}\le 1$ pro $x\in(0,1)$ a posloupnost $\left\{\frac{x^n}{1+x^n}\right\}$ je pro každé $x\in(0,1)$ monotónní. (To plyne ze vztahu

$$\frac{x^n}{1+x^n}=1-\frac{1}{1+x^n}.)$$

Tedy daná řada konverguje stejnoměrně a lze zaměnit limitní přechody. Dostáváme tak

$$\lim_{x\to 1-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(1+x^n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to 1-}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(1+x^n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}=\frac{\log 2}{2},$$

přičemž poslední rovnost plyne z Příkladu **??**.

(b) K důkazu druhé rovnosti též použijeme Větu 11.1.7, a tedy je třeba ověřit stejnoměrnou konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n(1-x)}{1-x^{2n}}$$

na nějakém levém okolí bodu 1. Řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ má omezené částečné součty. Stejnoměrná konvergence naší řady tak bude dle Věty 11.3.7 zaručena, pokud dokážeme, že funkce

$$f_n(x)=\frac{x^n(1-x)}{1-x^{2n}}$$

jsou pro každé $x\in(0,1)$ monotónní a platí $f_n\rightrightarrows 0$ na $(0,1)$. Pišme

$$\begin{aligned}f_n(x)=\frac{x^n}{\frac{1-x^{2n}}{1-x}}&=\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n-2}+x^{2n-1}}\\&=\frac{\sqrt{x}}{x^{-n+\frac12}+x^{-n+\frac32}+\cdots+x^{n-\frac32}+x^{n-\frac12}}.\end{aligned}$$

Jelikož $y+\frac{1}{y}\ge 2$ pro každé $y\in(0,\infty)$, máme z předchozího odhad

$$0\le f_n(x)\le\frac{\sqrt{x}}{2n},$$

z kterého plyne $f_n \rightrightarrows 0$. Též obdržíme monotonii, neboť

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \frac{\sqrt{x}}{x^{-n-\frac{1}{2}} + x^{-n+\frac{1}{2}} + \cdots + x^{n-\frac{1}{2}} + x^{n+\frac{1}{2}}} \\ &\le \frac{\sqrt{x}}{x^{-n+\frac{1}{2}} + x^{-n+\frac{3}{2}} + \cdots + x^{n-\frac{3}{2}} + x^{n-\frac{1}{2}}} = f_n(x). \end{aligned}$$

Proto daná řada konverguje stejnoměrně na $(0, 1)$. Jelikož

$$\lim_{x\to 1_-} f_n(x) = \frac{1}{2n},$$

máme

$$\lim_{x\to 1_-} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \lim_{x\to 1_-} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n} = \frac{\log 2}{2}.$$

♣

KAPITOLA 12

Diferenciální rovnice

12.0.1. Definice. **Diferenciální rovnicí** rozumíme rovnici tvaru

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y, x) = 0, \tag{12.1}$$

kde F je reálná funkce $n + 2$ proměnných.

12.0.2. Definice. **Řešením diferenciální rovnice** (12.1) rozumíme reálnou funkci y definovanou na nějakém neprázdném otevřeném intervalu I, která má v každém bodě intervalu I vlastní n-tou derivaci a jejíž hodnoty spolu s hodnotami derivací splňují rovnici (12.1) v každém bodě intervalu I, tj. pro každé $x \in I$ platí

$$F(y^{(n)}(x), y^{(n-1)}(x), \dots, y'(x), y(x), x) = 0.$$

Řešení y rovnice (12.1) je **maximální**, pokud neexistuje takové řešení z, pro které $\mathcal{D}(y) \subsetneq \mathcal{D}(z)$ a které se na $\mathcal{D}(y)$ shoduje s y.

12.1. Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

12.1.1. Definice. **Rovnice se separovanými proměnnými** je rovnice tvaru

$$y' = g(y)h(x). \tag{12.2}$$

12.1.2. Věta (lepení řešení)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $\delta, \eta \in (0, \infty)$ a F je spojitá funkce na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^2$. Nechť y_l je řešením diferenciální rovnice

$$y' = F(x, y) \tag{12.3}$$

na intervalu $(a - \delta, a)$ a y_r je řešením této rovnice na $(a, a + \eta)$. Nechť $[a, A] \in G$ a platí

$$\lim_{x \to a_-} y_l(x) = \lim_{x \to a_+} y_r(x) = A.$$

Pak funkce

$$y = \begin{cases} y_l(x), & x \in (a - \delta, a), \\ A, & x = a, \\ y_r(x), & x \in (a, a + \eta) \end{cases}$$

je řešením rovnice (12.3) na intervalu $(a - \delta, a + \eta)$.

Důkaz. Jediný bod intervalu $(a-\delta, a+\eta)$, kde není jasné, že y splňuje rovnici (12.3), je bod a. Počítejme tedy jednostranné derivace y v bodě a pomocí Věty **??** jako

$$y'_-(a) = \lim_{x\to a-} y'_l(x) = \lim_{x\to a-} F(x, y_l(x)) = F(a, A)$$

a

$$y'_+(a) = \lim_{x\to a+} y'_r(x) = \lim_{x\to a+} F(x, y_r(x)) = F(a, A).$$

Tedy

$$y'(a) = F(a, A) = F(a, y(a))$$

a y je řešením (12.3) na $(a-\delta, a+\eta)$. ■

12.1.3. Věta. Nechť $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $c < d$, $[x_0, y_0] \in (a, b) \times (c, d)$, $h\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce a $g\colon (c, d) \to \mathbb{R}$ je spojitá a nenulová funkce. Označme

$$H(x) = \int_{x_0}^{x} h(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in (a, b),$$

a

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t, \quad y \in (c, d).$$

Potom existuje právě jedno maximální řešení y rovnice (12.2) splňující podmínku $y(x_0) = y_0$. Definičním intervalem I tohoto řešení je maximální interval ze všech intervalů tvaru $(x_0-\delta, x_0+\eta)$, které splňují $(x_0-\delta, x_0+\eta) \subset (a, b)$ a

$$H(x) \in G\left((c, d)\right), \quad x \in I.$$

Důkaz. Nejprve si povšimněme, že g nemění znaménko na (c, d), a tedy G je ryze monotónní funkce na (c, d). Proto je $G\left((c, d)\right)$ otevřený interval obsahující $H(x_0) = 0$. Dále existuje G^{-1} (vizte Větu **??**). Funkce H je spojitá dle Věty **??**, a proto je $H^{-1}\left(G\left((c, d)\right)\right)$ otevřená množina v (a, b) obsahující x_0. Dle Věty **??** existuje maximální otevřený interval $I = (x_0-\delta, x_0+\eta)$ v (a, b) splňující $H(I) \subset G\left((c, d)\right)$.

Dále víme, že jsou G', H' spojité (viz Věta **??**) a $G' = \frac{1}{g}$ je nenulová, a tedy je spojitá i $(G^{-1})' = \frac{1}{G'\circ G^{-1}}$. Proto je funkce $y = G^{-1}\circ H$ spojitě diferencovatelná na I. Dle aritmetiky derivací a větě o derivaci inverzní funkce (Věta **??** a **??**) platí

$$y'(x) = (G^{-1})'(H(x))H'(x)\frac{1}{G'(G^{-1}(H(x)))}H'(x) = g(y(x))h(x), \quad x \in I,$$

tj. y řeší na I rovnici (12.2).

Ukažme, že $I = (x_0-\delta, x_0+\eta)$ je maximální interval s vlastnostmi $I \subset (a, b)$ a $H(x) \in G\left((c, d)\right)$ pro $x \in I$. Nejprve ověříme, že řešení y nelze prodloužit vlevo od bodu $x_0-\delta$. Pokud $x_0-\delta = a$, zjevně nelze interval δ zvětšit bez porušení vlastnosti $I \subset (a, b)$. Pokud $a < x_0-\delta$, pak máme $H(x_0-\delta) \notin G((c, d))$, protože jinak by byl interval I díky své maximalitě prodloužen vlevo od bodu $x_0-\delta$. To ale znamená, že

$$\lim_{x\to(x_0-\delta)+} y(x) = \lim_{x\to(x_0-\delta)+} G^{-1}(H(x)) \in \{c, d\}.$$

Tedy bod
$$[x_0 - \delta, \lim_{x\to(x_0-\delta)+} y(x)] \notin (a,b)\times(c,d).$$
Proto řešení y nelze prodloužit vlevo od bodu $x_0-\delta$. Obdobně bychom ukázali, že y nelze prodloužit vpravo od bodu $x_0+\eta$. Tedy I je vskutku maximální vzhledem k popsaným vlastnostem a y je maximální řešení.

Předpokládejme nyní, že z je jiné maximální řešení (12.2) na otevřeném intervalu $\tilde{I} \subset (a,b)$ splňující $z(x_0) = y_0$. Pak máme
$$\frac{z'(x)}{g(z(x))} = h(x), \quad x \in \tilde{I},$$
a tedy pro $x \in \tilde{I}$ máme díky $z(x) \in (c,d)$ rovnost
$$\begin{aligned} H(x) &= \int_{x_0}^{x} h(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} \frac{z'(t)}{g(z(t))}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{y_0}^{z(x)} \frac{1}{g(s)}\,\mathrm{d}s = G(z(x)). \end{aligned} \tag{12.4}$$
Protože $z(x) \in (c,d)$, je $G(z(x)) \in G((c,d))$. Tedy je $H(x) \in G((c,d))$. Z maximality I máme tedy $\tilde{I} \subset I$ a z (12.4) dostáváme
$$z(x) = G^{-1}(H(x)) = y(x), \quad x \in \tilde{I}.$$
Z maximality řešení z pak plyne $\tilde{I} = I$. Tedy řešení z splývá s řešením y. ■

12.1.4 (postup při řešení (12.2))**.** Nechť f, h jsou spojité funkce reálné proměnné. Při hledání maximálních řešení rovnice (12.2) postupujeme následujícím způsobem.

1. Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v $\mathcal{D}(h)$.

Najdeme všechny nulové body funkce g. Je-li totiž $g(c) = 0$, pak na každém intervalu z 1. kroku je funkce $y(x) = c$ řešením rovnice (12.2). Těmto řešením se říká **singulární** nebo také **stacionární**.

2. Určíme maximální otevřené intervaly, na kterých je g nenulová.

3. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku. Tedy h je spojitá na I a g je spojitá a nenulová na J. Budeme hledat řešení, která jsou definovaná někde v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J. Je-li $y(x)$ takové řešení, pak pro něj platí
$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$
Nechť H je primitivní funkce k h na I a G je primitivní funkce k funkci $\frac{1}{g}$ na J. Existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že platí $G(y(x)) = H(x) + c$ na definičním oboru řešení y, který nalezneme v následujícím kroku.

Nyní zafixujeme c a nalezneme maximální neprázdné otevřené intervaly obsažené v množině
$$\{x \in I;\ H(x) + c \in G(J)\}.$$
Na každém z těchto intervalů musí mít řešení tvar
$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c).$$
(Zde G^{-1} je inverzní funkce ke G. Existuje, protože G je intervalu J buď rostoucí nebo klesající.)
Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku „slepíme“ všechna maximální řešení pomocí Věty 12.1.2.

12.1.5. Příklad. Najděte všechna maximální řešení rovnice $y' = \sqrt{1 - y^2}$.

Řešení. V tomto případě máme v rovnici (12.2) $h(x) = 1$ a $g(y) = \sqrt{1 - y^2}$.

(1) Protože $\mathcal{D}(h) = \mathbb{R}$, budeme řešení hledat na $\mathbb{R}$.
(2) Nulové body funkce g jsou 1 a -1. Tedy $y = 1$ a $y = -1$ jsou stacionárními řešeními naší rovnice.
(3) Maximální otevřený interval, kde je g nenulová, je $(-1, 1)$. Budeme tedy hledat řešení s hodnotami v tomto intervalu.
(4) Je-li y řešení s hodnotami v $(-1, 1)$, platí
$$\frac{y'(x)}{\sqrt{1 - y^2(x)}} = 1.$$
Primitivní funkce k levé straně je $\arcsin y(x)$ a primitivní funkce k pravé straně je x. Existuje tedy konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že
$$\arcsin y(x) = x + c.$$
(5) Protože hledáme řešení s hodnotami v $(-1, 1)$, pro pevné $c \in \mathbb{R}$ máme
$$y_c(x) = \sin(x + c), \quad x \in (-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c).$$
(6) Lepením singulárních řešení s řešeními z bodu 5 dostaneme pro pevné $c \in \mathbb{R}$ maximální řešení
$$y_c(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty, -\frac{\pi}{2} - c], \\ \sin(x + c), & x \in (-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c), \\ 1, & x \in [\frac{\pi}{2} - c, \infty) \end{cases}$$

♣

12.1.6. Příklad. Najděte všechna maximální řešení rovnice $y' = x\sqrt[3]{y^2}$.

Řešení. Zadaná rovnice je tvaru (12.2), kde $h(x) = x$ a $g(y) = \sqrt[3]{y^2}$.

(1) Protože $\mathcal{D}(h) = \mathbb{R}$, budeme hledat řešení na $\mathbb{R}$.

(2) Nulový bod funkce g je 0, tedy
$$y(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R},$$

je stacionární řešení naší rovnice.

(3) Maximální otevřené intervaly, kde je g nenulová, jsou $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.

(4) Je-li y řešení s hodnotami v intervalu $(-\infty, 0)$ nebo $(0, \infty)$, platí pro něj rovnost

$$\frac{y'(x)}{\sqrt[3]{y^2}} = x.$$

Primitivní funkce k funkci $1/g$ je $G(y) = 3y^{\frac{1}{3}}$, primitivní funkce k h je $H(x) = \frac{1}{2}x^2$. Existuje tedy konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že

$$3y^{\frac{1}{3}}(x) = \frac{1}{2}x^2 + c.$$

(5) Vezměme nyní $c \in \mathbb{R}$ pevné. Pro intervaly $J = (0, \infty)$ a $J = (-\infty, 0)$ hledáme otevřený interval I_c takový, že $\frac{x^2}{2} + c \in J$ pro $x \in I_c$.

- Nechť $J = (0, \infty)$. Pak výše uvedený požadavek dává tři možnosti:
  $c > 0$: $I_c = \mathbb{R}$ a $y_c(x) = \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}c\right)^3$,
  $c \leq 0$: $I_c = (-\infty, -\sqrt{-2c})$ a $y_c(x) = \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}c\right)^3$,
  $c \leq 0$: $I_c = (\sqrt{-2c}, \infty)$ a $y_c(x) = \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}c\right)^3$.
- Nechť $J = (-\infty, 0)$. Hledáme otevřený interval I_c takový, že $\frac{x^2}{2} + c \in (-\infty, 0)$ pro $x \in I_c$. Toto je možné pouze pro $c < 0$. Pak $I_c = \left(-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c}\right)$ a $y_c(x) = \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}c\right)^3$.

(6) Nalezená řešení z bodu (5) a (2) nyní lze lepit dohromady v bodech osy x, protože

$$\lim_{x \to \pm\sqrt{-2c}} \left(\tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{3}c\right)^3 = 0.$$

To nám dává následujících devět různých typů maximálních řešení:

- $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$,
- pro $c > 0$: $y(x) = \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}c\right)^3$, $x \in \mathbb{R}$,
- pro $c \leq 0$:

$$y(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}c\right)^3, & x \in \left(-\infty, -\sqrt{-2c}\right), \\ 0, & x \in \left[-\sqrt{-2c}, \infty\right), \end{cases}$$

- pro $c \leq 0$:

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left(-\infty, -\sqrt{-2c}\right], \\ \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}c\right)^3, & x \in \left(-\sqrt{-2c}, \infty\right), \end{cases}$$

- pro $c < 0$:

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left(-\infty, -\sqrt{-2c}\right], \\ \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}c\right)^3, & x \in \left(-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c}\right), \\ 0, & x \in \left[\sqrt{-2c}, \infty\right), \end{cases}$$

- pro $0 \geq c_3 \geq c_2 \geq c_1$:

$$y(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}c_1\right)^3, & x \in \left(-\infty, -\sqrt{-2c_1}\right), \\ 0, & x \in \left[-\sqrt{-2c_1}, -\sqrt{-2c_2}\right], \\ \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}c_2\right)^3, & x \in \left(-\sqrt{-2c_2}, \sqrt{-2c_2}\right), \\ 0, & x \in \left[\sqrt{-2c_2}, \sqrt{-2c_3}\right], \\ \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}c_3\right)^3, & x \in \left(\sqrt{-2c_3}, \infty\right), \end{cases}$$

- pro $0 \geq c_2 \geq c_1$:

$$y(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}c_1\right)^3, & x \in \left(-\infty, -\sqrt{-2c_1}\right), \\ 0, & x \in \left[-\sqrt{-2c_1}, -\sqrt{-2c_2}\right], \\ \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}c_2\right)^3, & x \in \left(-\sqrt{-2c_2}, \sqrt{-2c_2}\right), \\ 0, & x \in \left[\sqrt{-2c_2}, \infty\right), \end{cases}$$

- pro $0 \geq c_2 \geq c_1$:

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left(-\infty, -\sqrt{-2c_1}\right), \\ \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}c_1\right)^3, & x \in \left(-\sqrt{-2c_1}, \sqrt{-2c_1}\right), \\ 0, & x \in \left[\sqrt{-2c_1}, \sqrt{-2c_2}\right], \\ \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}c_2\right)^3, & x \in \left(\sqrt{-2c_2}, \infty\right), \end{cases}$$

- pro $c_1, c_2 \leq 0$:

$$y(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}c\right)^3, & x \in \left(-\infty, -\sqrt{-2c_1}\right), \\ 0, & x \in \left[\sqrt{-2c_1}, \sqrt{-2c_2}\right], \\ \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}c\right)^3, & x \in \left(\sqrt{-2c_2}, \infty\right). \end{cases}$$

♣

12.1.7. Příklad. Nechť $p\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ je spojitá. Najděte všechna maximální řešení rovnice $y' + p(x)y = 0$.

Řešení. Rovnici přepíšeme do tvaru $y' = -p(x)y$. Položíme-li $h(x) = -p(x)$ a $g(y) = y$, vidíme, že se jedná o speciální případ (12.2). Řešme tedy tuto rovnici metodou popsanou v 12.1.4.

(1) Funkce $h(x) = -p(x)$ je spojitá na (a, b), budeme tedy hledat řešení na tomto intervalu.
(2) Existuje jediné stacionární řešení, a to $y(x) = 0$, $x \in (a, b)$.
(3) Maximální intervaly, kde je funkce g spojitá a nenulová, jsou $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. Budeme tedy hledat řešení s hodnotami v těchto intervalech.
(4) Je-li y řešení s hodnotami v $(-\infty, 0)$ nebo $(0, \infty)$, pak y splňuje

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -p(x).$$

Primitivní funkce k levé straně je $\log|y(x)|$. Funkce p je spojitá, a tudíž má primitivní funkci (viz Věta **??**). Označme ji P. Pak je $-P$ primitivní funkce k $-p$. Existuje tedy konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\log|y(x)| = c - P(x)$$

na definičním oboru y.

(5) Protože $\mathcal{H}(\log) = \mathbb{R}$, nedostaneme žádnou omezující podmínku na x. Řešení jsou tudíž definovaná na celém (a, b) a splňují

$$|y(x)| = e^c \cdot e^{-P(x)},$$

neboli

$$y(x) = ke^{-P(x)}, \quad x \in (a, b), k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(6) Nalezená řešení nelze nalepovat, neboť jsou zřejmě všechna maximální.

Nyní si zbývá uvědomit, že řešení nalezená v 5. kroku lze spolu se stacionárním řešením napsat jako

$$y(x) = ke^{-P(x)}, \quad x \in (a, b), k \in \mathbb{R}.$$

♣

12.2. Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Budeme se zabývat rovnicemi typu

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{12.5}$$

kde p, q jsou spojité funkce na daném intervalu (a, b), $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Této rovnici říkáme **lineární diferenciální rovnice prvního řádu**.

12.2.1. Věta. Maximální řešení rovnice (12.5) splňující podmínku $y(x_0) = y_0$, kde $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in \mathbb{R}$, má tvar

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t\right) \cdot e^{-P(x)} + y_0 e^{-P(x)}, \qquad x \in (a, b),$$

kde P je primitivní funkce k p na (a, b) splňující $P(x_0) = 0$.

Důkaz. Ukažme nejprve, že y řeší rovnici (12.5). Díky Větě **??** je y spojitě diferencovatelná. Dostáváme tedy

$$y'(x) = q(x)e^{P(x)}e^{-P(x)} - p(x)e^{-P(x)}\left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t\right) - p(x)y_0 e^{-P(x)}.$$

Dále

$$p(x)y(x) = p(x)e^{-P(x)}\left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t\right) + p(x)y_0 e^{-P(x)},$$

a tedy

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x).$$

Zjevně $y(x_0) = y_0$.

Nechť z je nějaké jiné řešení rovnice (12.5) splňující $z(x_0) = y_0$. Pak $u = y - z$ řeší rovnici $u' + pu = 0$. Díky Příkladu 12.1.7 existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $u(x) = ce^{-P(x)}$ na (a, b). Protože $u(x_0) = 0$, je $c = 0$. Tedy $0 = u = y - z$ na (a, b). Tím je jednoznačnost dokázána. ∎

12.3. Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficenty

12.3.1. Definice. **Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty** je rovnice tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t), \tag{12.6}$$

kde $a_0, \dots, a_{n-1}$ jsou reálná čísla a f je spojitá funkce na daném intervalu (a, b). **Homogenní rovnicí** k rovnici (12.6) rozumíme rovnici

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0. \tag{12.7}$$

12.3.2. Věta. Nechť $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a $z_0, \dots, z_{n-1} \in \mathbb{R}$. Pak existuje právě jedno maximální řešení y rovnice (12.6), které splňuje podmínky

$$y(t_0) = z_0, y'(t_0) = z_1, \dots y^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}.$$

Toto řešení je definováno na celém intervalu (α, β).

Důkaz. Položme

$$x_1 = y, \quad x_2 = y', \quad \cdots, \quad x_n = y^{(n-1)}$$

a uvažujme soustavu

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_3, \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n, \\ x_n' &= f - (a_{n-1}x_n + \cdots + a_0 x_1) \end{aligned}$$

s počáteční podmínkou

$$\boldsymbol{x}(t_0) = [x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)] = [z_0, z_1, \dots, z_{n-1}].$$

Dle Věty 12.5.1 má tato soustava právě jedno řešení $\boldsymbol{x}$ na (α, β), které splňuje počáteční podmínku. Pak je zřejmě funkce $y = x_1$ n-krát spojitě diferencovatelná a řeší (12.6). ∎

12.3.3. Věta.

(a) Maximální řešení rovnice (12.7) jsou definována na celém $\mathbb{R}$ a tvoří vektorový podprostor dimenze n prostoru $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$.

(b) Nechť y_p je maximální řešení rovnice (12.6). Pak funkce y je jejím maximálním řešením právě tehdy, když ji lze zapsat ve tvaru $y = y_p + y_h$, kde y_h je vhodné řešení rovnice (12.7).

Důkaz. (a) Dle Věty 12.3.2 jsou maximální řešení definovaná na $\mathbb{R}$. Definujme zobrazení $L\colon \mathcal{C}^n(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$ předpisem

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y.$$

Potom je zobrazení L lineární a množina řešení rovnice (12.7) je rovna $\operatorname{Ker} L$. Jde tedy o vektorový prostor. Podle Věty 12.3.2. nalezneme maximální řešení $y_1, y_2, \ldots, y_n$ rovnice 12.7 splňující

$$\begin{array}{cccc}
y_1(0) = 1 & y_2(0) = 0 & \ldots & y_n(0) = 0 \\
y_1'(0) = 0 & y_2'(0) = 1 & \ldots & y_n'(0) = 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
y_1^{(n-1)}(0) = 0 & y_2^{(n-1)}(0) = 0 & \ldots & y_n^{(n-1)}(0) = 1.
\end{array}$$

Ukážeme, že množina $\{y_1, \ldots, y_n\}$ je bází prostoru $\operatorname{Ker} L$. Nejprve ověříme její lineární nezávislost. Nechť $c_1, \ldots, c_n$ jsou reálná čísla splňující

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n = 0.$$

Pak všechny derivace funkce vlevo jsou nulové, a tedy pro každé $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ a každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$c_1 y_1^{(k)}(x) + \cdots + c_n y_n^{(k)}(x) = 0.$$

Dosadíme-li postupně do těchto rovností bod 0, dostaneme $c_1 = \cdots = c_n = 0$. Řešení $y_1, \ldots, y_n$ jsou tedy lineárně nezávislá.

Nyní ukažme, že každé maximální řešení (12.7) je lineární kombinací $y_1, \ldots, y_n$. Nechť y je maximální řešení (12.7). Položme

$$c_1 = y(0), \quad c_2 = y'(0), \quad \ldots, \quad c_n = y^{(n-1)}(0)$$

a

$$z = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n.$$

Pak z je maximálním řešením rovnice (12.7), přičemž platí

$$z(0) = c_1, \quad z'(0) = c_2, \quad \ldots, \quad z^{(n-1)}(0) = c_n.$$

Z jednoznačnosti maximálního řešení s danými počátečními podmínkami plyne dle Věty 12.3.2 rovnost $y = z$ na $\mathbb{R}$, takže $y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$.

(b) Řeší-li y_p rovnici (12.6) a y_h rovnici (12.7), pak z linearity zobrazení L plyne, že $y_p + y_h$ řeší rovnici (12.6). Obráceně, je-li y maximální řešení rovnice (12.6), pak $y - y_p \in \operatorname{Ker} L$, tj. $y_h = y - y_p$je maximální řešení rovnice (12.7). Tím je důkaz dokončen. ■

12.3.4. Definice. Charakteristickým polynomem rovnice (12.7) rozumíme polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Bázi prostoru všech maximálních řešení rovnice (12.7) nazýváme **fundamentální systém** rovnice (12.7).

12.3.5. Věta. Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ jsou všechny různé reálné kořeny charakteristického polynomu χ s násobnostmi $r_1, \dots, r_s$. Nechť $\alpha_1 + i\beta_1, \dots, \alpha_l + i\beta_l$ jsou všechny navzájem různé kořeny polynomu χ s kladnou imaginární částí a násobnostmi $q_1, \dots, q_l$. Pak funkce

$$\begin{array}{cccc}
e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1}(t), & \dots & t^{r_1-1}e^{\lambda_1 t}, \\
\vdots & & & \\
e^{\lambda_s t}, & te^{\lambda_s}(t), & \dots & t^{r_s-1}e^{\lambda_s t}, \\
e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, \\
e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, \\
\vdots & & & \\
e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & \dots & t^{q_l-1}e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, \\
e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & \dots & t^{q_l-1}e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t
\end{array} \tag{12.8}$$

tvoří fundamentální sytém rovnice (12.7).

12.3.6. Označení. Množinu všech komplexních polynomů značíme $\mathcal{P}$.

12.3.7. Lemma. Nechť $\omega \in \mathbb{C}$ a $L : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ je definováno předpisem $L(P) = \omega P + P'$. Potom pro $k \in \mathbb{N}$ a $P \in \mathcal{P}$ platí

$$L^k(P) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \omega^{k-j} P^{(j)}.$$

Důkaz. Důkaz provedeme matematickou indukcí dle k. Je-li $k = 1$, platí $L(P) = \omega P + P'$.

Nechť tvrzení platí pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Pak pomocí indukčního předpokladu a identity $\binom{k}{j} + \binom{k}{j-1} = \binom{k+1}{j}$ dostáváme pro $k+1$ rovnost

$$
\begin{aligned}
L^{(k+1)}(P) = L(L^k(P)) &= \sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} \omega^{k+1-j} P^{(j)} + \sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} \omega^{k-j} P^{(j+1)} \\
&= \omega^{k+1} P + \sum_{j=1}^{k} \left(\begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} \omega^{k+1-j} P^{(j)} + \begin{pmatrix} k \\ j-1 \end{pmatrix} \omega^{k-j+1} P^{(j)} \right) + P^{(k+1)} \\
&= \omega^{k+1} P \sum_{j=1}^{k} \begin{pmatrix} k+1 \\ j \end{pmatrix} \omega^{k+1-j} P^{(j)} + P^{(k+1)} \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} \begin{pmatrix} k+1 \\ j \end{pmatrix} \omega^{k+1-j} P^{(j)}.
\end{aligned}
$$

Dle principu matematické indukce tedy tvrzení platí pro všechna $k \in \mathbb{N}$. ∎

12.3.8. Lemma. Nechť Q je polynom a ω je jeho kořen násobnosti $s \in \mathbb{N}$. Pak

$$Q(\omega) = Q'(\omega) = \cdots = Q^{(s-1)}(\omega).$$

12.3.9. Lemma. Nechť $\omega \in \mathbb{C}$ je d-násobný kořen polynomu $Q(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ a P je polynom splňující st $P < d$. Pak

$$\sum_{k=0}^{n} a_k L^k(P) = 0,$$

kde $L(P) = \omega P + P'$.

Důkaz. Vzhledem k linearitě L stačí dokázat požadovanou rovnost pro polynom $P(z) = z^l$, kde $l \in \{0, \dots, d-1\}$. Platí

$$P^{(j)}(z) = \frac{l!}{(l-j)!} z^{l-j}, \quad j = 0, \dots, l, \quad P^{(j)}(z) = 0, \quad j > l.$$

Tedy máme z Lemmatu 12.3.7

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k L^k(P) &= \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \omega^{k-j} P^{(j)} = \sum_{j=0}^{l}\sum_{k=j}^{n} a_k \binom{k}{j} \omega^{k-j} P^{(j)} \\ &= \sum_{j=0}^{l}\sum_{k=j}^{n} a_k \binom{k}{j} \omega^{k-j} \frac{l!}{(l-j)!} z^{l-j} \\ &= \sum_{j=0}^{l} \frac{l! z^{l-j}}{(l-j)! j!} \sum_{k=j}^{n} a_k \frac{k!}{(k-j)!} \omega^{(k-j)} \\ &= \sum_{j=0}^{l} \frac{l! z^{l-j}}{(l-j)! j!} Q^{(j)}(\omega) = 0,\end{aligned}$$

jelikož máme $Q(\omega) = Q'(\omega) = \cdots = Q^{(d-1)}(\omega) = 0$ dle Lemmatu 12.3.8. ∎

Důkaz. Nechť $\alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ je s-násobný kořen charakteristického polynomu χ, $s \in \mathbb{N}$. Položme

$$y(t) = e^{\alpha t}(\cos \beta t P_0(t) + \sin \beta t S_0(t)),$$

kde P_0, S_0 jsou polynomy, st P_0, st $S_0 < s$. Ukážeme, že y řeší (12.7). Platí

$$\begin{aligned} y'(t) &= e^{\alpha t}(\alpha \cos \beta t P_0(t) + \alpha \sin \beta t S_0(t) \\ &\quad - \beta \sin \beta t P_0(t) + \beta \cos \beta t S_0(t) \\ &\quad + \cos \beta t P_0'(t) + \sin \beta t S_0'(t)) \\ &= e^{\alpha t}(\cos \beta t(\alpha P_0 + \beta S_0 + P_0') + \sin \beta t(\alpha S_0 - \beta P_0 + S_0')),\end{aligned}$$

kde

$$P_1 = \alpha P_0 + \beta S_0 + P_0', \quad S_1 = \alpha S_0 - \beta P_0 + S_0'$$

jsou polynomy stupně menšího než s.

Pro derivace y tedy platí

$$y^{(j)}(t) = e^{\alpha t}\left(\cos \beta t P_j(t) + \sin \beta t S_j(t)\right), \quad j = 0, \ldots, n,$$

kde

$$P_j = \alpha P_{j-1} + \beta S_{j-1} + P_{j-1}', \quad S_j = \alpha S_{j-1} - \beta P_{j-1} + S_{j-1}'.$$

Dosadíme derivace y do (12.7) a dostaneme

$$\sum_{j=0}^{n} a_j y^{(j)}(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t \sum_{j=0}^{n} a_j P_j(t) + e^{\alpha t} \sin \beta t \sum_{j=0}^{n} a_j S_j(t).$$

Stačí tedy odvodit rovnosti

$$\sum_{j=0}^{n} a_j P_j = \sum_{j=0}^{n} a_j S_j = 0.$$

Označme
$$C_j = P_j + iS_j \quad \text{a} \quad \omega = \alpha - i\beta.$$
Pak máme
$$\begin{aligned} C_{j+1} = P_{j+1} + iS_{j+1} &= \alpha P_j + \beta S_j + P_j' + i\alpha S_j - i\beta P_j + iS_j' \\ &= (\alpha - i\beta)P_j + i(\alpha - i\beta)S_j + P_j' + iS_j' \\ &= \omega C_j + C_j'. \end{aligned}$$
Definujeme-li $L(P) = \omega P + P'$, potom $C_j = L^j(C_0)$. Máme tak dle Lemmatu 12.3.9
$$0 = \sum_{j=0}^{n} a_j L^j(C_0) = \sum_{j=0}^{n} a_j C_j = \sum_{j=0}^{n} a_j P_j + i\sum_{j=0}^{n} a_j S_j,$$
takže
$$\sum_{j=0}^{n} a_j P_j = \sum_{j=0}^{n} a_j S_j = 0.$$

Lineární nezávislost. Uvažujme lineární kombinaci funkcí ze systému (12.8), která je na intervalu (a,b) rovna nulové funkci. Předpokládejme, že funkce $t^k e^{\alpha t}\cos\beta t$ a $t^k e^{\alpha t}\sin\beta t$ se v této lineární kombinaci vyskytují s koeficienty a a b. Platí
$$\begin{aligned} at^k e^{\alpha t}\cos\beta t + bt^k e^{\alpha t}\sin\beta t &= at^k e^{\alpha t}\frac{e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}}{2} + bt^k e^{\alpha t}\frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i} \\ &= \frac{1}{2}(a - bi)t^k e^{(\alpha + i\beta)t} + \frac{1}{2}(a + bi)t^k e^{(\alpha - i\beta)t}. \end{aligned} \tag{12.9}$$
Dále platí, že
$$a = b = 0 \Leftrightarrow a - bi = a + bi = 0. \tag{12.10}$$
Naši lineární kombinaci lze díky (12.9) tedy přepsat do tvaru
$$P_1(t)e^{\omega_1 t} + P_2(t)e^{\omega_2 t} + \cdots + P_k(t)e^{\omega_k t}$$
kde $\omega_1, \dots, \omega_k \in \mathbb{C}$ jsou navzájem různá komplexní čísla a $P_1, \dots, P_k$ jsou polynomy. Podle předpokladu platí
$$P_1(t)e^{\omega_1 t} + P_2(t)e^{\omega_2 t} + \cdots + P_k(t)e^{\omega_k t} = 0$$
pro každé $t \in (a,b)$. K důkazu lineární nezávislosti našeho systému stačí dokázat, že $P_1 = P_2 = \cdots = P_k = 0$, protože pak budou všechny koeficienty polynomů $P_1, \dots, P_k$ nulové a díky pozorování (12.10) obdržíme, že i koeficienty použité v naší lineární kombinaci jsou nulové.

Důkaz provedeme matematickou indukcí dle k. Pokud $k = 1$ a pro každé $x \in (a,b)$ platí $P_1(x)e^{\omega_1 x} = 0$, pak nutně $P_1(x) = 0$ pro každé $x \in (a,b)$, a tedy $P_1 = 0$.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $k \in \mathbb{N}$. Povšimněme si nejprve, že pokud P je polynom a $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, pak

$$\begin{aligned}(P(x)e^{\omega x})' &= P'(x)e^{\omega x} + P(x)\omega e^{\omega x}\\ &= (P'(x) + \omega P(x))e^{\omega x} = R(x)e^{\omega x},\end{aligned}$$

kde R je polynom stejného stupně jako P.

Předpokládejme nyní, že

$$\forall x \in (a,b)\colon\ P_1(x)e^{\omega_1 x} + \cdots + P_{k+1}(x)e^{\omega_{k+1} x} = 0,$$

tedy

$$\forall x \in (a,b)\colon\ P_1(x)e^{(\omega_1-\omega_{k+1})x} + \cdots + P_k(x)e^{(\omega_k-\omega_{k+1})x} + P_{k+1}(x) = 0,$$

Po opakovaném derivování dostaneme

$$\forall x \in (a,b)\colon\ R_1(x)e^{(\omega_1-\omega_{k+1})x} + \cdots + R_k(x)e^{(\omega_k-\omega_{k+1})x} = 0,$$

kde $\operatorname{st} R_1 = \operatorname{st} P_1, \ldots, \operatorname{st} R_k = \operatorname{st} P_k$. Podle indukčního předpokladu musí být $R_1 = R_2 = \cdots = R_k = 0$, a tedy $P_1 = P_2 = \cdots = P_k = 0$. Potom

$$\forall x \in (a,b)\colon\ P_{k+1}(x)e^{\omega_{k+1} x} = 0,$$

a tedy i $P_{k+1} = 0$. ■

12.3.10. Věta. Nechť

$$f(t) = e^{\mu t} \cdot (P(t)\cos \nu t + Q(t)\sin \nu t)\,,$$

kde $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ a P, Q jsou polynomy. Pak existuje řešení rovnice (12.6) ve tvaru

$$y(t) = t^m e^{\mu t} \cdot (R(t)\cos \nu t + S(t)\sin \nu t)\,,$$

kde R, S jsou vhodné polynomy stupně ne většího než $\max \operatorname{st} P, \operatorname{st} Q$ a $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ udává, jakou násobnost má číslo $\mu + i\nu$ jakožto kořen charakteristického polynomu.

12.3.1. Metoda variace konstant.

12.3.11. Lemma. Nechť $y_1, \ldots, y_n$ tvoří fundamentální systém rovnice (12.7). Pak je matice

$$U(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & \ldots & y_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

regulární pro každé $t \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Pokud $U(t_0)$ není regulární pro nějaké $t_0 \in \mathbb{R}$, pak existuje nenulový vektor $d \in \mathbb{R}^n$ takový, že $U(t_0)d = 0$. Položme $z = d_1 y_1 + \cdots + d_n y_n$. Potom z řeší rovnici (12.7) a splňuje

$$\begin{aligned} z(t_0) &= d_1 y_1(t_0) + \cdots + d_n y_n(t_0) = 0, \\ z'(t_0) &= d_1 y_1'(t_0) + \cdots + d_n y_n'(t_0) = 0, \\ &\vdots \\ z^{(n-1)}(t_0) &= d_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + \cdots + d_n y_n^{(n-1)}(t_0) = 0. \end{aligned}$$

Podle Věty 12.3.2 máme $z = 0$ na $\mathbb{R}$. Funkce $y_1, \ldots, y_n$ tvoří fundamentální systém, a proto je $d_1 = d_2 = \cdots = d_n = 0$. To je ale spor s nenulovostí vektoru d, čímž je důkaz dokončen. ■

12.3.12. Hledejme řešení rovnice (12.6) ve tvaru

$$y(t) = c_1(t)y_1(t) + \cdots + c_n(t)y_n(t), \quad t \in (a,b),$$

kde $c_1, \ldots, c_n$ jsou spojitě diferencovatelné funkce na (a,b) a $\{y_1, \ldots, y_n\}$ je fundamentální systém rovnice (12.7). Počítejme

$$y'(t) = c_1 y_1' + \cdots + c_n y_n' + c_1' y_1 + \cdots + c_n' y_n$$

a položme $c_1' y_1 + \cdots + c_n' y_n = 0$. Dále

$$y''(t) = c_1 y_1'' + \cdots + c_n y_n'' + c_1' y_1' + \cdots + c_n' y_n'$$

a opět položíme $c_1' y_1' + \cdots + c_n' y_n' = 0$. Pokračováním tohoto procesu se dobereme až k rovnici

$$y^{(n)} = c_1 y_1^{(n)} + \cdots + c_n y_n^{(n)} + c_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-1)}.$$

Dosadíme do (12.6) a dostaneme tuto sadu podmínek:

$$\begin{aligned} c_1' y_1 + \cdots + c_n' y_n &= 0, \\ &\vdots \\ c_1' y_1^{(n-2)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-2)} &= 0, \\ c_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-1)} &= f, \end{aligned}$$

neboli

$$U(t) \cdot \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Funkci c_i' vypočteme z předchozí rovnice pomocí Cramerova pravidla

$$c_i'(t) = \frac{1}{\det U(t)} \cdot \begin{vmatrix} y_1(t) & \dots & y_{i-1}(t) & 0 & y_{i+1}(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \dots & y_{i-1}'(t) & 0 & y_{i+1}'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ y_1^{(n-2)}(t) & \dots & y_{i-1}^{(n-2)}(t) & 0 & y_{i+1}^{(n-2)}(t) & \dots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1^{(n-1)}(t) & \dots & y_{i-1}^{(n-1)}(t) & f(t) & y_{i+1}^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

Pravá strana předchozího vztahu je spojitá funkce v t, takže hledaná c_i, $i = 1, \dots, n$, můžeme nalézt jako primitivní funkci k pravé straně.

12.4. Soustavy diferenciálních rovnic

Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ x_2' &= f_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{12.11}$$

kde f_i, $i = 1, \dots, n$, jsou dané funkce definované na jisté neprázdné otevřené množině $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Vektorový tvar je

$$x'(t) = f(t, \boldsymbol{x}(t)),$$

kde $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$, $x'(t) = [x_1'(t), \dots, x_n'(t)]$ a $f = [f_1, \dots, f_n]$.

12.4.1. Definice. **Řešením** soustavy (12.11) rozumíme vektorovou funkci $\boldsymbol{x} = [x_1, \dots, x_n]$ definovanou na otevřeném neprázdném intervalu J s hodnotami v $\mathbb{R}^n$ takovou, že pro každé $t \in J$ existují $x_i'(t)$, $i = 1, \dots, n$, a platí (12.11). **Počáteční úlohou** pro (12.11) rozumíme úlohu, kdy hledáme řešení (12.11) splňující navíc předem zadanou podmínku $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$, kde $[t_0, \boldsymbol{x}^0] \in G$ (této podmínce se říká **počáteční podmínka**). **Maximální řešení** soustavy (12.11) je takové řešení $\boldsymbol{x}$ definované na intervalu J, které již nelze prodloužit, tj. je-li $\boldsymbol{y}$ řešení definované na intervalu I, $J \subset I$ a $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{x}(t)$ pro každé $t \in J$, pak $J = I$.

12.4.2. Mějme rovnici

$$y^{(n)} = h(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \tag{12.12}$$

Uvažujme soustavu

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_3, \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n, \\ x_n' &= h(t, x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Pokud x řeší (**??**), pak x_1 řeší (12.12). Obráceně, pokud y řeší (12.12), pak $[y, \dots, y^{(n-1)}]$ řeší (**??**).

12.4.3. Definice. Nechť (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory. Řekneme, že množina $\mathcal{F}$ zobrazení P do Q je **stejně spojitá**, pokud platí

$$\forall x \in P\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in B_\rho(x, \delta)\ \forall f \in \mathcal{F} : f(y) \in B_\sigma(f(x), \varepsilon).$$

12.4.4. Je jednoduché si rozmyslet, že každá konečná množina spojitých zobrazení je stejně spojitá.

12.4.5 (prostor $\mathcal{C}(K, X)$)**.** Nechť K je kompaktní metrický prostor a X je Banachův prostor. Pak symbol $\mathcal{C}(K, X)$ značí množinu všech spojitých zobrazení K do X. Na t0to množině můžeme zavést operaci sčítání a násobení reálnýnm číslem. Nechť $f, g \in \mathcal{C}(K, X)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak definujeme

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x), \quad x \in K, \\ (\alpha f)(x) &= \alpha f(x), \quad x \in K. \end{aligned}$$

Prostor $\mathcal{C}(K, X)$ je vzhledem k těmto operacím vektorový prostor. Nechť $f \in \mathcal{C}(K, X)$. Pak $\mathcal{H}(f)$ je kompaktní množina v X (vizte Větu **??**), a je tedy omezená (Věta **??**). Proto má smysl položit

$$\|f\|_{\mathcal{C}(K,X)} = \|f\|_\infty = \sup_{x \in K} \|f(x)\|_X.$$

Je lehké si rozmyslet, že $\|\cdot\|_\infty$ je vskutku norma na $\mathcal{C}(K, X)$.

Dále si uvědomme, že prostor $\mathcal{C}(K, X)$ je v této normě díky Větě **??** úplný. Jedná se tedy o Banachův prostor.

12.4.6. Věta (Arzelà[1] - Ascoli[2])**.** Nechť (K, ρ) je kompaktní metrický prostor a $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R}^n)$. Pak množina $\mathcal{F}$ je relativně kompaktní v $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^n)$ právě tehdy, když je omezená a stejně spojitá.

Důkaz. $\Leftarrow$ Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{F}$.

Krok 1. Díky stejné spojitosti množiny $\mathcal{F}$ nalezneme pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in K$ kladné reálné číslo $r_x^n > 0$ takové, že

$$\forall f \in \mathcal{F}\ \forall y \in B(x, r_x^n) \colon \|f(x) - f(y)\| < \frac{1}{n}. \tag{12.13}$$

[1] Cesare Arzelà (1847-1912)
[2] Giulio Ascoli (1843-1896)

Systém $\{B(x, r_x^n);\ x \in K\}$ zřejmě tvoří pokrytí K pro každé $n \in \mathbb{N}$. Poněvadž K je kompaktní, existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$ konečná množina $C_n \subset K$ taková, že $K \subset \bigcup\{B(x, r_x^n);\ x \in C_n\}$.

Krok 2. Položme $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$. Nyní nalezneme podposloupnost $\{f_{n_j}\}$ z posloupnosti $\{f_n\}$ takovou, že posloupnost $\{f_{n_j}(c)\}$ je cauchyovská pro každé $c \in C$.

Množina C je spočetná, a proto můžeme nalézt posloupnost $\{c_l\}_{l=1}^{\infty}$ takovou, že C jako $C = \{c_l;\ l \in \mathbb{N}\}$. Pro každé $m \in \mathbb{N}$ nalezneme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k^m\}_{k=1}^{\infty}$ tak, že platí

- posloupnost $\{f_{n_k^m}(c_m)\}_{k=1}^{\infty}$ je konvergentní,
- posloupnost $\{n_k^{m+1}\}_{k=1}^{\infty}$ je vybraná z $\{n_k^m\}_{k=1}^{\infty}$.

Pro $m = 1$ využijeme omezenosti posloupnosti $\{f_n(c_1)\}_{n=1}^{\infty}$ a nalezneme posloupnost $\{n_k^1\}_{k=1}^{\infty}$ takovou, že posloupnost $\{f_{n_k^1}(c_1)\}_{k=1}^{\infty}$ je konvergentní. Předpokládejme, že již máme zkonstruovanou posloupnost $\{n_k^m\}_{k=1}^{\infty}$. Potom je posloupnost $\{f_{n_k^{m+1}}(c_{m+1})\}_{k=1}^{\infty}$ omezená. Můžeme tedy z posloupnosti $\{n_k^m\}_{k=1}^{\infty}$ vybrat posloupnost $\{n_k^{m+1}\}_{k=1}^{\infty}$ takovou, že je posloupnost $\{f_{n_k^{m+1}}(c_{m+1})\}_{k=1}^{\infty}$ konvergentní. Pro $j \in \mathbb{N}$ položme $p_j = n_j^j$. Potom je $\{p_j\}$ rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pro každé $l \in \mathbb{N}$ platí, že posloupnost $\{f_{p_j}(c_l)\}_{j=1}^{\infty}$ je konvergentní, neboť posloupnost $\{p_j\}_{j=l}^{\infty}$ je vybraná z posloupnosti $\{n_k^l\}_{k=1}^{\infty}$.

Krok 3. Ukažme, že $\{f_{p_j}\}$ je cauchyovská v $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^n)$. Nechť $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Posloupnost $\{f_{p_j}(c)\}_{j=1}^{\infty}$ je cauchyovská pro každé $c \in C$, a tedy díky konečnosti množiny C_n existuje $j_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall j, j' \geq j_0\ \forall c \in C_n\colon \|f_{p_j}(c) - f_{p_{j'}}(c)\| < \varepsilon.$$

Nechť $x \in K$. Nalezneme $c \in C_n$ takové, že $x \in B(c, r_c^n)$. Pak pro $j, j' \geq j_0$ platí díky (12.13)

$$\begin{aligned}\|f_{p_j}(x) - f_{p_{j'}}(x)\| &\leq \|f_{p_j}(x) - f_{p_j}(c)\| + \|f_{p_j}(c) - f_{p_{j'}}(c)\| \\ &\quad + \|f_{p_{j'}}(c) - f_{p_{j'}}(x)\| \\ &\leq \frac{1}{n} + \varepsilon + \frac{1}{n} < 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Tedy pro každé $j, j' \geq j_0$ platí

$$\|f_{p_j} - f_{p_{j'}}\|_{\infty} = \sup_{x \in K} \|f_{p_j}(x) - f_{p_{j'}}(x)\| \leq 3\varepsilon.$$

Krok 4. Z dané množiny jsme tedy vybrali cauchyovskou podposloupnost $\{f_{p_j}\}$. Protože je $\mathcal{C}(K, X)$ úplný, je tato podposloupnost konvergentní. A tedy je $\mathcal{F}$ relativně kompaktní.

$\Rightarrow$ Nechť $\mathcal{F}$ je relativně kompaktní množina v $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^n)$. Pak je $\overline{\mathcal{F}}$ kompaktní, a tedy omezená. Proto je i $\mathcal{F}$ omezená v $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^n)$.

Ukažme dále, že je stejně spojitá. Mějme tedy dáno $\varepsilon > 0$. Protože je $\overline{\mathcal{F}}$ kompaktní, je totálně omezená, a tedy existují funkce $f_1, \dots f_n \in \overline{\mathcal{F}}$ takové, že množina

$\{f_1, \dots, f_n\}$ tvoří konečnou ε-síť v $\overline{\mathcal{F}}$. Jelikož je $\{f_1, \dots, f_n\}$ konečná, je stejně spojitá dle 12.4.4. Mějme nyní dáno $x \in K$. Najdeme tedy $\delta > 0$ splňující

$$\forall y \in B(x,\delta)\ \forall i \in \{1, \dots, n\}\colon \|f_i(y) - f_i(x)\| < \varepsilon.$$

Vezměme nyní libovolné $f \in \mathcal{F}$. K němu nalezneme $i \in \{1, \dots, n\}$ splňující $\|f_i - f\|_\infty < \varepsilon$. Pak pro $y \in B(x,\delta)$ platí

$$\|f(y) - f(x)\| \le \|f(y) - f_i(y)\| + \|f_i(y) - f_i(x)\| + \|f_i(x) - f(x)\| < 3\varepsilon.$$

Tedy $\mathcal{F}$ je stejně spojitá. ■

12.4.7. Lemma. Nechť $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je otevřená neprázdná množina, $\boldsymbol{f} : G \to \mathbb{R}^n$ je spojitá na G a $[t_0, \boldsymbol{x}_0] \in G$. Pak $\boldsymbol{x} : I \to \mathbb{R}^n$ řeší na otevřeném intervalu I obsahujícím t_0 rovnici (12.11) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ právě tehdy, když je $\boldsymbol{x}$ spojité, $[t, \boldsymbol{x}(t)] \in G$ pro $t \in I$ a pro každé $t \in I$ platí

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s.$$

Důkaz. $\Rightarrow$ Je-li $\boldsymbol{x}$ řešení, pak $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$, $[t, \boldsymbol{x}(t)] \in G$ a

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)), \quad t \in I.$$

Pro $t \in I$ dostáváme integrací od t_0 do t vztah

$$\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s,$$

neboli

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s.$$

$\Leftarrow$ Nechť $\boldsymbol{x}$ je spojité zobrazení s popsanými vlastnostmi. Protože je zobrazení $s \mapsto \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))$ dobře definované a spojité, díky Větě **??** je $\boldsymbol{x}$ diferencovatelné zobrazení a platí

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)), \quad t \in I.$$

Zjevně $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$. ■

12.4.8. Věta (Peano)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je otevřená neprázdná množina, $\boldsymbol{f} : G \to \mathbb{R}^n$ je spojitá na G. Pak pro každé $[t_0, \boldsymbol{x}_0] \in G$ existuje maximální řešení rovnice (12.11) splňující $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$.

Důkaz. V první části důkazu budeme hledat řešení definované na *nějakém* otevřeném intervalu obsahujícím t_0.

Krok 1. Rozmysleme si, že řešení stačí hledat na nějakém intervalu tvaru $[t_0, t_0 + \varepsilon]$ (Řešením na tomto intervalu rozumíme spojité zobrazení $\boldsymbol{x} : [t_0, t_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}^n$ splňující $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$ a (12.11) na $(t_0, t_0 + \varepsilon)$). Mějme totiž vyřešenou takovouto úlohu. Pak lze uvažovat úlohu s obráceným časem

$$\boldsymbol{x}' = -\boldsymbol{f}(-t, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}(-t_0) = \boldsymbol{x}^0. \tag{12.14}$$

Je-li $\phi(t)$ řešení (12.14) na intervalu $[-t_0, -t_0+\varepsilon_2]$ a $\psi(t)$ je řešení (12.11) na $[t_0, t_0+\varepsilon_1]$ s počáteční podmínkou $\psi(t_0) = \boldsymbol{x_0}$, pak

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{cases} \phi(-t), & t \in [t_0 - \varepsilon_2, t_0], \\ \psi(t), & t \in [t_0, t_0 + \varepsilon_1] \end{cases}$$

je řešení (12.11) splňující $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x_0}$.

Krok 2. Vezměme $a, b \in (0, \infty)$ takové, že

$$K = [t_0, t_0 + a] \times \overline{B}(\boldsymbol{x}^0, b) \subset G.$$

Protože je K kompaktní, je dle Věty **??** zobrazení $\boldsymbol{f}$ na K stejnoměrně spojitá a omezené (viz Věta **??**). Tedy existuje $L \in \mathbb{R}$, $L > 0$ takové, že

$$\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})\| \leq L, \quad t \in [t_0, t_0 + a], \boldsymbol{y} \in \overline{B}(\boldsymbol{x_0}, b).$$

Položme

$$c = \min\{a, \frac{b}{L}\}, \quad I = [t_0, t_0 + c]$$

a

$$\mathcal{F} = \{\boldsymbol{y} : I \to \mathbb{R}^n;\ (\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{x}^0) \ \&\ (\|\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{y}(s)\| \leq L|t-s|,\ t, s \in I)\}.$$

Krok 3. Povšimněme si, že $\mathcal{F}$ sestává z L-lipschitzovských zobrazení, a tedy se jedná o stejně spojitou množinu. Dále platí

$$\forall \boldsymbol{y} \in \mathcal{F}\ \forall t \in I : \|\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{x}^0\| = \|\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{y}(t_0)\| \leq L|t - t_0| \leq Lc \leq b.$$

Tedy $\mathcal{F}$ je množina omezená v $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$. Snadno se pak ověří, že je uzavřená. Tedy je dle Věty **??** kompaktní.

Krok 3. Definujme $F : \mathcal{F} \to [0, \infty)$ jako

$$F(\boldsymbol{y}) = \max_{t \in I} \left\| \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{x}^0 - \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{y}(s))\, \mathrm{d}s \right\| = \left\| \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{x}^0 - \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{y}(s))\, \mathrm{d}s \right\|_{\infty}.$$

Zobrazení F je dobře definované. Zobrazení $s \mapsto \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{y}(s))$ je totiž spojité na I, a tedy je dle Věty **??** spojité i zobrazení

$$t \mapsto \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{x}^0 - \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{y}(s))\, \mathrm{d}s.$$

Protože je norma spojitá funkce na $\mathbb{R}^n$, je funkce

$$t \mapsto \left\| \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{x}^0 - \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{y}(s))\, \mathrm{d}s \right\|$$

spojitá na I.

Krok 4. Nyní ukážeme, že je zobrazení F spojité na $\mathcal{F}$. Mějme tedy dáno $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Díky stejnoměrné spojitosti f na K existuje $\delta \in (0, \varepsilon)$ takové, že

$$\forall [t, \boldsymbol{z}], [t', \boldsymbol{z}'] \in K : \big(|t - t'| < \delta \ \&\ \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}'\| < \delta\big) \Rightarrow \|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{z}) - \boldsymbol{f}(t', \boldsymbol{z}')\| < \varepsilon.$$

Nechť $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in \mathcal{F}$, $\|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2\|_\infty < \delta$. Pak máme $\sup_{s\in I} \|\boldsymbol{y}_1(s) - \boldsymbol{y}_2(s)\| < \delta$, a tedy

$$\begin{aligned}|F(\boldsymbol{y}_1) - F(\boldsymbol{y}_2)| &= \left\| \boldsymbol{y}_1(t) - \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{y}_1(s))\,\mathrm{d}s - \left(\boldsymbol{y}_2(t) - \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{y}_2(s))\,\mathrm{d}s\right)\right\|_\infty \\ &\le \|\boldsymbol{y}_1(t) - \boldsymbol{y}_2(t)\|_\infty + \sup_{t\in I} \int_{t_0}^{t} \|\boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{y}_1(s)) - \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{y}_2(s))\| \\ &\le \varepsilon + \int_{t_0}^{t_0+c} \varepsilon\,\mathrm{d}s = \varepsilon(1+c).\end{aligned}$$

Tím je spojitost F ukázána.

Krok 5. Jelikož je F spojitá funkce na kompaktní množině, nabývá svého minima v nějakém bodě $\boldsymbol{x} \in \mathcal{F}$. Zbytek důkazu bude věnován ověření $F(\boldsymbol{x}) = 0$, což dle Lemmatu 12.4.7 stačí k nalezení řešení na intervalu I.

Krok 6. Nyní zkonstruujeme funkce $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^\infty$ v $\mathcal{F}$ splňující $F(\boldsymbol{x}_k) \to 0$. K tomuto účelu vezměme $k \in \mathbb{N}$ pevné. Induktivně sestrojíme zobrazení $\boldsymbol{x}_k : I \to \overline{B}(\boldsymbol{x}^0, b)$ takové, že $\boldsymbol{x}_k \in \mathcal{F}$ a $F(\boldsymbol{x}_k) \le \frac{Lc}{k}$.

Položme nejprve

$$\boldsymbol{x}_k(t) = \boldsymbol{x}^0, \quad t \in [t_0, t_0 + \frac{c}{k}].$$

Dále definujme

$$\boldsymbol{x}_k(t) = \boldsymbol{x}^0 + \int_{t_0+\frac{c}{k}}^{t} \boldsymbol{f}(s - \frac{c}{k}, \boldsymbol{x}_k(s - \frac{c}{k}))\,\mathrm{d}s, \quad t \in (t_0 + \frac{c}{k}, t_0 + \frac{2c}{k}].$$

Předpokládejme nyní, že pro nějaké $j \in \{2, \dots, k-1\}$ je zobrazení $\boldsymbol{x}_k$ definované na $[t_0, t_0 + \frac{jc}{k}]$ a splňuje

$$\boldsymbol{x}_k(t) = \boldsymbol{x}^0 + \int_{t_0+\frac{c}{k}}^{t} \boldsymbol{f}(s - \frac{c}{k}, \boldsymbol{x}_k(s - \frac{c}{k}))\,\mathrm{d}s, \quad t \in [t_0 + \frac{c}{k}, \frac{jc}{k}]. \tag{12.15}$$

Pak máme z (12.15)

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}_k(t)\| &= \left\| \int_{t_0+\frac{c}{k}}^{t} \boldsymbol{f}(s - \frac{c}{k}, \boldsymbol{x}_k(s - \frac{c}{k}))\,\mathrm{d}s \right\| \\ &\le \int_{t_0+\frac{c}{k}}^{t} \left\| \boldsymbol{f}(s - \frac{c}{k}, \boldsymbol{x}_k(s - \frac{c}{k}))\right\| \mathrm{d}s \\ &\le L(t - t_0 - \frac{c}{k}) \le Lc \le b, \quad t \in (t_0 + \frac{c}{k}, \frac{jc}{k}].\end{aligned}$$

Tedy je zobrazení $s \mapsto \boldsymbol{f}(s - \frac{c}{k}, \boldsymbol{x}_k(s - \frac{c}{k}))$ dobře definované na $(t_0 + \frac{jc}{k}, t_0 + \frac{(j+1)c}{k}]$ a můžeme položit

$$\boldsymbol{x}_k(t) = \boldsymbol{x}_k(t_0 + \frac{jc}{k}) + \int_{\frac{jc}{k}}^{t} \boldsymbol{f}(s - \frac{c}{k}, \boldsymbol{x}_k(s - \frac{c}{k}))\,\mathrm{d}s, \quad t \in (\frac{jc}{k}, \frac{(j+1)c}{k}].$$

Pak zřejmě platí

$$\boldsymbol{x}_k(t) = \boldsymbol{x}^0 + \int_{t_0+\frac{c}{k}}^{t} \boldsymbol{f}(s - \frac{c}{k}, \boldsymbol{x}_k(s - \frac{c}{k}))\,\mathrm{d}s, \quad t \in (\frac{jc}{k}, \frac{(j+1)c}{k}].$$

Tím je konstrukce zobrazení $\boldsymbol{x}_k$ na celém intervalu $[t_0, t_0 + c]$ ukončena. Povšimněme si, že z konstrukce vyplývá rovnost

$$\boldsymbol{x}_k(t) = \begin{cases} \boldsymbol{x}^0, & t \in [t_0, t_0 + \frac{c}{k}], \\ \boldsymbol{x}^0 + \int_{t_0+\frac{c}{k}}^{t} \boldsymbol{f}(s - \frac{c}{k}, \boldsymbol{x}_k(s - \frac{c}{k}))\,\mathrm{d}s, & t \in (t_0 + \frac{c}{k}, t_0 + c] \end{cases} \tag{12.16}$$

Po substituci $s - \frac{c}{k} = u$ obdržíme rovnost

$$\boldsymbol{x}_k(t) = \begin{cases} \boldsymbol{x}^0, & t \in [t_0, t_0 + \frac{c}{k}], \\ \boldsymbol{x}^0 + \int_{t_0}^{t-\frac{c}{k}} \boldsymbol{f}(u, \boldsymbol{x}_k(u))\,\mathrm{d}u, & t \in (t_0 + \frac{c}{k}, t_0 + c] \end{cases} \tag{12.17}$$

Krok 7. Ukážeme, že $\boldsymbol{x}_k \in \mathcal{F}$. K tomu je třeba ověřit L-lipschitzovskost $\boldsymbol{x}_k$. Mějme tedy dány body $t, s \in [t_0, t_0 + c]$ splňující $t < s$. Pokud $t, s \in [t_0, t_0 + \frac{c}{k}]$, nerovnost

$$\|\boldsymbol{x}_k(s) - \boldsymbol{x}_k(t)\| \le L(s - t)$$

zjevně platí. Pokud $t_0 + \frac{c}{k} \le t$, pak máme z (12.16) odhad

$$\|\boldsymbol{x}_k(s) - \boldsymbol{x}_k(t)\| \le \int_t^s \left\| \boldsymbol{f}(u - \frac{c}{k}, \boldsymbol{x}_k(u - \frac{c}{k})) \right\| \mathrm{d}u \le L(s - t).$$

Pokud $t \le t_0 + \frac{c}{k} \le s$, pak

$$\|\boldsymbol{x}_k(s) - \boldsymbol{x}_k(t)\| = \left\| \int_{t_0+\frac{c}{k}}^{s} \boldsymbol{f}(u - \frac{c}{k}, \boldsymbol{x}_k(u - \frac{c}{k}))\,\mathrm{d}u \right\| \le L(s - t_0 - \frac{c}{k}) \le L(s - t).$$

Tedy $\boldsymbol{x}_k \in \mathcal{F}$.

Krok 8. Nyní ověříme, že

$$F(\boldsymbol{x}_k) \le \frac{Lc}{k}. \tag{12.18}$$

Nechť $t \in [t_0, t_0 + c]$ je dáno. Pokud $t \in [t_0, t_0 + \frac{c}{k}]$, pak

$$\left\| \boldsymbol{x}_k(t) - \boldsymbol{x}^0 - \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}_k(s))\,\mathrm{d}s \right\| \le \int_{t_0}^{t} \|\boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}_k(s))\|\,\mathrm{d}s \le \frac{Lc}{k}.$$

Pokud $t \in [t_0, t_0 + \frac{c}{k}]$, pak

$$\begin{aligned} \left\| \boldsymbol{x}_k(t) - \boldsymbol{x}^0 - \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}_k(s))\,\mathrm{d}s \right\| &= \left\| \int_{t_0}^{t-\frac{c}{k}} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}_k(s))\,\mathrm{d}s - \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}_k(s))\,\mathrm{d}s \right\| \\ &\le \int_{t-\frac{c}{k}}^{t} \|\boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}_k(s))\|\,\mathrm{d}s \le \frac{Lc}{k}. \end{aligned}$$

Tedy

$$F(\boldsymbol{x}_k) = \max_{t \in I} \left\| \boldsymbol{x}_k(t) - \boldsymbol{x}^0 - \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}_k(s))\,\mathrm{d}s \right\| \le \frac{Lc}{k}.$$

Funkce $\boldsymbol{x}$ tedy splňuje

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s,$$

a tedy na intervalu I řeší rovnici (12.11) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$ (viz Lemma 12.4.7).

Hledejme nyní nějaké *maximální* řešení procházející bodem $[t_0, \boldsymbol{x}^0]$. Položme

$$\mathcal{A} = \{\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{x} \text{ řeší (12.11) a } \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0\}.$$

Definujme na $\mathcal{A}$ částečné uspořádání vztahem

$$\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \operatorname{graf} \boldsymbol{x} \subset \operatorname{graf} \boldsymbol{y}.$$

Pokud $\mathbb{R} \subset \mathcal{A}$ je řetězec, je $\bigcup \mathcal{R}$ horní závora $\mathcal{R}$. Maximální prvek $\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}$ je potom maximálním řešením (12.11), který splňuje $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$. Tím je důkaz dokončen. ■

12.4.9. Věta (Picard)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je otevřená neprázdná množina, $\boldsymbol{f}$: $[t, \boldsymbol{x}] \to \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazení na G a je „lokálně lipschitzovské v x", tj. pro každý bod $[t, \boldsymbol{x}] \in G$ existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ a $L \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé dva body $[s, \boldsymbol{x}^1], [s, \boldsymbol{x}^2] \in B([t, \boldsymbol{x}], \varepsilon)$ máme

$$\left\| \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}^1) - \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}^2) \right\| \leq L \left\| \boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^2 \right\|.$$

Jestliže $[t_0, \boldsymbol{x}^0] \in G$, potom existuje právě jedno maximální řešení $\boldsymbol{x}$ rovnice (12.11) splňující $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$.

12.4.10. Poznámka. Pokud $\boldsymbol{f}$ je třídy $\mathcal{C}^1$ na G, potom $\boldsymbol{f}$ splňuje podmínky Věty 12.4.9. Stačí totiž použít Větu **??** o přírůstku vektorové funkce.

Důkaz. Krok 1. Pro $[t_0, \boldsymbol{x}^0] \in G$ nalezneme L a ε svědčící o lispchitzovskosti $\boldsymbol{f}$ ve druhé proměnné na $B(\boldsymbol{x}^0, \varepsilon)$, tj.

$$\forall [s, \boldsymbol{x}^1], [s, \boldsymbol{x}^2] \in B([t_0, \boldsymbol{x}^0], \varepsilon) : \left\| \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}^1) - \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}^2) \right\| \leq L \left\| \boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^2 \right\|.$$

Navíc můžeme předpokládat, že existuje $K \in \mathbb{R}$ splňující

$$\forall [s, \boldsymbol{x}] \in B([t_0, \boldsymbol{x}^0], \varepsilon) : |\boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x})| \leq K.$$

Zvolme $\delta \in (0, \frac{\varepsilon}{2})$ takové, že

$$2L\delta < 1 \quad \text{a} \quad K\delta < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Položme $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Pak máme

$$I \times B(\boldsymbol{x}^0, \frac{\varepsilon}{2}) \subset \overline{B}([t_0, \boldsymbol{x}^0], \varepsilon) \subset G.$$

Krok 2. Uvažujme Banachův prostor $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ a jeho podmnožinu $M = \overline{B}(\boldsymbol{g}^0, \frac{\varepsilon}{2})$, kde $\boldsymbol{g}^0(t) = \boldsymbol{x}^0$, $t \in I$. Pak M je uzavřená podmnožina úplného prostoru $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$, a tedy je sama úplná (viz Věta ??). Definujme zobrazení $T : M \to M$ předpisem

$$T\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))\, \mathrm{d}s, \quad t \in I, \boldsymbol{x} \in M.$$

Ukažme, že T je dobře definováno. Pokud $\boldsymbol{x} \in M$, pak

$$[s, \boldsymbol{x}(s)] \in I \times \overline{B}(\boldsymbol{x}^0, \frac{\varepsilon}{2}) \subset G, \quad s \in I.$$

Funkce $s \mapsto \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))$ je spojitá na I, a tedy $T\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$. Dále platí

$$\begin{aligned} \left\| T\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{g}^0(t) \right\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))\, \mathrm{d}s \right\| \le \int_{t_0}^{t} \|\boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))\|\, \mathrm{d}s \\ &\le K\delta < \frac{\varepsilon}{2}, \quad t \in I. \end{aligned}$$

Odtud máme $\left\| T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{g}^0 \right\| \le \frac{\varepsilon}{2}$,a tedy $T\boldsymbol{x} \in M$.

Krok 3. Dále ověříme, že zobrazení T je kontrakce na prostoru M. Pro $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M$ totiž máme

$$\begin{aligned} \|T\boldsymbol{x} - T\boldsymbol{y}\| &= \sup_{t \in I} \left\| \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))\, \mathrm{d}s - \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{y}(s))\, \mathrm{d}s \right\| \\ &\le \sup_{t \in I} \int_{t_0}^{t} \|\boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s)) - \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{y}(s))\|\, \mathrm{d}s \\ &\le \sup_{t \in I} \int_{t_0}^{t} L\, \|\boldsymbol{x}(s) - \boldsymbol{y}(s)\|\, \mathrm{d}s \\ &\le L \cdot 2\delta\, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|. \end{aligned}$$

Protože $2L\delta < 1$, T je vskutku kontrakce.

Krok 4. Použitím Banachovy věty o kontrakci **??** najdeme jednoznačně určený prvek $\boldsymbol{x} \in M$ splňující $T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, neboli

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))\, \mathrm{d}s.$$

Dle Lemmatu 12.4.7 je $\boldsymbol{x}$ řešení (12.11) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$.

Krok 5. Ukažme, že řešení $\boldsymbol{x}$ je určeno na okolí bodu t_0 jednoznačně, tj., je-li $\boldsymbol{y} : J \to \mathbb{R}^n$ řešení (12.11), kde J je otevřený interval obsahující t_0 a $\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$, pak $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ na nějakém otevřeném intervalu obsaženém v $J \cap I$. Mějme tedy takové řešení $\boldsymbol{y} : J \to \mathbb{R}^n$. Vezmeme $\tilde{\delta} \in (0, \delta)$ takové, že $[t_0 - \tilde{\delta}, t_0 + \tilde{\delta}] \subset J$ a $\left\| \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{x}^0 \right\| \le \frac{\varepsilon}{2}$ pro každé $t \in [t_0 - \tilde{\delta}, t_0 + \tilde{\delta}]$. Položíme $\tilde{I} = [t_0 - \tilde{\delta}, t_0 + \tilde{\delta}]$ a uvažujme objekty $\mathcal{C}(\tilde{I}, \mathbb{R}^n)$, $\tilde{M}$ a $\tilde{T}$ definované analogicky jako v předešlém. Předchozí postup dává, že existuje právě jedno $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \tilde{M}$ takové, že $\tilde{T}\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{x}}$. Protože $\boldsymbol{x}|_{\tilde{I}}, \boldsymbol{y}|_{\tilde{I}} \in \tilde{M}$ a splňují

$$\boldsymbol{x}|_{\tilde{I}} = \tilde{T}(\boldsymbol{x}|_{\tilde{I}}), \quad \boldsymbol{y}|_{\tilde{I}} = \tilde{T}(\boldsymbol{y}|_{\tilde{I}}),$$

platí díky jednoznačnosti $\tilde{\boldsymbol{x}}$ rovnost $\boldsymbol{x}|_{\tilde{I}} = \boldsymbol{y}|_{\tilde{I}}$.

Krok 6. Stejně jako v důkazu Peanovy věty 12.4.8 najdeme nyní maximální řešení $\boldsymbol{x} : I \to \mathbb{R}^n$ rovnice (12.11) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$.

Krok 7. Ukažme jednoznačnost tohoto maximálního řešení. Nechť $\boldsymbol{y} : J \to \mathbb{R}^n$ je jiné maximální řešení (12.11) splňující $\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$. Označme

$$S = \{t \in I \cap J;\ \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{y}(t)\}.$$

Ze spojitosti řešení je S uzavřená v $I \cap J$, díky Kroku 5. je množina S otevřená v $I \cap J$. Máme-li totiž $s \in S$, pak na nějakém okolí s má rovnice (12.11) pouze jedno řešení procházející bodem $[s, \boldsymbol{x}(s)]$. Na tomto okolí se tedy řešení $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ rovnají. Nakonec si uvědomíme, že S je neprázdná díky bodu t_0. Protože je množina $I \cap J$ souvislá (viz Věta **??**), platí $S = I \cap J$ dle Věty **??**.

Nakonec ukažme, že $I = J$. Pokud by existoval $I \setminus J \neq \emptyset$, pak by funkce

$$\boldsymbol{z}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{x}(t), & t \in I \setminus J, \\ \boldsymbol{y}(t), & t \in J, \end{cases}$$

byla řešením striktně větším než $\boldsymbol{y}$, což by byl spor s maximalitou $\boldsymbol{y}$. Tedy $I \subset J$. Analogicky pak odvodíme $J \subset I$. Tím je důkaz dokončen. ■

12.4.11. Lemma. Nechť $\boldsymbol{x}$ je řešení (12.11) na intervalu (α, β) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.

(i) Existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ takové, že řešení $\boldsymbol{x}$ lze prodloužit na interval $(\alpha, \beta + \varepsilon)$;

(ii) Existuje posloupnost $\{t_n\}$ ležící v (α, β) a $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ takové, že

$$\lim_{m\to\infty} [t_n, \boldsymbol{x}(t_n)] = [\beta, \boldsymbol{y}] \in G.$$

Důkaz. (ii) $\Rightarrow$ (i) Existuje-li řešení $\tilde{\boldsymbol{x}}$ rozšiřující $\boldsymbol{x}$ za bod β, pak pro každou posloupnost $\{t_m\}$ konvergující k β platí

$$\lim_{m\to\infty} [t_m, \boldsymbol{x}(t_m)] = [\beta, \tilde{\boldsymbol{x}}(\beta)] \in G.$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Nechť $\{t_m\}$ a $\boldsymbol{y}$ splňují podmínku popsanou v (ii). Ukážeme nejprve, že

$$\lim_{t\to\beta_+} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{y}. \tag{12.19}$$

Zvolme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ takové, že

$$[\beta - \delta, \beta] \times \overline{B}(\boldsymbol{y}, \delta) \subset G$$

a nechť $M \in \mathbb{R}$ splňuje

$$\sup\{f([t, \boldsymbol{z}]);\ [t, \boldsymbol{z}] \in [\beta - \delta, \beta] \times \overline{B}(\boldsymbol{y}, \delta)\} \leq M.$$

Předpokládejme, že (12.19) neplatí. Z Heineovy věty (viz Věta **??**) existuje posloupnost $\{\tau_n\}$ v (α, β) konvergující k β a číslo $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$ takové, že $\|\boldsymbol{x}(\tau_m) - \boldsymbol{y}\| \geq \gamma$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $\gamma < \delta$. Postupným vybíráním členů posloupností $\{t_n\}$ a $\{\tau_n\}$ lze zařídit, aby $t_1 < \tau_1 < t_2 < \tau_2 < \cdots$ a $\|\boldsymbol{x}(t_n) - y\| < \gamma$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$s_n = \inf\{t \in [t_n, \tau_n];\ \|\boldsymbol{x}(t) - y\| \geq \gamma\}.$$

Pak $s_n \in (t_n, \tau_n]$ (máme $\|\boldsymbol{x}(t_n) - y\| < \gamma$ a funkce $t \mapsto \|\boldsymbol{x}(t) - y\|$ je spojitá v t_n). Ze spojitosti funkce $t \mapsto \|\boldsymbol{x}(t) - y\|$ dostáváme $\|\boldsymbol{x}(s) - y\| \geq \gamma$. Pokud by tato norma byla větší než γ, byla by větší i na nějakém okolí bodu s_n. Tedy by existoval bod t nalevo od s_n splňující $\|\boldsymbol{x}(t) - y\| \geq \gamma$, což je spor s definici infima. Tedy $\|\boldsymbol{x}(s_n) - y\| = \gamma$.

Dále platí $\|\boldsymbol{x}(t) - y\| \leq \gamma$ pro $t \in [t_n, s_n]$. To nahlédneme opět sporem; pokud by $\|\boldsymbol{x}(t) - y\| > \gamma$ pro nějaké $t \in [t_n, s_n)$, dostali bychom znovu spor s definici bodu s_n. Tedy

$$\forall t \in [t_n, s_n] : \|\boldsymbol{x}(t) - y\| \leq \gamma < \delta.$$

Pak ale máme $[s, \boldsymbol{x}(s)] \in [\beta - \delta, \beta] \times \overline{B}(\boldsymbol{y}, \delta)$ pro $s \in [t_n, s_n]$, a tedy

$$\begin{aligned}\gamma &= \|\boldsymbol{x}(s_n) - y\| \leq \|\boldsymbol{x}(s_n) - \boldsymbol{x}(t_n)\| + \|\boldsymbol{x}(t_n) - y\| \\ &\leq \int_{t_n}^{s_n} \|\boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s)\| \, \mathrm{d}s + \|\boldsymbol{x}(t_n) - y\| \\ &\leq M \|s_n - t_n\| + \|\boldsymbol{x}(t_n) - y\| \,.\end{aligned}$$

Tím dostáváme spor, neboť pravá strana konverguje k 0 pro n jdoucí do nekonečna. Tedy platí (12.19).

Nyní uvažujme nějaké řešení $\boldsymbol{y}$ úlohy (12.11) na intervalu $(\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon)$ s počáteční podmínkou $\boldsymbol{x}(\beta) = y$. Pak je funkce

$$\boldsymbol{z}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{x}(t), & t \in (\alpha, \beta), \\ \boldsymbol{y}(t), & t \in [\beta, \beta + \varepsilon). \end{cases}$$

prodloužením řešení $\boldsymbol{x}$ za bod β (viz Lemma 12.1.2). ■

12.4.12. Věta. Nechť $\boldsymbol{x} : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ je řešení (12.11) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$. Nechť $K \subset \mathbb{R}^n$ je kompakt takový, že $[t_0, \beta] \times K \subset G$ a nechť existuje posloupnost $\{t_n\}$ konvergující k β a splňující $\boldsymbol{x}(t_m) \in K$. Pak existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, a řešení $\boldsymbol{y} : (\alpha, \beta + \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ rovnice (12.11) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$ shodující se na (α, β) s $\boldsymbol{x}$.

Důkaz. Mějme posloupnost $\{t_n\}$ konvergující k β a splňující $\boldsymbol{x}(t_m) \in K$. Protože K je kompaktní, lze po eventuálním výběru podposloupnosti předpokládat, že $\boldsymbol{x}(t_n) \to \boldsymbol{y}$ pro nějaké $\boldsymbol{y} \in K$. Lemma 12.4.11 tedy dává rozšíření řešení za bod β. ■

12.4.13. Lemma (Gronwall[3]). Nechť funkce x je spojitá na intervalu $[\alpha, \beta)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}^*$. Nechť existují čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $c \geq 0$ taková, že pro každé $t \in [\alpha, \beta)$ platí

$$x(t) \leq a + \int_\alpha^t (bx(s) + c) \, \mathrm{d}s.$$

Pak pro každé $t \in [\alpha, \beta)$ platí

$$u(t) \leq \left(a + \frac{c}{b}\right) e^{b(t-\alpha)}.$$

[3]Thomas Hakon Grönwall (1877–1932)

Důkaz. Označme

$$y(t) = a + \int_\alpha^t (bx(s) + c)\,\mathrm{d}s, \quad t \in [\alpha, \beta).$$

Platí

$$y(\alpha) = a \quad \text{a} \quad y'(t) = bx(t) + c \le by(t) + c, \quad t \in [\alpha, \beta).$$

Proto také

$$y'(t)e^{-bt} \le by(t)e^{-bt} + ce^{-bt}, \quad t \in [\alpha, \beta).$$

Odtud plyne

$$\left(y(t)e^{-bt}\right)' \le ce^{-bt}, \quad t \in [\alpha, \beta).$$

Použitím Věty **??** a úpravou postupně dostáváme pro každé $s \in [\alpha, \beta)$

$$\int_\alpha^s \left(y(t)e^{-bt}\right)' \mathrm{d}t \le \int_\alpha^s ce^{-bt}\,\mathrm{d}t,$$

$$\left[y(t)e^{-bt}\right]_\alpha^s \le \left[-\frac{c}{b}e^{-bt}\right]_\alpha^s,$$

$$y(s)e^{-bs} - y(\alpha)e^{-b\alpha} \le -\frac{c}{b}e^{-bs} + \frac{c}{b}e^{-b\alpha}.$$

Odtud již dostáváme

$$x(s) \le y(s) \le a + e^b(s-\alpha) - \frac{c}{b} + \frac{c}{b}e^{b(s-\alpha)} \le \left(a + \frac{c}{b}\right)e^{b(s-\alpha)}$$

pro každé $s \in [\alpha, \beta)$. ■

12.4.14. Věta. Nechť I je otevřený interval a $G = I \times \mathbb{R}^n$. Nechť pro každý uzavřený omezený interval $J \subset I$ existují nezáporné konstanty M_J, L_J takové, že

$$\forall [t, \boldsymbol{x}] \in J \times \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})\| \le M_J + L_J \|\boldsymbol{x}\|.$$

Pak je každé maximální řešení (12.11) definováno na celém I.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že všechny konstanty L_J jsou kladné. Nechť $\boldsymbol{x}$ je řešení (12.11) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$ a $J \subset I$ je libovolný omezený uzavřený interval obsahující t_0. Pak máme pro $t \in J$

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}(t)\| &= \left\|\boldsymbol{x}^0 + \int_{t_0}^t \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s\right\| \\ &\le \left\|\boldsymbol{x}^0\right\| + \int_{t_0}^t \|\boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))\|\,\mathrm{d}s \\ &\le \left\|\boldsymbol{x}^0\right\| + \int_{t_0}^t (M_J + L_J\|\boldsymbol{x}(s)\|)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Dle Gronwallovy nerovnosti 12.4.13 pak obdržíme pro $t \in J$

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| \le \left(\left\|\boldsymbol{x}^0\right\| + \frac{M_J}{L_J}\right)e^{L_J(t-t_0)}.$$

Protože je funkce $e^{L_J(t-t_0)}$ na J omezená (viz Věta ??), leží řešení $\boldsymbol{x}$ na J v nějaké uzavřené kouli. Podle Věty 12.4.12 lze řešení $\boldsymbol{x}$ prodloužit z J na nějaký otevřený interval $\tilde{J}$, $J \subset \tilde{J} \subset I$. Protože je $\boldsymbol{x}$ maximální, obsahuje jeho definiční obor $\tilde{J}$. Tedy $\boldsymbol{x}$ je definováno na každém omezeném uzavřeném podintervalu I, a tedy na I. ■

12.5. Soustavy lineárních diferenciálních rovnic

Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned}
x_1' &= a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t),\\
x_2' &= a_{21}(t)x_1 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t),\\
&\ \vdots\\
x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t),
\end{aligned} \tag{12.20}$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $a_{ij} : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$, $b_i : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$, $i, j \in \{1,\dots,n\}$ jsou spojité funkce.

Vektorový tvar je

$$\boldsymbol{x}' = \mathbb{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t),$$

kde

$$\mathbb{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

12.5.1. Věta. Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha,\beta)$ a $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$. Nechť $\mathbb{A} : (\alpha,\beta) \to M(n \times n)$, $\boldsymbol{b} : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}^n$ jsou spojitá zobrazení. Potom existuje právě jedno maximální řešení $\boldsymbol{x}$ soustavy (12.20) splňující $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$. Toto řešení je definováno na celém intervalu (α,β).

Důkaz. Definujme $\boldsymbol{f} : (\alpha,\beta) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ předpisem

$$\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) = \mathbb{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t).$$

Zobrazení $\boldsymbol{f}$ je na množině $(\alpha,\beta) \times \mathbb{R}^n$ spojité.

Dále ukažme, že je „lipschitzovské v druhé proměnné". Mějme $[t,\boldsymbol{x}] \in (\alpha,\beta) \times \mathbb{R}^n$ dáno. Zvolme uzavřený omezený interval J, $t \in J \subset (\alpha,\beta)$. Položme

$$M_J = \sup_{t \in J} \|\boldsymbol{b}(t)\| \quad \text{a} \quad L_J = \sup_{t \in J} \|\mathbb{A}(t)\|,$$

což jsou díky spojitosti uvažovaných funkcí nezáporná reálná čísla. Pak pro $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2 \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\left\| \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}^1) - \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}^2) \right\| = \left\| \mathbb{A}(t)(\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^2) \right\| \le L_J \left\| \boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^2 \right\|.$$

Tedy dle Věty 12.4.9 existuje maximální řešení $\boldsymbol{x}$ splňující počáteční podmínku a je určeno jednoznačně.

Dále ukažme, že pro každý omezený uzavřený interval $J \subset (\alpha, \beta)$ obsahující t_0 splňují konstanty M_J, L_J definované výše odhady Věty 12.4.14. Vskutku,

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})\| &= \|\mathbb{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)\| \leq \|\mathbb{A}(t)\|\,\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{b}(t)\| \\ &\leq L_J\,\|\boldsymbol{x}\| + M_J, \quad [t,\boldsymbol{x}] \in J \times \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Věta 12.4.14 tedy říká, že řešení $\boldsymbol{x}$ je definováno na celém intervalu (α, β). ■

12.5.2. Definice. Je-li $\mathbb{A}$ jako v (12.20), pak **homogenní soustavou** rozumíme soustavu rovnic

$$\boldsymbol{x}' = \mathbb{A}(t)\boldsymbol{x}. \tag{12.21}$$

12.5.3. Věta. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha < \beta$ a $\mathbb{A}\colon (\alpha,\beta) \to M(n \times n)$ je spojité zobrazení. Potom množina všech maximálních řešení soustavy (12.21) tvoří vektorový podprostor prostoru $\mathcal{C}^1((\alpha,\beta),\mathbb{R}^n)$. Dimenze tohoto podprostoru je rovna n.

Důkaz. Podle Věty 12.5.1 je každé maximální řešení (12.21) definováno na (α, β). Množina maximálních řešení je rovna jádru $\operatorname{Ker} L$ lineárního zobrazení $L\colon \mathcal{C}^1((\alpha,\beta),\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}((\alpha,\beta),\mathbb{R}^n)$ definovaného předpisem $L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}' - \mathbb{A}\boldsymbol{y}$. Tedy se jedná o vektorový podprostor prostoru $\mathcal{C}^1((\alpha,\beta),\mathbb{R}^n)$.

K důkazu jeho n-dimenzionality zvolme $t_0 \in (\alpha, \beta)$ pevně. Vezměme řešení $\boldsymbol{x}^1, \dots, \boldsymbol{x}^n$ soustavy (12.21) na (α, β) splňující $\boldsymbol{x}^i(t_0) = \boldsymbol{e}^i$, $i = 1, \dots, n$. Funkce $\{\boldsymbol{x}^1, \dots, \boldsymbol{x}^n\}$ jsou lineárně nezávislé, jelikož jsou vektory $\{\boldsymbol{e}^1, \dots, \boldsymbol{e}^n\}$ lineárně nezávislé. Nechť $\boldsymbol{y}$ je maximální řešení (12.21). Pak $\boldsymbol{y}$ je definováno na (α, β). Označme

$$\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{y}_1(t_0)\boldsymbol{x}^1(t) + \cdots + \boldsymbol{y}_n(t_0)\boldsymbol{x}^n(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Potom $z(t_0) = \boldsymbol{y}(t_0)$ a $\boldsymbol{z}$ řeší (12.21) na (α, β). Z jednoznačnosti řešení plyne

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{y}_1(t_0)\boldsymbol{x}^1(t) + \cdots + \boldsymbol{y}_n(t)\boldsymbol{x}^n(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Tedy $\{\boldsymbol{x}^1, \dots, \boldsymbol{x}^n\}$ je báze prostoru $\operatorname{Ker} L$. ■

12.5.4. Věta. Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha < \beta$ a $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$. Nechť $\mathbb{A} : (\alpha, \beta) \to M(n \times n)$, $\boldsymbol{b} : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ jsou spojitá zobrazení. Nechť $\boldsymbol{y}$ je řešení (12.20) na (α, β). Potom každé řešení soustavy (12.20) na intervalu (α, β) má tvar $\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$, kde $\boldsymbol{z}$ je jisté řešení (12.21).

Důkaz. Jelikož je zobrazení $L : \boldsymbol{y} \mapsto \boldsymbol{y}' - \mathbb{A}\boldsymbol{y}$ lineární na prostoru $\mathcal{C}^1((\alpha,\beta),\mathbb{R}^n)$, máme pro maximální řešení $\boldsymbol{x}$ rovnice (12.20) rovnost

$$L(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = L\boldsymbol{x} - L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0},$$

a tedy $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ řeší (12.21). ■

12.5.5. Definice. Nechť tvoří vektorové funkce $\boldsymbol{y}^1, \dots, \boldsymbol{y}^n$ bázi prostoru řešení rovnice (12.21) na (α, β). Takovouto množinu nazýváme **fundamentální systém** rovnice (12.21). Označme

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} y_1^1(t) & \dots & y_1^n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_n^1(t) & \dots & y_n^n(t) \end{pmatrix}, \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Matici ϕ nazýváme **fundamentální maticí** soustavy (12.21).

12.5.6. Lemma. Nechť ϕ je fundamentální matice rovnice (12.21). Pak $\phi(t)$ je regulární pro každé $t \in (\alpha, \beta)$.

Důkaz. Předpokládejme, že pro jisté $t_0 \in (\alpha, \beta)$ není matice $\Phi(t_0)$ regulární. Pak existují čísla $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ taková, že alespoň jedno je nenulové a

$$c_1 \boldsymbol{y}^1(t_0) + \dots + c_n \boldsymbol{y}^n(t_0) = \mathbf{0}.$$

Potom řešení

$$\boldsymbol{y} = c_1 \boldsymbol{y}^1 + \dots + c_n \boldsymbol{y}^n$$

splňuje $\boldsymbol{y}(t_0) = \mathbf{0}$. Díky jednoznačnosti řešení pak platí $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$. To je ale spor s lineární nezávislostí funkcí $\boldsymbol{y}^1, \dots, \boldsymbol{y}^n$. ■

12.5.7. Věta (Variace konstant)**.** Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a $\boldsymbol{y}^0 \in \mathbb{R}^n$. Pak maximální řešení $\boldsymbol{y}$ rovnice (12.20) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}^0$ má tvar

$$\boldsymbol{y}(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)\boldsymbol{y}^0 + \phi(t)\int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)\boldsymbol{b}(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in (\alpha, \beta),$$

kde ϕ je fundamentální matice soustavy (12.21).

Důkaz. Matice $\phi^{-1}(s)$ je díky Lemmatu 12.5.6 definována pro každé $s \in (\alpha, \beta)$. Z Cramerova pravidla plyne spojitost zobrazení $s \mapsto \phi^{-1}(s)\boldsymbol{b}(s)$, a tedy je $\boldsymbol{y}$ dobře definováno. Použitím $\phi'(t) = \mathbb{A}(t)\phi(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$, dostaneme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}'(t) &= \phi'(t)\phi^{-1}(t_0)\boldsymbol{y}^0 + \phi'(t)\int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)\boldsymbol{b}(s)\,\mathrm{d}s + \phi(t)\phi^{-1}(t)\boldsymbol{b}(t) \\ &= \mathbb{A}(t)\phi(t)\phi^{-1}(t_0)\boldsymbol{y}^0 + \mathbb{A}(t)\phi(t)\int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)\boldsymbol{b}(s)\,\mathrm{d}s + \boldsymbol{b}(t) \\ &= \mathbb{A}(t)\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{b}(t). \end{aligned}$$

Zřejmě platí $\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}^0$. ■

12.6. Řešení lineárních soustav s konstantními koeficienty

12.6.1. Věta. Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ a vektorová funkce $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ je řešením soustavy $y' = \mathbb{A}y$. Pak y je třídy $\mathcal{C}^\infty$ a pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $y^{(k)}(t) = \mathbb{A}^k y(t)$ pro $t \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k. Pro $k = 1$ máme $y' = \mathbb{A}y$ z předpokladu. Předpokládejme nyní, že pro $k \in \mathbb{N}$ je y je třídy $\mathcal{C}^k$ a $y^{(k)} = \mathbb{A}^k y$. Pak máme

$$\left(\mathbb{A}^k y\right)' = \mathbb{A}^k y' = \mathbb{A}^k \mathbb{A} y = \mathbb{A}^{k+1} y.$$

Tedy je funkce $y^{(k)}$ diferencovatelná a platí

$$y^{(k+1)} = \left(\mathbb{A}^k y\right)' = \mathbb{A}^{(k+1)} y.$$

Funkce y je tedy třídy $\mathcal{C}^{k+1}$ a platí požadovaný vztah. Tím je důkaz dokončen. ■

12.6.2. Definice. Matici, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné λ, nazýváme **λ-maticí**.

Řádkovými úpravami λ-matice rozumíme

- záměnu dvou řádků,
- vynásobení řádku nenulovou konstantou,
- přičtení $P(\lambda)$-násobku jednoho řádku k jinému řádku, kde P je polynom v proměnné λ.

12.6.3. Lemma. Nechť $\Lambda = (P_1, \dots, P_n)^T$ je λ-matice o rozměrech $n \times 1$. Potom ji lze konečnou posloupností řádkových úprav převést na λ-matici $\tilde{\Lambda} = (\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n)^T$, kde nejvýše jeden z polynomů $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n$ je nenulový.

Důkaz. Předpokládejme, že $\Lambda \neq 0$, v opačném případě není co dokazovat. Pak je následující definice korektní.

$$k(\Lambda) = \min\left\{\operatorname{st} P_i;\ i \in \{1, \dots, n\}, P_i \neq 0\right\}.$$

Použijeme matematickou indukci podle $k(\Lambda)$. Je-li $k(\Lambda) = 0$. Pak lze předpokládat, že $P_1(\lambda) = c \neq 0$. Potom lze pomocí třetí řádkové úpravy převést Λ na $(c, 0, \dots, 0)^T$.

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro všechna $\Lambda \neq 0$ splňující $k(\Lambda) < k$, kde $k > 0$. Uvažujme matici Λ splňující $k(\Lambda) = k$. Opět můžeme předpokládat, že $\operatorname{st} P_1 = k$. Pokud P_j, $j \neq 1$, je nenulový prvek Λ, pak můžeme psát $P_j = N \cdot P_1 + P_j^*$, kde N, P_j^* jsou polynomy a $\operatorname{st} P_j^* < \operatorname{st} P_1$. Pomocí třetí řádkové úpravy lze prvek P_j nahradit prvkem P_j^*. Matici Λ tak lze převést na na matici $\Lambda^* = (P_1, P_2^*, \dots, P_n^*)^T$, kde je buď jediný nenulový polynom P_1, nebo $k(\Lambda^*) < k$ a lze použít indukční předpoklad. ■

12.6.4. Věta. Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Pak lze matici $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ převést konečnou posloupností řádkových úprav na horní trojúhelníkovou λ-matici. Výsledná λ-matice má na diagonále nenulové polynomy, součet jejichž stupňů je n.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že každou λ-matici lze převést konečnou posloupností řádkových úprav na horní trojúhelníkovou λ-matici. Použijeme matematickou indukci podle n. Je-li $n = 1$, je tvrzení zřejmé.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbb{N}$. Nechť Λ je λ-matice typu $(n+1) \times (n+1)$. Na Λ aplikujeme řádkové úpravy, které převedou Λ na $\tilde{\Lambda}$, jejíž první sloupec má tvar $(\tilde{P}, 0, \dots, 0)^T$ (vizte Lemma 12.6.3). Na submatici matice $\tilde{\Lambda}$, která vznikne vynecháním první řádku a prvního sloupce, pak použijeme indukční předpoklad.

Rozmysleme si nyní druhé tvrzení. Nechť $\tilde{\Lambda}$ je horní trojúhelníková λ-matice vzniklá z $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ pomocí řádkových úprav. Potom $\det \tilde{\Lambda} = c \det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ nenulové (toto plyne z vlastností determinantů a polynomů). Polynom $\lambda \mapsto c \det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})$ je n-tého stupně, a tak dostáváme požadované tvrzení. ■

12.6.5. Označení. Nechť $P(\lambda) = a_n\lambda^n + \dots + a_0$ je polynom s reálnými koeficienty a $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce mající vlastní derivaci n-tého řádu na $\mathbb{R}$. Pak symbol $P\left(\frac{d}{dx}\right)y$ značí funkci

$$a_n y^{(n)} + a_{n_1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y.$$

Nechť $\mathbb{P} = \left(P_{ij}\right)_{\substack{i=1..n\\ j=1..n}}$ je λ-matice typu $n \times n$. Soustavou diferenciálních rovnic odpovídající $\mathbb{P}$ rozumíme soustavu

$$\begin{aligned} P_{11}\left(\frac{d}{dx}\right)y_1 + \dots + P_{1n}\left(\frac{d}{dx}\right)y_n &= 0, \\ &\vdots \\ P_{n1}\left(\frac{d}{dx}\right)y_1 + \dots + P_{nn}\left(\frac{d}{dx}\right)y_n &= 0. \end{aligned}$$

12.6.6. Lemma. Nechť P, Q jsou polynomy a $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Pak

(a) $(P + Q)\left(\frac{d}{dx}\right)y = P\left(\frac{d}{dx}\right)y + Q\left(\frac{d}{dx}\right)y$,
(b) $(PQ)\left(\frac{d}{dx}\right)y = P\left(\frac{d}{dx}\right)\left(Q\left(\frac{d}{dx}\right)\right)y$.

Důkaz. (a) Tvrzení je zřejmé.

(b) Pro $P(\lambda) = \sum_{k=0}^m a_k\lambda^k$ a $Q(\lambda) = \sum_{j=0}^n b_j\lambda^j$ máme

$$\begin{aligned} (PQ)\left(\tfrac{d}{dx}\right)y &= \left(\sum_{k=0}^m a_k\lambda^k\right)\left(\sum_{j=0}^n b_j\lambda^j\right)\left(\tfrac{d}{dx}\right)y \\ &= \left(\sum_{k=0}^m\sum_{j=0}^n a_k b_j \lambda^{k+j}\right)\left(\tfrac{d}{dx}\right)y = \sum_{k=0}^m\sum_{j=0}^n a_k b_j y^{(k+j)} \\ &= \sum_{k=0}^m a_k\left(\sum_{j=0}^n b_j y^{(j)}\right)^{(k)} = P\left(\tfrac{d}{dx}\right)\left(Q\left(\tfrac{d}{dx}\right)\right)y, \end{aligned}$$

a tedy platí (b). ■

12.6.7. Věta. Nechť λ-matice $\tilde{\mathbb{P}}$ vznikla konečnou posloupností řádkových úprav z λ-matice $\mathbb{P}$. Potom vektorová funkce $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ třídy $\mathcal{C}^\infty$ je řešením soustavy odpovídající λ-matici $\mathbb{P}$ právě tehdy, když je řešením soustavy odpovídající λ-matici $\tilde{\mathbb{P}}$.

Důkaz. Stačí ukázat, že pokud y řeší soustavu odpovídající $\mathbb{P}$, pak řeší i soustavu odpovídající $\tilde{\mathbb{P}}$, která vznikla z $\mathbb{P}$ aplikací jedné řádkové úpravy (řádkové úpravy jsou invertibilní).

Toto jistě platí, pokud vyměníme dva řádky či řádek vynásobíme nenulovou konstantou.

Uvažme nyní řádkovou úpravu spočívající v přičtení $P(\lambda)$-násobku jednoho řádku k jinému řádku. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že přičítáme $P(\lambda)$-násobek druhého řádku k řádku prvnímu. Máme

$$\begin{aligned} P_{11}\big(\tfrac{d}{dx}\big)y_1 + \cdots + P_{1n}\big(\tfrac{d}{dx}\big)y_n &= 0, \\ P_{21}\big(\tfrac{d}{dx}\big)y_1 + \cdots + P_{2n}\big(\tfrac{d}{dx}\big)y_n &= 0. \end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned} &(P_{11} + P \cdot P_{21})\big(\tfrac{d}{dx}\big)y_1 + \cdots + (P_{1n} + P \cdot P_{2n})\big(\tfrac{d}{dx}\big)y_n = \\ &= P_{11}\big(\tfrac{d}{dx}\big)y_1 + \cdots + P_{1n}\big(\tfrac{d}{dx}\big)y_n + (P \cdot P_{21})\big(\tfrac{d}{dx}\big)y_1 + \cdots + (P \cdot P_{2n})\big(\tfrac{d}{dx}\big)y_n \\ &= 0 + P\big(\tfrac{d}{dx}\big)\Big(P_{21}\big(\tfrac{d}{dx}\big)y_1 + \cdots + P_{2n}\big(\tfrac{d}{dx}\big)y_n\Big) \\ &= 0 + P\big(\tfrac{d}{dx}\big)0 = 0. \end{aligned}$$

■

12.6.8. Homogenní soustava odpovídá λ-matici $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$, kterou pomocí konečné posloupnosti řádkových úprav převedeme na horní trojúhelníkovou λ-matici

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ 0 & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & P_{nn} \end{pmatrix}.$$

Soustavu

$$\begin{aligned} P_{11}\big(\tfrac{d}{dx}\big)y_1 + \cdots + P_{1n}\big(\tfrac{d}{dx}\big)y_n &= 0, \\ &\ \vdots \\ P_{nn}\big(\tfrac{d}{dx}\big)y_n &= 0, \end{aligned}$$

pak vyřešíme „odzadu“.

Nehomogenní soustavu vyřešíme pomocí variace konstant, případně variantou výše uvedené metody, pokud je pravá strana $\mathcal{C}^\infty$.

12.6.9. Příklad. Vyřešte soustavu

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 + 5y_2, \\ y_2' &= -2y_1 - 2y_2. \end{aligned}$$

Řešení. Příslušná λ-matice $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ má tvar

$$\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -5 \\ 2 & \lambda + 2 \end{pmatrix},$$

kterou pomocí řádkových úprav převedeme na

$$\begin{pmatrix} \lambda - 4 & -5 \\ 2 & \lambda + 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\lambda + 1 \\ 0 & -5 - (\frac{1}{2}\lambda + 1)(\lambda - 4) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\lambda + 1 \\ 0 & -\frac{1}{2}\lambda^2 + \lambda - 1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\lambda + 1 \\ 0 & \lambda^2 - 2\lambda + 2 \end{pmatrix},$$

Rovnice

$$y_2'' - 2y_2' + 2y_2 = 0$$

má kořeny charakteristického polynomu rovny

$$\lambda_1 = 1 + i, \quad \lambda_2 = 1 - i.$$

Obecný tvar řešení je tedy

$$y_2 = \alpha_1 e^t \sin t + \alpha_2 e^t \cos t, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Pak

$$y_2' = \alpha_1 e^t \sin t + \alpha_1 e^t \cos t + \alpha_2 e^t \cos t - \alpha_2 e^t \sin t,$$

což dosazením do první rovnice znamená

$$\begin{aligned} y_1 &= -\alpha_1 e^t \sin t - \alpha_1 e^t \cos t - \tfrac{1}{2}\alpha_1 e^t \sin t - \tfrac{1}{2}\alpha_1 e^t \cos t \\ &\quad - \tfrac{1}{2}\alpha_2 e^t \cos t + \tfrac{1}{2}\alpha_2 e^t \sin t \\ &= (-\tfrac{3}{2}\alpha_1 + \tfrac{1}{2}\alpha_2)e^t \sin t + (-\tfrac{3}{2}\alpha_2 - \tfrac{1}{2}\alpha_1)e^t \cos t. \end{aligned}$$

Fundamentální matice naší soustavy je tedy

$$\phi(t) = e^t \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t & \frac{1}{2}\sin t - \frac{3}{2}\cos t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

♣

12.7. Početní příklady na diferenciální rovnice

12.7.1. Příklad. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y' = x^3(y^2 + 2y - 3).$$

Řešení. Řešíme rovnici

$$y' = g(y)h(x),$$

kde $g(y) = (y+3)(y-1)$ a $h(x) = x^3$.

(1) Zjevně platí $\mathcal{D}(h) = \mathbb{R}$.
(2) Dále máme, že $y = 1$ a $y = -3$ jsou stacionární řešení na $\mathbb{R}$.
(3) Intervaly, kde je g nenulová, jsou po řadě $J_1 = (-\infty, -3)$, $J_2 = (-3, 1)$ a $J_3 = (1, \infty)$.
(4) Pro $I = \mathbb{R}$ a jeden z intervalů J_1, J_2, J_3 řešíme rovnici

$$\frac{y'}{(y+3)(y-1)} = x^3.$$

Jelikož $\int x^3 \, dx = \frac{1}{4}x^4$ a

$$\int \frac{1}{(y+3)(y-1)} \, dy = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+3} \right) dy = \frac{1}{4} \log \left| \frac{y-1}{y+3} \right|,$$

existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\frac{1}{4} \log \left| \frac{y-1}{y+3} \right| = \frac{1}{4}x^3 + c,$$

kde x probíhá níže určený interval. Tedy

$$\log \left| \frac{y-1}{y+3} \right| = x^3 + 4c$$

na tomto intervalu.
(5) Uvažujme nejprve interval J_1. Ten zobrazuje funkce $\log \left| \frac{y-1}{y+3} \right|$ na interval $(0, \infty)$. Pokud $c > 0$, je $\mathcal{H}(x^4 + c) \subset (0, \infty)$, a tedy pro $x \in \mathbb{R}$ a platí

$$\left| \frac{y-1}{y+3} \right| = \frac{y-1}{y-3} = e^{x^4+4c}.$$

Tedy

$$y(x) = \frac{1 + 3e^{x^4+4c}}{1 - e^{x^4+4c}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pokud $c \leq 0$, $x^4 + 4c \in (0, \infty)$ právě tehdy, když $x \in (-\infty, -\sqrt[4]{-4c}) \cup (\sqrt[4]{-4c}, \infty)$. Jako výše pak odvodíme, že

$$y(x) = \frac{1 + 3e^{x^4+4c}}{1 - e^{x^4+4c}}, \quad x \in (-\infty, -\sqrt[4]{-4c}), \quad x \in (\sqrt[4]{-4c}, \infty).$$

Uvažujme nyní interval J_2. Pro $y \in J_2$ platí $\left|\frac{y-1}{y+3}\right| = \frac{1-y}{y+3}$ a dále funkce $\log\left|\frac{y-1}{y+3}\right|$ zobrazuje J_2 na $\mathbb{R}$. Tedy na c není žádné omezení a dostáváme

$$y(x) = \frac{1-3e^{x^4+4c}}{1+e^{x^4+4c}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pro interval J_3 platí, že ho funkce $\log\left|\frac{y-1}{y+3}\right|$ zobrazuje na $(-\infty, 0)$. Tedy $x^4 + 4c \in (-\infty, 0)$, pokud $c < 0$ a $x \in (-\sqrt[4]{-4c}, \sqrt[4]{-4c})$. Pak

$$y(x) = \frac{1+3e^{x^4+4c}}{1-e^{x^4+4c}}, \quad x \in (-\sqrt[4]{-4c}, \sqrt[4]{-4c}).$$

(6) Zjistěme nyní, zdali lze získat slepením požadovaná maximální řešení. Má smysl se zaobírat pouze řešeními, která nejsou definovaná na $\mathbb{R}$, neboť ta definovaná na $\mathbb{R}$ jsou zřejmě maximální. Uvažujme tedy řešení

$$y(x) = \frac{1+3e^{x^4+4c}}{1-e^{x^4+4c}}, \quad x \in (-\infty, -\sqrt[4]{-4c}), \quad x \in (\sqrt[4]{-4c}, \infty),$$

kde se blížíme k bodu $-\sqrt[4]{-4c}$ nebo $\sqrt[4]{-4c}$. Pak ale $|y(x)|$ konverguje do ∞, takže není možné řešení nalepit. Podobně vyloučíme možnost lepení u řešení

$$y(x) = \frac{1+3e^{x^4+4c}}{1-e^{x^4+4c}}, \quad x \in (-\sqrt[4]{-4c}, \sqrt[4]{-4c}).$$

♣

12.7.2. Příklad. Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$x(y-4)y' = y^2 - 5y + 6$$

splňující $y(1) = \frac{7}{2}$.

Řešení. Pro $x \neq 0$ a $y \neq 4$ rovnici upravíme na

$$y' = \frac{1}{x} \cdot \frac{(y-2)(y-3)}{y-4}.$$

(1) Pro funkci $h(x) = \frac{1}{x}$ dostáváme intervaly $I_1 = (-\infty, 0)$ a $I_2 = (0, \infty)$
(2) Stacionární řešení jsou $y = 2$ a $y = 3$ na I_1 a I_2.
(3) Funkce g je nenulová na intervalech $(-\infty, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$ a $(4, \infty)$.
(4) Pro každou dvojici intervalů I z 1. kroku a J z 3. kroku pak platí

$$y' \frac{y-4}{(y-2)(y-3)} = \frac{1}{x}.$$

Jelikož

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log|x|$$

a
$$\int \frac{y-4}{(y-2)(y-3)}\,\mathrm{d}y = \int \left(\frac{2}{y-2} - \frac{1}{y-3}\right)\mathrm{d}y = \log\frac{(y-2)^2}{|y-3|},$$
existuje $k > 0$ takové, že
$$\log\frac{(y-2)^2}{|y-3|} = \log k\,|x|\,.$$

(5) Vzhledem k tomu, že nás zajímá řešení procházející bodem $[1, \frac{7}{2}]$, uvažujme intervaly $I = (0, \infty)$ a $J = (3, 4)$. Pak funkce $\log\frac{(y-2)^2}{|y-3|}$ zobrazuje $(3, 4)$ na $(\log 4, \infty)$. Tedy pro $k > 0$ pak dostáváme podmínku $\log(k\,|x|) > \log 4$, neboli $x \in (\frac{4}{k}, \infty)$. Pro tato x pak platí
$$\frac{(y-2)^2}{y-3} = kx,$$
což vede na rovnici
$$y^2 + y(-4 - kx) + (4 + 3kx) = 0.$$
Ta má řešení
$$y_{1,2} = \frac{1}{2}\left(4 + kx \pm \sqrt{(4+kx)^2 - 4(4+3kx)}\right) = 2 + \frac{kx}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{kx(kx-4)}.$$
Jelikož platí $\frac{kx}{2} > 2$ a $y(x) \in (3, 4)$, zajímá nás řešení
$$y(x) = 2 + \frac{kx}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{kx(kx-4)}.$$
Požadavek $y(1) = \frac{7}{2}$ implikuje $k = \frac{9}{2}$, což dává řešení
$$y(x) = 2 + \frac{9}{4}x - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{2}x(\frac{9}{2}x - 4)}, \quad x \in (\frac{8}{9}, \infty).$$

(6) Zkoumejme chování řešení pro $x \to \frac{8}{9}+$. Pak $y(x) \to 4$, avšak v bodě $[\frac{8}{9}, 4]$ není rovnice splněna, neboť se levá strana rovnice
$$\frac{8}{9} \cdot 0 \cdot y'(\frac{8}{9})$$
nemůže rovnat pravé straně, totiž 2.

♣

12.7.3. Příklad. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice
$$y' = \frac{y}{x} - \sqrt[3]{\frac{y}{x} + 1}.$$

Řešení. Uvažujme substituci $y = zx$. Pak $y' = z'x + z$, a tedy zadaná rovnice přejde na tvar
$$z'x + z = z = \sqrt[3]{z+1},$$

tj.

$$z' = \frac{-\sqrt[3]{z+1}}{x}.$$

Dostáváme tak rovnici se separovanými proměnnými.

(1) Zjevně $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, \infty)$.
(2) Stacionární řešení je $z = -1$ na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.
(3) Intervaly pro z jsou tvaru $(-\infty, -1)$ a $(-1, \infty)$.
(4) Jelikož

$$\int \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x = \log|x|$$

a

$$\int -\frac{1}{\sqrt[3]{z+1}}\, \mathrm{d}z = -\frac{3}{2}(z+1)^{\frac{2}{3}},$$

existuje $k > 0$ takové, že platí

$$-\frac{3}{2}(\sqrt[3]{z+1})^2 = \log(k\,|x|).$$

(5) Na intervalu $J_1 = (-\infty, -1)$ platí, že ho funkce $-\frac{3}{2}(\sqrt[3]{z+1})^2$ zobrazuje na $(-\infty, 0)$. Tedy $\log(k\,|x|) < 0$, což znamená $x \in (0, \frac{1}{k})$ nebo $x \in (-\frac{1}{k}, 0)$. Máme tak řešení

$$z(x) = -1 - \left(\sqrt[2]{-\frac{2}{3}\log(k\,|x|)}\right)^3, \quad x \in (0, \frac{1}{k}), \quad x \in (-\frac{1}{k}, 0).$$

Pro interval $((-1, \infty)$ platí, že ho funkce $-\frac{3}{2}(\sqrt[3]{z+1})^2$ též zobrazuje na $(-\infty, 0)$. Jako výše tak dostáváme řešení

$$z(x) = -1 + \left(\sqrt[2]{-\frac{2}{3}\log(k\,|x|)}\right)^3, \quad x \in (0, \frac{1}{k}), \quad x \in (-\frac{1}{k}, 0).$$

(6) Eventuální lepení nelze provést v 0, neboť zde rovnice nemá smysl. V bodech $\pm\frac{1}{k}$ však $z(x)$ konverguje k -1, a tedy lze lepit na stacionární řešení. Dostáváme tak maximální řešení

$$z(x) = \begin{cases} -1 \pm \left(\sqrt[2]{-\frac{2}{3}\log(k\,|x|)}\right)^3, & x \in (0, \frac{1}{k}), \\ -1, & x \in [\frac{1}{k}, \infty), \end{cases}$$

respektive

$$z(x) = \begin{cases} -1 \pm \left(\sqrt[2]{-\frac{2}{3}\log(k\,|x|)}\right)^3, & x \in (-\frac{1}{k}, 0), \\ -1, & x \in (-\infty, -\frac{1}{k}]. \end{cases}$$

Přechodem k původní rovnici tak máme řešení

$$y(x) = \begin{cases} -x \pm x \left(\sqrt[2]{-\frac{2}{3}\log(k\,|x|)} \right)^3, & x \in (0, \frac{1}{k}), \\ -x, & x \in [\frac{1}{k}, \infty), \end{cases}$$

respektive

$$z(x) = \begin{cases} -x \pm x \left(\sqrt[2]{-\frac{2}{3}\log(k\,|x|)} \right)^3, & x \in (-\frac{1}{k}, 0), \\ -x, & x \in (-\infty, -\frac{1}{k}]. \end{cases}$$

(Konstanta k je kladná.) Navíc pak ještě máme řešení

$$y(x) = -x, \quad x \in (-\infty, 0), \quad x \in (0, \infty).$$

♣

12.7.4. Příklad. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y' = \frac{3(y^2+1)}{2x(x+3)}.$$

Řešení. Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými, kde $h(x) = \frac{3}{x(x+3)}$ a $g(y) = \frac{1}{2}(y^2+1)$.

(1) Intervaly pro funkci h jsou $(-\infty, -3)$, $(-3, 0)$ a $(0, \infty)$.
(2) Stacionární řešení žádná nejsou.
(3) Funkce g je nenulová na $\mathbb{R}$, tj. $J = \mathbb{R}$.
(4) Jelikož

$$\int \frac{2}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = 2\operatorname{arctg} y$$

a

$$\int \frac{3}{x(x+3)}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} \right) \mathrm{d}x = \log\left| \frac{x}{x+3} \right|,$$

existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$2\operatorname{arctg} y = \log\left| \frac{x}{x+3} \right| + c.$$

Tedy

$$y(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\log\left| \frac{x}{x+3} \right| + \frac{c}{2} \right) \tag{12.22}$$

na intervalech, které určíme v následujícím kroku.

(5) Nechť $I = (0, \infty)$. Funkce $2\operatorname{arctg} y$ zobrazuje $\mathbb{R}$ na $(-\pi, \pi)$ a $\left|\frac{x}{x+3}\right| = \frac{x}{x+3}$ na $(0, \infty)$. Tedy řešíme nerovnici

$$\log\frac{x}{x+3} + c \in (-\pi, \pi).$$

Nerovnost
$$\frac{x}{x+3} > e^{-\pi-c}$$
není nikdy splněna, pokud $c \leq -\pi$, a pro $c > -\pi$ vede na nerovnost
$$x > \frac{3e^{-\pi-c}}{1-e^{-\pi-c}}.$$
Druhá nerovnost
$$\frac{x}{x+3} < e^{\pi-c}$$
je pro $c \leq \pi$ splněna vždy, zatímco pro $c > \pi$ implikuje nerovnost
$$x < \frac{3e^{\pi-c}}{1-e^{-\pi-c}}.$$
Tedy máme řešení (12.22) na intervalech
$$x \in \left(\frac{3e^{-\pi-c}}{1-e^{-\pi-c}}, \frac{3e^{\pi-c}}{1-e^{\pi-c}}\right), \quad c > \pi,$$
$$x \in \left(\frac{3e^{-\pi-c}}{1-e^{-\pi-c}}, \infty\right), \quad c \in (-\pi, \pi].$$

Nechť nyní $I = (-3, 0)$. Zde $|x|\, x + 3 = \frac{-x}{x+3}$, a tedy řešíme nerovnosti
$$e^{-\pi-c} < \frac{-x}{x+3} < e^{\pi-c}.$$
Jejich řešením je interval
$$\left(\frac{-3e^{\pi-c}}{1+e^{\pi-c}}, \frac{-3e^{-\pi-c}}{1+e^{-\pi-c}}\right).$$

Pokud $I + (-\infty, -3)$, pak $|x|\, x + 3 = \frac{-x}{-x-3}$. Tedy řešíme nerovnosti
$$e^{-\pi-c} < \frac{-x}{-x-3} < e^{\pi-c}.$$
Ty vedou na intervaly
$$x \in \left(-\infty, \frac{3e^{\pi-c}}{1-e^{\pi-c}}\right), \quad c \in [-\pi, \pi),$$
$$x \in \left(\frac{3e^{-\pi-c}}{1-e^{-\pi-c}}, \frac{3e^{\pi-c}}{1-e^{\pi-c}}\right), \quad c \in (-\infty, -\pi).$$

(6) Lepení v krajních bodech nalezených intervalů nepřichází do úvahy, neboť limity řešení v těchto bodech jsou nekonečné.

♣

12.7.5. Příklad. Nalzeněte všechna maximální řešení rovnice
$$yy' = \sin x + \cos x.$$

Řešení. Rovnice má tvar
$$y' = \frac{1}{y}(\sin x + \cos x).$$

(1) Máme $I = \mathbb{R}$.
(2) Dále $J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, \infty)$ a stacionární řešení neexistuje.
(3) Jelikož

$$\int y \, \mathrm{d}y = \frac{1}{2} y^2$$

a

$$\int (\sin x + \cos x) \, \mathrm{d}x = -\cos x + \sin x,$$

existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\frac{1}{2} y^2 = -\cos x + \sin x + c.$$

(4) Funkce $\frac{1}{2} y^2$ zobrazuje J_1 i J_2 na $(0, \infty)$. Pro $c \in \mathbb{R}$ tak řešíme nerovnici

$$0 < -\cos x + \sin x + c = \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) + c,$$

tj.

$$\sin(x - \frac{\pi}{4}) > -\frac{c}{\sqrt{2}}.$$

Pokud $c \leq -\sqrt{2}$, nerovnice není splněna pro žádné x. Je-li $c > \sqrt{2}$, je splněna pro $x \in \mathbb{R}$. Pokud $c \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, pak $x \in (a, b)$, kde

$$a = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \arcsin(\frac{c}{\sqrt{2}}), \quad b = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi + \arcsin(\frac{c}{\sqrt{2}}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Na intervalech výše nalezeného tvaru má pak řešení tvar

$$y(x) = \pm\sqrt{2(\sin x - \cos x + c)} = \pm\sqrt{2(\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) + c)}.$$

(5) Zjistíme nyní, zdali jsou řešení maximální. Pokud $c > \sqrt{2}$, je $\mathcal{D}(y) = \mathbb{R}$, a tedy se jedná o maximální řešení. Pokud $c \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, pak

$$\lim_{x \to a_+} y(x) = \lim_{x \to b_-} y(x) = 0.$$

Pokud má být rovnice splněna i v bodech a, b, musí být

$$0 = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}),$$

tj.

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Jelikož

$$a = -\frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow \arcsin(\frac{c}{\sqrt{2}}) = \pm\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow c = \pm\sqrt{2},$$
$$b = -\frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow \arcsin(\frac{c}{\sqrt{2}}) = \pm\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow c = \pm\sqrt{2},$$

pro $c \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ máme již řešení maximální.

Pokud $c = \sqrt{2}$, máme

$$y'(x) = \sqrt{2\sqrt{2}}\frac{\cos(x - \frac{\pi}{4})}{2\sqrt{\sin(x - \frac{\pi}{4}) + 1}},$$

takže

$$y'_{\pm}(-\frac{\pi}{4}) = \pm\frac{\sqrt{2\sqrt{2}}\sqrt{2}}{2}.$$

Proto funkce

$$y(x) = (-1)^k\sqrt{2\sqrt{2}(\sin(x - \frac{\pi}{4}) + 1)}, \quad x \in (-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, -\frac{\pi}{4} + 2k\pi + 2\pi], \quad k \in \mathbb{Z}$$

a

$$y(x) = (-1)^{k+1}\sqrt{2\sqrt{2}(\sin(x - \frac{\pi}{4}) + 1)}, \quad x \in (-\frac{\pi}{4}+2k\pi, -\frac{\pi}{4}+2k\pi+2\pi], \quad k \in \mathbb{Z}$$

jsou řešení definované na $\mathbb{R}$.

♣

12.7.6. Příklad. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{e^{2x} - 5e^x + 6}.$$

Řešení. Homogenní rovnice $y'' - 3y' + 2y = 0$ má charakteristický polynom roven $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)$, a tedy fundamentální systém rovnice má tvar $\{e^x, e^{2x}\}$. Maximální řešení budou existovat na těch intervalech, kde je definovaná pravá strana, tj. na intervalech $(-\infty, \log 2)$, $(\log 2, \log 3)$, $(\log 3, \infty)$. Hledejme metodou variace konstant partikulární řešení. Pišme tedy $y_p = c(x)e^x + d(x)e^{2x}$. Pak máme soustavu

$$c'e^x + d'e^{2x} = 0$$

$$c'e^x + d'2e^{2x} = \frac{e^{3x}}{e^{2x} - 5e^x + 6}.$$

Odečtením prvé rovnice od druhé dostáváme

$$d'e^{2x} = \frac{e^{3x}}{e^{2x} - 5e^x + 6},$$

tj.

$$d' = \frac{e^x}{e^{2x} - 5e^x + 6}.$$

Máme tak

$$d(x) = \int \frac{e^x}{e^{2x} - 5e^x + 6}\,\mathrm{d}x = \log\left|\frac{e^x - 3}{e^x - 2}\right|.$$

Jelikož

$$c'e^x = -d'e^{2x} = -\frac{e^{3x}}{e^{2x} - 5e^x + 6},$$

platí

$$c(x) = \int -\frac{e^{3x}}{e^{2x} - 5e^x + 6}\,\mathrm{d}x = -3\log|e^x - 3| + 2\log|e^x - 2|\,.$$

Tedy

$$y_p(x) = e^x\left(2\log|e^x - 2| - 3\log|e^x - 3|\right) + e^{2x}\left(\log|e^x - 3| - \log|e^x - 2|\right)$$

všechna řešení mají tvar

$$y(x) = e^x\left(2\log|e^x - 2| - 3\log|e^x - 3| + a\right) + e^{2x}\left(\log|e^x - 3| - \log|e^x - 2| + b\right),$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $x \in (-\infty, \log 2)$, $(\log 2, \log 3)$, $(\log 3, \infty)$. ♣

12.7.7. Příklad. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = 5xe^x.$$

Řešení. Charakteristický polynom $\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = (\lambda^2 + 4)^2$ má dvojnásobné kořeny $\pm 2i$. Tedy fundamentální systém dané rovnice má tvar

$$\{\sin 2x, \cos 2x, x\sin 2x, x\cos 2x\}.$$

Pravá strana je ve speciálním tvaru, a tedy budeme partikulární řešení y_p hledat ve tvaru

$$y_p = (ax + b)e^x,$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$.

Pak dostáváme postupně

$$\begin{aligned}
y_p' &= (ax + (a + b))e^x,\\
y_p'' &= (ax + (2a + b))e^x,\\
y_p''' &= (ax + (3a + b))e^x,\\
y_p'''' &= (ax + (4a + b))e^x,
\end{aligned}$$

a tedy po dosazení do rovnice

$$(ax + (4a + b))e^x + 8(ax + (2a + b))e^x + 16(ax + b)e^x = 5xe^x.$$

Tedy máme

$$25ax + 20a + 25b = 5x,$$

což znamená, že $a = \frac{1}{5}$ a $b = -\frac{4}{25}$.

Všechna řešení pak mají tvar

$$y(x) = a\sin 2x + b\cos 2x + cx\sin 2x + dx\cos 2x + (\frac{1}{5}x - \frac{4}{25})e^x, \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. ♣

12.7.8. Příklad. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y'' - 4y' + 8y = (5x - 3)e^x\cos x.$$

Řešení. Charakteristický polynom homogenní rovnice má tvar $\lambda^2 - 4\lambda + 8$, který má kořeny $2 \pm 2i$. Tedy fundamentální systém je $\{e^2 x \cos 2x, e^{2x} \sin 2x\}$.

Jelikož je pravá strana ve speciálním tvaru, hledáme partikulární řešení y_p jako

$$y_p = (ax + b)e^x \cos x + (cx + d + e^x \sin x.$$

Po zderivování a dosazení do rovnice dostáváme

$$\begin{aligned}(5x-3)e^x \cos x = {}& e^x \cos x \,(2cx + 2a + 2c + 2d - 4(ax + cx + b + a + d) + 8(ax + b)) \\ & + e^x \sin x \,(-2ax - 2a - 2b + 2c - 4(cx - ax + c + d - b) + 8(cx + d))\,.\end{aligned}$$

Porovnáním koeficentů u $e^x \cos x$ a $e^x \sin x$ máme

$$\begin{aligned}-2cx + 4ax - 2a + 4b + 2c - 2d &= 5x - 3 \\ 2ax + 4cx - 2a + 2b - 2c + 4d &= 0.\end{aligned}$$

Řešením je

$$a = 1, c = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{10}, d = \frac{2}{10}.$$

Tedy všechna řešení mají tvar

$$y(x) = ae^{2x} \cos 2x + be^{2x} \sin 2x + (x + \frac{1}{10})e^x \cos x + (-\frac{1}{2}x + \frac{2}{10})e^x \sin x,$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{R}$. ♣

12.7.9. Příklad. Nalezněte maximální řešení rovnice

$$y' + \frac{y}{1-x^2} = x\sqrt{1-x}$$

splňující $y(0) = 0$.

Řešení. Maximální řešení dané rovnice budou definována na intervalech $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$. Tedy hledané řešení bude definováno na intervalu $(-1, 1)$. Budeme postupovat metodou integračního faktoru. Platí

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \log \left|\frac{1+x}{1-x}\right|.$$

Jelikož

$$e^{\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},$$

na intervalu $(-1, 1)$ naše rovnice dostává tvar

$$\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}y\right)' = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}x\sqrt{1-x} = x\sqrt{1+x}.$$

Máme

$$\int x\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}.$$

Odtud

$$\begin{aligned} y(x) &= \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + c\right) \\ &= \sqrt{1-x}\left(\frac{2}{5}(x+1)^2 - \frac{2}{3}(x+1)\right) + c\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}. \end{aligned}$$

Vzhledem k počáteční podmínce $y(0) = 0$ platí $c = \frac{4}{15}$, a tedy výsledné řešení má tvar

$$y(x) = \sqrt{1-x}\left(\frac{2}{5}(x+1)^2 - \frac{2}{3}(x+1)\right) + \frac{4}{15}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

♣

12.7.10. Příklad. Nalezněte maximální řešení rovnice

$$y' + |x|\, y = x^5.$$

Řešení. Maximální řešení budou definována na celém $\mathbb{R}$. Postupujme metodou integračního faktoru. Máme

$$\int |x| \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & x \geq 0, \\ -\frac{1}{2}x^2, & x < 0. \end{cases}$$

Na intervalu $(0, \infty)$ tak dostáváme

$$\left(e^{\frac{1}{2}x^2} y\right)' = e^{\frac{1}{2}x^2} x^5.$$

Jelikož $\int e^{\frac{1}{2}x^2} x^5$ převedem substitucí $z = \frac{1}{2}x^2$ na $\int e^z 4z^2 \, \mathrm{d}z$, máme pomocí per partes

$$\int e^z 4z^2 \, \mathrm{d}z = 4z^2 e^z - 8ze^z + 8e^z.$$

Odtud máme

$$\int e^{\frac{1}{2}x^2} x^5 = e^{\frac{1}{2}x^2}(x^4 - 4x^2 + 8) + k_1.$$

Tedy

$$y(x) = x^4 - 4x^2 + 8 + k_1 e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Analogicky dostaneme na $(-\infty, 0)$ rovnost

$$\left(e^{-\frac{1}{2}x^2} y\right)' = e^{-\frac{1}{2}x^2} x^5.$$

a tedy

$$\int e^{-\frac{1}{2}x^2} x^5 \, \mathrm{d}x = e^{-\frac{1}{2}x^2}(-x^4 - 4x^2 - 8) + k_2.$$

Odtud plyne

$$y(x) = -x^4 - 4x^2 - 8 + k_2 e^{\frac{1}{2}x^2}.$$

Nakonec řešení nalepíme v 0. Dostaneme tak

$$y(x) = \begin{cases} x^4 - 4x^2 + 8 + ke^{-\frac{1}{2}x^2}, & x \geq 0, \\ -x^4 - 4x^2 - 8 + (k+16)e^{-\frac{1}{2}x^2}, & x < 0, \end{cases}$$

kde $k \in \mathbb{R}$. ♣

12.7.11. Příklad. Nalezněte omezené maximální řešení rovnice

$$(x^2-1)y' + (x^2+2x-1)y = (x-1).$$

Řešení. Pro $x \notin \{-1, 1\}$ máme rovnici

$$y' + \frac{x^2+2x-1}{x^2-1}y = \frac{x-1}{x^2-1}.$$

Jelikož

$$\int \frac{x^2+2x-1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = x + \log\left|x^2-1\right|,$$

dostáváme integrační faktor $e^x\left|x^2-1\right|$. Zvolíme ho jako $e^x(x^2-1)$. Pak

$$\left(e^x(x^2-1)y\right)' = e^x(x^2-1)y' + e^x(x^2+2x-1)y = e^x(x-1).$$

Jelikož

$$\int e^x(x-1)\,\mathrm{d}x = e^x(x-2),$$

dostáváme

$$y(x) = \frac{x-2+ce^{-x}}{x^2-1}, \quad x \in (-\infty,-1), (-1,1), (1,\infty).$$

Nyní hledáme omezené maximální řešení. Máme

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = \begin{cases} 0, & c = 0, \\ \notin \mathbb{R}, & c \neq 0, \end{cases}$$

a

$$\lim_{x\to-1_-} y(x) \notin \mathbb{R}, \text{ pokud } c = 0.$$

Tedy na $(-\infty,-1)$ řešení nebude omezené pro žádné $c \in \mathbb{R}$.

Dále platí

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$$

a

$$\lim_{x\to1} y(x) \begin{cases} = \lim_{x\to1} \frac{1}{x+1}\frac{x-1+e^{-(x-1)}-1}{x-1} = 0, & c = e, \\ \notin \mathbb{R}, & c \neq e. \end{cases}$$

Tedy jediná možnost na omezené řešení je případ $c = e$. Pak

$$\begin{aligned} y'(1) &= \lim_{x\to1} \frac{y(x)-0}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{1}{x+1}\frac{x-2+e^{-x+1}}{(x-1)^2} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to1} \frac{x-2+1+(1-x)+\frac{1}{2}(1-x)^2+o((1-x)^2)}{(x-1)^2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Tedy $y'(1) \in \mathbb{R}$ a rovnice je splněna, lze proto nalepit řešení v bodě 1. Avšak

$$\lim_{x\to -1_+} y(x) = \infty,$$

a proto je slepené řešení neomezené. Závěrem tedy lze říci, že neexistují neomezená maximální řešení.

♣

12.7.12. Příklad. Vyřešte soustavu

$$\begin{aligned} y_1' &= -5y_1 - y_2 + 3y_3 + 9y_4, \\ y_2' &= -20y_1 - 4y_2 + 12y_3 + 32y_4, \\ y_3' &= -5y_1 - y_2 + 3y_3 + 7y_4, \\ y_4' &= -5y_1 - y_2 + 3y_3 + 9y_4. \end{aligned}$$

Řešení. Příslušná λ-matice $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ má tvar

$$\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \lambda+5 & 1 & -3 & -9 \\ 20 & \lambda+4 & -12 & -32 \\ 5 & 1 & \lambda-3 & -7 \\ 5 & 1 & -3 & \lambda-9 \end{pmatrix}.$$

Postupnými úpravami dostáváme

$$\begin{pmatrix} \lambda+5 & 1 & -3 & -9 \\ 20 & \lambda+4 & -12 & -32 \\ 5 & 1 & \lambda-3 & -7 \\ 5 & 1 & -3 & \lambda-9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & \lambda & 0 & -4\lambda+4 \\ 0 & 0 & \lambda & -\lambda+2 \\ 5 & 1 & -3 & \lambda-9 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & 3\lambda & -5\lambda-\lambda^2+9\lambda \\ 0 & \lambda & 0 & 4(1-\lambda) \\ 0 & 0 & \lambda & 2-\lambda \\ 5 & 1 & -3 & \lambda-9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3\lambda & -\lambda^2+4 \\ 0 & \lambda & 0 & 4(1-\lambda) \\ 0 & 0 & \lambda & 2-\lambda \\ 5 & 1 & -3 & \lambda-9 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\lambda^2+3\lambda-2 \\ 0 & \lambda & 0 & 4(1-\lambda) \\ 0 & 0 & \lambda & 2-\lambda \\ 5 & 1 & -3 & \lambda-9 \end{pmatrix}.$$

Jelikož $-\lambda^2 + 3\lambda - 2 = -(\lambda-2)(\lambda-1)$, dostáváme

$$y_4(t) = ae^t + be^{2t}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Ze třetí rovnice

$$y_3'(t) = y_4'(t) - 2y_4(t) = -ae^t,$$

tj.

$$y_3(t) = -ae^t + c.$$

Druhá rovnice pak implikuje

$$y_2'(t) = 4y_4'(t) - 4y_4(t) = 4be^{2t},$$

tj.

$$y_2(t) = 2be^{2t} + d.$$

Konečně pak čtvrtá rovnice dává

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{1}{5}\left(-y_2(t) + 3y_3(t) + 9y_4(t) - y_4'(t)\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(-d + 3c + 5be^{2t} + 5ae^t\right). \end{aligned}$$

Fundamentální systém naší soustavy má tak tvar

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 2e^{2t} & 0 & 1 \\ -e^t & 0 & 1 & 0 \\ e^t & e^{2t} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

♣

12.7.13. Příklad. Vyřešte soustavu

$$\begin{aligned} y' &= -8y - 6z + 12w + 2e^x, \\ z' &= -3y - 2z + 3w, \\ w' &= -9y - 6z + 13w + 2e^x. \end{aligned}$$

Řešení. Upravujeme příslušnou λ-matici s nenulovou pravou stranou:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda+8 & 6 & -12 & 2e^x \\ 3 & \lambda+2 & -3 & 0 \\ 9 & 6 & \lambda-13 & 2e^x \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3\lambda+24 & 18 & -36 & 6e^x \\ 3 & \lambda+2 & -3 & 0 \\ 0 & -3\lambda & \lambda-4 & 2e^x \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 24 & -\lambda^2-2\lambda+18 & 3\lambda-36 & 6e^x \\ 3 & \lambda+2 & -3 & 0 \\ 0 & -3\lambda & \lambda-4 & 2e^x \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -\lambda^2-10\lambda+2 & 3\lambda-12 & 6e^x \\ 3 & \lambda+2 & -3 & 0 \\ 0 & -3\lambda & \lambda-4 & 2e^x \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -\lambda^2-\lambda+2 & 0 & 0 \\ 3 & \lambda+2 & -3 & 0 \\ 0 & -3\lambda & \lambda-4 & 2e^x \end{array}\right).$$

Jelikož $\lambda^2+\lambda-2=(\lambda+2)(\lambda_1)$, platí

$$z(x)=ae^{-2x}+be^x.$$

Dále

$$w'(x)-4w(x)=2e^x+3z'=(2+3b)e^x-6ae^{-2x}.$$

Fundamentální systém pro rovnici $w'-4w=0$ je e^{4x}. Hledejme partikulární řešení w_1 a w_2 splňující

$$w_1'-4w_1=(2+3b)e^x, \quad w_2'-4w_2=-6ae^{-2x}.$$

V prvním případě hledáme w_1 jako pe^x a máme rovnici

$$pe^x-4pe^x=(2+3b)e^x.$$

Tedy

$$p=-\frac{2}{3}-b$$

a $w_1(x)=(-\frac{2}{3}-b)e^x$. Podobně dostaneme $w_2(x)=ae^{-2x}$. Dohromady máme

$$w(x)=ce^{4x}-(\frac{2}{3}+b)e^x+ae^{-2x}.$$

Z druhé rovnice soustavy konečně dostáváme

$$y(x)=\frac{1}{3}\big(3w-z'-2z\big)=ce^{4x}-(\frac{2}{3}+2b)e^x+ae^{-2x}.$$

♣

12.7.14. Příklad. Vyřešte soustavu

$$y''+z''-3y'-y+2z=x,$$
$$3y''+y'+z'+2y-z=2.$$

Řešení. Upravujeme příslušnou λ-matici a vyjde nám

$$\left(\begin{array}{cc|c} \lambda^2-3\lambda-1 & \lambda^2+2 & x \\ 3\lambda^2+\lambda+2 & \lambda-1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -3\lambda^3-3\lambda^2-6\lambda-3 & 3 & x-2 \\ 3\lambda^2+\lambda+2 & \lambda-1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} -\lambda^3-\lambda^2-2\lambda-1 & 1 & \frac{x-2}{3} \\ 3\lambda^2+\lambda+2 & \lambda-1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -\lambda^3-\lambda^2-2\lambda-1 & 1 & \frac{x-2}{3} \\ \lambda^4+4\lambda^2+1 & 0 & 1+\frac{x}{3} \end{array}\right).$$

Jelikož $\lambda^4+4\lambda^2+1=0$ právě thedy, když

$$\lambda = \pm\sqrt{2\pm\sqrt{3}}i.$$

Tedy fundamentální systém pro y je

$$\{\sin\sqrt{2+\sqrt{3}}x, \cos\sqrt{2+\sqrt{3}}x, \sin\sqrt{2-\sqrt{3}}x, \cos\sqrt{2-\sqrt{3}}x\}.$$

Hledáme partikulární řešení rovnice

$$y^{(4)}+4y''+y = 1+\frac{x}{3}$$

ve tvaru $y_p = ax+b$. Po zderivování a dosazení vyjde $y_p = 1+\frac{x}{3}$. Tedy

$$y(x) = 1+\frac{x}{3}+a\sin\sqrt{2+\sqrt{3}}x+b\cos\sqrt{2+\sqrt{3}}x+c\sin\sqrt{2-\sqrt{3}}x+d\cos\sqrt{2-\sqrt{3}}x.$$

Jelikož

$$z(x) = \frac{x-2}{3}+y'''+y''+2y'+y,$$

dostáváme

$$\begin{aligned} z(x) = \frac{2}{3}x+1 &+ \sin\sqrt{2+\sqrt{3}}x\left(a(-1-\sqrt{3})+b\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{3}\right) \\ &+ \cos\sqrt{2+\sqrt{3}}x\left(b(-1-\sqrt{3})-a\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{3}\right) \\ &+ \sin\sqrt{2-\sqrt{3}}x\left(c(-1+\sqrt{3})-d\sqrt{2-\sqrt{3}}\sqrt{3}\right) \\ &+ \cos\sqrt{2-\sqrt{3}}x\left(d(-1+\sqrt{3})+c\sqrt{2-\sqrt{3}}\sqrt{3}\right). \end{aligned}$$

♣

12.7.15. Příklad. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$x^2y' = y(x-y).$$

Řešení. Řešení hledáme na intervalech $x\in\mathbb{R}$ a $y\in\mathbb{R}$. Pro $x\neq 0$ uvažujme

$$y' = \frac{y}{x}\left(1-\frac{y}{x}\right).$$

Jelikož je pravá strana homogenní funkce, použijeme substituci $y(x) = z(x)x$. Pak dostáváme rovnici
$$x^3 z' = -z^2 x^2,$$
která po úpravě na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ přejde na
$$z' = -\frac{z^2}{x}.$$
To je již rovnice se separovanými proměnnými.

(1) Máme intervaly $I = (-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.
(2) Stacionární řešení je $z = 0$.
(3) Intervaly J jsou $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.
(4) Vezměme interval I a interval J, Zde platí
$$-\frac{z'}{z^2} = \frac{1}{x},$$
neboli
$$\frac{1}{z} = \log k\,|x|\,, \quad k > 0.$$
(5) Fixujme $k > 0$. Pak dostáváme
$$z(x) = \frac{1}{\log k\,|x|}, \quad x \in (-\infty, -\frac{1}{k}), (-\frac{1}{k}, 0), (0, \frac{1}{k}), (\frac{1}{k}, \infty).$$
(6) Dosazením do substituce $y = zx$ máme řešení $y(x) = \frac{x}{\log k|x|}$, které lze napojit v 0. Maximální řešení pak budou
$$y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$
$$y(x) = \frac{x}{\log c\,|x|}, \quad x \in (-\infty, -\frac{1}{c}), x \in (\frac{1}{c}, \infty), \quad c > 0,$$
$$y(x) = \begin{cases} \frac{x}{\log c|x|}, & x \in (-\frac{1}{c}, 0], c > 0, \\ \frac{x}{\log d|x|}, & x \in (0, \frac{1}{d}), d > 0, \end{cases}$$
$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0], \\ \frac{x}{\log c|x|}, & x \in (0, \frac{1}{c}), c > 0, \end{cases}$$
$$y(x) = \begin{cases} \frac{x}{\log c|x|}, & x \in (-\frac{1}{c}, 0], c > 0, \\ 0, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

♣

12.7.16. Příklad. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice
$$y' = \frac{2x - y + 1}{x - 2y + 1}.$$

Řešení. Předpokládáme, že y řeší rovnici. Pak pro vhodné $A, B \in \mathbb{R}$ řeší funkce
$$Y(X) = y(X - A) + B$$

homogenní rovnici. Vskutku, zvolme $A = \frac{1}{3}$ a $B = -\frac{1}{3}$. Pak

$$\begin{aligned} Y'(X) = y'(X-A) &= \frac{2(X-A) - y(X-A) + 1}{X - A - 2y(X-A) + 1} \\ &= \frac{2X - 2A - Y(X) + B + 1}{X - A - 2Y(X) + 2B + 1} = \frac{2X - Y(X)}{X - 2Y(X)}, \end{aligned}$$

tj. Y řeší rovnici

$$Y' = \frac{2X - Y}{X - 2Y}.$$

Tuto rovnici řešíme další substitucí $Y = XZ$, čímž přejde na rovnici

$$Z' = 2\frac{Z^2 - Z + 1}{1 - 2Z} \cdot \frac{1}{X}.$$

Pro $X \in (-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ a $Z \in (-\infty, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \infty)$ platí

$$\log(Z^2 - Z + 1) = -2\log|X| + C.$$

Funkce na levé straně zobrazuje každý z intevalů $(-\infty, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \infty)$ na $(\log\frac{3}{4}, \infty)$, tj.

$$-2\log|X| + C > \log\frac{3}{4}.$$

Odtud dostáváme

$$X \in \left(0, \frac{2e^{\frac{C}{2}}}{\sqrt{3}}\right), \quad \text{respektive } X \in \left(-\frac{2e^{\frac{C}{2}}}{\sqrt{3}}, 0\right).$$

Ze vztahu mezi Z a X máme

$$Z^2 - Z + 1 - e^C X^{-2} = 0,$$

neboli

$$Z = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{4e^C X^{-2} - 3}\right).$$

Dosazením do substituce dostáváme

$$Y(X) = \frac{1}{2}\left(X \pm X\sqrt{4e^C X^{-2} - 3}\right) = \frac{1}{2}\left(X \pm \sqrt{4e^C - 3X^2}\right).$$

Vidíme, že toto řešení lze dodefinovat v 0 a bude zde vyhovovat naší rovnici.

Dále pak máme

$$y(x) = Y(x + A) - B = \frac{1}{2}\left(x + 1 \pm \sqrt{4e^C - 3(x + \frac{1}{3})^2}\right)$$

na intervalu

$$\left(-\frac{2e^{\frac{C}{2}}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}, \frac{2e^{\frac{C}{2}}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\right).$$

Tento interval je maximální, neboť v jeho krajních bodech platí $y = \frac{1}{2}(x+1)$ a pravá strana rovnice není definována.

Nyní si rozmyslíme, že jsme obdrželi všechna řešení. Uvažujme výraz

$$\left(y_0 - \frac{x_0+1}{2}\right)^2 + 3\left(x_0 + \frac{1}{3}\right)^2,$$

který je kladný všude mimo bod $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$. Existuje tak $C > 0$, že

$$4e^C = \left(y_0 - \frac{x_0+1}{2}\right)^2 + 3\left(x_0 + \frac{1}{3}\right)^2.$$

Pokud $y_0 \neq \frac{1}{2}(x_0+1)$, dostáváme z poslední rovnice řešení procházející bodem $[x_0, y_0]$. ♣

12.7.17. Příklad. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y' - xy = -y^3 e^{-x^2}.$$

Řešení. Jedná se o Bernoulliovu rovnici , a tedy použijeme substituci $z = \frac{1}{y^2}$. Pak $z > 0$ a platí $z' = -2y^{-3}y'$. Po vydělení dané rovnice y^3 dostáváme

$$-\frac{1}{2}z' - xz = y'y^{-3} - xy^{-2} = -e^{-x^2},$$

tj. rovnici $z' + 2xz = 2e^{-x^2}$. Metodou integračního faktoru máme $(e^{x^2}z)' = 2$, neboli

$$z(x) = e^{-x^2}(2x+c).$$

Zajímají nás pouze kladná řešení z, takže dostáváme řešení

$$y(x) = \pm\left(e^{-x^2}(2x+c)\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad x > -\frac{c}{2}, \quad c \in \mathbb{R},$$

a stacionární řešení $y(x) = 0$. Z tvaru řešení je patrné, že lepení není možné. ♣

KAPITOLA 13

Křivkový a plošný integrál

Až doposud jsme v těchto skriptech nepředpokládali – kromě několika faktů z lineární algebry – žádné znalosti z vyšší matematiky, které by zde nebyly vyloženy. V této a ve zbývajících dvou kapitolách však budeme u čtenáře předpokládat základní znalosti o míře a abstraktním Lebesgueově integrálu. S touto částí matematiky se čtenář může seznámit například v učebnicích [**12**] a [**19**]. My se budeme ale odkazovat na text [**18**], který látku potřebnou pro další četbu obsahuje v kapitolách 1–5, 7, 8, 11, 12 a 18.

Lebesgueova míra je matematickým vyjádřením intuitivního pojmu objem (v dimenzi 3) nebo povrch (v dimenzi 2). Podobně chceme matematicky vyjádřit pojem délky nebo povrchu v dimenzi 3.

13.1. Hausdorffovy míry

13.1.1. Označení. Symbolem λ^n budeme značit n-dimenzionální Lebesgueovu míru na $\mathbb{R}^n$. Symbolem λ^{n*} budeme značit n-dimenzionální vnější Lebesgueovu míru na $\mathbb{R}^n$.

13.1.2. Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$, $A \subset \mathbb{R}^n$. Pro $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, položme

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^k(A, \delta) = \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_k (\operatorname{diam} A_j)^k;\\ A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \mathbb{R}^n,\ \operatorname{diam} A_j \leq \delta\Big\},\end{aligned} \tag{13.1}$$

kde hodnota $\alpha_k \in (0, \infty)$ bude určena později (vizte Označení 13.1.12). Položme dále

$$\mathcal{H}^k(A) = \sup\{\mathcal{H}^k(A, \delta);\ \delta \in (0, \infty)\}.$$

Z definice infima vyplývá, že pro každé $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ splňující $0 < \delta_1 < \delta_2$ a každou $A \subset \mathbb{R}^n$ platí $\mathcal{H}^k(A, \delta_1) \geq \mathcal{H}^k(A, \delta_2)$. Funkce $\delta \mapsto \mathcal{H}^k(A, \delta)$ je tedy nerostoucí na $(0, \infty)$, a proto existuje limita $\lim_{\delta \to 0_+} \mathcal{H}^k(A, \delta)$, která se rovná $\mathcal{H}^k(A)$.

13.1.3. V definici $\mathcal{H}^k(A,\delta)$ můžeme pokrývat jen uzavřenými množinami a dostaneme stejnou hodnotu $\mathcal{H}^k(A,\delta)$. Pokrytí $\{A_j\}$ množiny A totiž můžeme nahradit pokrytím $\{\overline{A_j}\}$, neboť uzávěr množiny nezvětšuje diametr (vizte Větu 9.3.28(f)).

13.1.4. Věta. Nechť $k,n\in\mathbb{N}$, $k\le n$. Potom je $\mathcal{H}^k$ vnější míra na $\mathbb{R}^n$.

Důkaz. Pro každé $\delta>0$ platí $\mathcal{H}^k(\emptyset,\delta)=0$, a proto také $\mathcal{H}^k(\emptyset)=0$. Pro každé $A\subset B\subset\mathbb{R}^n$ a $\delta>0$ platí podle definice $\mathcal{H}^k(A,\delta)\le\mathcal{H}^k(B,\delta)$. Odtud potom plyne $\mathcal{H}^k(A)\le\mathcal{H}^k(B)$.

K dokončení důkazu zbývá ověřit σ-subaditivitu $\mathcal{H}^k$. Nechť $M_i, i\in\mathbb{N}$, jsou podmnožiny $\mathbb{R}^n$. Zvolme $\varepsilon>0$ a $\delta>0$. Pro každé $i\in\mathbb{N}$ nalezneme množiny $A_{i,j}\subset\mathbb{R}^k$, $j\in\mathbb{N}$, takové, že

- $M_i\subset\bigcup_{j=1}^\infty A_{i,j}$,
- $\operatorname{diam} A_{i,j}<\delta$,
- $\sum_{j=1}^\infty \alpha_k(\operatorname{diam} A_{i,j})^k\le\mathcal{H}^k(M_i,\delta)+\varepsilon 2^{-i}$.

Potom

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^k\Big(\bigcup_{i=1}^\infty M_i,\delta\Big)&\le\sum_{i=1}^\infty\sum_{j=1}^\infty\alpha_k(\operatorname{diam} A_{i,j})^k\\&\le\sum_{i=1}^\infty\big(\mathcal{H}^k(M_i,\delta)+\varepsilon 2^{-i}\big)\le\sum_{i=1}^\infty\mathcal{H}^k(M_i)+\varepsilon.\end{aligned}$$

Odtud plyne

$$\mathcal{H}^k\Big(\bigcup_{i=1}^\infty M_i\Big)\le\sum_{i=1}^\infty\mathcal{H}^k(M_i)+\varepsilon,$$

a tedy také

$$\mathcal{H}^k\Big(\bigcup_{i=1}^\infty M_i\Big)\le\sum_{i=1}^\infty\mathcal{H}^k(M_i).$$

■

13.1.5. Definice. Nechť $k,n\in\mathbb{N}$, $k\le n$. Množinovou funkci

$$A\mapsto\mathcal{H}^k(A),\quad A\subset\mathbb{R}^n,$$

nazýváme k**-dimenzionální vnější Hausdorffova**[1] **míra** na $\mathbb{R}^n$.

13.1.6. Definice. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že množiny $A,B\subset P$ jsou **vzdálené**, jestliže splňují

$$\inf\{\varrho(x,y);\ x\in A, y\in B\}>0.$$

13.1.7. Definice. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že vnější míra γ na P je **metrická**, jestliže pro každé dvě dvě vzdálené množiny $A,B\subset P$ platí $\gamma(A\cup B)=\gamma(A)+\gamma(B)$.

[1] Felix Hausdorff (1868–1942)

13.1.8. Věta. Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$.

(a) Vnější míra $\mathcal{H}^k$ na $\mathbb{R}^n$ je metrická.

(b) Vnější míra $\mathcal{H}^k$ je translačně invariantní, tj. pro každou množinu $A \subset \mathbb{R}^n$ a $x \in \mathbb{R}^n$ platí $\mathcal{H}^k(A) = \mathcal{H}^k(A + x)$, kde symbol $A + x$ značí množinu $\{y + x;\ y \in A\}$.

Důkaz. (a) Mějme množiny $A, B \subset \mathbb{R}^n$, které jsou vzdálené, tj. číslo $\delta_0 = \inf\{\rho(x, y);\ x \in A, y \in B\}$ je kladné. Nechť $\delta \in (0, \delta_0)$. Pro každou množinu $M \subset A \cup B$ splňující $\operatorname{diam} M \leq \delta$, platí $M \subset A$ nebo $M \subset B$. Pokud by totiž M protínala množinu A i množinu B, musel by její diametr být větší než δ_0.

Odtud plyne

$$\mathcal{H}^k(A \cup B, \delta) = \mathcal{H}^k(A, \delta) + \mathcal{H}^k(B, \delta).$$

Limitním přechodem $\delta \to 0+$ dostaneme

$$\mathcal{H}^k(A \cup B) = \mathcal{H}^k(A) + \mathcal{H}^k(B).$$

(b) Zvolme $A \subset \mathbb{R}^n$ a $x \in \mathbb{R}^n$. Vzhledem k tomu, že pro každé $M \subset \mathbb{R}^n$ platí $\operatorname{diam}(M) = \operatorname{diam}(M + x)$, dostáváme také $\mathcal{H}^k(A + x, \delta) = \mathcal{H}^k(A, \delta)$ pro každé $\delta > 0$. Odtud plyne $\mathcal{H}^k(A + x) = \mathcal{H}^k(A)$. ■

13.1.9. Věta. Nechť γ je metrická vnější míra na metrickém prostoru (P, ϱ). Potom je každá borelovská podmnožina P γ-měřitelná.

Důkaz. Systém γ-měřitelných množin tvoří σ-algebru. Stačí dokázat, že uzavřené množiny jsou γ-měřitelné, protože potom budou také všechny otevřené množiny γ-měřitelné, a tedy i všechny borelovské množiny budou γ-měřitelné. Nechť $F \subset P$ je uzavřená. Při ověřování γ-měřitelnosti množiny F je naším úkolem ukázat, že platí $\gamma(T) \geq \gamma(F \cap T) + \gamma(T \setminus F)$ pro libovolnou množinu $T \subset P$. Zvolme $T \subset P$. Můžeme předpokládat, že $\gamma(T) < \infty$, jinak dokazovaná nerovnost zřejmě platí. Označme

$$\begin{aligned} P_0 &= \big\{x \in T;\ \operatorname{dist}(x, F) \geq 1\big\} \qquad \text{a} \\ P_j &= \big\{x \in T;\ \tfrac{1}{j+1} \leq \operatorname{dist}(x, F) < \tfrac{1}{j}\big\}, \quad j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Platí $T \setminus F = \bigcup_{j=0}^{\infty} P_j$, neboť vzhledem k uzavřenosti F má každý prvek množiny $T \setminus F$ od F kladnou vzdálenost. Množiny P_j, P_i, kde $|j - i| > 1$, jsou vzdálené. Poněvadž je γ metrická, dostáváme pro každé $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vztahy

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m} \gamma(P_{2j}) &= \gamma\Big(\bigcup_{j=0}^{m} P_{2j}\Big) \leq \gamma(T), \\ \sum_{j=0}^{m} \gamma(P_{2j+1}) &= \gamma\Big(\bigcup_{j=0}^{m} P_{2j+1}\Big) \leq \gamma(T). \end{aligned}$$

Dostáváme tedy, že řada $\sum_{j=0}^{\infty} \gamma(P_j)$ je konvergentní. Odtud a ze σ-subaditivity γ plyne

$$0 \le \lim_{m\to\infty} \gamma\Big(\bigcup_{j=m+1}^{\infty} P_j\Big) \le \lim_{m\to\infty} \sum_{j=m+1}^{\infty} \gamma(P_j) = 0 \tag{13.2}$$

Pro každé $m \in \mathbb{N}$ jsou množiny $\bigcup_{j=0}^{m} P_j$ a $F \cap T$ vzdálené, takže pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} \gamma(T \setminus F) + \gamma(T \cap F) &= \gamma\Big(\bigcup_{j=0}^{\infty} P_j\Big) + \gamma(T \cap F) \\ &\le \gamma\Big(\bigcup_{j=0}^{m} P_j\Big) + \gamma\Big(\bigcup_{j=m+1}^{\infty} P_j\Big) + \gamma(F \cap T) \\ &\le \gamma\Big(\bigcup_{j=0}^{m} P_j \cup (F \cap T)\Big) + \gamma\Big(\bigcup_{j=m+1}^{\infty} P_j\Big) \\ &\le \gamma(T) + \gamma\Big(\bigcup_{j=m+1}^{\infty} P_j\Big). \end{aligned} \tag{13.3}$$

Z (13.2) a (13.3) pak dostaneme dokazovanou nerovnost

$$\gamma(T \setminus F) + \gamma(F \cap T) \le \lim_{m\to\infty} \Big(\gamma(T) + \gamma\Big(\bigcup_{j=m+1}^{\infty} P_j\Big)\Big) = \gamma(T).$$

■

Následující tvrzení vyplývá okamžitě z Vět 13.1.8 a 13.1.9.

13.1.10. Důsledek. Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \le n$, a $A \subset \mathbb{R}^n$ je borelovská množina. Potom je A $\mathcal{H}^k$-měřitelná.

13.1.11. Lemma. Nechť $k, n \in \mathbb{N}$, $k \le n$. Potom $0 < \mathcal{H}^k\big([0,1)^k \times \{0\}^{n-k}\big) < \infty$.

Důkaz. Označme $K = [0,1)^k \times \{0\}^{n-k}$. Nejprve ukážeme, že platí $\mathcal{H}^k(K) < \infty$. Zvolme $\delta > 0$. Nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{\sqrt{k}}{m} < \delta$. Označme $I(j) = \big[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\big)$ pro $j \in \{1, \dots, m\}$. Položme

$$K(j_1, \dots, j_k) = \prod_{i=1}^{k} I(j_i) \times \{0\}^{n-k}, \qquad [j_1, \dots, j_k] \in \{1, \dots, m\}^k.$$

Potom platí $\operatorname{diam} K(j_1, \dots, j_k) = \frac{\sqrt{k}}{m} < \delta$ pro každé $(j_1, \dots, j_k) \in \{1, \dots, m\}^k$ a také

$$K = \bigcup\big\{K(j_1, \dots, j_k);\ [j_1, \dots, j_k]) \in \{1, \dots, m\}^k\big\}.$$

Potom

$$\mathcal{H}^k(K, \delta) \le \alpha_k m^k \Big(\frac{\sqrt{k}}{m}\Big)^k = \alpha_k \big(\sqrt{k}\big)^k.$$

Odtud plyne $\mathcal{H}^k(K) \le \alpha_k\bigl(\sqrt{k}\bigr)^k < \infty$.

Nyní dokážeme $\mathcal{H}^k(K) > 0$. Nechť $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je zobrazení definované předpisem $\pi(x_1, \dots, x_n) = [x_1, \dots, x_k]$. Pro $A \subset \mathbb{R}^n$ definujme $\mu(A) = \lambda^{k*}\bigl(\pi(A)\bigr)$. Pro každou množinu $A \subset \mathbb{R}^n$ platí $\mu(A) \le (\operatorname{diam} A)^k$. Nechť $\{A_j\}_{j=1}^\infty$ je posloupnost množin taková, že $\bigcup_{j=1}^\infty A_j = K$. Potom

$$\sum_{j=1}^\infty \alpha_k (\operatorname{diam} A_j)^k \ge \alpha_k \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j) \ge \alpha_k \mu(K) = \alpha_k > 0.$$

Platí tedy $\mathcal{H}^k(K) > 0$. ■

13.1.12. Označení. Koeficient α_k zvolíme tak, aby $\mathcal{H}^k\bigl([0,1)^k \times \{0\}^{n-k}\bigr) = 1$.

13.1.13. Poznámka. Lze dokázat, že

$$\alpha_k = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^k}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)2^k},$$

kde Γ je *Gama funkce*, která je definována předpisem $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$ pro $s > 0$.

13.1.14. Věta (regularita Hausdorffovy míry)**.** Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \le n$, a $A \subset \mathbb{R}^n$. Potom existuje borelovská množina $B \subset \mathbb{R}^n$ taková, že $A \subset B$ a $\mathcal{H}^k(A) = \mathcal{H}^k(B)$.

Důkaz. Pokud $\mathcal{H}^k(A) = \infty$, stačí položit $B = \mathbb{R}^n$. Pokud $\mathcal{H}^k(A) < \infty$, nalezneme pro každé $j \in \mathbb{N}$ podle definice a díky 13.1.3 uzavřené množiny $C_i^j \subset \mathbb{R}^n, i \in \mathbb{N}$, takové, že $A \subset \bigcup_{i=1}^\infty C_i^j$, $\operatorname{diam} C_i^j < \frac{1}{j}$ pro každé $i \in \mathbb{N}$ a $\sum_{i=1}^\infty \alpha_k (\operatorname{diam} C_i^j)^k \le \mathcal{H}^k(A, \frac{1}{j}) + \frac{1}{j}$. Potom pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí, že $F_j = \bigcup_{i=1}^\infty C_i^j$ je množina typu F_σ splňující $\mathcal{H}^k\bigl(F_j, \frac{1}{j}\bigr) < \mathcal{H}^k\bigl(A, \frac{1}{j}\bigr) + \frac{1}{j}$. Položme $B = \bigcap_{j=1}^\infty F_j$. Množina B je typu $F_{\sigma\delta}$, a tedy je borelovská, přičemž splňuje $A \subset B$. Dále pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí

$$\mathcal{H}^k\bigl(A, \tfrac{1}{j}\bigr) \le \mathcal{H}^k\bigl(B, \tfrac{1}{j}\bigr) \le \mathcal{H}^k\bigl(F_j, \tfrac{1}{j}\bigr) < \mathcal{H}^k\bigl(A, \tfrac{1}{j}\bigr) + \frac{1}{j},$$

takže $\mathcal{H}^k(A) \le \mathcal{H}^k(B) \le \mathcal{H}^k(A)$, a tedy $\mathcal{H}^k(A) = \mathcal{H}^k(B)$. ■

Důkaz následující věty uvádět nebudeme a lze ho nalézt v [**?**].

13.1.15. Věta. Nechť $\mathcal{F}$ je systém podmnožin množiny X, který je uzavřený na konečné průniky. Nechť μ a ν jsou jsou míry na σ-algebře generované $\mathcal{F}$, které se shodují na $\mathcal{F}$. Jestliže je μ σ-konečná, pak $\mu = \nu$.

13.1.16. Věta. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $A \subset \mathbb{R}^n$. Potom $\mathcal{H}^n(A) = \lambda^{n*}(A)$.

Důkaz. Pro $m \in \mathbb{N}$ označme $\mathcal{Q}_m$ systém všech množin tvaru

$$\prod_{i=1}^n \bigl[\tfrac{l_i}{2^m}, \tfrac{l_i+1}{2^m}\bigr), \qquad l_i \in \mathbb{Z},\ i = 1, \dots, n.$$

Dále označme $\mathcal{Q} = \bigcup_{m=1}^\infty \mathcal{Q}_m$. Platí másledující pozorování:

(a) Pro každé $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}$ platí $Q_1 \subset Q_2$ nebo $Q_2 \subset Q_1$ nebo $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$.
(b) Pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí $\bigcup \mathcal{Q}_m = \mathbb{R}^n$.

Platí také $\mathcal{H}^n\big([0,1)^n\big) = \lambda^{n*}\big([0,1)^n\big) = 1$. Z translační invariantnosti $\mathcal{H}^n$ (Věta 13.1.8) a translační invariantnosti λ^{n*} obdržíme rovnost $\mathcal{H}^n(Q) = \lambda^{n*}(Q)$, kde $Q \in \mathcal{Q}$.

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Potom lze G zapsat jako spočetné disjunktní sjednocení množin z $\mathcal{Q}$. To odvodíme následujícím způsobem. Položme $\mathcal{S} = \{Q \in \mathcal{Q};\ Q \subset G\}$. Zřejmě platí $\bigcup \mathcal{S} \subset G$. Pokud $x \in G$, potom existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $\operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus G) > \sqrt{n}\frac{1}{2^m}$, neboť množina G je otevřená. Potom stačí nalézt množinu $Q \in \mathcal{Q}_m$, která obsahuje bod x. Poněvadž $\operatorname{diam} Q = \sqrt{n}\frac{1}{2^m} < \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus G)$, máme $x \in Q \subset G$. Odtud plyne $G \subset \bigcup \mathcal{S}$.

Pro každou $Q \in \mathcal{S}$ nalezneme $M(Q) \in \mathcal{S}$, která je maximální vzhledem k inkluzi a splňuje $Q \subset M(Q)$. Taková množina $M(Q)$ existuje díky vlastnostem $\mathcal{Q}$. Označme $\mathcal{S}^* = \{M(Q);\ Q \in \mathcal{S}\}$. Potom $\bigcup \mathcal{S}^* = G$ a $\mathcal{S}^*$ je disjunktní. První vlastnost je zřejmá, neboť pro každé $Q \in \mathcal{S}$ máme $Q \subset M(Q) \in \mathcal{S}^*$. Ověřme druhou vlastnost. Pokud $M(Q_1) \cap M(Q_2) = \emptyset$, potom platí $M(Q_1) \subset M(Q_2)$ nebo $M(Q_2) \subset M(Q_1)$. Z maximality potom dostáváme $M(Q_1) = M(Q_2)$.

Nyní můžeme psát

$$\mathcal{H}^n(G) = \sum_{Q \in \mathcal{S}^*} \mathcal{H}^n(Q) = \sum_{Q \in \mathcal{S}^*} \lambda^{n*}(Q) = \lambda^n(G) = \lambda^{n*}(G).$$

Označme $\mathcal{G}$ systém všech otevřených podmnožin $\mathbb{R}^n$. Systém $\mathcal{G}$ je uzavřený na konečné průniky. Potom podle Věty 13.1.15 platí $\mathcal{H}^n = \lambda^n$ na borelovských množinách.

Nechť nyní $A \subset \mathbb{R}^n$. Pomocí Věty 13.1.14 a díky regularitě Lebesgueovy míry nalezneme borelovské množiny $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^n$ splňující $A \subset B_1$, $A \subset B_2$ a $\mathcal{H}^n(A) = \mathcal{H}^n(B_1)$, $\lambda^{n*}(A) = \lambda^n(B_2)$. Položme $B = B_1 \cap B_2$. Potom

$$\mathcal{H}^n(A) = \mathcal{H}^n(B) = \lambda^n(B) = \lambda^{n*}(A).$$

■

13.1.17. Věta (vlastnosti Hausdorffovy míry)**.**

(a) Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$, $Q\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ je izometrie a $A \subset \mathbb{R}^k$. Potom $\mathcal{H}^k\big(Q(A)\big) = \lambda^{k*}(A)$.

(b) Nechť $k, n, m \in \mathbb{N}, k \leq n, k \leq m$, $A \subset \mathbb{R}^n$ a $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ je β-lipschitzovské. Potom

$$\mathcal{H}^k\big(f(A)\big) \leq \beta^k\, \mathcal{H}^k(A).$$

(c) Nechť $k_1, k_2, n \in \mathbb{N}$, $k_1 < k_2 \leq n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ a platí $\mathcal{H}^{k_1}(A) < \infty$. Potom $\mathcal{H}^{k_2}(A) = 0$.

Důkaz. (a) Nechť $\delta > 0$. Vezměme množiny A_j, $j \in \mathbb{N}$ splňující $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ a $\operatorname{diam} A_j < \delta$ pro každé $j \in \mathbb{N}$. Potom platí $\operatorname{diam} Q(A_j) = \operatorname{diam} A_j < \delta$ pro každé

$j \in \mathbb{N}$. Dále platí $Q(A) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q(A_j)$ a

$$\sum_{j=1}^{\infty} \bigl(\operatorname{diam} Q(A_j)\bigr)^k = \sum_{j=1}^{\infty} (\operatorname{diam} A_j)^k.$$

Odtud plyne $\mathcal{H}^k(Q(A), \delta) \le \mathcal{H}^k(A, \delta)$. Poslední nerovnost platí pro libovolné $\delta > 0$, a tedy $\mathcal{H}^k\bigl(Q(A)\bigr) \le \mathcal{H}^k(A)$.

Nechť opět $\delta > 0$. Vezměme množiny C_j, $j \in \mathbb{N}$ splňující $Q(A) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$ a $\operatorname{diam} C_j < \delta$ pro každé $j \in \mathbb{N}$. Položme $A_j = Q^{-1}(Q(A) \cap C_j)$, $j \in \mathbb{N}$. Potom platí $\operatorname{diam} A_j \le \operatorname{diam} C_j < \delta$ a $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Odtud plyne

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\operatorname{diam} A_j)^k \le \sum_{j=1}^{\infty} (\operatorname{diam} C_j)^k.$$

Podobně jako v předchozí části důkazu dostáváme $\mathcal{H}^k(A, \delta) \le \mathcal{H}^k(Q(A), \delta)$ a $\mathcal{H}^k(A) \le \mathcal{H}^k(Q(A))$. Tím je důkaz proveden.

(b) Zvolme $\delta > 0$. Nechť dále množiny A_j, $j \in \mathbb{N}$, splňují $A \subset \bigcup_{j-1}^{\infty} A_j$ a $\operatorname{diam} A_j < \delta$ pro každé $j \in \mathbb{N}$. Položme $B_j = f(A \cap A_j)$, $j \in \mathbb{N}$. Potom platí $f(A) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ a $\operatorname{diam} B_j \le \beta \operatorname{diam}(A \cap A_j) \le \beta \operatorname{diam} A_j \le \beta\delta$. Potom platí

$$\mathcal{H}^k(f(A), \beta\delta) \le \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_k (\operatorname{diam} B_j)^k \le \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_k \beta^k (\operatorname{diam} A_j)^k.$$

Odtud plyne $\mathcal{H}^k(f(A), \beta\delta) \le \beta^k \mathcal{H}^k(A, \delta)$. Limitním přechodem $\delta \to 0+$, pak dostáváme $\mathcal{H}^k(f(A)) \le \beta^k \mathcal{H}^k(A)$.

(c) Zvolme $\delta > 0$. Nechť dále množiny A_j, $j \in \mathbb{N}$, splňují $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ a $\operatorname{diam} A_j < \delta$ pro každé $j \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$\mathcal{H}^{k_2}(A, \delta) \le \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{k_2} (\operatorname{diam} A_j)^{k_2} \le \frac{\alpha_{k_2}}{\alpha_{k_1}} \delta^{k_2 - k_1} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{k_1} (\operatorname{diam} A_j)^{k_1}.$$

Z předchozích nerovností plyne

$$\mathcal{H}^{k_2}(A, \delta) \le \frac{\alpha_{k_2}}{\alpha_{k_1}} \delta^{k_2 - k_1} \mathcal{H}^{k_1}(A, \delta).$$

Pak máme $\mathcal{H}^{k_2}(A) = 0$. ∎

13.1.18. Lemma. Nechť $k, n \in \mathbb{N}$, $k \le n$, a $L\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ je prosté lineární zobrazení. Potom pro každou λ^k-měřitelnou množinu $A \subset \mathbb{R}^k$ platí

$$\mathcal{H}^k\bigl(L(A)\bigr) = \sqrt{\det L^T L} \cdot \lambda^k(A). \tag{13.4}$$

Důkaz. Zobrazení L je lineární a prosté, a proto je dimenze vektorového prostoru $L(\mathbb{R}^k)$ rovna k ([**4**, Věta 10.15]). Existuje tedy lineární izometrie $Q\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ taková, že $Q(\mathbb{R}^k) = L(\mathbb{R}^k)$. Potom platí

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^k\big(L(A)\big) &= \mathcal{H}^k(Q^{-1} \circ L(A)) = \lambda^k\big(Q^{-1} \circ L(A)\big) \\ &= |\det(Q^{-1}L)| \cdot \lambda^k(A). \end{aligned} \tag{13.5}$$

Počítejme

$$\begin{aligned} \big(\det(Q^{-1}L)\big)^2 &= \det\big((Q^{-1}L)^T Q^{-1}L\big) \\ &= \det\Big(\big(\langle Q^{-1}Le_i, Q^{-1}Le_j\rangle\big)_{i,j=1}^n\Big) \\ &= \det\Big(\big(\langle Le_i, Le_j\rangle\big)_{i,j=1}^n\Big) = \det(L^T L). \end{aligned} \tag{13.6}$$

Dokazovaná rovnost (13.4) nyní plyne z (13.5) a (13.6). ■

13.1.19. Označení. Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \le n$, a $L\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ je lineární zobrazení. Budeme značit $\operatorname{vol} L = \sqrt{\det L^T L}$.

13.1.20. (a) Symbol vol je zvolen podle anglického slova *volume*, které znamená objem. Matice $L^T L$ se nazývá **Gramova matice**[2]. Podle Lemmatu 13.1.18 platí rovnost $\mathcal{H}^k\big(L([0,1]^k)\big) = \operatorname{vol} L$, takže číslo $\operatorname{vol} L$ vyjadřuje k-dimenzionální objem rovnoběžnostěnu $L\big([0,1]^k\big)$. Je-li $\varphi \in \mathcal{C}^1(G)$, pak je zobrazení $t \mapsto \operatorname{vol} \varphi'(t)$ spojité na množině G.

(b) Je-li L matice typu $n \times k$, potom je matice $L^T L$ symetrická matice typu $k \times k$.

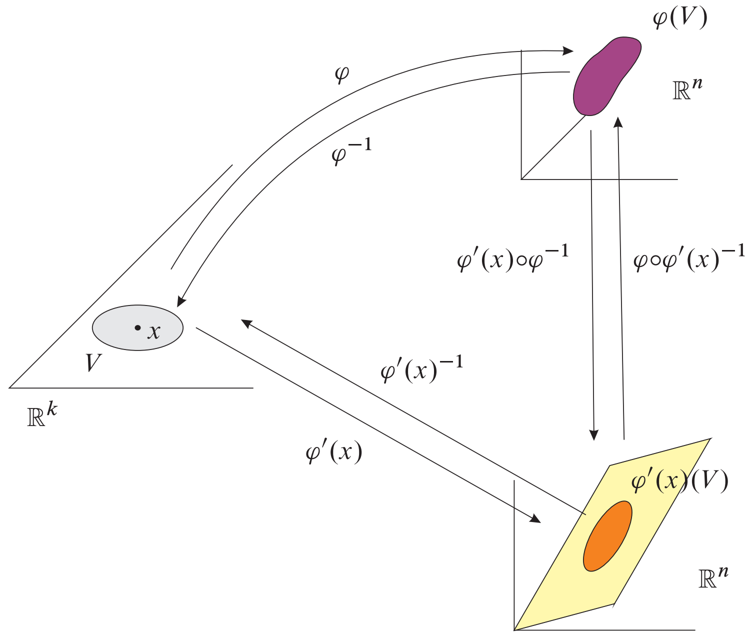
(c) Gramův determinant je nezáporný, neboť pro každou matici A typu $n \times k$ a každé $x \in \mathbb{R}^k$ platí $(A^T Ax, x) = (Ax, Ax) \ge 0$. Gramův determinant je kladný, jestliže má navíc L hodnost k.

13.1.21. Definice. Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \le n$, $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina a $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$. Řekneme, že φ je **regulární** na G, jestliže je třídy $\mathcal{C}^1$ na G a $\varphi'(x)$ je prosté pro každé $x \in G$.

13.1.22. Lemma. Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \le n$, $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina, $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení, $x \in G$ a $\beta > 1$. Potom existuje okolí V bodu x takové, že

(a) zobrazení $y \mapsto \varphi\big(\varphi'(x)^{-1}(y)\big)$ je β-lipschitzovské na $\varphi'(x)(V)$,
(b) zobrazení $z \mapsto \varphi'(x)\big(\varphi^{-1}(z)\big)$ je β-lipschitzovské na $\varphi(V)$.

[2] Jørgen Pedersen Gram (1850–1916)



Obrázek 1.

Důkaz. Před vlastním důkazem tvrzení (a) a (b) odvodíme několik pomocných nerovností. Lineární zobrazení $v \mapsto \varphi'(x)(v)$ je prosté, a proto existuje $\eta > 0$ takové, že

$$\forall v \in \mathbb{R}^k : \|\varphi'(x)(v)\| \geq \eta\|v\|. \tag{13.7}$$

Stačí položit $\eta = \inf\{\|\varphi'(x)(v)\|;\ v \in \mathbb{R}^k, \|v\| = 1\}$. Zobrazení $v \mapsto \varphi'(x)(v)$ je spojité a jednotková sféra $\{v \in \mathbb{R}^k;\ \|v\| = 1\}$ je kompaktní množina, proto se infima nabývá v jistém bodě v_0. Poněvadž $\varphi'(x)(v_0) \neq 0$, je η kladné.

Nalezneme $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}\eta)$ takové, že

$$\frac{2\varepsilon}{\eta} + 1 < \beta. \tag{13.8}$$

Dále nalezneme okolí V bodu x takové, že

$$\forall y \in V : \|\varphi'(y) - \varphi'(x)\| \leq \varepsilon.$$

Ukážeme, že potom pro každé $u, v \in V$ platí

$$\|\varphi(u) - \varphi(v) - \varphi'(x)(u - v)\| \leq \varepsilon\|u - v\|. \tag{13.9}$$

Pro pevné $v \in V$ uvažujme zobrazení

$$g\colon w \mapsto \varphi(w) - \varphi(v) - \varphi'(x)(w - v), \qquad w \in V.$$

Pro $w \in V$ máme $g'(w) = \varphi'(w) - \varphi'(x)$. Pak podle Věty 10.2.24 platí

$$\begin{aligned} \|\varphi(u) - \varphi(v) - \varphi'(x)(u - v)\| &= \|g(u) - g(v)\| \\ &\leq \sup\{\|g'(w)\|;\ w \in V\} \cdot \|u - v\| \\ &\leq \varepsilon\|u - v\|, \end{aligned}$$

což dokazuje (13.9).

Dále ukážeme, že pro každé $u, v \in V$ platí

$$\|\varphi(u) - \varphi(v)\| \geq \frac{1}{2}\eta\|u - v\|. \tag{13.10}$$

Pro $u, v \in V$ počítejme

$$\begin{aligned} \|\varphi(u) - \varphi(v)\| &\geq -\|\varphi(u) - \varphi(v) - \varphi'(x)(u - v)\| + \|\varphi'(x)(u - v)\| \\ &\geq -\varepsilon\|u - v\| + \eta\|u - v\| \geq \frac{1}{2}\eta\|u - v\|, \end{aligned}$$

tím je vztah (13.10) dokázán.

(a) Zvolme $a, b \in \varphi'(x)(V)$. K nim nalezneme $u, v \in V$ taková, že $\varphi'(x)(u) = a$, $\varphi'(x)(v) = b$. Počítejme

$$\begin{aligned} \|\varphi\big(\varphi'(x)^{-1}(a)\big) - \varphi\big(\varphi'(x)^{-1}(b)\big)\| &= \|\varphi(u) - \varphi(v)\| \\ &\leq \|\varphi(u) - \varphi(v) - \varphi'(x)(u - v)\| + \|\varphi'(x)(u - v)\| \\ &\overset{(13.9)}{\leq} \varepsilon\|u - v\| + \|\varphi'(x)(u - v)\| \\ &\overset{(13.7)}{\leq} \frac{\varepsilon}{\eta}\|a - b\| + \|a - b\| = \big(\tfrac{\varepsilon}{\eta} + 1\big)\|a - b\| \\ &\overset{(13.8)}{\leq} \beta\|a - b\|. \end{aligned}$$

(b) Zvolme $p, q \in \varphi(V)$. K nim nalezneme $u, v \in V$ takové, že $\varphi(u) = p$, $\varphi(v) = q$. Počítejme

$$\begin{aligned} \|\varphi'(x)\big(\varphi^{-1}(p)\big) - \varphi'(x)\big(\varphi^{-1}(q)\big)\| &= \|\varphi'(x)(u) - \varphi'(x)(v)\| \\ &= \|\varphi'(x)(u - v)\| \\ &\leq \|\varphi(u) - \varphi(v) - \varphi'(x)(u - v)\| + \|\varphi(u) - \varphi(v)\| \\ &\overset{(13.9)}{\leq} \varepsilon\|u - v\| + \|p - q\| \\ &\overset{(13.10)}{\leq} \tfrac{2\varepsilon}{\eta}\|\varphi(u) - \varphi(v)\| + \|p - q\| = (\tfrac{2\varepsilon}{\eta} + 1)\|p - q\| \\ &\overset{(13.8)}{\leq} \beta\|p - q\|. \end{aligned}$$

Tím je i druhé tvrzení lemmatu dokázáno. ∎

13.1.23. Lemma. Nechť $k, n \in \mathbb{N}$, $k \le n$, $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina, $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení, $x \in G$ a $\alpha > 1$. Potom existuje okolí V bodu $x$takové, že pro každou λ^k-měřitelnou $E \subset V$ platí

$$\alpha^{-1} \int_E \operatorname{vol} \varphi'(t) \, \mathrm{d}\lambda^k(t) \le \mathcal{H}^k\big(\varphi(E)\big) \le \alpha \int_E \operatorname{vol} \varphi'(t) \, \mathrm{d}\lambda^k(t).$$

Důkaz. Nalezneme $\beta > 1$ a $\tau > 1$ taková, že

$$\beta^k \tau < \alpha. \tag{13.11}$$

Podle Lemmatu 13.1.22 nalezneme okolí V_1 bodu x takové, že pro φ a β platí (a) i (b) v uvedeném lemmatu. Díky spojitosti zobrazení $t \mapsto \operatorname{vol} \varphi'(t)$ na množině G nalezneme okolí V_2 bodu x takové, že platí

$$\forall t \in V_2\colon \tau^{-1} \operatorname{vol} \varphi'(x) \le \operatorname{vol} \varphi'(t) \le \tau \operatorname{vol} \varphi'(x). \tag{13.12}$$

Položme $V = V_1 \cap V_2$. Ukážeme, že V je hledaným okolím.

Nechť $E \subset V$ je λ^k-měřitelná. Potom díky (13.12) dostáváme

$$\tau^{-1} \operatorname{vol} \varphi'(x) \lambda^k(E) \le \int_E \operatorname{vol} \varphi'(t) \, \mathrm{d}\lambda^k(t) \le \tau \operatorname{vol} \varphi'(x) \lambda^k(E). \tag{13.13}$$

Podle Lemmatu 13.1.18 máme $\operatorname{vol} \varphi'(x) \lambda^k(E) = \mathcal{H}^k\big(\varphi'(x)(E)\big)$, a tedy můžeme psát

$$\tau^{-1} \mathcal{H}^k\big(\varphi'(x)(E)\big) \le \int_E \operatorname{vol} \varphi'(t) \, \mathrm{d}\lambda^k(t) \le \tau \mathcal{H}^k\big(\varphi'(x)(E)\big). \tag{13.14}$$

Dále díky Lemmatu 13.1.22(a) a volbě okolí V_1 dostáváme

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^k\big(\varphi(E)\big) &= \mathcal{H}^k\big(\varphi \circ \varphi'(x)^{-1} \circ \varphi'(x)(E)\big) \le \beta^k \mathcal{H}^k\big(\varphi'(x)(E)\big) \\ &\overset{(13.14)}{\le} \beta^k \tau \int_E \operatorname{vol} \varphi'(t) \, \mathrm{d}\lambda^k(t) \overset{(13.11)}{\le} \alpha \int_E \operatorname{vol} \varphi'(t) \, \mathrm{d}\lambda^k(t). \end{aligned}$$

Podobně díky Lemmatu 13.1.22(b) a volbě okolí V_1 dostáváme

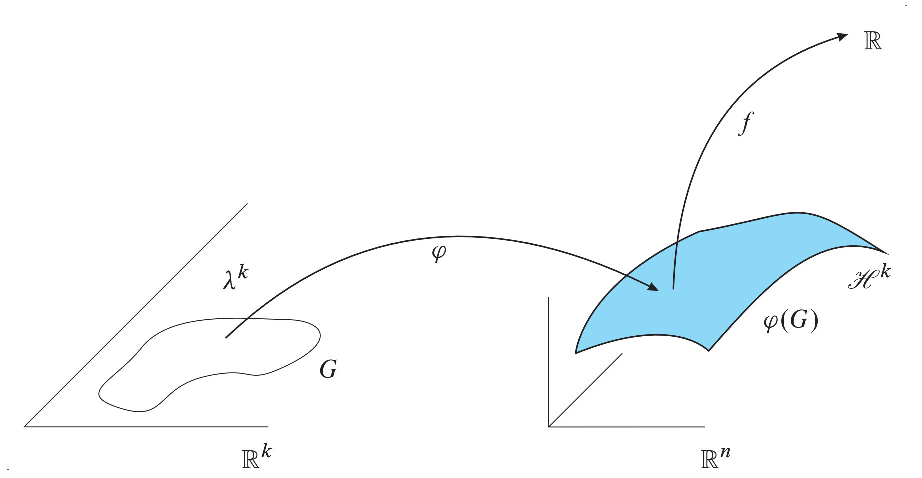
$$\begin{aligned} \mathcal{H}^k\big(\varphi(E)\big) &\ge \beta^{-k} \mathcal{H}^k\big(\varphi'(x) \circ \varphi^{-1} \circ \varphi(E)\big) = \beta^{-k} \mathcal{H}^k\big(\varphi'(x)(E)\big) \\ &\overset{(13.14)}{\ge} \beta^{-k} \tau^{-1} \int_E \operatorname{vol} \varphi'(t) \, \mathrm{d}\lambda^k(t) \overset{(13.11)}{\ge} \alpha^{-1} \int_E \operatorname{vol} \varphi'(t) \, \mathrm{d}\lambda^k(t). \end{aligned}$$

■

13.1.24. Věta (area formule). Nechť $k, n \in \mathbb{N}$, $k \le n$, $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina, $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení a $f\colon \varphi(G) \to \mathbb{R}$ je borelovská. Potom platí

$$\int_{\varphi(G)} f(x) \, \mathrm{d} \mathcal{H}^k(x) = \int_G f(\varphi(t)) \operatorname{vol} \varphi'(t) \, \mathrm{d}\lambda^k(t),$$

pokud integrál na pravé straně konverguje.



Obrázek 2.

Důkaz. Zobrazení φ je prosté, a proto existuje inverzní zobrazení φ^{-1}. Nejprve učiníme pozorování ohledně měřitelnosti tohoto zobrazení. Každá otevřená množina $H \subset G$ je spočetným sjednocením kompaktních množin, proto také $\varphi(H)$ je spočetným sjednocením kompaktních množin. Dostáváme tedy, že zobrazení φ^{-1} je borelovské. Množina $\varphi(G)$ je tedy borelovská.

Důkaz věty rozdělíme do několika kroků. Postupně budeme dokazovat area formuli pro stále obecnější zobrazení f.

1. Předpokládejme, že $f = \chi_L$, kde $L \subset \varphi(G)$ je borelovská. Ukážeme, že platí

$$\mathcal{H}^k(L) = \int_{\varphi^{-1}(L)} \operatorname{vol} \varphi'(t) \, d\lambda^k(t). \tag{13.15}$$

Zvolme $\alpha > 1$. Podle Lemmatu 13.1.23 nalezneme pro každé $y \in G$ okolí $V_y \subset G$ bodu y takové, že pro každou λ^k-měřitelnou množinu $E \subset V_y$ platí

$$\alpha^{-1} \int_E \operatorname{vol} \varphi'(t) \, d\lambda^k(t) \le \mathcal{H}^k(\varphi(E)) \le \alpha \int_E \operatorname{vol} \varphi'(t) \, d\lambda^k(t). \tag{13.16}$$

Platí $\bigcup\{V_y;\ y \in G\} = G$. Prostor $\mathbb{R}^n$ je separabilní (Příklad **??**), a proto pomocí Věty 9.8.18 můžeme nalézt posloupnost $\{y_j\}$ prvků množiny G takovou, že platí $\bigcup_{j=1}^{\infty} V_{y_j} = G$. Položme

$$A_j = \varphi^{-1}(L) \cap \Big(V_{y_j} \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} V_{y_i} \Big).$$

Potom platí

(a) množina A_j je borelovská pro každé $j \in \mathbb{N}$,
(b) $A_j \subset V_{y_j}$ pro každé $j \in \mathbb{N}$,

(c) $\forall j, j' \in \mathbb{N}, j \neq j' \colon A_j \cap A_{j'} = \emptyset$,
(d) $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \varphi^{-1}(L)$,
(e) pro každé $j \in \mathbb{N}$ máme

$$\alpha^{-1} \int_{A_j} \operatorname{vol} \varphi'(t) \, \mathrm{d}\lambda^k(t) \leq \mathcal{H}^k\big(\varphi(A_j)\big) \leq \alpha \int_{A_j} \operatorname{vol} \varphi'(t) \, \mathrm{d}\lambda^k(t),$$

(f) pro každé $j \in N$ je množina $\varphi(A_j)$ borelovská.

Z (a) a (c)-(e) plyne

$$\alpha^{-1} \int_{\varphi^{-1}(L)} \operatorname{vol} \varphi'(t) \, \mathrm{d}\lambda^k(t) \leq \mathcal{H}^k\big(\varphi(\varphi^{-1}(L))\big) \leq \alpha \int_{\varphi^{-1}(L)} \operatorname{vol} \varphi'(t) \, \mathrm{d}\lambda^k(t).$$

Vzhledem k tomu, že α bylo voleno libovolně, dostáváme (13.15).

2. Předpokládejme, že f je nezáporná jednoduchá borelovská funkce, tj. $f = \sum_{j=1}^{p} c_j \chi_{L_j}$, kde $L_j \subset \varphi(G)$ je borelovská a $c_j \geq 0$, $j = 1, \dots, p$. Potom podle (13.15) platí

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(G)} f(x) \, \mathrm{d}\,\mathcal{H}^k(x) &= \sum_{j=1}^{p} c_j \, \mathcal{H}^k(L_j) = \sum_{j=1}^{p} c_j \int_{\varphi^{-1}(L_j)} \operatorname{vol} \varphi'(t) \, \mathrm{d}\lambda^k(t) \\ &= \sum_{j=1}^{p} c_j \int_G \chi_{L_j} \circ \varphi(t) \operatorname{vol} \varphi'(t) \, \mathrm{d}\lambda^k(t) \\ &= \int_G f \circ \varphi(t) \operatorname{vol} \varphi'(t) \, \mathrm{d}\lambda^k(t). \end{aligned} \tag{13.17}$$

3. Nechť f je nezáporná borelovská funkce. Nalezneme nezáporné jednoduché borelovské funkce $f_j \colon \varphi(G) \to \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, takové, že $f_j \to f$ a $f_j \leq f_{j+1}$. Potom podle Leviho věty dostáváme

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\varphi(G)} f_j(x) \, \mathrm{d}\,\mathcal{H}^k(t) = \int_{\varphi(G)} f(x) \, \mathrm{d}\,\mathcal{H}^k(x),$$

$$\lim_{j\to\infty} \int_G f_j(\varphi(t)) \operatorname{vol} \varphi'(t) \, \mathrm{d}\lambda^k(t) = \int_G f(\varphi'(t)) \operatorname{vol} \varphi'(t) \, \mathrm{d}\lambda^k(t).$$

Poněvadž podle bodu 2 platí pro každé $j \in \mathbb{N}$ rovnost

$$\int_{\varphi(G)} f_j(x) \, \mathrm{d}\,\mathcal{H}^k(x) = \int_G f_j(\varphi(t)) \operatorname{vol} \varphi'(t) \, \mathrm{d}\lambda^k(t)$$

dostáváme rovnost

$$\int_{\varphi(G)} f(x) \, \mathrm{d}\,\mathcal{H}^k(x) = \int_G f(\varphi(t)) \operatorname{vol} \varphi'(t) \, \mathrm{d}\lambda^k(t).$$

4. Nechť f je borelovská funkce a integrál $\int_G f(\varphi(t)) \operatorname{vol} \varphi'(t) \, \mathrm{d}\lambda^k(t)$ konverguje. Položme $f^+ = \max\{f, 0\}$ a $f^- = \max\{-f, 0\}$. Potom podle bodu 3 platí

$$\int_{\varphi(G)} f^+(x) \, \mathrm{d}\,\mathcal{H}^k(x) = \int_G f^+(\varphi(t)) \operatorname{vol} \varphi'(t) \, \mathrm{d}\lambda^k(t). \tag{13.18}$$

Poslední integrál je roven $\int_G (f(\varphi(t)) \operatorname{vol} \varphi'(t))^+ \, d\lambda^k(t)$, a je tedy podle předpokladu konečný. Podobně dostáváme

$$\int_{\varphi(G)} f^-(x) \, d\mathcal{H}^k(x) = \int_G (f(\varphi(t)) \operatorname{vol} \varphi'(t))^- \, d\lambda^k(t), \tag{13.19}$$

přičemž poslední integrál je opět konečný. Odtud tedy plyne

$$\int_{\varphi(G)} f(x) \, d\mathcal{H}^k(x) = \int_G f(\varphi(t)) \operatorname{vol} \varphi'(t) \, d\lambda^k(t).$$

■

13.1.25. Poznámka. Area formule platí i v případě, kdy je zobrazení φ lokálně lipschitzovské (vizte [**18**, F.34]).

13.1.26. Příklad. Spočtěte povrch jednotkové sféry $\mathbb{S}_2 = \{x \in \mathbb{R}^3;\ \|x\| = 1\}$.

Řešení. Naším úkolem je spočítat $\mathcal{H}^2(\mathbb{S}_2)$. Množinu S zapíšeme jako disjunktní sjednocení $\mathbb{S}_2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, kde

$$\begin{aligned} A_1 &= \big\{[0,0,1],[0,0,-1]\big\}, \\ A_2 &= \{x \in S;\ x_2 = 0, x_1 < 0\}, \\ A_3 &= S \setminus (A_1 \cup A_2). \end{aligned}$$

Nejprve pomocí area formule vypočteme $\mathcal{H}^2(A_3)$. Použijeme sférické souřadnice $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^3$, kde $G = (-\pi, \pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$ a

$$\varphi(\alpha, \gamma) = [\cos(\gamma)\cos(\alpha), \cos(\gamma)\sin(\alpha), \sin(\gamma)].$$

Zobrazení φ je prosté, regulární a platí $\varphi(G) = A_3$. Výpočtem příslušných parciálních derivací odvodíme, že platí $\operatorname{vol} \varphi'(\alpha, \gamma) = \cos\gamma$ pro $(\alpha, \gamma) \in G$. Podle area formule můžeme počítat

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^2\big(\varphi(G)\big) &= \int_{\varphi(G)} 1 \, d\mathcal{H}^2 = \int_G \operatorname{vol} \varphi' \, d\lambda^2 \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\gamma \, d\gamma \, d\alpha = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\gamma \, d\gamma = 4\pi. \end{aligned}$$

Zbývá ukázat, že $\mathcal{H}^2(A_1 \cup A_2) = 0$. Množina A_1 má pouze dva prvky, takže přímo z definice Hausdorffovy míry vidíme, že platí $\mathcal{H}^2(A_1) = 0$. Množinu A_2 můžeme parametrizovat pomocí zobrazení $\psi\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3$, které je definované předpisem $\psi(t) = [-\cos t, 0, \sin t]$. Zobrazení ψ je prosté, regulární, třídy $\mathcal{C}^1(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a platí $\psi(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = A_2$. Opět podle area formule obdržíme

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1\big(\psi(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})\big) &= \int_{\psi(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} 1 \, d\mathcal{H}^1 = \int_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \operatorname{vol} \psi' \, d\lambda^1 \\ &= \int_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} 1 \, dt = \pi. \end{aligned}$$

Podle Věty 13.1.17 dostáváme, že $\mathcal{H}^2(A_2) = 0$. Máme tedy $\mathcal{H}^2(\mathbb{S}_2) = 4\pi$. ♣

13.1.27. Věta. Nechť $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ je λ^k-integrovatelná funkce. Potom platí

$$\int_{\mathbb{R}^k} f(x)\,\mathrm{d}\lambda^k(x) = \int_0^\infty \Big(\int_{\{x\in\mathbb{R}^k;\ \|x\|=r\}} f(x)\,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^{k-1}(x) \Big)\,\mathrm{d}\lambda^1(r).$$

13.2. Křivky, plochy a jejich orientace

13.2.1. Plochy a tečné prostory.

13.2.1. Definice. Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \le n$. Řekneme, že neprázdná množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je k**-dimenzionální plocha** (krátce k**-plocha**), jestliže pro každé $x \in M$ existuje otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^k$ a regulární homeomorfismus $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ takový, že $x \in \varphi(G) \subset M$ a $\varphi(G)$ je otevřená v M.

13.2.2. Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \le n$. Jestliže $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená a neprázdná a $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ je regulární homeomorfismus, potom je $\varphi(G)$ k-plocha, neboť $\varphi(G)$ je otevřená ve $\varphi(G)$.

13.2.3. Příklad. Ukažte, že množina $M = \{0\} \times (0,1)^2 \subset \mathbb{R}^3$ je 2-plocha.

Řešení. Nechť $x \in M$. Položme $G = (0,1)^2 \subset \mathbb{R}^2$ a $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^3$ definujme předpisem $\varphi(z) = (0, z_1, z_2)$. Množina G je zřejmě otevřená v $\mathbb{R}^2$. Zobrazení φ je zřejmě spojité, prosté a $\varphi(G) = M$. Inverzní zobrazení φ^{-1} je rovno zobrazení $(y_1, y_2, y_3) \mapsto (y_2, y_3)$, které je zúženo na množinu M. Zobrazení $\varphi^{-1}\colon M \to G$ je tedy spojité, a proto je φ homeomorfismus. Pro derivaci φ platí

$$\varphi'(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad z \in G.$$

Hodnost $\varphi'(z)$ je rovna 2 pro každé $z \in G$, takže φ je regulární homeomorfismus. Množina $\varphi(G)$ je otevřená v M, neboť $\varphi(G) = M$, a poněvadž platí $x \in \varphi(G)$, ověřili jsme, že M je 2-plocha. ♣

13.2.4. Věta. Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k < n$, $H \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $F : H \to \mathbb{R}^{n-k}$ je zobrazení třídy $\mathcal{C}^1$. Označme $M = \{x \in H;\ F(x) = 0\}$. Jestliže $M \neq \emptyset$ a pro každé $x \in M$ platí rank $F'(x) = n - k$, potom je M k-plocha.

Důkaz. Zvolme $\tilde{x} \in M$. Potom rank $F'(\tilde{x}) = n - k$. Jacobiho matice $F'(\tilde{x})$, která je typu $(n-k) \times n$, tedy obsahuje regulární submatici typu $(n-k) \times (n-k)$. Pro zjednodušení značení budeme předpokládat, že právě submatice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_{k+1}}(\tilde{x}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\tilde{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_{n-k}}{\partial x_{k+1}}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial F_{n-k}}{\partial x_n}(\tilde{x}) \end{pmatrix} \tag{13.20}$$

je regulární. V ostatních případech je postup zcela obdobný. Potom podle Věty 10.4.3 existují otevřené množiny $G_1 \subset \mathbb{R}^k$, $G_2 \subset \mathbb{R}^{n-k}$ a zobrazení $\varphi\colon G_1 \to G_2$ třídy $\mathcal{C}^1$ takové, že $\tilde{x} \in G_1 \times G_2$ a $M \cap (G_1 \times G_2) = \operatorname{graph} \varphi$. Definujme zobrazení $\psi\colon G_1 \to \mathbb{R}^n$ předpisem $\psi(u) = (u, \varphi(u))$. Pak máme $\psi(G_1) = M \cap (G_1 \times G_2)$. Zobrazení ψ je třídy $\mathcal{C}^1$ na G_1 a jde o regulární zobrazení, neboť

$$\psi'(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(u) & \cdots & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k}(u) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_{n-k}}{\partial x_1}(u) & \cdots & \cdots & \frac{\partial \varphi_{n-k}}{\partial x_k}(u), \end{pmatrix}$$

a tedy rank $\psi(u) = k$ pro každé $u \in G_1$. Zobrazení ψ je zřejmě prosté a zobrazení ψ^{-1} je projekcí z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$ zúžené na množinu $M \cap (G_1 \times G_2)$, a je tedy spojité. Zobrazení ψ je tedy regulární homeomorfismus G_1 na množinu $M \cap (G_1 \times G_2)$, která je otevřená v M a obsahuje $\tilde{x}$. ■

13.2.5. Příklad. Ukažte, že sféra $\mathbb{S}_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| = 1\}$ je $(n-1)$-plocha.

Řešení. Definujme $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ předpisem $F(x) = \|x\|^2 - 1$ a $H = \mathbb{R}^n$. Zobrazení F je třídy $\mathcal{C}^1$ a platí $\mathbb{S}_{n-1} = \{x \in H;\ F(x) = 0\}$. Dále platí

$$F'(x) = (2x_1, 2x_2, \ldots, 2x_n) = 2x,$$

a tedy rank $F'(x) = 1$ pro každé $x \in \mathbb{S}_{n-1}$. Podle Věty 13.2.4 je tedy množina $\mathbb{S}_{n-1}$ $(n-1)$-plochou. ♣

13.2.6. Definice. Nechť $k, n \in \mathbb{R}^n, k \leq n$, M je k-plocha a $x \in M$. Pak vektor $v \in \mathbb{R}^n$ nazveme **tečným vektorem** k ploše M v bodě x, jestliže existuje otevřený interval I, a spojité zobrazení $c\colon I \to M$ a $t_0 \in I$ takové, že $c(t_0) = x$ a $c'(t_0) = v$.

Množinu všech tečných vektorů k ploše M v bodě x nazýváme **tečným prostorem** k ploše M v bodě x a značíme $T_x(M)$.

13.2.7. Věta. Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$, $M \subset \mathbb{R}^n$ je k-plocha a $x \in M$.

(a) Potom $T_x(M)$ je k-dimenzionální vektorový prostor.

(b) Nechť $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina, $a \in G$ a $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ je regulární homeomorfismus takový, že $x = \varphi(a) \in \varphi(G) \subset M$ a $\varphi(G)$ je otevřená v M. Potom $\varphi'(a)(\mathbb{R}^k) = T_x(M)$.

Důkaz. Tvrzení (a) plyne z bodu (b), neboť $\varphi'(a)(\mathbb{R}^n)$ je lineárním podprostorem. K důkazu bodu (b) dokážeme dvě inkluze. Začneme s inkluzí $\varphi'(a)(\mathbb{R}^k) \subset T_x(M)$.

Zvolme $v \in \varphi'(a)(\mathbb{R}^k)$. Nalezneme $u \in \mathbb{R}^k$ takové, že $\varphi'(a)(u) = v$. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že $B(a, \delta) \subset G$. Nalezneme $r > 0$ takové, že $r\|u\| < \delta$, a definujeme $c\colon (-r, r) \to \mathbb{R}^n$ předpisem $c(t) = \varphi(a + tu)$. Potom je c spojité zobrazení a pro jeho derivaci v bodě 0 platí $c'(0) = \varphi'(a)(u) = v$. Platí tedy $v \in \varphi'(a)(\mathbb{R}^n)$.

Nyní dokážeme inkluzi $T_x(M) \subset \varphi'(a)(\mathbb{R}^k)$. Nechť $v \in T_x(M)$. Existuje tedy otevřený interval I, bod $t_0 \in I$ a spojité zobrazení $c\colon I \to M$ splňující $c'(t_0) = v$. Reprezentující matice $\varphi'(a)$ má hodnost k. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že matice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k}(a) \end{pmatrix} \in M(k \times k)$$

je regulární. Definujme zobrazení $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ předpisem

$$\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k).$$

Potom

$$(\pi \circ \varphi)'(a) = \pi'(\varphi(a)) \circ \varphi'(a) = \pi \circ \varphi'(a) = \mathbb{A}.$$

Rovnost $\pi'(\varphi(a)) = \pi$ plyne z 10.2.4(b). Zobrazení $\pi \circ \varphi$ je třídy $\mathcal{C}^1$ a $(\pi \circ \varphi)'(a)$ je regulární. Podle věty o lokálním difeomorfismu (Věta 10.6.2) existuje okolí $U \subset G$ bodu a takové, že $\pi \circ \varphi|_U$ je difeomorfismus. Zobrazení $\pi|_{\varphi(U)}$ je prosté, neboť zobrazení $\pi \circ \varphi|_U$ je prosté. Označme $W = c^{-1}(\varphi(U))$. Množina $\varphi(U)$ je otevřená v M, a tedy W je otevřená. Navíc $t_0 \in W$. Definujme zobrazení $\xi\colon W \to G$ předpisem $\xi(t) = \varphi^{-1} \circ c(t)$. Platí

$$\xi(t) = \varphi^{-1} \circ (\pi|_{\varphi(U)})^{-1} \circ \pi|_{\varphi(U)} \circ c(t) = (\pi \circ \varphi|_U)^{-1} \circ (\pi \circ c)(t), \qquad t \in W.$$

Potom platí, že zobrazení $(\pi \circ \varphi|_U)^{-1}$ je třídy $\mathcal{C}^1$ na množině $\pi(\varphi(U))$ a zobrazení $\pi \circ c$ je třídy $\mathcal{C}^1$ na množině W. Zobrazení ξ je tedy třídy $\mathcal{C}^1$ na W a platí $c|_W = \varphi \circ \xi$. Odtud plyne $c'(t_0) = \varphi'(a)(\xi'(t_0))$. Máme tedy $c'(t_0) \in \varphi'(a)(\mathbb{R}^k)$. ■

13.2.8. Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je $(n-1)$-plocha a $x \in M$. Řekneme, že $v \in \mathbb{R}^n$ je **normálový vektor** k ploše M v bodě x, jestliže $v \in T_x(M)^\perp$.

13.2.2. Vektorový součin a jeho vlastnosti.

13.2.9. Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}, n > 1, u^1, \dots, u^{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Pak definujeme **vektorový součin** vektorů $u^1, \dots, u^{n-1}$ předpisem

$$u^1 \times \dots \times u^{n-1} = \big(\det([e^i, u^1, \dots, u^{n-1}])_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n.$$

13.2.10. Věta (vlastnosti vektorového součinu)**.** Nechť $n \in \mathbb{N}, n > 1$, a $u^1, \dots, u^{n-1} \in \mathbb{R}^n$.

(a) Pro každé $v \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\langle v, u^1 \times \dots \times u^{n-1} \rangle = \det[v, u^1, \dots, u^{n-1}].$$

(b) Vektory $u^1, \dots, u^{n-1}$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když $u^1 \times \dots \times u^{n-1} = \boldsymbol{o}$.
(c) Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí $\langle u^i, u^1 \times \dots \times u^{n-1} \rangle = 0$.
(d) Platí $\|u^1 \times \dots \times u^{n-1}\| = \operatorname{vol}[u^1, \dots, u^{n-1}]$.

Důkaz. (a) Zvolme $v \in \mathbb{R}^n$ a počítejme

$$\begin{aligned}\langle v, u^1 \times \dots \times u^{n-1} \rangle &= \sum_{i=1}^n v_i \det(e^i, u^1, \dots, u^{n-1}) = \sum_{i=1}^n \det(v_i e^i, u^1, \dots, u^{n-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \det(v, u^1, \dots, u^{n-1}).\end{aligned}$$

Tím je požadovaný vztah dokázán.

(b) $\Rightarrow$ Tato implikace zřejmě platí.

$\Leftarrow$ Pokud $u^1 \times \dots \times u^{n-1} = \boldsymbol{o}$, potom je matice $[v, u^1, \dots, u^{n-1}]$ podle (a) singulární pro každé $v \in \mathbb{R}^n$.

(c) Tvrzení snadno plyne z (a).

(d) Označme $w = u^1 \times \dots \times u^{n-1}$. Pokud jsou $u^1, \dots, u^{n-1}$ lineárně závislé, potom $w = \boldsymbol{o}$ a $\operatorname{vol}(u^1, \dots, u^{n-1}) = 0$. Předpokládejme tedy $w \neq \boldsymbol{o}$. Potom platí

$$\begin{aligned}\|w\|^4 &= \langle w, u^1 \times \dots \times u^{n-1} \rangle^2 = (\det[w, u^1, \dots, u^{n-1}])^2 \\ &= \det\big([w, u^1, \dots, u^{n-1}]^T \cdot [w, u^1, \dots, u^{n-1}]\big) \\ &= \det \begin{pmatrix} \langle w, w \rangle & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \langle u^1, u^1 \rangle & \dots & \langle u^1, u^{n-1} \rangle \\ 0 & \langle u^2, u^1 \rangle & \dots & \langle u^2, u^{n-1} \rangle \\ 0 & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \langle u^{n-1}, u^1 \rangle & \dots & \langle u^{n-1}, u^{n-1} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \|w\|^2 \det(\langle u^i, u^j \rangle).\end{aligned}$$

Odtud pak plyne $\|w\| = \operatorname{vol}(u^1, \dots, u^{n-1})$. ∎

13.2.11. (a) Vektorový součin je podle Věty 13.2.10(c) kolmý na své činitele. Z části (b) předchozí věty plyne, že při liché permutaci činitelů změní vektorový součin znaménko a při sudé zůstane nezměněn.

(b) V $\mathbb{R}^3$ je vektorovým součinem vektorů $u = (u_1, u_2, u_3)$ a $v = (v_1, v_2, v_3)$ vektor

$$u \times v = \left(\det \begin{pmatrix} u_2, & v_2 \\ u_3, & v_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} u_3, & v_3 \\ u_1, & v_1 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} u_1, & v_1 \\ u_2, & v_2 \end{pmatrix} \right).$$

V dimenzi 2 má vektorový součin jen jednoho činitele. Vektorový součin vektoru $[u_1, u_2]$ je vektor $[u_2, -u_1]$.

13.2.12. Je-li $M \subset \mathbb{R}^n$ $(n-1)$-plocha, $x \in M$ a φ je příslušný regulární homeomorfismus $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ splňující $\varphi(a) = x \in \varphi(G) \subset M$. Potom

$$\nu(x) = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(\varphi^{-1}(x)) \times \cdots \times \frac{\partial\varphi}{\partial x_{n-1}}(\varphi^{-1}(x))}{\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(\varphi^{-1}(x)) \times \cdots \times \frac{\partial\varphi}{\partial x_{n-1}}(\varphi^{-1}(x))\|},$$

je jednotkový normálový vektor k ploše M, přičemž

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(t) = \Big(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}(t), \dots, \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_i}(t)\Big).$$

Zobrazení ν je spojité na jisté otevřené množině v M obsahující x.

13.2.3. Orientace ploch.

13.2.13. Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}, n > 1$, a $M \subset \mathbb{R}^n$ je $(n-1)$-plocha. **Orientací** M rozumíme spojité zobrazení $\nu\colon M \to \mathbb{R}^n$ takové, že $\nu(x) \in T_x(M)^\perp$ a $\|\nu(x)\| = 1$ pro každé $x \in M$. Pokud pro M existuje orientace ν, pak říkáme, že M je **orientovatelná plocha**, dvojici (M, ν) pak nazýváme **orientovanou plochou**.

13.2.14. Poznámka. Zobrazení ν je spojité pole jednotkových normálových vektorů.

13.2.15. Příklad. Pro plochu $M = \{0\} \times (0,1)^2$ nalezněte nějakou její orientaci.

Řešení. Stačí položit $\nu(x) = (1, 0, 0)$, $x \in M$. ♣

13.2.16. Příklad. Pro plochu $\mathbb{S}_2$ nalezněte nějakou její orientaci.

Řešení. Stačí položit $\nu(x) = x$, $x \in \mathbb{S}_2$. ♣

13.2.17. Příklad. Möbiova páska[3] je množina $M \subset \mathbb{R}^3$ splňující $M = \varphi(G)$, kde $G = (0, \frac{1}{2}) \times \mathbb{R}$ a $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^3$ je definováno předpisem

$$\varphi(p, \alpha) = \big[\cos(\alpha) + p\cos(\tfrac{\alpha}{2})\cos(\alpha), \sin(\alpha) + p\cos(\tfrac{\alpha}{2})\sin(\alpha), p\sin(\tfrac{\alpha}{2})\big].$$

Ukažte, že Möbiova páska je 2-plocha, která není orientovatelná.

Řešení. Totiž, kdyby $\boldsymbol{\nu}$ byla orientace M, ze spojitosti bychom dostali

$$\boldsymbol{\nu}(\Phi(t)) = \frac{\mathbf{J}\Phi(t)}{|\mathbf{J}\Phi(t)|}, \qquad t \in G,$$

nebo

$$\boldsymbol{\nu}(\Phi(t)) = -\frac{\mathbf{J}\Phi(t)}{|\mathbf{J}\Phi(t)|}, \qquad t \in G.$$

Ale

$$\mathbf{J}\Phi((0,0)) = -\mathbf{J}\Phi(0, 2\pi),$$

to je spor. ♣

[3] August Ferdinand Möbius (1790–1868)

13.2.18. Lemma. Nechť $n \in \mathbb{N}, n > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $z \in H(\Omega)$.

(R) Nechť existuje okolí U bodu z a **rozhraničující** funkce $h\colon U \to \mathbb{R}$ taková, že $h \in \mathcal{C}^1(U)$, $\nabla h(z) \neq \boldsymbol{o}$ a $U \cap \Omega = \{x \in U;\ h(x) < 0\}$.

Potom existuje okolí $V \subset U$ bodu z takové, že $V \cap H(\Omega)$ je $(n-1)$-plocha. Vektor $\nu_\Omega(z) = \frac{1}{\|\nabla h(z)\|}\nabla h(z)$ je jednotkový normálový vektor v bodě z k $V \cap H(\Omega)$ a nezávisí na volbě rozhraničující funkce h.

Důkaz. Platí $h(z) \geq 0$, neboť $z \notin \Omega$. Bod z je prvkem hranice Ω, a proto můžeme nalézt posloupnost $\{z^j\}$ prvků množiny Ω, která konverguje k z. Pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí $h(z^j) < 0$, a proto dostáváme $h(z) \leq 0$. Máme tedy $h(z) = 0$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $\frac{\partial h}{\partial x_n}(z) \neq 0$. Použijeme větu Větu 10.4.1 o implicitní funkci. Funkce h splňuje

- $h(z) = 0$,
- $h \in \mathcal{C}^1(U)$,
- $\frac{\partial h}{\partial x_n}(z) \neq 0$.

Nalezneme okolí W bodu $[z_1, \dots, z_{n-1}]$, okolí H bodu z_n a funkci $\varphi\colon W \to H$ takovou, že

- $\varphi(z_1, \dots, z_{n-1}) = z_n$,
- $\varphi \in \mathcal{C}^1(W)$,
- $\{x \in \mathbb{R}^n;\ h(x) = 0\} \cap (W \times H) = \operatorname{graf} \varphi$,
- $W \times H \subset U$.

Nyní ověříme rovnost $\operatorname{graf}\varphi = H(\Omega) \cap (W \times H)$. Inkluze $\operatorname{graf}\varphi \subset W \times H$ zřejmě platí. Vezměme $w = (y, \varphi(y)) \in \operatorname{graf}\varphi$. Potom $w \notin \Omega$, neboť $h(w) = 0$. Podle **??** nalezneme $\delta > 0$ takové, že $h(w + t\nabla h(w)) < h(w)$ pro každé $t \in (-\delta, 0)$. Odtud plyne $h(w + t\nabla h(w)) < 0$ pro každé $t \in (-\delta, 0)$, a tedy $h(w + t\nabla h(w)) \in \Omega$ pro každé $t \in (-\delta, 0)$. Odtud plyne $w \in H(\Omega)$.

Nyní vezměme $w \in H(\Omega) \cap (W \times H)$. Potom platí $h(w) \leq 0$, neboť $w \notin \Omega$. Dále nalezneme posloupnost $\{w^j\}$ prvků množiny Ω konvergující k w a splňující $h(w^j) < 0$ pro každé $j \in \mathbb{N}$. Odtud plyne $h(w) \leq 0$. Dohromady tedy máme $h(w) = 0$, takže $w \in \operatorname{graf}\varphi$. Tím je rovnost dokázána.

Položme $\psi(y) = (y, \varphi(y))$, $y \in W$. Platí

- $\psi \in \mathcal{C}^1(W)$,
- $\psi(W) = \operatorname{graf}\varphi = H(\Omega) \cap (W \times H)$,
- $\operatorname{rank}\psi'(y) = n - 1, y \in W$,
- $\psi^{-1}(w) = \pi(w)$.

Podle 13.2.2 dostáváme, že $\psi(W)$ je $(n-1)$-plocha. Zvolme okolí V bodu z tak, aby $V \subset W \times H$. Potom $\psi(W) \cap V = H(\Omega) \cap V$ je $(n-1)$-plocha.

Ortogonalita $\nu_\Omega(z)$. Pro každé $y \in W$ platí $h(y, \varphi(y)) = 0$. Derivujeme-li funkci $y \mapsto h(y, \varphi(y))$ podle i-té proměnné, dostaneme

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(y, \varphi(y)) + \frac{\partial h}{\partial x_n}(y, \varphi(y))\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(y) = \langle \nabla h(y, \varphi(y)), \psi'(y, \varphi(y))(\boldsymbol{e}^i)\rangle = 0.$$

Pro bod z tedy platí $\nabla h(z) \in T_z(\psi(W) \cap V)^{\perp}$.

Jednoznačnost $\nu_\Omega(z) = 0$. Předpokládejme, že $\tilde{h}$ je rozhraničující funkce. Podle předchozího je $\nabla\tilde{h}(z) \in T_z(\psi(W) \cap V)^{\perp}$. Dimenze prostoru $T_z(\psi(W) \cap V)$ je $n-1$, a proto ortogonální doplněk $T_z(\psi(W) \cap V)^{\perp}$ má dimenzi rovnou 1. Proto existuje $\alpha \in \mathbb{R}$ takové, že $\nabla h(z) = \alpha\nabla\tilde{h}(z)$. Díky 13.2.2 dostáváme $\alpha > 0$, a proto platí

$$\frac{\nabla h(z)}{\|\nabla h(z)\|} = \frac{\nabla\tilde{h}(z)}{\|\nabla\tilde{h}(z)\|}.$$

■

13.2.19. Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}, n > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $z \in H(\Omega)$. Řekneme, že bod z je **regulárním bodem** hranice Ω, pokud je splněna podmínka (R) z Lemmatu 13.2.18 pro Ω a z. Vektor $\nu_\Omega(z)$ nazýváme **vnějším jednotkovým normálovým vektorem** k Ω v bodě z. Množinu všech regulárních bodů hranice Ω značíme $H_*(\Omega)$.

13.2.20. Věta. Nechť $n \in \mathbb{N}, n > 1$, a $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná omezená otevřená množina. Pokud $H_*(\Omega) \neq \emptyset$, pak $H_*(\Omega)$ je $(n-1)$-plocha orientovaná normálovým polem ν_Ω.

13.2.21. Příklad (koule a sféra)**.** Nechť $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3;\ \|x\| < 1\}$. Potom $\mathbb{S}_2 = H(\Omega)$. Rozhraničující funkce v bodě $x \in \mathbb{S}_2$ je $h(x) = \|x\|^2 - 1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$, tedy $\nabla h(x) = 2x$ a $\nu_\Omega(x) = x$. Každý bod $\mathbb{S}_2$ je regulárním bodem $H(\Omega)$.

13.2.22. Příklad (čtverec)**.** Nechť $\Omega = (0,1)^2 \subset \mathbb{R}^2$. Hranice Ω je sjednocením čtyř úseček („stran“), jejichž relativní vnitřky vzhledem k $\partial\Omega$ tvoří regulární část hranice. Nechť například $x = [1, x_2] \in \{1\} \times (0,1)$. Rozhraničující funkce na $(0,2) \times (0,1)$ je $h(x) = x_1 - 1$. Normála v bodě $x = [1, x_2]$ je $\nu_\Omega(x) = e^1 = [1,0]$. Ve vrcholech čtverce Ω neexistuje vnější normála, ale ty tvoří 1-nulovou množinu.

13.2.23. Příklad (krychle)**.** Hranici krychle $\Omega = (0,1)^3$ tvoří sjednocení šesti čtverců („stěn“), jejichž relativní vnitřky vzhledem k $\partial\Omega$ tvoří regulární část hranice. Do regulární části nepatří vrcholy a hrany, ale ty tvoří 2-nulovou množinu. Nechť například $x \in (0,1) \times \{0\} \times (0,1)$. Rozhraničující funkce je $h(x) = -x_2$, $x \in (0,1) \times (-1,1) \times (0,1)$, tedy $\nu_\Omega(x) = -e^2 = [0,-1,0]$ pro takové x.

13.2.24. Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je 1-plocha. **Orientací** M rozumíme spojité zobrazení $\tau\colon M \to \mathbb{R}^n$ takové, že $\tau(x) \in T_x(M)$ a $\|\tau(x)\| = 1$ pro každé $x \in M$.

13.2.4. Křivky.

13.2.25. Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

(a) Řekneme, že zobrazení $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ je **(parametrická) křivka**, jestliže je spojité.

(b) Řekneme, že parametrická křivka $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ je **po částech regulární**, pokud existuje dělení $\{t_i\}_{i=0}^p$ intervalu $[a,b]$ takové, že
- c je třídy $\mathcal{C}^1$ na $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \ldots, p$,

- $\forall t \in [a,b] \setminus \{t_0, \dots, t_p\}\colon c'(t) \neq 0.$

(c) Řekneme, že křivka $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ je **jednoduchá** a **uzavřená**, jestliže $c|_{[a,b)}$ je prosté a $c(a) = c(b)$.

Navzdory zdánlivé zřejmosti je následující věta hlubokým výsledkem o topologii roviny. Důkaz této věty zde uvádět nebudeme, je možné ho nalézt například v [**?**].

13.2.26. Věta (Jordan[4]). Nechť $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ je jednoduchá uzavřená křivka. Pak existují disjunktní otevřené souvislé množiny $\operatorname{Int} c$ a $\operatorname{Ext} c$ takové, že $\operatorname{Int} c$ je omezená a $\operatorname{Ext} c$ je neomezená a platí $\mathbb{R}^2 = \operatorname{Int} c \cup \operatorname{Ext} c \cup c\big([a,b]\big)$. Navíc platí $H(\operatorname{Int} c) = H(\operatorname{Ext} c) = c\big([a,b]\big)$.

13.2.27. Věta. Nechť $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ je po částech regulární jednoduchá uzavřená křivka. Potom všechny body množiny $H(\operatorname{Int} c)$ až na konečně mnoho jsou regulárními body $H(\operatorname{Int} c)$.

Důkaz. Nechť $x \in H(\operatorname{Int} c)$ je takový bod, že existuje $\delta > 0$ a $t_0 \in (a,b)$ takové, že $c(t_0) = x$, c' je spojité na $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ a $c'(t_0) \neq 0$. Takový je každý bod z $H(\operatorname{Int} c)$ vyjma konečně mnoha bodů, neboť podle Jordanovy věty máme $H(\operatorname{Int} c) = c([a,b])$ a c je po částech regulární. Pro naše x můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $c_1'(t_0) \neq 0$. Potom existuje okolí $U \subset (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ bodu t_0 takové, že c_1 je difeomorfismus na U. Označme $V = c_1(U)$. Položme $\psi(z) = c_2 \circ c_1^{-1}(z), z \in V$. Potom pro každé $z \in V$ existuje $t \in U$ takové, že $c_1(t) = z$. pak máme $[z, \psi(z)] = [c_1(t), c_2 \circ c_1^{-1}(c_1(t))] = [c_1(t), c_2(t)] = c(t)$. Máme tedy graf $\psi \subset c(U)$. Pro $t \in U$ pak máme

$$c(t) = [\underbrace{c_1(t)}_{\in V}, c_2(t)] = [c_1(t), c_2 \circ c_1^{-1}(\underbrace{c_1(t)}_{\in V})] = [c_1(t), \psi(c_1(t))] \in \operatorname{graf} \psi.$$

Máme tedy graf $\psi = c(U)$. Množina $F = [a,b] \setminus U$ je kompaktní a neprázdná, a tedy $c(F)$ je kompaktní. Platí $x \notin c(F)$ díky jednoduchosti a uzavřenosti c. Množina $c(F)$ má tedy od bodu $x = c(t_0)$ kladnou vzdálenost. Existují tudíž okolí W bodu $c_1(t_0)$ a okolí W bodu $c_2(t_0)$ taková, že $(W \times F) \cap c(F) = \emptyset$. Platí tedy

$$(W \times H) \cap c([a,b]) = (W \times H) \cap c(U) = (W \times H) \cap \operatorname{graf} \psi.$$

Množina $P = \{[x,y] \in W \times H;\ y < \psi(x)\}$ je otevřená a souvislá. Souvislost vyplývá z křivkové souvislosti. Podobně množina $N = \{[x,y] \in W \times H;\ y > \psi(x)\}$ je otevřená a souvislá. Poněvadž

$$H(\operatorname{Int} c) = H(\operatorname{Ext} c) = c([a,b]), \tag{13.21}$$

máme $P \cap (\operatorname{Int} c \cup \operatorname{Ext} c) \neq \emptyset$ a $N \cap (\operatorname{Int} c \cup \operatorname{Ext} c) \neq \emptyset$. Souvislost P implikuje, že platí buď $P \subset \operatorname{Int} c$ nebo $P \subset \operatorname{Ext} c$. Podobně platí buď $N \subset \operatorname{Int} c$ nebo $N \subset \operatorname{Ext} c$. Z (13.21) pak plyne, že platí buď

$$P \subset \operatorname{Int} c \text{ a } N \subset \operatorname{Ext} c, \tag{13.22}$$

[4]Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922)

nebo

$$P \subset \operatorname{Ext} c \text{ a } N \subset \operatorname{Int} c. \tag{13.23}$$

Předpokládejme, že nastane případ (13.22). Potom položme

$$h(u,v) = -\psi(u) + v, \quad [u,v] \in W \times H.$$

Platí $h \in \mathcal{C}^1(W \times H)$, $\nabla h(u,v) = (-\psi'(u), 1) \neq 0$ a

$$\{[u,v] \in W \times H;\ h(u,v) < 0\} = P = \operatorname{Int} c \cap (W \times H).$$

Pokud nastane případ (13.23), pak postupujeme obdobně. ■

13.2.28. Příklad. Nechť $G = (-1, 2\pi)$ a $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^2$ je definováno předpisem

$$\varphi(t) = \begin{cases} [1,t], & -1 < t \leq 0, \\ [\cos t, \sin t], & 0 < t < 2\pi. \end{cases}$$

Ukažte, že potom φ je prosté a regulární na G, ale není otevřené vzhledem k $\varphi(G)$.

Řešení. Inverzní zobrazení není spojité v bodě $(1,0)$; na každém okolí tohoto bodu nabývá hodnot blízkých 2π, ale funkční hodnota inverzního zobrazení je 0. ♣

13.2.29. Pojmy **skalární pole** a **vektorové pole** se používají jako synonyma pro skalární, resp. vektorovou funkci. Jejich používání v některých situacích je dáno zvyklostmi.

13.3. Gaussova, Greenova a Stokesova věta

13.3.1. Gaussova věta.

13.3.1. Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je $(n-1)$-plocha orientovaná normálovým polem ν a $f : M \to \mathbb{R}^n$. **Tok vektorového pole** f orientovanou plochou (M, ν) definujeme jako

$$\int_M \langle f(y), \nu(y) \rangle \, \mathrm{d}\, \mathcal{H}^{n-1}(y),$$

pokud integrál konverguje.

13.3.2. Definice. Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f : U \to \mathbb{R}^n$ je zobrazení třídy $\mathcal{C}^1$. Pro $x \in U$ definujeme **divergenci vektorového pole** f v bodě $x \in U$ předpisem

$$\operatorname{div} f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x).$$

13.3.3. Věta (Gaussova věta o divergenci)**.** Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená otevřená neprázdná množina, $\mathcal{H}^{n-1}\big(H(\Omega)\big) < \infty$, $\mathcal{H}^{n-1}\big(H(\Omega) \setminus H_*(\Omega)\big) = 0$ a f je vektorové pole z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$, které je třídy $\mathcal{C}^1$ na otevřené množině obsahující $\overline{\Omega}$. Pak platí

$$\int_{H(\Omega)} \big\langle f(y), \nu_\Omega(y) \big\rangle \, \mathrm{d}\, \mathcal{H}^{n-1}(y) = \int_\Omega \operatorname{div} f(x) \, \mathrm{d}\lambda^n(x).$$

13.3.4 (strategie důkazu Gaussovy věty)**.** Důkaz Gaussovy věty patří k nejnáročnějším důkazům těchto skript. Nyní neformálně přiblížíme jeho základní myšlenky. Vlastnímu důkazu na straně 845 předchází série lemmat. Lemma 13.3.6 říká, že konstantní funkci na $\mathbb{R}^n$ můžeme zapsat jako součet spočetně mnoha funkcí, které kromě jiných užitečných vlastností mají nosiče s malým diametrem. Toto lemma nám umožní zabývat se v důkazu Gaussovy věty pouze vektorovými poli, která mají také nosiče s malými diametry. Lemma 13.3.7 ukazuje, že k danému nenulovému vektoru $v \in \mathbb{R}^n$ můžeme nalézt novou ortonormální bázi v níž budou všechny souřadnice vektoru v kladné. Toto technické lemma využijeme v důkazu Lemmatu 13.3.12. Lemma 13.3.9 ukazuje, že otevřenou množinu v okolí regulárního bodu můžeme popsat jako podgraf vhodné funkce. Lemma 13.3.11 ukazuje jak se transformují integrály z Gaussovy věty, pokud množinu Ω transformujeme pomocí lineárního izometrického zobrazení. Lemma 13.3.12 je již důkazem Gaussovy věty pro vektorová pole s nosičem malého diametru a v blízkosti bodu, který leží uvnitř Ω nebo je regulárním hraničním bodem Ω. Důkaz se opírá o Newtonovu-Leibnizovu formuli a Fubiniovu větu. Lemma 13.3.13 odvozuje Gaussovu větu v obecnější situaci, kde se nosič vektorového pole pouze vyhýbá neregulárním bodům hranice. Pokud bychom uvažovali množiny s regulární hranicí, byla by již Gaussova věta dokázána. V naší formulaci věty však připouštíme i množiny s neregulární body hranice. Lemma 13.3.14 poskytuje nástroj, jak se pomocí vhodných aproximací uvažovaného vektorového pole vypořádat s neregulárními body. Pak již následuje vlastní důkaz Gaussovy věty.

13.3.5. Poznámka. Gaussova věta o divergenci se také někdy v literatuře nazývá Gaussova-Greenova[5] věta nebo Ostrogradského[6] věta.

13.3.6. Lemma (rozklad jednotky)**.** Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Pak existují funkce $\omega_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, takové, že pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí

- (a) ω_j je nezáporná,
- (b) ω_j je třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$,
- (c) $\operatorname{diam} \operatorname{spt} \omega_j < \varepsilon$,

a pro každé $x \in \mathbb{R}^n$

- (d) $\sum_{j=1}^{\infty} \omega_j(x) = 1$,
- (e) existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu x takové, že množina $\{j \in \mathbb{N};\ \operatorname{spt} \omega_j \cap U \neq \emptyset\}$ je konečná.

Důkaz. Nechť $\eta\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ je $\mathcal{C}^1$-funkce taková, že

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0, \\ 1 & \text{pro } x \geq 1. \end{cases} \tag{13.24}$$

[5]George Green (1793–1841)

[6]Michail Vasiljevič Ostrogradski (1801–1862)

Například lze volit

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \le 0, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\bigl(\pi(x - \frac{1}{2})\bigr) & \text{pro } x \in (0, 1), \\ 1 & \text{pro } x \ge 1. \end{cases} \tag{13.25}$$

Nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{2\sqrt{n}}{m} < \varepsilon$. Definujme

$$\xi_k(t) = \eta\bigl(m(t - \tfrac{k}{m})\bigr) - \eta\bigl(m(t - \tfrac{k+1}{m})\bigr), \qquad t \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Platí $\operatorname{spt}\xi_k \subset [\frac{k}{m}, \frac{k+2}{m}]$ a $\xi_k(\mathbb{R}) \subset [0, 1]$. Nechť $t \in \mathbb{R}$. K němu nalezneme $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $t \in [\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m})$. Potom platí

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \xi_j(t) = \xi_{k-1}(t) + \xi_k(t) = \eta\bigl(m(t - \tfrac{k-1}{m})\bigr) - \eta\bigl(m(t - \tfrac{k+1}{m})\bigr) = 1 - 0 = 1. \tag{13.26}$$

Pro $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ definujme

$$\psi_\alpha(x_1, \dots, x_n) = \xi_{\alpha_1}(x_1) \cdots \xi_{\alpha_n}(x_n), \qquad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Množina $\mathbb{Z}^n$ je spočetná, a proto můžeme uspořádat funkce $\psi_\alpha, \alpha \in \mathbb{Z}^n$, do posloupnosti $\{\omega_j\}_{j=1}^{\infty}$. Vlastnosti (a) a (b) ze znění dokazovaného lemmatu jsou zřejmě splněny. Pro každé $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ máme

$$\operatorname{spt}\psi_\alpha \subset \prod_{i=1}^{n} \Bigl[\frac{\alpha_i}{m}, \frac{\alpha_i + 2}{m}\Bigr]. \tag{13.27}$$

Potom odhadneme

$$\operatorname{diam}\operatorname{spt}\psi_\alpha \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \bigl(\tfrac{2}{m}\bigr)^2} = \frac{2\sqrt{n}}{m} < \varepsilon.$$

Tím jsme ověřili podmínku (c).

Dále pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ opakovaným použitím (13.26) obdržíme

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} \omega_j(x) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \psi_\alpha(x) = \sum_{\alpha_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{\alpha_n=-\infty}^{\infty} \xi_{\alpha_1}(x_1) \cdots \xi_{\alpha_n}(x_n) \\
&= \sum_{\alpha_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{\alpha_{n-1}=-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{\alpha_n=-\infty}^{\infty} \xi_{\alpha_1}(x_1) \cdots \xi_{\alpha_n}(x_n) \Big) \\
&= \sum_{\alpha_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{\alpha_{n-1}=-\infty}^{\infty} \Big(\xi_{\alpha_1}(x_1) \cdots \xi_{\alpha_{n-1}}(x_{n-1}) \cdot \sum_{\alpha_n=-\infty}^{\infty} \xi_{\alpha_n}(x_n) \Big) \\
&= \sum_{\alpha_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{\alpha_{n-1}=-\infty}^{\infty} \xi_{\alpha_1}(x_1) \cdots \xi_{\alpha_{n-1}}(x_{n-1}) \cdot 1 \\
&= \sum_{\alpha_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{\alpha_{n-2}=-\infty}^{\infty} \xi_{\alpha_1}(x_1) \cdots \xi_{\alpha_{n-2}}(x_{n-2}) \\
&\;\vdots \\
&= \sum_{\alpha_1=-\infty}^{\infty} \xi_{\alpha_1}(x_1) = 1
\end{aligned}$$

Tím je ověřena podmínka (d). Podmínka (e) je splněna díky (13.27). ■

13.3.7. Lemma. Nechť V je reálný unitární prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$, $v \in V$ a $v \neq 0$. Potom existují vektory $u^1, \dots, u^n \in V$, které tvoří ortonormální bázi V a pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí $\langle v, u^i \rangle > 0$.

Důkaz. Máme-li unitární prostor V takový, že $\dim V = 1$, a $v \in V, v \neq 0$, pak stačí položit $u^1 = \frac{1}{\|v\|} v$. Mějme nyní V dimenze $n > 1$ a předpokládejme, že tvrzení platí pro každý unitární prostor dimenze k, kde $1 \leq k < n$. Pro $v \in V, v \neq 0$, nalezneme $u^1 \in V$ takové, že $\|u^1\| = 1, \langle v, u^1 \rangle > 0$ a $u^1 \notin \operatorname{lin}\{v\}$. Označme $W = \operatorname{lin}\{u^1\}^\perp$ a jako w označme ortogonální projekci v do W, tj., $w = v - \langle v, u^1 \rangle u^1$. Platí $w \neq 0$, neboť $u^1 \notin \operatorname{lin}\{v\}$. Nyní aplikujeme indukční předpoklad na W a w. Obdržíme ortonormální bázi $u^2, \dots, u^n$ prostoru W. Potom množina $\{u^1, u^2, \dots, u^n\}$ je ortonormální bází V a $\langle v, u^i \rangle = \langle w, u^i \rangle > 0$, $i = 2, \dots, n$. ■

13.3.8. Označení. Nechť $n \in \mathbb{N}, n > 1, i \in \{1, \dots, n\}$. Potom definujeme zobrazení $\psi^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ předpisem

$$\psi^i(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

13.3.9. Lemma. Nechť $n \in \mathbb{N}, n > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $z \in H(\Omega)$ je regulární bod hranice Ω, $i \in \{1, \dots, n\}$ a $\nu_\Omega(z)_i > 0$. Potom existuje otevřená množina $W \subset \mathbb{R}^{n-1}$ obsahující bod $z^* = \psi^i(z)$, otevřená množina $H \subset \mathbb{R}$ obsahující bod z_i a funkce $\varphi \colon W \to H$ taková, že $\varphi \in \mathcal{C}^1(W)$ a

$$\{x \in \mathbb{R}^n;\ \psi^i(x) \in W, x_i \in H, x_i < \varphi \circ \psi_i(x)\} = \{x \in \Omega;\ \psi_i(x) \in W, x_i \in H\}.$$

Důkaz. Důkaz provedeme pro $i = n$. Ostatní případy lze provést obdobně. Nechť $h\colon U \to \mathbb{R}$ je rozhraničující funkce pro z a Ω, tj.

- $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $z \in U$,
- $h \in \mathcal{C}^1(W)$, $\frac{\partial h}{\partial x_n}(z) > 0$,
- $\{x \in U;\ h(x) < 0\} = U \cap \Omega$.

Použijeme větu o implicitních funkcích (Věta 10.4.3) na rovnici

$$h(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = 0.$$

Stejně jako v důkazu Lemmatu 13.2.18 nalezneme okolí $W \subset \mathbb{R}^{n-1}$ bodu z^*, okolí $H \subset \mathbb{R}$ bodu z_n a funkci $\varphi\colon W \to H$ takovou, že

- $\varphi(z^*) = z_n$,
- $\varphi \in \mathcal{C}^1(W)$,
- $\{x \in \mathbb{R}^n;\ h(x) = 0\} \cap (W \times H) = \operatorname{graf} \varphi$,
- $W \times H \subset U$,
- $\frac{\partial h}{\partial x_n}(x) > 0$ pro každé $x \in W \times H$.

Dokážeme rovnost

$$\{[u, y] \in W \times H;\ y < \varphi(u)\} = \Omega \times (W \times H).$$

Pokud $[u, y] \in W \times H$, potom

$$h(u, \varphi(u)) - h(u, y) = \frac{\partial h}{\partial x_n}(u, \xi) \cdot (\varphi(u) - y)$$

pro $\xi \in [\varphi(u), y]$. Poněvadž $h(u, \varphi(u)) = 0$ a $\frac{\partial h}{\partial x_n}(u, \xi) > 0$, máme $h(u, y) < 0$ právě tehdy, když $y < \varphi(u)$. Platí tedy

$$\begin{aligned}\{[u, y] \in W \times H;\ y < \varphi(u)\} &= \{[u, y] \in W \times H;\ h(y, u) < 0\} \\ &= (U \cap \Omega) \cap (W \times H) = \Omega \cap (W \times H).\end{aligned}$$

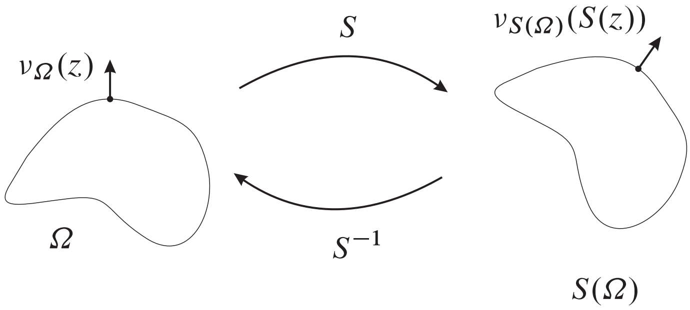
■

13.3.10. Stopou matice $A = (a_{ij}) \in M(n \times n)$ rozumíme výraz $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Tento pojem použijeme v důkazu následujícího tvrzení, přičemž využijeme rovnost $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, která platí pro libovolné matice $A, B \in M(n \times n)$ (vizte [**4**, 4.25, 4.26]).

13.3.11. Lemma. Nechť Ω a f jsou jako ve Větě 13.3.3 a $S\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je lineární izometrie. Potom pro každý regulární bod z hranice Ω je bod $S(z)$ regulárním bodem hranice $S(\Omega)$ a platí $\nu_{S(\Omega)}(S(z)) = S(\nu_\Omega(z))$. Dále platí

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x)\, \mathrm{d}\lambda^n(x) = \int_{S(\Omega)} \operatorname{div}(S \circ f \circ S^{-1})(\tilde{x})\, \mathrm{d}\lambda^n(\tilde{x}),$$

$$\begin{aligned}&\int_{H(\Omega)} \big\langle f(y), \nu_\Omega(y)\big\rangle\, \mathrm{d}\,\mathcal{H}^{n-1}(y) \\ &\qquad = \int_{H(S(\Omega))} \big\langle S \circ f \circ S^{-1}(\tilde{y}), \nu_{S(\Omega)}(\tilde{y})\big\rangle\, \mathrm{d}\,\mathcal{H}^{n-1}(\tilde{y}).\end{aligned}$$



Důkaz. Nechť $h\colon U \to \mathbb{R}$ je rozhraničující funkce pro z a Ω. Potom $\tilde{h} = h \circ S^{-1}$ je rozhraničující funkce pro bod $S(z)$ a množinu $S(\Omega)$. Platí

$$\tilde{h}'(S(z)) = (h \circ S^{-1})'(S(z)) = h'(z) \circ S^{-1}.$$

Pak pro každé $u \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\begin{aligned}\langle S(\nabla h(z)), u\rangle &= \langle \nabla h(z), S^{-1}(u)\rangle = h'(z)(S^{-1}(u))\\ &= h'(z) \circ S^{-1}(u) = \tilde{h}'(S(z))(u) = \langle \nabla \tilde{h}(S(z)), u\rangle.\end{aligned}$$

Odtud plyne rovnost $S(\nabla h(z)) = \nabla \tilde{h}(S(z))$, takže také $S(\nu_\Omega(z)) = \nu_{S(\Omega)}(S(z))$. Počítejme

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(S \circ f \circ S^{-1})(\tilde{x}) &= \operatorname{tr}\big(S \circ f'(S^{-1}(\tilde{x})) \circ S^{-1}\big) = \operatorname{tr}\big(S^{-1} \circ S \circ f'(S^{-1}(\tilde{x})\big)\\ &= \operatorname{tr}\big(f'(S^{-1}(\tilde{x}))\big) = \operatorname{div} f(S^{-1}(\tilde{x})).\end{aligned}$$

Poněvadž S je izometrie, platí $\operatorname{vol} S = 1$. Odtud a z předchozí rovnosti plyne

$$\begin{aligned}&\int_{S(\Omega)} \operatorname{div}(S \circ f \circ S^{-1})(\tilde{x}) \, \mathrm{d}\lambda^n(\tilde{x}) = \int_{S(\Omega)} \operatorname{div} f(S^{-1}(\tilde{x})) \, \mathrm{d}\lambda^n(\tilde{x})\\ &= \int_\Omega \operatorname{div} f(x) \operatorname{vol} S \, \mathrm{d}\lambda^n(x) = \int_\Omega \operatorname{div} f(x) \, \mathrm{d}\lambda^n(x).\end{aligned}$$

Dále platí $H\big(S(\Omega)\big) = S\big(H(\Omega)\big)$ a

$$\begin{aligned}&\int_{H(S(\Omega))} \langle S \circ f \circ S^{-1}(\tilde{y}), \nu_{S(\Omega)}(\tilde{y})\rangle \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(\tilde{y})\\ &= \int_{S(H(\Omega))} \langle S \circ f \circ S^{-1}(\tilde{y}), S(\nu_\Omega(S^{-1}(\tilde{y})))\rangle \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(\tilde{y}) \qquad (\text{rovnost } H(S(\Omega)) = S(H(\Omega)))\\ &= \int_{S(\Omega)} \langle S \circ f(y), S(\nu_\Omega(y))\rangle \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(y)\\ &= \int_{S(\Omega)} \langle f(y), \nu_\Omega(y)\rangle \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(y).\end{aligned}$$

■

13.3.12. Lemma. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená omezená množina a $z \in H_*(\Omega) \cup \Omega$. Potom existuje otevřená množina $U \subset \mathbb{R}^n$ obsahující z taková, že pro každé vektorové pole f z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$, které je třídy $\mathcal{C}^1$ na otevřené množině obsahující $\overline{\Omega}$ a $\operatorname{spt} f \subset U$, platí

$$\int_{H(\Omega)} \big\langle f(y), \nu_\Omega(y)\big\rangle \, \mathrm{d}\,\mathcal{H}^{n-1}(y) = \int_\Omega \operatorname{div} f(x) \, \mathrm{d}\lambda^n(x).$$

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $z \in H_*(\Omega)$. Příslušnou rozhraničující funkci označme jako h. Díky Lemmatům 13.3.7 a 13.3.11 můžeme předpokládat, že $\nu_\Omega(z)_i > 0$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$. Za S stačí zvolit zobrazení splňující $S^{-1}(e^i) = u^i$, kde vektory $u^1, \dots, u^n$ tvoří ortonormální bázi a $\langle \nu_\Omega(z), u^i\rangle > 0, i = 1, \dots, n$.

Podle Lemmatu 13.3.9 nalezneme pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ množiny W_i, H_i a zobrazení $\varphi_i \colon W_i \to H_i$. Označme

$$G_i = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \psi_i(x) \in W_i, x_i \in H_i\}, \qquad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Položme $U = \bigcap_{i=1}^n G_i$. Nechť f je příslušné vektorové pole splňující $\operatorname{spt} f \subset U$. Ukážeme, že platí

$$\int_{H(\Omega)} f_i(y)\nu_\Omega(z)_i \, \mathrm{d}\,\mathcal{H}^{n-1}(y) = \int_\Omega \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) \, \mathrm{d}\lambda^n(x), \qquad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Odtud již plyne dokazovaný vztah. Zvolme opět $i = n$. Ostatní případy lze dokázat obdobně. Víme, že platí

(1) $\{x \in W_n \times H_n;\ x_n < \varphi_n(\psi_n(x))\} = \Omega \cap (W_n \times H_n)$,
(2) $\operatorname{graf} \varphi_n = H(\Omega) \cap (W_n \times H_n)$,
(3) $h\big(w, \varphi_n(w)\big) = 0$ pro každé $w \in W_n$,
(4) $\frac{\partial h}{\partial x_n}\big(w, \varphi_n(w)\big) > 0$ pro každé $w \in W_n$.

Výpočet pravé strany. Počítejme

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \, \mathrm{d}\lambda^n(x) &= \int_{(W_n \times \mathbb{R}) \cap \Omega} \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \, \mathrm{d}\lambda^n(x) = \int_{W_n} \int_{-\infty}^{\varphi_n(w)} \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(w, t) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\lambda^{n-1}(w) \\ &= \int_{W_n} f_n(w, \varphi_n(w)) \, \mathrm{d}\lambda^{n-1}(w).\end{aligned}$$

Výpočet levé strany. Definujme $\psi \colon W_n \to \mathbb{R}^n$ předpisem $\psi(w) = [w, \varphi_n(w)]$. Počítejme

$$\begin{aligned}\int_{H(\Omega)} f_n(y)\nu_\Omega(y)_n \, \mathrm{d}\,\mathcal{H}^{n-1}(y) &= \int_{H(\Omega) \cap (W_n \times H_n)} f_n(y)\nu_\Omega(y)_n \, \mathrm{d}\,\mathcal{H}^{n-1}(y) \\ &= \int_{W_n} f_n(\psi(w))\nu_\Omega(\psi(w))_n \cdot \operatorname{vol} \psi'(n) \, \mathrm{d}\lambda^{n-1}(w).\end{aligned} \tag{13.28}$$

Pro $w \in W_n$ platí

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i}(w) = -\frac{\frac{\partial h}{\partial x_i}(\psi(w))}{\frac{\partial h}{\partial x_n}(\psi(w))}.$$

Potom máme

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}(w)\times\cdots\times\frac{\partial\psi}{\partial x_{n-1}}(w)=\begin{vmatrix} e^1 & 1 & 0 & \dots & 0\\ e^2 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ e^n & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1}(w) & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2}(w) & \dots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}(w)\end{vmatrix}$$

$$=\Big[(-1)^{1+1}\cdot(-1)^{n-2}\cdot\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1}(w),(-1)^{1+2}\cdot(-1)^{n-3}\cdot\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2}(w),\dots$$
$$\dots,(-1)^{1+n-1}\cdot(-1)^{n-(n-1)}\cdot\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2}(w),(-1)^{1+n}\cdot 1\Big]$$
$$=(-1)^{n-1}\left[\frac{\frac{\partial h}{\partial x_1}(\psi(w))}{\frac{\partial h}{\partial x_n}(\psi(w))},\dots,\frac{\frac{\partial h}{\partial x_{n-1}}(\psi(w))}{\frac{\partial h}{\partial x_n}(\psi(w))},1\right]$$
$$=(-1)^{n-1}\frac{1}{\frac{\partial h}{\partial x_n}(\psi(w))}\nabla h(\psi(w)).$$

Nyní budeme pokračovat ve výpočtu (13.28).

$$\int_{H(\Omega)} f_n(y)\nu_\Omega(y)_n\,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^{n-1}(y)$$
$$=\int_{W_n} f_n(\psi(w))\cdot\frac{\frac{\partial h}{\partial x_n}(\psi(w))}{\|\nabla h(\psi(w))\|}\cdot\frac{1}{\frac{\partial h}{\partial x_n}(\psi(w))}\cdot\|\nabla h(\psi(w))\|\,\mathrm{d}\lambda^{n-1}(w)$$
$$=\int_{W_n} f_n(\psi(w))\,\mathrm{d}\lambda^{n-1}(w).$$

Tím je rovnost dokázána, neboť poslední člen v předchozím výpočtu je roven poslednímu členu z výpočtu levé strany.

Předpokládejme nyní, že $z\in\Omega$. Potom položme $U=\prod_{j=1}^n I_j$, kde I_j je omezený otevřený interval, $j=1,\dots,n$, a platí $\overline{U}\subset\Omega$.

Výpočet pravé strany.

$$\int_\Omega\frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x)\,\mathrm{d}\lambda^n(x)=\int_{I_1\times\cdots\times I_n}\frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x)\,\mathrm{d}\lambda^n(x)=\int_{I_1}\cdots\int_{I_n}0\,\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n=0$$

Výpočet levé strany.

$$\int_{H(\Omega)} f_j(y)\nu_\Omega(y)_j\,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^{n-1}(y)=0$$

Tím je důkaz proveden. ■

13.3.13. Lemma. Nechť Ω a f jsou jako ve Větě 13.3.3 a $\operatorname{spt} f\cap(H(\Omega)\setminus H_*(\Omega))=\emptyset$. Potom

$$\int_{H(\Omega)}\big\langle f(y),\nu_\Omega(y)\big\rangle\,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^{n-1}(y)=\int_\Omega\operatorname{div} f(x)\,\mathrm{d}\lambda^n(x).$$

Důkaz. Označme $K = \overline{\Omega} \cap \operatorname{spt} f$. Pro každý bod $z \in K$ nalezneme podle Lemmatu 13.3.12 otevřenou množinu $U(z)$ takovou, že

- $z \in U(z)$,
- pro každé vektorové pole $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ třídy $\mathcal{C}^1$ splňující $\operatorname{spt} g \subset U(z)$ platí

$$\int_{H(\Omega)} \langle g(y), \nu_\Omega(y)\rangle \,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^{n-1}(y) = \int_\Omega \operatorname{div} g(x)\,\mathrm{d}\lambda^n(x).$$

Množina K je kompaktní, a proto můžeme nalézt body $z^1, \dots, z^k$ takové, že $K \subset U(z^1) \cup \dots \cup U(z^k)$. Potom existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $x \in K$ existuje $i \in \{1, \dots, k\}$ splňující $B(x, \varepsilon) \subset U(z^i)$. Pro toto ε nalezneme rozklad jednotky ω_j, $j \in \omega$, podle Lemmatu 13.3.6. Označme $I = \{j \in \mathbb{N};\ \operatorname{spt}\omega_j \cap K \neq \emptyset\}$. Množina I je díky kompaktnosti K a vlastnosti (e) z Lemmatu 13.3.6 konečná. Dále platí

- $\sum_{j\in I} \omega_j(x) = 1$ pro každé $x \in K$,
- pro každé $j \in I$ existuje $i \in \{1, \dots, k\}$ takové, že $\operatorname{spt}\omega_j f \subset U(z^i)$, a tedy

$$\int_{H(\Omega)} \langle \omega_j f(y), \nu_\Omega(y)\rangle \,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^{n-1}(y) = \int_\Omega \operatorname{div}(\omega_j f)(x)\,\mathrm{d}\lambda^n(x).$$

Potom platí

$$\begin{aligned}
&\int_{H(\Omega)} \langle f(y), \nu_\Omega(y)\rangle \,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^{n-1}(y) = \int_{H(\Omega)\cap K} \langle f(y), \nu_\Omega(y)\rangle \,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^{n-1}(y)\\
&= \int_{H(\Omega)\cap K} \sum_{j\in I} \langle \omega_j f(y), \nu_\Omega(y)\rangle \,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^{n-1}(y)\\
&= \sum_{j\in I} \int_{H(\Omega)\cap K} \langle \omega_j f(y), \nu_\Omega(y)\rangle \,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^{n-1}(y)\\
&= \sum_{j\in I} \int_{H(\Omega)} \langle \omega_j f(y), \nu_\Omega(y)\rangle \,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^{n-1}(y)\\
&= \sum_{j\in I} \int_\Omega \operatorname{div}(\omega_j f)(x)\,\mathrm{d}\lambda^n(x) = \int_\Omega \sum_{j\in I} \operatorname{div}(\omega_j f)(x)\,\mathrm{d}\lambda^n(x).
\end{aligned} \tag{13.29}$$

Integrand posledního integrálu můžeme pro $x \in \Omega$ upravit následujícím způsobem

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in I} \operatorname{div}(\omega_j f)(x) &= \sum_{j\in I}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(\omega_j f_i)}{\partial x_i}(x) \\
&= \sum_{j\in I}\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial\omega_j}{\partial x_i}(x) f_i(x) + \omega_j(x)\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)\Big) && \text{(derivace součinu)} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in I}\Big(\frac{\partial\omega_j}{\partial x_i}(x) f_i(x) + \omega_j(x)\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)\Big) && \text{(záměna sum)} \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in I}\frac{\partial\omega_j}{\partial x_i}(x) f_i(x)\Big) + \Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in I}\omega_j(x)\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)\Big) && \text{(rozdělení sumy)} \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\big(\sum_{j\in I}\omega_j\big)(x)\cdot f_i(x)\Big) + \Big(\sum_{i=1}^{n}\big(\sum_{j\in I}\omega_j(x)\big)\cdot\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)\Big) && \text{(linearita derivace)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} 0\cdot f_i(x) + \sum_{i=1}^{n} 1\cdot\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) = \operatorname{div} f(x).
\end{aligned}$$

V předposlední rovnosti jsme využili faktu, že $\sum_{j\in I}\omega_j(x) = 1$ pro každé $x \in K$, a faktu $\frac{\partial}{\partial x_i}\big(\sum_{j\in I}\omega_j\big)(x) = 0$ pro každé $x \in K$ a $i \in \{1,\dots,n\}$. Spojením (13.29) s předchozím výpočtem dostáváme

$$\begin{aligned}
\int_{H(\Omega)} \langle f(y), \nu_\Omega(y)\rangle \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(y) &= \int_\Omega \sum_{j\in I}\operatorname{div}(\omega_j f)(x)\,\mathrm{d}\lambda^n(x) \\
&= \int_{\Omega\cap\operatorname{spt} f}\sum_{j\in I}\operatorname{div}(\omega_j f)(x)\,\mathrm{d}\lambda^n(x) = \int_{\Omega\cap\operatorname{spt} f}\operatorname{div}(f)(x)\,\mathrm{d}\lambda^n(x) \\
&= \int_\Omega \operatorname{div}(f)(x)\,\mathrm{d}\lambda^n(x).
\end{aligned}$$

Tím je lemma dokázáno. ■

13.3.14. Lemma. Nechť $n \in \mathbb{N}, n > 1$, $N \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní a $\mathcal{H}^{n-1}(N) = 0$. Potom existují $\mathcal{C}^1$ funkce $v_m : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, $m \in \mathbb{N}$, takové, že platí:

(a) $v_m \to \chi_{\mathbb{R}^n\setminus N}$,
(b) $\int \|\nabla v_m(x)\|\,\mathrm{d}\lambda^n(x) \to 0$,
(c) pro každé $m \in \mathbb{N}$ existuje otevřená množina $G_m \subset \mathbb{R}^n$ obsahující N taková, že $v_m|_{G_m} = 0$.

Důkaz. Nalezneme $\omega : \mathbb{R} \to [0,1]$ takovou, že ω je třídy $\mathcal{C}^1$ a

$$\omega(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 1, & x \ge 2. \end{cases}$$

Označme $\eta(x) = \omega(\|x\|)$, $x \in \mathbb{R}^n$, a $c = \int \|\nabla\eta(x)\| \,\mathrm{d}\lambda^n(x)$. Zvolme $m \in \mathbb{N}$. Nalezneme množiny A_j, $j \in \mathbb{N}$, takové, že $N \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, $N \cap A_j \neq \emptyset$, $0 < \operatorname{diam} A_j \leq 2^{-m}$ a $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_m (\operatorname{diam} A_j)^{n-1} \leq 2^{-m}$. Pro každé $j \in \mathbb{N}$ nalezneme kouli $B(x_j, r_j)$ takovou, že $A_j \subset B(x_j, r_j)$ a $r_j \leq 2 \operatorname{diam} A_j$. Množina N je kompaktní, a proto existuje $p \in \mathbb{N}$ takové, že $N \subset \bigcup_{j=1}^{p} B(x_j, r_j)$. Položme

$$\eta_j(x) = \eta\Big(\tfrac{x-x^j}{r_j}\Big), \qquad v_m(x) = \prod_{j=1}^{p} \eta_j(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Potom platí

$$\frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{r_j} \cdot \frac{\partial\eta}{\partial x_i}\Big(\tfrac{x-x^j}{r_j}\Big), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dále máme

$$\frac{\partial v_m}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}(x) \prod_{k=1, k\neq j}^{p} \eta_j(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Odtud plyne

$$\Big|\frac{\partial v_m}{\partial x_i}(x)\Big| \leq \sum_{j=1}^{p} \Big|\frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}(x)\Big| \leq \sum_{j=1}^{p} \|\nabla\eta_j(x)\|,$$

$$\|\nabla v_m(x)\| \leq \sqrt{n} \sum_{j=1}^{p} \|\nabla\eta_j(x)\|.$$

Platí také

$$\int \|\nabla\eta_j(x)\| \,\mathrm{d}\lambda^n(x) = \int \|\nabla\eta(y)\| r_j^{n-1} \,\mathrm{d}\lambda^n(y) = c r_j^{n-1}.$$

Platí tedy

$$\begin{aligned}
\int \|\nabla v_m(x)\| \,\mathrm{d}\lambda^n(x) &\leq \sqrt{n} \int \sum_{j=1}^{p} \|\nabla\eta_j(x)\| \,\mathrm{d}\lambda^n(x) \\
&\leq \sqrt{n} \sum_{j=1}^{p} c r_j^{n-1} \leq \sqrt{n} \sum_{j=1}^{p} c 2^{n-1} (\operatorname{diam} A_j)^{n-1} \\
&\leq \sqrt{n} c 2^{n-1} \frac{1}{\alpha_n} 2^{-m}.
\end{aligned}$$

Odtud plyne $\int \|\nabla v_m\| \to 0$. Položme $G_m = \bigcup_{j=1}^{p} B(x^j, r_j)$. Pokud $\operatorname{dist}(x, N) > 2^{-m+3}$, pak $x \notin \bigcup_{j=1}^{p} B(x_j, 2r_j)$, a tedy $v_m(x) = 1$. Pokud $x \in G_m$, potom $v_m(x) = 0$. Odtud plyne $v_m \to \chi_{\mathbb{R}^n \setminus N}$. Vlastnosti (a)–(d) jsou snadno ověřitelné. ■

Důkaz Gaussovy věty (Věta 13.3.3). Označme $N = H(\Omega) \setminus H_*(\Omega)$. Množina N je kompaktní a $\mathcal{H}^{n-1}(N) = 0$. Nechť $\{v_m\}$ je posloupnost funkcí z předchozího lemmatu.

Položme $f^m = v_m f$. Potom f^m splňuje předpoklady Lemmatu 13.3.13, a tedy platí

$$\int_{H(\Omega)} \langle f^m(y), \nu_\Omega(y) \, \mathrm{d}\,\mathcal{H}^{n-1}(y) = \int_\Omega \operatorname{div} f^m(x) \, \mathrm{d}\lambda^n(x).$$

Platí $f^m \to f$ $\mathcal{H}^{n-1}$-s.v. Označme $K = \sup_{\overline{\Omega}} \|f\|$. Platí $K < \infty$, neboť $\overline{\Omega}$ je kompaktní a f je spojité na $\overline{\Omega}$. Pro každé $y \in H(\Omega)$ a $m \in \mathbb{N}$ platí

$$|\langle f^m(y), \nu_\Omega(y)\rangle| \le \|f^m(y)\| \le \|f(y)\| \le K.$$

Dále platí $\mathcal{H}^{n-1}\big(H(\Omega)\big) < \infty$, a proto podle Lebesgueovy věty dostaneme

$$\lim_{m\to\infty} \int_{H(\Omega)} \langle f^m(y), \nu_\Omega(y)\rangle \, \mathrm{d}\,\mathcal{H}^{n-1}(y) = \int_{H(\Omega)} \langle f(y), \nu_\Omega(y)\rangle \, \mathrm{d}\,\mathcal{H}^{n-1}(y).$$

Dále pro každé $x \in \Omega$ platí

$$\operatorname{div}(f^m)(x) = v_m(x) \cdot \operatorname{div} f(x) + \langle f(x), \nabla v_m(x)\rangle. \tag{13.30}$$

Označme $L = \sup_{\overline{\Omega}} |\operatorname{div} f|$. Platí $L < \infty$, neboť $\overline{\Omega}$ je kompaktní a $\operatorname{div} f$ je spojitá funkce na $\overline{\Omega}$. Pro každé $x \in \Omega$ platí $|v_m(x) \operatorname{div} f(x)| \le 1 \cdot L = L$. Poněvadž $\lambda^n(\Omega) < \infty$, dostáváme podle Lebesgueovy věty

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega v_m(x) \operatorname{div} f(x) \, \mathrm{d}\lambda^n(x) = \int_\Omega \operatorname{div} f(x) \, \mathrm{d}\lambda^n(x), \tag{13.31}$$

] neboť $\lim_{m\to\infty} v_m(x) = 1$ pro každé $x \in \Omega$. Platí $|\langle f(x), \nabla v_m(x)\rangle| \le K\|\nabla v_m(x)\|$ pro každé $x \in \Omega$. Díky Lemmatu 13.3.14 tak dostaneme

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega \langle f(x), \nabla v_m(x)\rangle \, \mathrm{d}\lambda^n(x) = 0. \tag{13.32}$$

Použijeme (13.30), (13.31) a (13.32) a obdržíme

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega \operatorname{div}(f^m)(x) \, \mathrm{d}\lambda^n(x) = \int_\Omega \operatorname{div} f(x) \, \mathrm{d}\lambda^n(x).$$

Odtud plyne dokazovaná rovnost. ■

13.3.2. Greenova věta.

13.3.15. Definice. (a) Nechť $U \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina a $f : U \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení třídy $\mathcal{C}^1$. Pro $x \in U$ definujeme **rotaci** vektorového pole f v bodě $x \in U$ předpisem

$$\operatorname{rot} f(x) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x).$$

Nechť $U \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená množina a $f : U \to \mathbb{R}^3$ je zobrazení třídy $\mathcal{C}^1$. Pro $x \in U$ definujeme **rotaci** vektorového pole f v bodě $x \in U$ předpisem

$$\operatorname{rot} f(x) = \Big[\tfrac{\partial f_3}{\partial x_2}(x) - \tfrac{\partial f_2}{\partial x_3}(x), \tfrac{\partial f_1}{\partial x_3}(x) - \tfrac{\partial f_3}{\partial x_1}(x), \tfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \tfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(x)\Big].$$

13.3.16. (a) Jako mnemotechnická pomůcka pro zapamatování definice rotace může sloužit následující diagram, kterému nebudeme dávat přesný formální smysl.

$$\operatorname{rot} f = \begin{vmatrix} e^1 & \frac{\partial}{\partial x_1} & f_1 \\ e^2 & \frac{\partial}{\partial x_2} & f_2 \\ e^3 & \frac{\partial}{\partial x_3} & f_3 \end{vmatrix} = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\Big) \times (f_1, f_2, f_3)$$

(b) Pokud bychom vektorové pole f z předchozí definice chápali jako popis proudění kapaliny, kde $f(x)$ určuje vektor rychlosti proudění v bodě x, potom $\operatorname{rot} f(x)$ určuje osu otáčení velmi malé kuličky uchycené v bodě x, přičemž úhlová rychlost otáčení je rovna polovině velikosti vektoru $\operatorname{rot} f(x)$.

13.3.17. Věta (Green). Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená otevřená neprázdná množina, $\mathcal{H}^1\big(H(\Omega)\big) < \infty$, $\mathcal{H}^1\big(H(\Omega) \setminus H_*(\Omega)\big) = 0$ a f je vektorové pole z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$, které je třídy $\mathcal{C}^1$ na otevřené množině obsahující $\overline{\Omega}$. Nechť $\tau_\Omega\colon H_*(\Omega) \to \mathbb{R}^2$ je tečné vektorové pole k $H_*(\Omega)$ definované předpisem $\tau_\Omega(y) = - \times \nu_\Omega(y)$. Pak platí

$$\int_{H(\Omega)} \big\langle f(y), \tau_\Omega(y)\big\rangle \,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^1(y) = \int_\Omega \operatorname{rot} f(x)\,\mathrm{d}\lambda^2(x).$$

13.3.18. Pokud $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, potom $- \times v = (-v_2, v_1)$. Vektor $\tau_\Omega(y)$ z předchozí věty je tedy vznikne otočením o úhel $\frac{\pi}{2}$ proti směru hodinových ručiček.

Důkaz Věty 13.3.17. Definujme vektorové pole $h\colon [f_2(x), -f_1(x)]$ pro $x \in \mathcal{D}(f)$. Podle Gaussovy věty platí

$$\int_{H(\Omega)} \langle h(y), \nu_\Omega(y)\rangle \,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^1(y) = \int_\Omega \operatorname{div} h(x)\,\mathrm{d}\lambda^2(x). \tag{13.33}$$

Platí

$$\langle h(y), \nu_\Omega(y)\rangle = f_2(y)\nu_\Omega(y)_1 - f_1(y)\nu_\Omega(y)_2 = \langle f(y), \tau_\Omega(y)\rangle, \qquad y \in H(\Omega),$$
$$\operatorname{div} h(x) = \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) = \operatorname{rot} f(x), \qquad x \in \Omega.$$

Odtud a z (13.33) plyne dokazovaný vztah. ∎

13.3.19. Definice. Nechť $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ je po částech regulární křivka.

(a) Nechť g je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$. **Křivkový integrál prvního druhu** $\int_c g\,\mathrm{d}s$ definujeme jako
$$\int_a^b g\big(c(t)\big) \cdot \|c'(t)\|\,\mathrm{d}t,$$
pokud tento integrál konverguje.

(b) Nechť f je vektorové pole z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$. **Křivkový integrál druhého druhu** $\int_c f \cdot \mathrm{d}c$ definujeme jako
$$\int_a^b \langle f\big(c(t)\big), c'(t)\rangle\,\mathrm{d}t,$$

pokud tento integrál konverguje.

13.3.20. Věta. Nechť $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ je po částech regulární jednoduchá uzavřená křivka a f je vektorové pole z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$, které je třídy $\mathcal{C}^1$ na otevřené množině obsahující $\overline{\operatorname{Int} c}$. Jestliže existuje $t \in [a,b]$ takové, že $\det[\nu_\Omega(c(t)), c'(t)] > 0$, pak platí

$$\int_c f \cdot \mathrm{d}c = \int_{\operatorname{Int} c} \operatorname{rot} f(x)\,\mathrm{d}\lambda^2(x).$$

13.3.21. Podmínka existence $t \in [a,b]$ takového, že $\det[\nu_\Omega(c(t)), c'(t)] > 0$ určuje kladný (= proti směru hodinových ručiček) směr obíhání.

Část důkazu Věty 13.3.20. Lze dokázat, že platí $\det[\nu_\Omega(c(t)), c'(t)] > 0$ v každém bodě $t \in [a,b]$, kde $c'(t) \neq 0$. Podle Věty 13.2.27 a Věty 13.3.17 platí

$$\int_{H(\Omega)} \langle f(y), \tau_\Omega(y)\rangle \,\mathrm{d}\mathcal{H}^1(y) = \int_\Omega \operatorname{rot} f(x)\,\mathrm{d}\lambda^2(x),$$

kde $\tau_\Omega(y) = -\times \nu_\Omega(y)$, $\Omega = \operatorname{Int} c$. Víme totiž, že platí

- Ω je otevřená a omezená (Věta 13.2.26),
- $\mathcal{H}^1\big(H(\Omega)\big) = \int_a^b \|\varphi'(t)\|\,\mathrm{d}t < \infty$ díky tomu, že c je po částech regulární,
- $\mathcal{H}^1\big(H(\Omega) \setminus H_*(\Omega)\big) = 0$, neboť $H(\Omega) \setminus H_*(\Omega)$ je konečná podle Věty 13.2.27.

Podle area formule (Věta13.1.24) platí

$$\int_{H(\Omega)} \langle f(y), \tau_\Omega(y)\rangle \,\mathrm{d}\mathcal{H}^1(y) = \int_a^b \langle f(c(t)), \tau_\Omega(c(t))\rangle \cdot \|c'(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Nechť $c'(t) \neq 0$. Potom $\tau_\Omega(c(t)) = \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$ nebo $\tau_\Omega(c(t)) = -\frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$. Vzhledem k tomu, že podle předpokladu a Větě 13.2.10(a) platí

$$\begin{aligned} 0 > \det[c'(t), \nu_\Omega(c(t))] &= \langle c'(t), \times\nu_\Omega(c(t))\rangle \\ &= -\langle c'(t), \tau_\Omega(c(t))\rangle = -\Big\langle c'(t), \pm\frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}\Big\rangle. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že $\tau_\Omega(c(t) = \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$. Potom platí

$$\int_a^b \langle f(c(t)), \tau_\Omega(c(t))\rangle \cdot \|c'(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_a^b \langle f(c(t)), c'(t)\rangle\,\mathrm{d}t = \int_c f \cdot \mathrm{d}c.$$

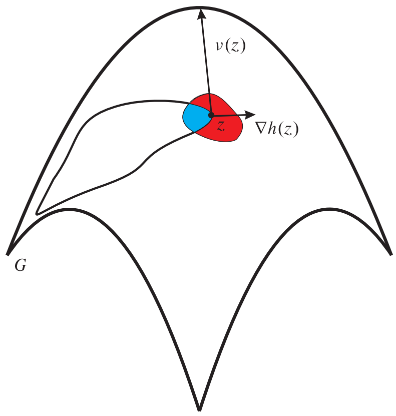
Tím je věta dokázána. ■

13.3.3. Stokesova věta.

13.3.22. Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^3$ je 2-plocha orientovaná normálovým polem ν, $\Omega \subset G$ je relativně otevřená v G a $\overline{\Omega} \setminus \Omega \subset G$. Řekneme, že $z \in H^G(\Omega)$ je **regulárním** bodem hranice Ω vzhledem ke G, jestliže existuje okolí U bodu z a funkce

$h\colon U \to \mathbb{R}$ třídy $\mathcal{C}^1$ taková, že $\nu(z) \times \nabla h(z) \neq 0$ a $\{x \in G \cap U;\ h(x) < 0\} = \Omega \cap U$. V takovém bodě definujeme

$$\tau_{\Omega,\nu}(z) = \frac{\nu(z) \times \nabla h(z)}{\|\nu(z) \times \nabla h(z)\|}.$$



Obrázek 3.

13.3.23. Věta. Nechť G, ν a Ω jsou jako v předchozí definici. Označme $H_*^G(\Omega)$ množinu všech regulárních bodů hranice Ω vzhledem ke G. Pokud je množina $H_*^G(\Omega)$ neprázdná, pak jde o 1-plochu a $\tau_{\Omega,\nu}$ je její orientací.

13.3.24. Věta (Stokes[7]). Nechť G, ν a Ω jsou jako v předchozí definici. Předpokládejme dále, že Ω je omezená, $\mathcal{H}^1(H^G(\Omega)) < \infty$ a $\mathcal{H}^1(H^G(\Omega) \setminus H_*^G(\Omega)) = 0$. Nechť vektorové pole f z $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ je třídy $\mathcal{C}^1$ na otevřené množině obsahující $\overline{\Omega}$. Potom

$$\int_{H^G(\Omega)} \langle f(y), \tau_{\Omega,\nu}(y)\rangle \,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^1(y) = \int_{\Omega} \langle \operatorname{rot} f(x), \nu(x)\rangle \,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^2(x).$$

13.4. Hlavní věta teorie pole

13.4.1. Věta (věta o potenciálu)**.** Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Nechť $c\colon [a,b] \to \Omega$ je po částech regulární křivka a $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ je funkce třídy $\mathcal{C}^1$. Potom

$$u\big(c(b)\big) - u\big(c(a)\big) = \int_c \nabla u \cdot \mathrm{d}c.$$

[7] George Gabriel Stokes (1819–1903)

Důkaz. Díky předpokladu, že c je po částech regulární, a hladkosti u platí

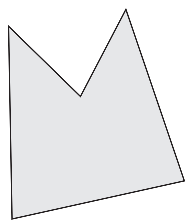
$$(u \circ c)(b) - (u \circ c)(a) = \int_a^b (u \circ c)'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\big(c(t)\big) \cdot c_i'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \langle \nabla u\big(c(t)\big), c'(t)\rangle\,\mathrm{d}t = \int_c \nabla u \cdot dc.$$

■

13.4.2. Definice. Řekneme, že množina $U \subset \mathbb{R}^n$ je **hvězdicovitá**, jestliže existuje $a \in U$ takový, že pro každé $x \in U$ platí $\{a + t(x-a);\ t \in [0,1]\} \subset U$. Bod a se nazývá **střed hvězdicovitosti** množiny U.

13.4.3. Každá konvexní množina je hvězdicovitá, v tom případě je každý její bod středem hvězdicovitosti. Střed hvězdicovitosti tedy není určen jednoznačně. Příklad hvězdicovité množiny, která není konvexní, je znázorněn na obrázku.



Obrázek 4.

13.4.4. Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je množina, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ je vektorové pole a $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Řekneme, že u je **potenciál** pole f na Ω, jestliže pro každé $x \in \Omega$ platí $\nabla u(x) = f(x)$. Vektorové pole, které má potenciál, nazýváme **potenciální**.

13.4.5. Věta (hlavní věta teorie pole)**.** Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ je spojité vektorové pole. Uvažujme následující výroky:

(i) Vektorové pole f je potenciální.

(ii) Pro každé po částech regulární křivky $c_i\colon [a,b] \to \Omega, i \in \{1,2\}$, splňující $c_1(a) = c_2(a)$ a $c_1(b) = c_2(b)$ platí $\int_{c_1} f \cdot \mathrm{d}c_1 = \int_{c_2} f \cdot \mathrm{d}c_2$.

(iii) Pro každé $i, j \in \{1,\dots,n\}$ a $x \in \Omega$ platí $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$.

Potom platí:

(a) Výrok (i) je ekvivalentní s výrokem (ii).

(b) Je-li f třídy $\mathcal{C}^1$ a platí výrok (i), pak platí výrok (iii).

(c) Je-li f třídy $\mathcal{C}^1$, Ω je hvězdicovitá a platí výrok (iii), pak platí výrok (i).

Důkaz. (a) (i) $\Rightarrow$ (ii) Tato implikace plyne z Věty 13.4.5.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Můžeme předpokládat, že Ω je neprázdná. Uvažujme komponentu W množiny Ω. Potom W je otevřená v $\mathbb{R}^n$ (Věta **??**). Zvolme $a \in W$. Dokážeme, že pro každé $x \in W$ existuje po částech regulární křivka $\psi\colon [0,1] \to W$ taková, že $\psi(0) = a$ a $\psi(1) = x$. Položme

$$G = \{x \in W;\ \text{existuje po částech regulární křivka } \psi\colon [0,1] \to W, \psi(0) = a, \psi(1) = x\}.$$

Ukážeme, že G je otevřená množina. Zvolme $x \in G$. K němu existuje příslušné ψ. Dále existuje $r > 0$ takové, že $B(x,r) \subset W$. Zvolme $y \in B(x,r)$. Potom definujeme

$$\psi(t) = \begin{cases} \psi(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ x + (y-x)(2t-1,) & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Potom φ je po částech regulární, $\varphi([0,1]) \subset W$ díky konvexitě $B(x,r)$, $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = y$. Platí tedy $y \in W$, takže $B(x,r) \subset W$, a tedy G je otevřená.

Dále ukážeme, že G je uzavřená v množině W. Mějme posloupnost $\{x_n\}$ prvků G konvergující k prvku $x \in W$. Nalezneme $r > 0$ takové, že $B(x,r) \subset W$. pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $x_{n_0} \in B(x,r)$. Pak existuje po částech regulární $\psi\colon [0,1] \to W$ splňující $\psi(0) = a$, $\psi(1) = x_{n_0}$. Položme

$$\psi(t) = \begin{cases} \psi(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ x_{n_0} + (x - x_{n_0})(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Potom φ je po částech regulární, $\varphi([0,1]) \subset W$ díky konvexitě $B(x,r)$, $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = x$.

Množina W je souvislá, a proto $G = W$. Tím je pomocné tvrzení dokázáno.

Pro $x \in W$ položme $u(x) = \int_\psi f \cdot d\psi$, kde ψ je po částech regulární křivka, $\psi(0) = a$, $\psi(1) = x$. Definice je korektní podle právě dokázaného pomocného tvrzení a (ii). Zvolme $i \in \{1,\dots,n\}$ a $x \in W$. Nalezneme $r > 0$ takové, že $B(x,r) \subset W$. Pro $t \in (-r,r)$ platí

$$u(x + te^i) - u(x) = \int_\gamma f \, d\gamma,$$

kde $\gamma(s) = x + ste^i$. Potom

$$\begin{aligned} \frac{u(x+te^i) - u(x)}{t} &= \frac{1}{t}\int_0^1 \langle f(\gamma(s)), \gamma'(s)\rangle \, ds = \frac{1}{t}\int_0^1 t \cdot f_i(\gamma(s)) \, ds \\ &= \int_0^1 f_i(\gamma(s)) \, ds = \int_0^1 f_i(x + ste^i) \, ds \to \int_0^1 f_i(x) \, ds = f_i(x). \end{aligned}$$

Odtud plyne $u \in \mathcal{C}^1(W)$ a $\nabla u = f$.

(b) Plyne z věty o záměně derivací (Věta **??**).

(c) Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že pro každé $x \in \Omega$ a každé $t \in [0,1]$ platí $tx \in \Omega$. Položme

$$u(x) = \int_{\psi_x} f \cdot d\psi_x, \qquad \psi_x(t) = tx, \quad t \in [0,1].$$

Počítejme

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\int_0^1 \langle f(tx), x\rangle\,\mathrm{d}t = \frac{\partial}{\partial x_i}\int_0^1 \sum_{j=1}^n f_j(tx)x_j\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \Big(f_i(tx) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(tx)\cdot tx_j\Big)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Dále platí

$$f_i(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\big(tf_i(tx)\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \Big(f_i(tx) + t\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(tx)\cdot x_j\Big)\,\mathrm{d}t.$$

Máme tedy $\nabla u = f$. ■

13.4.6. Definice.

(a) Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \le n$, $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená, $\Phi\colon G \to \mathbb{R}^n$ je zobrazení třídy $\mathcal{C}^1$ a g je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$. **Plošný integrál prvního druhu** $\int_\Phi g\,\mathrm{d}S$ definujeme jako
$$\int_G g\big(\Phi(t)\big)\cdot \operatorname{vol}\Phi'(t)\,\mathrm{d}t,$$
pokud tento integrál konverguje.

(b) Nechť $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ je otevřená, $\Phi\colon G \to \mathbb{R}^n$ je zobrazení třídy $\mathcal{C}^1$ a f je vektorové pole z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$. **Plošný integrál druhého druhu** $\int_\Phi f\cdot\mathrm{d}\Phi$ definujeme jako
$$\int_G \Big\langle f(\Phi(t)), \frac{\partial \Phi}{\partial t_1}(t)\times\cdots\times\frac{\partial\Phi}{\partial t_{n-1}}(t)\Big\rangle\,\mathrm{d}t,$$
pokud tento integrál konverguje.

13.4.7. Příklad. Ukažte, že množina $P = \{x \in \mathbb{R}^2;\ x \neq 0\}$ není hvězdicovitá a nalezněte vektorového pole na P, které má nulovou rotaci, ale není potenciální.

Řešení. Nejznámějším příkladem je pole
$$f(x) = \Big(\frac{-x_2}{|x|^2}, \frac{x_1}{|x|^2}\Big).$$
Lokálně se potenciály k f nalézt dají, například $u(x_1, x_2) = \operatorname{arctg}(x_2/x_1)$ na množině $\{x \in \mathbb{R}^2;\ x_1 > 0\}$. ♣

13.5. Teoretické příklady k plošnému a křivkovému integrálu

13.5.1. Příklad. Nechť $k, n \in \mathbb{N}$, $k \le n$. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je k-rozměrná plocha a $\varphi\colon G \to M$ je prosté a regulární. Ukažte, že potom je φ otevřené zobrazení.

Řešení. ♣

13.5.2. Příklad. Úloha na předpoklady v Gaussově větě.

Řešení. ♣

Integrály typu (**??**) se hojně vyskytují ve fyzice, mají např. význam toku plochou.

13.5.3 (zápis plošného integrálu druhého druhu pomocí diferenciálů)**.** (a) Jestliže $n = 2$, je Φ zobecněná křivka a integrál uvedený výše lze přepsat ve tvaru

$$\int_\Phi \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int_\Phi f_1\, dx_2 - f_2\, dx_1.$$

Zde velikost symbolu $\mathbf{S}$ v diferenciálu hraje významnou roli. Musíme striktně rozlišovat mezi integrálem $\int_\Phi \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$ a integrálem

$$\int_\Phi \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_\Phi f_1\, dx_1 + f_2\, dx_2.$$

(b) Jestliže $n = 3$, pak pro dvourozměrnou parametrickou plochu $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) \colon G \to \mathbb{R}^3$, skalární pole u a dvojici indexů $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$ definujeme

$$\int_\Phi u\, dx_i\, dx_j = \int_G u(\Phi(t)) \det\Big(\nabla\Phi_i, \nabla\Phi_j\Big)\, dt$$

Všimněme si, že takový integrál závisí znaménkem na pořadí diferenciálů a pro $i = j$ je nulový! Pak lze psát

$$\int_\Phi \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int_\Phi f_1\, dx_2\, dx_3 - f_2\, dx_1\, dx_3 + f_3\, dx_1\, dx_2.$$

(c) Podobně lze zapisovat různé integrály ve vyšších dimenzích, a nejen pro plochy dimenze či kodimenze jedna. Je-li $\Phi : G \to \mathbb{R}^n$ k-rozměrná parametrická plocha, $u : \Phi(G) \to \mathbb{R}$ skalární funkce a $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ je uspořádaná k-tice indexů, pak definujeme

$$\int_\Phi u(x)\, dx_{\alpha_1} \ldots dx_{\alpha_k} = \int_G u(\Phi(t)) \det\Big(\frac{\partial \Phi_{\alpha_i}}{\partial t_j}\Big)_{i,j=1}^k dt.$$

13.5.4. Příklad. nechť (Γ, ν) je orientovaná plocha kodimenze 1. Ukažte, že pak $(\Gamma, -\nu)$ je také orientovaná plocha kodimenze 1. Dále ukažte, že souvislé plochy kodimenze 1 se dají orientovat nejvýše dvěma způsoby.

Řešení. ♣

13.5.5. Poznámka. Nechť Γ je plocha kodimenze 1 a $z \in \Gamma$. Potom existuje okolí U bodu z a spojitě diferencovatelná funkce $g : U \to \mathbb{R}$ tak, že $g' \neq 0$ na U a

$$U \cap \Gamma = \{x \in U : \ g(x) = 0\}.$$

Nechť existuje globální parametrizace $\Phi\colon G \to \Gamma$ plochy $U \cap \Gamma$. Potom zderivováním identity $g \circ \Phi = 0$ dostaneme, že vektor $\nabla g(\Phi(t))$ je kolmý na všechny parciální derivace Φ v bodě t, $t \in G$. Tedy $\nabla g(\Phi(t))$ je reálný násobek $\mathbf{J}\Phi(t)$. Položíme-li

$$\boldsymbol{\nu}(x) = \frac{\nabla g(x)}{|\nabla g(x)|}, \qquad x \in \Gamma \cap U,$$

pak $(\Gamma \cap U, \boldsymbol{\nu})$ je orientovaná plocha kodimenze 1.

13.5.6. Definice (plošný integrál druhého druhu přes orientovanou plochu kodimenze 1)**.** Nechť $(\Gamma, \boldsymbol{\nu})$ je orientovaná plocha kodimenze 1 v $\mathbb{R}^n$ a $\mathbf{f}\colon \Gamma \to \mathbb{R}^n$ je vektorové pole. Definujeme

$$\int_\Gamma \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int_\Phi \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S},$$

kde $\Phi : G \to \Gamma$ je kladná zobecněná parametrizace Γ.

13.5.7. Věta (vztah mezi plošným integrálem prvého a druhého druhu)**.** Nechť $(\Gamma, \boldsymbol{\nu})$ je orientovaná plocha kodimenze 1 v $\mathbb{R}^n$ a $\mathbf{f}\colon \Gamma \to \mathbb{R}^n$ je vektorové pole. Potom

$$\int_\Gamma \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int_\Gamma \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\nu}\, dS,$$

pokud aspoň jeden z integrálů má smysl.

Důkaz. Vzorec dostaneme z definic a výpočtu (**??**). ■

13.5.8. Příklad. Uvažujme sférické souřadnice. Zobecněná parametrizace je kladná pro $(S, \boldsymbol{\nu})$ když

$$\boldsymbol{\nu}(x, y, z) = [x, y, z], \qquad [x, y, z] \in \S.$$

Vektorový jakobián v bodě (α, γ) je

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial z}{\partial \alpha} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial y}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial z}{\partial \gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\gamma\ \sin\alpha \\ \cos\gamma\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin\gamma\ \cos\alpha \\ -\sin\gamma\ \sin\alpha \\ \cos\gamma \end{pmatrix} = \cos\gamma \begin{pmatrix} \cos\gamma\ \cos\alpha \\ \cos\gamma\ \sin\alpha \\ \sin\gamma \end{pmatrix}.$$

Přesvědčili jsme se, že vektorový jakobián je kladný násobek normály, test orientace prošel. Kdybychom zaměnili pořadí proměnných na (γ, α) parametrizace by byla záporná.

13.5.9. Příklad. Dokažte, že každá 1-plocha je orientovatelná.

Návod. Naznačíme hlavní myšlenky důkazu. Nechť $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ je 1-plocha. Nejprve jako v důkazu Věty **??** vytvoříme systém lokálních parametrizací tak, aby parametrizované části pokrývaly Γ a referenční obory byly intervaly. Z tohoto pokrytí vybereme spočetné a lokálně konečné, máme konečnou či nekonečnou posloupnost $(f_j)_j$, $f_j : G_j \to \Gamma$. Vytvoříme diskrétní množinu bodů A tak, že v každém průniku $f_i(G_i) \cap f_j(G_j)$ zvolíme tři body, pokud je tento průnik neprázdný. Na množině A uvažujeme graf: řekneme, že a **sousedí** s b, pokud existuje lokální parametrizace $f : G \to \Gamma$ a $\alpha, \beta \in G$ takové, že $(\alpha, \beta) \subset G$, $f(\alpha) = a$, $f(\beta) = b$ a žádný bod z intervalu (α, β) se nezobrazí do A. Lze dokázat, že každý bod množiny A má právě dva sousedy. Nyní přichází ke slovu kombinatorika, množina A se rozloží na cykly a řetězce, přičemž řetězce jsou z obou stran neomezené. Na každém cyklu či a řetězci se zvolí směr probíhání a s jeho pomocí se vytvoří orientace na Γ. ♣

13.5.10. Příklad. Dokažte, že každou souvislou 1-plochu Γ je možné orientovat jen dvěma způsoby.

Řešení. Nechť $\boldsymbol{\tau}$ a $= \tilde{\boldsymbol{\tau}}$ jsou orientace Γ. Zvolíme bod $z \in \Gamma$ a uvažujeme lokální parametrizace $\Phi\colon G \to \Gamma$, $\Psi\colon H \to \Gamma$ a body $s_0 \in G$, $t_0 \in H$ tak, že $z = \Phi(s_0) = \Psi(t_0)$, přičemž $\boldsymbol{\tau}_\Phi(z) = \boldsymbol{\tau}(z)$ a $\boldsymbol{\tau}_\Psi(z) = \tilde{\boldsymbol{\tau}}(z)$. Podobně jako v důkazu Věty ?? najdeme okolí G' bodu s_0 a regulární funkci $\xi\colon G' \to H$ tak, že $\xi(s_0) = t_0$ a $\Phi = \Psi \circ \xi$ na G'. Potom $\Phi'(s_0) = \Psi'(t_0)\xi'(s_0)$, a tudíž

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}(z) = \begin{cases} \boldsymbol{\tau}(z), & \text{pokud } \xi'(s_0) > 0, \\ -\boldsymbol{\tau}(z), & \text{pokud } \xi'(s_0) < 0. \end{cases}$$

Množina všech bodů, kde $\boldsymbol{\tau} = \tilde{\boldsymbol{\tau}}$, resp. $\boldsymbol{\tau} = -\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ je otevřená i uzavřená v Γ, tedy ze souvislosti dostaneme tvrzení. ♣

13.6. Početní příklady

13.6.1. Příklad. Ukažte, že množina $D = \{x \in \mathbb{R}^2;\ x_2 \neq 0 \vee x_1 > 0\}$ je hvězdicovitá, ale není konvexní.

Řešení. ♣

13.6.2. Poznámka. Sehranost orientací pro Greenovu a Stokesovu větu se heuristicky kontroluje pomocí názorných pomůcek. Kladná parametrizace regulární části hranice otevřené množiny $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je “křivka”, která obíhá $\mathscr{G}$ proti směru hodinových ručiček. Kladná parametrizace regulární části relativní hranice 2-rozměrné plochy $\mathscr{G} \subset \mathbb{R}^3$ orientované pomocí normály se pozná podle pravidla pravé ruky: směřuje-li palec ve směru normály příslušné $\mathscr{G}$, pak zakřivené prsty ukazují směr obíhání “křivky”, která parametrizuje regulární část hranice. Zde používáme konvenci, že osa x směřuje doprava, osa y dozadu a osa z nahoru. Tyto pomůcky nemůžou nahradit výpočet, ale mohou nám naznačit, zda jsme při výpočtu neudělali numerickou chybu.

13.6.3. Poznámka. Je-li $\Phi : G \to \mathbb{R}^n$ plocha, o níž chceme rozhodnout, zda ohraničuje množinu nebo zda je kladnou lokální parametrizací plochy, pak platí, že pokud G je souvislá (např. interval), stačí provést test orientace v jednom bodě. V některých následujících cvičeních budeme ze cvičných důvodů ověřovat znaménko ve všech bodech. Samostatně zkontrolujte, zda nalezené parametrizace jsou prostá regulární zobrazení do dané množiny a nepokrytá část je nulová.

13.6.4. Poznámka. Pokud nám test orientace dá, že nalezená parametrizace je záporná, nezoufejme. Kladnou parametrizaci lze vyrobit prohozením pořadí proměnných (u plochy) nebo záměnou proměnných $s = -t$ (u křivky). Také můžeme příklad dopočítat a u výsledku otočit znaménko.

13.6.5. Příklad. Nechť $0 < r < R$ a $M = \{(\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$. Najděte zobecněnou parametrizaci a rozhodněte o znaménku, víte-li, že kladná jednotková normála v bodě $[R+r, 0, 0]$ je $[1, 0, 0]$.

Řešení. Použijeme-li válcové souřadnice Φ:

$$\begin{aligned} x &= \bar{\varrho}\cos\bar{\alpha}, \\ y &= \bar{\varrho}\sin\bar{\alpha}, \qquad [\bar{\varrho}, \bar{\alpha}, \bar{z}] \in (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \times \mathbb{R}, \\ z &= \bar{z}, \end{aligned}$$

rovnice se nám převede na

$$(\bar{\varrho} - R)^2 + \bar{z}^2 = r^2.$$

Tuto plochu můžeme parametrizovat posunutými polárními souřadnicemi ψ:

$$\begin{aligned} \bar{\varrho} &= R + r\cos\beta, \\ \bar{z} &= r\sin\beta, \qquad [\alpha, \beta] \in (-\pi,\pi)^2, \\ \bar{\alpha} &= \alpha, \end{aligned}$$

takže složením parametrizací $\Phi \circ \psi$ dostáváme Φ:

$$\begin{aligned} x &= (R + r\cos\beta)\cos\alpha, \\ y &= (R + r\cos\beta)\sin\alpha, \qquad [\alpha, \beta] \in (-\pi,\pi)^2. \\ z &= r\sin\beta, \end{aligned}$$

Znaménko parametrizace určíme z pravidla, že vektorový jakobián kladné parametrizace v $[\alpha, \beta]$ je kladným násobkem jednotkové normály v $\Phi(\alpha, \beta)$. Stačí tedy kontrolovat x-ovou souřadnici $\mathbf{J}\Phi(\alpha, \beta)$, a to je

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\alpha,\beta)}(\alpha,\beta) = \det\begin{pmatrix} (R + r\cos\beta)\cos\alpha, & -r\sin\beta\,\sin\alpha \\ 0, & r\cos\beta \end{pmatrix}.$$

Jelikož náš bod $[R+r, 0, 0]$ je $\Phi(0,0)$, počítáme

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\alpha,\beta)}(0,0) = \det\begin{pmatrix} R+r, & 0 \\ 0, & r \end{pmatrix} = r(R+r) > 0.$$

Tedy nalezená parametrizace je kladná. ■

13.6.6. Příklad. Nechť $\mathcal{G} = \{[x,y,z] : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ a $\boldsymbol{\nu}(x,y,z) = [x,y,z]$, $[x,y,z] \in \mathcal{G}$. Spočtěte $\int_{\mathcal{G}} x\,dy\,dz$.

Řešení. Použijeme-li sférické souřadnice

$$\begin{aligned} x &= \bar r\cos\bar\gamma\cos\bar\alpha, \\ y &= \bar r\cos\bar\gamma\sin\bar\alpha, \qquad [\bar r,\bar\alpha,\bar\gamma]\in(0,\infty)\times(-\pi,\pi)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}), \\ z &= \bar r\sin\bar\gamma, \end{aligned}$$

dostaneme z rovnice $g = 0$ podmínku $\bar r = 1$. Tedy zvolíme zobecněnou parametrizaci Φ,

$$\begin{aligned} x &= \cos\gamma\cos\alpha, \\ y &= \cos\gamma\sin\alpha, \qquad [\alpha,\gamma]\in G := (-\pi,\pi)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}). \\ z &= \sin\gamma, \end{aligned}$$

Potom

$$\mathcal{G}\setminus\Phi(G) = \mathcal{G}\cap\{x<0\}\cap\{y=0\},$$

což je 2-nulová množina. Pro $[x,y,z] = \Phi(\alpha,\gamma)$ máme

$$\nabla g(x,y,z) = [2x,2y,2z] = [2\cos\gamma\cos\alpha,\ 2\cos\gamma\sin\alpha,\ 2\sin\gamma].$$

Počítejme

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\times\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma} = \begin{pmatrix} -\cos\gamma\sin\alpha \\ \cos\gamma\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} -\sin\gamma\cos\alpha \\ -\sin\gamma\sin\alpha \\ \cos\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\gamma\cos\alpha \\ \cos^2\gamma\sin\alpha \\ \cos\gamma\sin\gamma \end{pmatrix},$$

takže

$$\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\times\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}\Big)(\alpha,\gamma) \quad \text{je kladný násobek} \quad \nabla g(\Phi(\alpha,\gamma)).$$

Test orientace prošel, parametrizace je kladná.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{G}} x\,dy\,dz &= \int_G \cos\gamma\cos\alpha\,\frac{\partial(\cos\gamma\sin\alpha,\ \sin\gamma)}{\partial(\alpha,\gamma)}\,d\alpha\,d\gamma \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big(\int_{-\pi}^{\pi}\cos^3\gamma\,\cos^2\alpha\,d\alpha\Big)\,d\gamma = \frac{4}{3}\,\pi\,. \end{aligned}$$

■

13.6.7. Příklad. Nechť $\mathcal{G} = \{[x,y,z] : x^2+y^2+z^2 = 1$ a $\boldsymbol{\nu}(x,y,z) = [x,y,z]$, $[x,y,z]\in\mathcal{G}$. Nechť $h(x,y,z) = \frac{\sqrt{3}}{2} - x$. Nechť $\Omega = \{[x,y,z]\in\mathcal{G} : h(x) < 0\}$. Najděte zobecněnou křivku, která je kladnou parametrizací $\partial\Omega$.

Řešení. Plocha $\mathcal{G}$ je daná implicitně rovnicí $g = x^2+y^2+z^2-1 = 0$, rozhraničující funkce je h. Hledaná křivka má parametrizovat plochu $g = h = 0$. Použijeme-li válcové souřadnice

$$\begin{aligned} x &= \bar x, \\ y &= \bar\varrho\cos\bar\alpha, \qquad [\bar\varrho,\bar\alpha,\bar x]\in(0,\infty)\times(-\pi,\pi)\times\mathbb{R}, \\ z &= \bar\varrho\sin\bar\alpha, \end{aligned}$$

vyjádříme danou soustavu rovnic jako

$$\bar{x}^2 + \bar{\varrho}^2 = 1,$$
$$\bar{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Odtud dostaneme zobecněnou parametrizaci Φ:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ y &= \frac{1}{2}\cos\alpha, \qquad \alpha \in (-\pi, \pi). \\ z &= \frac{1}{2}\sin\alpha, \end{aligned}$$

Zobecněná křivka Φ pokrývá $\{g = h = 0\}$ až na bod $[\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0]$. Máme

$$\nabla g = [2x, 2y, 2z] = [\sqrt{3}, \cos\alpha, \sin\alpha], \quad \nabla h = [-1, 0, 0], \quad \Phi' = [0, -\frac{1}{2}\sin\alpha, \frac{1}{2}\cos\alpha].$$

Počítejme

$$\boldsymbol{\nu}(x, y, z) \times \nabla h(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix},$$

tedy $\Phi'(\alpha) = \boldsymbol{\nu}(\Phi(\alpha)) \times \nabla h(\Phi(\alpha))$ Test orientace prošel, takže nalezená parametrizace je kladná. ■

13.6.8. Příklad. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^n$. Spočtěte $\mathcal{H}^1$-míru úsečky spojující body a, b.

Řešení. $\|a - b\|$ ♣

13.6.9. Příklad. Spočtěte $\mathcal{H}^1$-míru množiny $C = \{[3t, 3t^2, 2t^3];\ t \in [0, 1]\}$.

Řešení. 5 ♣

13.6.10. Příklad. Spočtěte $\mathcal{H}^1$-míru množiny

$$M = \Big\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = \big(1 + \tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\big)^2\Big\}.$$

Řešení. 8 ♣

13.6.11. Příklad. Spočtěte obsah sféry v $\mathbb{R}^3$ o poloměru 1.

Řešení. 4π ♣

13.6.12. Příklad. Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$. Ukažte, že vektory $u^1, \dots, u^k \in \mathbb{R}^n$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když $\operatorname{vol}[u^1, \dots, u^k] \neq 0$.

13.6.13. Příklad. Spočtěte obsah části povrchu rotačního hyperboloidu

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ z = xy, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Řešení. $\frac{2\pi}{3}(\sqrt{8}-1)$ ♣

13.6.14. Příklad. Vypočtěte integrál $\int_C (x+y)\,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^1$, kde C je obvod trojúhelníka s vrcholy $[0,0]$, $[0,1]$, $[1,0]$.

Řešení. $1+\sqrt{2}$ ♣

13.6.15. Příklad. Vypočtěte integrál $\int_C y^2\,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^1$, kde C je oblouk cykloidy $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $a > 0$.

Řešení. $\frac{256}{15}a^3$ ♣

13.6.16. Příklad. Spočtěte integrál $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^1$, kde C je kružnice se středem v bodě $[\frac{1}{2}, 0]$ a poloměru $\frac{1}{2}$.

Řešení. 2 ♣

13.6.17. Příklad. Spočtěte křivkový integrál $\int_C (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^1$, kde C je oblouk šroubovice, zadaný parametricky $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $t \in [0, 2\pi]$.

Řešení. $(2\pi a^2 + \frac{1}{3}(2\pi)^3 b^2)\sqrt{a^2+b^2}$ ♣

13.6.18. Příklad. Nechť $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je kladná funkce třídy $\mathcal{C}^1$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ \sqrt{y^2+z^2} = f(x)\}$. Potom $\mathcal{H}^2(M) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$.

13.6.19. Příklad. Ukažte, že $\{0\} \times (0,1)^2 \subset \mathbb{R}^3$ je 2-plocha.

13.6.20. Příklad. Ukažte, že $\{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| = 1\}$ je $(n-1)$-plocha.

13.6.21. Příklad. Nechť $H \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $F\colon H \to \mathbb{R}^{n-k}$ $(k < n)$ je třídy $\mathcal{C}^1$ na H a rank $F'(x) = n-k$ pro každé $x \in H$. Je-li $M = \{x \in \mathbb{R}^n;\ F(x) = 0\}$ neprázdná, potom je M k-plocha.

13.6.22. Příklad. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní k-plocha. Dokažte, že potom $0 < \mathcal{H}^k(M) < \infty$.

13.6.23. Příklad. Dokažte, že v $\mathbb{R}^n$ platí $\lambda^n\big(B(0,1)\big) = n\,\mathcal{H}^{n-1}\big(H(B(0,1))\big)$.

13.6.24. Příklad. Pomocí Greenovy věty spočtěte křivkový integrál

$$\int_C xy^2\,\mathrm{d}y - x^2y\,\mathrm{d}x,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice o středu v počátku a poloměru $a > 0$.

Řešení. $\frac{1}{2}\pi a^4$ ♣

13.6.25. Příklad. Pomocí Greenovy věty spočtěte křivkový integrál

$$\int_C (x+y)\,\mathrm{d}x - (x-y)\,\mathrm{d}y,$$

kde C je elipsa $\left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$ orientovaná v kladném smyslu.

Řešení. $-2\pi ab$ ♣

13.6.26. Příklad. Pomocí Greenovy věty spočtěte křivkový integrál

$$\int_C e^x(1-\cos y)\,\mathrm{d}x - e^x(y-\sin y)\,\mathrm{d}y,$$

kde C je křivka s kladnou orientací, která vymezuje množinu $0 < x < \pi, 0 < y < \sin x$.

Řešení. $-\frac{1}{5}(e^\pi - 1)$ ♣

13.6.27. Příklad. (Steinerova hypocykloida) Uvažujme křivku $\varphi(t) = [2\cos t + \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t]$, $t \in [0, 2\pi]$. Ukažte, že se jedná o jednoduchou uzavřenou po částech regulární křivku a spočtěte obsah množiny ohraničené touto křivkou.

Řešení. 2π ♣

13.6.28. Příklad. Užitím Stokesovy věty vypočtěte

$$\int_C (y+z)\,\mathrm{d}x + (z+x)\,\mathrm{d}y + (x+y)\,\mathrm{d}z,$$

kde

$$C = \{[a\sin^2 t, 2a\sin t\cos t, a\cos^2 t],\ t \in [0,\pi]\}, \quad a > 0,$$

a C je orientovaná ve směru růstu parametru t.

Řešení. 0 ♣

13.6.29. Příklad. Spočtěte tok vektorového pole $F(x,y,z) = [y-z, z-x, x-y]$ kuželovou plochou

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2 = z^2, z \in [0,h]\},$$

která je orientována vnější normálou.

Řešení. 0 ♣

13.6.30. Příklad. Užitím Stokesovy věty vypočtěte integrál

$$\int_C y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z,$$

kde kružnice

$$C = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = a^2, x+y+z = 0\}$$

je orientovaná proti směru hodinových ručiček při pohledu z kladné části osy x.

Řešení. $-\pi a^2\sqrt{3}$ ♣

13.6.31. Příklad. Užitím Stokesovy věty vypočtěte integrál

$$\int_C (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}x + (x^2 + z^2)\,\mathrm{d}y + (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}z,$$

kde

$$C = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx,\ x^2 + y^2 = 2rx,\ 0 < r < R,\ z > 0\},$$

a kterou orientujeme tak, že menší část sférické plochy $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx\}$, kterou tato křivka vymezuje, zůstává „po levé ruce stojíme-li na vnější straně sféry“.

Řešení. $2\pi R r^2$ ♣

13.6.32. Příklad. Spočtěte tok vektorového pole $F(x, y, z) = (z, 0, x^2)$ ve směru osy z parabolickou plochu

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 = z, x, y \in [-1, 1]\}.$$

Řešení. $\frac{4}{3}$ ♣

13.6.33. Příklad. Užitím Stokesovy věty vypočtěte

$$\int_C (y - z)\,\mathrm{d}x + (z - x)\,\mathrm{d}y + (x - y)\,\mathrm{d}z,$$

kde 1-plocha

$$C = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 = a^2, \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1\}, \qquad a > 0, h > 0,$$

je orientovaná proti směru hodinových ručiček vzhledem ke kladné části osy.

Řešení. $-2\pi a(a + h)$ ♣

13.6.34. Příklad. Užitím Stokesovy věty vypočtěte integrál

$$\int_C y^2 z^2\,\mathrm{d}x + x^2 z^2\,\mathrm{d}y + x^2 y^2\,\mathrm{d}z,$$

kde 1-plocha

$$C = \{[a\cos t, a\cos 2t, a\cos 3t] \in \mathbb{R}^3;\ t \in [0, 2\pi]\}$$

je orientována ve směru růstu parametru t.

Řešení. 0 ♣

KAPITOLA 14

Absolutně spojité funkce a funkce s konečnou variací

14.1. Přehled výsledků z teorie míry a integrálu

14.2. Derivace monotónní funkce

14.2.1. Definice. Nechť $\mathcal{I}$ je soubor nedegenerovaných intervalů v $\mathbb{R}$ a $A \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že $\mathcal{I}$ **pokrývá ve Vitaliově smyslu**, pokud platí:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \; \forall x \in A \; \exists I \in \mathcal{I} : x \in I \wedge |I| < \varepsilon.$$

14.2.2. Věta (Vitali)**.** Nechť $A \subset \mathbb{R}$ je množina konečné vnější míry a $\mathcal{I}$ je soubor nedegenerovaných intervalů pokrývající A ve Vitaliově smyslu. Pak pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje disjunktní konečná množina $\{I_1, \ldots, I_n\} \subset \mathcal{I}$ taková, že

$$\lambda^* \left(A \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j \right) < \varepsilon.$$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že intervaly v $\mathcal{I}$ jsou uzavřené. (V obecném případě bychom nahradili intervaly jejich uzávěry a použili pozorování, že koncové body intervalu mají míru 0.) Zvolme otevřenou množinu $G \supset A$ konečné míry. Protože je $\mathcal{I}$ vitaliovské pokrytí, můžeme předpokládat, že $\bigcup \mathcal{I} \subset G$. Mějme $\varepsilon \in (0, \infty)$ dáno.

Konstruujme nyní induktivně posloupnost $\{I_n\}$. V prvním kroku vezměme libovolný interval $I_1 \in \mathcal{I}$. Mějme nyní disjunktní intervaly $\{I_1, \ldots, I_j\}$ vybrány. Pokud $A \subset \bigcup_{i=1}^{j} I_i$, konstrukci ukončíme. Jinak položme

$$s_j = \sup\{|I|;\; I \in \mathcal{I}, I \cap \bigcup_{i=1}^{j} I_i = \emptyset\}.$$

Všimněme si, že s_j je dobře definováno, jelikož existuje $x \in A \setminus \bigcup_{i=1}^{j} I_i$. Protože $\bigcup_{i=1}^{j} I_i$ ke kompaktní množina a $\mathcal{I}$ je vitaliovské pokrytí, existuje $I \in \mathcal{I}$ obsahující x neprotínající $\bigcup_{i=1}^{j} I_i$. Tedy je množina intervalů z $\mathcal{I}$ neprotínající $\bigcup_{i=1}^{j} I_i$ neprázdná. Proto s_j je kladné číslo. Dále platí pro každé $I \in \mathcal{I}$ odhad

$|I| \leq \lambda(G) < \infty$, a tedy $s_j \leq \lambda G < \infty$. Zvolme nyní I_{j+1} disjunktní s $\bigcup_{i=1}^{j} I_i$ takové, že $|I_{j+1}| > \frac{1}{2}s_j$. Tím je konstrukce ukončena.

Tím jsem zkonstruovali disjunktní posloupnost intervalů $\{I_j\}$ v G, a tedy

$$\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| \leq \lambda(G) < \infty.$$

Zvolme $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} |I_j| < \frac{\varepsilon}{5}$$

Nyní již stačí jen dokázat, že $\lambda^*(A \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j) < \varepsilon$.

Nechť x je libovolný prvek $A \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j$. Protože je $\bigcup_{j=1}^{n} I_j$ kompaktní množina a $\mathcal{I}$ je vitaliovské pokrytí, existuje $I \in \mathcal{I}$ obsahující x a splňující $I \cap \bigcup_{j=1}^{n} I_j = \emptyset$. Je-li $k \in \mathbb{N}$ a $I \cap \bigcup_{j=1}^{k} I_j = \emptyset$, z volby intervalu I_{k+1} plyne, že

$$|I| \leq s_k < 2|I_{k+1}|.$$

Protože $\lim_k |I_{k+1}| = 0$, musí tedy existovat $m \in \mathbb{N}$ takové, že $I \cap I_m \neq \emptyset$.

Nechť $k \in \mathbb{N}$ je první index splňující $I \cap I_k \neq \emptyset$. Pak

$$k > n \quad \text{a} \quad |I| \leq s_{k-1} \leq 2|I_k|.$$

Zvolme $y \in I \cap I_k$ a označme střed intervalu I_k jako $\tilde{y}$. Pak

$$|x - \tilde{y}| \leq |x - y| + |y - \tilde{y}| \leq |I| + \frac{1}{2}|I_k| \leq \frac{5}{2}|I_k|. \tag{14.1}$$

Označíme-li tedy

$$J_k = [\tilde{y} - \frac{5}{2}|I_k|, \tilde{y} + \frac{5}{2}|I_k|],$$

máme díky (14.1) $x \in J_k$.

Jelikož $x \in A \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j$ bylo libovolné, dokázali jsme, že

$$A \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j \subset \bigcup_{k=n+1}^{\infty} J_k.$$

Tedy

$$\lambda^*\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j\right) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |J_k| = 5 \sum_{k=n+1}^{\infty} |I_k| < \varepsilon.$$

Tím je důkaz dokončen. ■

14.2.3. Definice. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Položme

$$D^+ f(a) = \limsup_{h \to 0_+} \frac{1}{h}(f(a+h) - f(a)),$$

$$D^- f(a) = \limsup_{h \to 0_+} \frac{1}{h}(f(a) - f(a-h)),$$

$$D_+ f(a) = \liminf_{h \to 0_+} \frac{1}{h}(f(a+h) - f(a)),$$

$$D_- f(a) = \liminf_{h \to 0_+} \frac{1}{h}(f(a) - f(a-h)).$$

Tato čísla nazýváme **horní** a **dolní derivovaná čísla**.

14.2.4. Zřejmě platí

$$D^+ f(a) \geq D_+ f(a) \quad \text{a} \quad D^- f(a) \geq D_- f(a).$$

Dále $D^+ f(a) = D_+ f(a)$ právě tehdy, když $f'_+(a)$ existuje. Obdobně platí, že $D^- f(a) = D_- f(a)$ právě tehdy, když $f'_-(a)$ existuje. Dále jsou všechna čtyři čísla rovna právě tehdy, když existuje $f'(a)$ (vlastní či nevlastní).

14.2.5. Věta. Nechť f je neklesající reálná funkce na intervalu $[a, b]$. Pak

(a) f je měřitelná,
(b) $f'(x)$ existuje vlastní pro skoro všechny body $x \in [a, b]$,
(c) f' je měřitelná,
(d) $\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x \leq f(b) - f(a)$.

Důkaz. (a) Zvolme libovolné $c \in \mathbb{R}$. Díky monotonii f je pak množina

$$\{x \in [a, b];\ f(x) > c\}$$

interval, tedy měřitelná. Proto je f měřitelná.

(b) Ukažme, že množina bodů, kde se nějaká derivovaná čísla liší, má míru 0. Ukažme toto pro případ $A = \{x \in [a, b];\ , D^+ f(x) > D_- f(x)\}$, u zbývajících množin lze postupovat analogicky. Rozložme množinu A jako $A = \bigcup_{p,q \in \mathbb{Q}} A_{p,q}$, kde

$$A_{p,q} = \{x \in [a, b];\ D^+ f(x) > p > q > D_- f(x)\}, \quad p, q \in \mathbb{Q}.$$

Díky spočetnosti množiny $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ tedy stačí dokázat $\lambda^*(A_{p,q}) = 0$ pro každou dvojici racionálních čísel $p > q$.

Položme $s = \lambda^*(A_{p,q})$. Nechť $\varepsilon \in (0, \infty)$ je libovolné pevné. Zvolme otevřenou množinu $G \supset A_{p,q}$ splňující $\lambda(G) < s + \varepsilon$. Pro každé $x \in A_{p,q}$ existuje libovolně malý interval tvaru $[x - h, x] \subset G$ takový, že

$$f(x) - f(x - h) < qh.$$

Díky Větě 14.2.2 vybereme konečně mnoho takovýchto disjunktních intervalů $\{I_1, \dots, I_n\}$ takových, že

$$\lambda^*\left(A_{p,q} \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathrm{Int}(I_i)\right) < \varepsilon.$$

Označíme-li tedy

$$B = A_{p,q} \cap \bigcup_{i=1}^n \mathrm{Int}(I_i),$$

máme $\lambda^*(B) > s - \varepsilon$. Pak platí

$$\sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_i - h_i)) < q \sum_{i=1}^n h_i \le q\lambda(G) < q(s + \varepsilon). \tag{14.2}$$

Pro každý bod y množiny B lze najít libovolně malý interval tvaru $[y, y + k]$ takový, že je obsažen v nějakém I_j a $f(y + k) - f(y) > pk$. Opět použijeme Věty 14.2.2 a vybereme konečně mnoho disjunktních intervalů $\{J_1, \dots, J_m\}$ výše uvedeného typu tak, že $B \cap \bigcup_{j=1}^m J_j$ má vnější míru větší než $s - 2\varepsilon$. Pak dostaneme

$$\sum_{j=1}^m (f(y_j + k_j) - f(y_j)) > p \sum_{j=1}^m k_j > p(s - 2\varepsilon). \tag{14.3}$$

Vezměme nyní pevný interval I_i a uvažujme všechny indexy $F = \{j \in \{1, \dots, m\};\ J_j \subset I_i\}$. Protože f je neklesající a intervaly J_j jsou disjunktní, dostáváme

$$\sum_{j \in F} (f(y_j + k_j) - f(y_j)) \le f(x_i) - f(x_i - h_i).$$

Proto platí

$$\sum_{j=1}^m (f(y_j + k_j) - f(y_j)) \le \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_i - h_i)).$$

Z (14.2) a (14.3) pak obdržíme

$$p(s - 2\varepsilon) < \sum_{j=1}^m (f(y_j + k_j) - f(y_j)) \le \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_i - h_i)) < q(s + \varepsilon).$$

Tedy

$$p(s - 2\varepsilon) < q(s + \varepsilon)$$

pro libovolné $\varepsilon \in (0, \infty)$. Proto $ps \le qs$. Protože $p > q$, nutně $s = 0$. Tím je ukázáno, že $\lambda^*(A_{p,q}) = \lambda(A_{p,q})) = 0$, tedy i $\lambda(A) = 0$. Proto je f diferencovatelná skoro všude. Z bodu (c) pak vyplyne, že f' je vlastní skoro všude.

(c) a (d) Rozšiřme definici funkce f za bod b pomocí $f(x) = f(b)$, $x \ge b$. Definujme funkci

$$g(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(x + h) - f(x))$$

pro ta x, kde limita existuje. Dle (b) je funkce g definována pro skoro všechna $x \in [a,b]$ a zřejmě platí, že $f'(x)$ je vlastní v těch bodech, kde g je konečná. Položme

$$g_n(x) = n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x)), \quad x \in [a,b], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Díky bodu (a) jsou g_n měřitelné a podle (b) konvergují bodově skoro všude ke g. Tedy je g skoro všude definovaná měřitelná funkce.

Zjevně je g skoro všude nezáporná. Z Fatouova lemmatu tedy dostáváme

$$\begin{aligned}
\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \liminf g_n(x)\,\mathrm{d}x \le \liminf \int_a^b g_n(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \liminf n \int_a^b (f(x + \frac{1}{n}) - f(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \liminf \left(n \int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x - n \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \right) \\
&= \liminf \left(f(b) - n \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \right) \\
&\le f(b) - f(a).
\end{aligned}$$

Tedy g je integrovatelná, a proto konečná ve skoro všech bodech. Tedy $f'(x)$ existuje vlastní ve skoro všech bodech a $g = f'$ skoro všude. Proto je f' měřitelná a platí $\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x \le f(b) - f(a)$. ■

14.3. Funkce s konečnou variací

14.3.1. Definice. Nechť f je reálná funkce na intervalu $[a,b]$. Pro každé dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a,b]$ položme

$$\begin{aligned}
p_D &= \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})]^+, \\
n_D &= \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})]^-, \\
v_D &= n_D + p_D = \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|.
\end{aligned}$$

Dále definujme

$$\begin{aligned}
P(f;a,b) &= \sup\{p_D;\ D \text{ dělení } [a,b]\}, \\
N(f;a,b) &= \sup\{n_D;\ D \text{ dělení } [a,b]\}, \\
V(f;a,b) &= \sup\{v_D;\ D \text{ dělení } [a,b]\}.
\end{aligned}$$

Čísla $P(f;a,b), N(f;a,b), V(f,a,b)$ nazveme po řadě **pozitivní, negativní** a **totální variací** funkce f na intervalu $[a,b]$. Je-li $V(f;a,b) < \infty$, řekneme, že f je **konečné variace** na $[a,b]$.

14.3.2. Zřejmě pro dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ platí

$$\begin{aligned} p_D - n_D &= \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})]^+ - \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})]^- \\ &= \sum_{i=1}^n \big([f(x_i) - f(x_{i-1})]^+ - [f(x_i) - f(x_{i-1})]^-\big) \\ &= \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] \\ &= f(b) - f(a). \end{aligned}$$

Dále máme

$$V(f;a,b) \le P(f;a,b) + N(f;a,b)$$

a

$$\max P(f;a,b), N(f;a,b) \le V(f;a,b).$$

14.3.3. Věta. Je-li f konečné variace na $[a,b]$, platí

$$V(f;a,b) = P(f;a,b) + N(f;a,b)$$

a

$$f(b) - f(a) = P(f;a,b) - N(f;a,b).$$

Důkaz. Pozitivní i negativní variace f jsou konečné díky předpokladu a 14.3.2. Pro každé dělení D intervalu $[a,b]$ máme

$$p_D = n_D + f(b) - f(a). \tag{14.4}$$

Tedy pro každé dělení D platí

$$P(f;a,b) \ge p_D = n_D + f(b) - f(a).$$

Vezmeme-li supremum pravé strany přes všechna dělení D, dostaneme

$$P(f;a,b) \ge N(f;a,b) + f(b) - f(a).$$

Dále máme z (14.4) pro každé dělení odhad

$$p_D = n_D + f(b) - f(a) \le N(f;a,b) + f(b) - f(a).$$

Přechodem k supremu na levé straně obdržíme

$$P(f;a,b) \le N(f;a,b) + f(b) - f(a).$$

Tedy platí druhý požadovaný vzorec.

Dále máme pro každé dělení D rovnost

$$v_D = p_D + n_D = p_D + p_D - (f(b) - f(a)).$$

Obdobně jako výše obdržíme

$$V(f;a,b) = 2P(f;a,b) - (f(b) - f(a)) = P(f;a,b) + N(f;a,b).$$

■

14.3.4. Věta. Nechť f je reálná funkce na intervalu $[a,b]$. Pak f je konečné variace na $[a,b]$ právě tehdy, když je f rozdílem dvou neklesajících funkcí na $[a,b]$.

Důkaz. Nechť f je konečné variace. Položme

$$g(x) = P(f;a,x), \quad h(x) = N(f;a,x), \quad x \in [a,b].$$

Protože pro $x \in [a,b]$ máme

$$0 \le P(f;a,x) \le V(f;a,x) \le V(f;a,b) < \infty \quad \text{a}$$
$$0 \le N(f;a,x) \le V(f;a,x) \le V(f;a,b) < \infty,$$

g, h jsou reálné funkce na $[a,b]$. Zjevně jsou neklesající. Dle Věty 14.3.3 platí

$$f(x) = g(x) - h(x) + f(a) = g(x) - (h(x) - f(a)), \quad x \in [a,b].$$

Tedy f je rozdílem dvou neklesajících funkcí g a $h - f(a)$.

Obráceně, nechť $f = g - h$, kde g, h jsou neklesající. Pak pro každé dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ máme

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| &\le \sum_{i=1}^n |g(x_i) - g(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^n |h(x_i) - h(x_{i-1})| \\ &= \sum_{i=1}^n (g(x_i) - g(x_{i-1})) + \sum_{i=1}^n (h(x_i) - h(x_{i-1})) \\ &= g(b) - g(a) + h(b) - h(a).\end{aligned}$$

Tedy $V(f;a,b) < \infty$. ■

14.3.5. Důsledek. Nechť f je funkce konečné variace na $[a,b]$. Pak má vlastní integrovatelnou derivaci ve skoro všech bodech.

Důkaz. Rozložme f jako $f = g - h$, kde g, h jsou neklesající funkce. Dle Věty 14.2.5 existují množiny N_g a N_h nulové míry takové, že $g'(x)$ existuje vlastní pro x mimo N_g a $h'(x)$ existuje vlastní pro x mimo N_h. Navíc jsou g' a h' integrovatelné. Pak $f'(x) = g'(x) - h'(x)$ je vlastní pro body mimo nulovou množinu $N_g \cup N_h$ a navíc je f' integrovatelná. ■

14.4. Absolutně spojité funkce

14.4.1. Definice. Reálná funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se nazývá **absolutně spojitá**, pokud platí následující podmínka: Pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ takové, že pro každý soubor $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ disjunktních intervalů v $[a, b]$ splňujících

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i) < \delta$$

platí

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(y_i)| < \varepsilon.$$

14.4.2. Je snadné si rozmyslet, že absolutně spojité funkce tvoří algebru.

14.4.3. Věta. Absolutně spojitá funkce na $[a, b]$ je stejnoměrně spojitá a konečné variace.

Důkaz. Nechť f je absolutně spojitá funkce na $[a, b]$. Pak je okamžitě z definice patrné, že je stejnoměrně spojitá

Pro důkaz její konečné variace zvolme $\varepsilon = 1$ a k němu nalezneme odpovídající $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, z definice absolutní spojitosti. Vezměme libovolné $\delta' \in (0, \delta)$. Uvažujme ekvidistantní dělení $D' = \{y_j\}_{j=0}^K$ intervalu $[a, a + K\delta']$, kde K je přirozené číslo splňující $\frac{b-a}{\delta'} \leq K < 1 + \frac{b-a}{\delta'}$ a

$$y_j = a + j\delta', \quad j \in \{0, \dots, K\}.$$

Pak

$$a + (K - 1)\delta' < b \leq a + K\delta'.$$

Je-li $a+K\delta > b$, zaměňme bod $y_K = a+K\delta'$ bodem b. Získáme tak dělení intervalu $[a, b]$, jehož norma je menší nebo rovna než δ', a tedy menší než δ.

Nechť $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ je dané dělení $[a, b]$. Vezmeme dělení D'' sestávající z bodů D' a D. Pak $D'' = \{z_l\}_{l=0}^m$ je dělení, které lze rozdělit na K souborů intervalů, z nichž každý je dělením intervalu délky δ'. Dostáváme tedy

$$v_D = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \sum_{l=1}^{m} |f(z_l) - f(z_{l-1})| \leq K\varepsilon = K.$$

Tím je důkaz dokončen. ■

14.4.4. Věta. Nechť f je integrovatelná reálná funkce na $[a, b]$.

(a) Pak je funkce

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a, b],$$

absolutně spojitá na $[a, b]$.

(b) Je-li f v $c \in [a, b]$ spojitá zprava, existuje $F'_+(c)$ vlastní a platí $F'_+(c) = f(c)$. Analogicky pro derivaci zleva.

Důkaz. (a) Ukažme nejdříve absolutní spojitost. Dokažme nejprve následující fakt:

$$\forall \varepsilon > 0\; \exists \delta > 0\; \forall E \subset [a, b] \text{ měřitelná}, \lambda(E) < \delta\colon \int_E |f(t)|\,dt < \varepsilon. \tag{14.5}$$

Předpokládáme-li opak, máme $\varepsilon \in (0,\infty)$ a měřitelné množiny $E_n \subset [a,b]$ takové, že $\lambda(E_n) < 2^{-n}$ a $\int_{E_n} |f(t)|\,\mathrm{d}t \geq \varepsilon$. Položíme-li $F_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$ a $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, máme

$$\lambda(F) = \lim_n \lambda(F_n) \leq \limsup_n \sum_{k=n}^{\infty} \lambda(E_k) \leq \limsup_n 2^{-n+1} = 0.$$

Na stranu druhou máme z Lebesgueovy věty

$$\begin{aligned} 0 = \int_F |f(t)|\,\mathrm{d}t &= \int_a^b \chi_F(t)|f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b \lim \chi_{F_n}(t)|f(t)|\,\mathrm{d}t \\ &= \lim \int_a^b \chi_{F_n}(t)|f(t)|\,\mathrm{d}t = \lim \int_{F_n} |f(t)|\,\mathrm{d}t \geq \varepsilon, \end{aligned}$$

což je spor. Tedy (14.5) platí.

Ukažme nyní, že F je absolutně spojitá. Pro dané $\varepsilon \in (0,\infty)$ najdeme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ dle (14.5). Mějme nyní disjunktní intervaly $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ o úhrnné délce menší než δ. Pak $\lambda(\bigcup_{i=1}^n (x_i, y_i)) < \delta$, a tedy

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |F(y_i) - F(x_i)| = \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_i}^{y_i} f(t)\,\mathrm{d}t \right| &\leq \sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{y_i} |f(t)|\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\bigcup_{i=1}^n (x_i, y_i)} |f(t)|\,\mathrm{d}t < \varepsilon. \end{aligned}$$

(b) Předpokládejme nyní, že f je bodě $c \in [a,b)$ spojitá zprava. Pak pro dané $\varepsilon \in (0,\infty)$ existuje $\delta \in (0,\infty)$, že pro $y \in (c, c+\delta)$ platí $|f(y) - f(c)| < \varepsilon$. Pak tedy máme pro $h \in (0,\delta)$ odhad

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(F(c+h) - F(c)) - f(c) &= \frac{1}{h}\left(\int_a^{c+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t \right) - f(c) \\ &= \frac{1}{h}\left(\int_c^{c+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_c^{c+h} f(c)\,\mathrm{d}t \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_c^{c+h} (f(t) - f(c))\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h}(F(c+h) - F(c)) - f(c) \right| &\leq \frac{1}{h} \int_c^{c+h} |f(t) - f(c)|\,\mathrm{d}t \\ &\leq \varepsilon \frac{1}{h} \int_c^{c+h} 1\,\mathrm{d}t = \varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy $F'_+(c) = f(c)$. Analogicky bychom postupovali pro derivaci zleva. ■

14.4.5. Lemma. Nechť f je integrovatelná reálná funkce na $[a,b]$ a $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pro každé $c \in [a,b]$. Pak $f = 0$ skoro všude.

Důkaz. Předpokládejme, že $E = \{x \in [a,b];\ f(x) > 0\}$ je množina kladné míry. Z regularity Lebesgueovy míry pak existuje uzavřená množina $F \subset (a,b) \cap E$ kladné míry. Podle Věty **??** lze psát množinu $G = (a,b) \setminus F$ jako $G = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$, kde $\{(a_n, b_n)\}$ jsou navzájem disjunktní. Protože

$$0 = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_F f(t)\,\mathrm{d}t + \int_G f(t)\,\mathrm{d}t,$$

platí

$$\int_G f(t)\,\mathrm{d}t \neq 0.$$

Z Lebesgueovy věty máme

$$\begin{aligned}\int_G f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{\bigcup(a_n,b_n)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{(a_n,b_n)} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \chi_{(a_n,b_n)} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Tedy alespoň jeden integrál $\int_{a_n}^{b_n} f(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$. Pak ale máme pro toto $n \in \mathbb{N}$

$$0 \neq \int_{a_n}^{b_n} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{b_n} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{a_n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Tedy buď pro $c = b_n$ nebo pro $c = a_n$ platí $0 \neq \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$, což je spor s předpokladem. Tedy $\lambda(E) = 0$.

Obdobně bychom postupovali u množiny $\{x \in [a,b];\ f(x) < 0\}$. ∎

14.4.6. Lemma. Nechť f je omezená měřitelná funkce na $[a,b]$ a $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pro $x \in [a,b]$. Pak pro skoro všechna $x \in [a,b]$ platí $F'(x) = f(x)$.

Důkaz. Dle Věty 14.4.4 je F absolutně spojitá na $[a,b]$. Tudíž je konečné variace (viz Věta 14.4.3), a proto má skoro všude konečnou derivaci F', která je integrovatelná (Důsledek 14.3.5). Rozšiřme definiční obor f za bod b pomocí vzorce $f(x) = 0$, $x \geq b$, a nechť $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ i pro $x \geq b$. Nechť $K \in \mathbb{R}$ splňuje $|f| \leq K$ na $[a,b]$. Definujme

$$f_n(x) = n(F(x + \frac{1}{n}) - F(x)), \quad x \in (a,b), n \in \mathbb{N}.$$

Pak

$$f_n(x) = n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

a tedy $|f_n| \leq K$ na $[a,b]$.

Dále platí

$$f_n \to F' \text{ skoro všude a } \lim n \int_c^{c+\frac{1}{n}} F(x)\,\mathrm{d}x = F(c), \quad c \in [a,b],$$

(viz Věta 14.4.4(b)). Z Lebesgueovy věty tedy máme pro každé $c \in [a,b]$

$$\begin{aligned}\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x &= \lim \int_a^c f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim n \int_a^c (F(x+\frac{1}{n}) - F(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim n \left(\int_c^{c+\frac{1}{n}} F(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{a+\frac{1}{n}} F(x)\,\mathrm{d}x \right) \\ &= F(c) - F(a) = F(c) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Tedy

$$\forall c \in [a,b] : \int_a^c \big(F'(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Dle Lemmatu 14.4.5 je $F' = f$ skoro všude. ■

14.4.7. Věta. Nechť f je integrovatelná funkce na $[a,b]$ a $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $x \in [a,b]$. Pak $F' = f$ skoro všude.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $f \geq 0$. Pak F je neklesající funkce na $[a,b]$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq n, \\ n, & f(x) > n. \end{cases}$$

Pak $f - f_n$ je integrovatelná nezáporná funkce. Tedy

$$G_n(x) = \int_a^x (f(t) - f_n(t))\,\mathrm{d}, \quad x \in [a,b],$$

je neklesající funkce. Tedy má dle Věty 14.2.5 skoro všude vlastní derivaci, která musí být nezáporná. Funkce

$$H_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b], n \in \mathbb{N},$$

splňují $H_n' = f_n$ skoro všude podle Lemmatu 14.4.6.

Dohromady máme pro skoro všechna $x \in [a,b]$

$$F'(x) = (G_n(x) + H_n(x))' = G_n'(x) + f_n(x) \geq f_n(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Protože tato nerovnost platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$, dostáváme $F' \geq f$ skoro všude.

Podle Věty 14.2.5 tedy máme

$$F(b) - F(a) \geq \int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Z tohoto faktu a nezápornosti $F' - f$ máme

$$0 \leq \int_a^b \big(F'(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Tedy $F' = f$ skoro všude.

Je-li f obecná, pišme $f = f^+ - f^-$ a nechť F^+, F^- jsou příslušné funkce získané integrací. Pak máme skoro všude $(F^+)' = f^+$ a $(F^-)' = f^-$. Tedy pro skoro všechna $x \in [a,b]$ platí

$$F'(x) = (F^+(x) - F^-(x))' = f^+(x) - f^-(x) = f(x).$$

Tím je důkaz dokončen. ■

14.4.8. Věta. Je-li f absolutně spojitá funkce na $[a,b]$ s derivací skoro všude rovnou 0, pak f je konstantní.

Důkaz. Mějme dáno $c \in [a,b]$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $c > a$. Chceme ukázat, že $f(a) = f(c)$. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, je dáno. Označíme-li $E = \{x \in (a,c);\ f'(x) = 0\}$, pak $\lambda(E) = c - a$ dle předpokladu. Nechť je $\delta \in (0,\infty)$ vybrané dle definice stejnoměrné spojitosti pro ε. Pro každé $x \in E$ existuje libovolně malý interval tvaru $[x, x+h]$ obsažený v (a,c), pro který platí $|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon h$. Z tohoto vitaliovského pokrytí vybereme díky Větě 14.2.2 konečně mnoho disjunktních intervalů $\{[x_i, y_i]\}_{i=1}^n$, které splňují

$$\lambda(E \setminus \bigcup_{i=1}^{n} [x_i, y_i]) < \delta.$$

Předpokládejme, že máme intervaly označeny tak, že $x_i \le x_{i+1}$ pro $i \in \{1,\dots,n-1\}$. Pak platí

$$y_0 = a \le x_1 < y_1 \le x_2 < y_2 \le \cdots \le x_n < y_n \le c = x_{n+1}$$

a

$$\sum_{j=0}^{n} \left| x_{j+1} - y_j \right| < \delta.$$

Z konstrukce intervalů $\{[x_i, y_i]\}$ máme

$$\sum_{i=1}^{n} |f(y_i) - f(x_i)| \le \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(y_i - x_i) \le \varepsilon(c-a),$$

z absolutní spojitosti f pak dostáváme

$$\sum_{j=0}^{n} \left| f(x_{j+1}) - f(y_j) \right| < \varepsilon.$$

Dohromady obdržíme

$$|f(c) - f(a)| = \left| \sum_{j=0}^{n} \big(f(x_{j+1}) - f(y_j) \big) + \sum_{i=1}^{n} \big(f(y_i) - f(x_i) \big) \right| \le \varepsilon + \varepsilon(c-a).$$

Tedy $f(c) = f(a)$. ■

14.4.9. Věta. Nechť F je reálná funkce na $[a,b]$. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) F je absolutně spojitá,

(ii) F' existuje vlastní skoro všude, F' je integrovatelná a $F(x) = \int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t + F(a)$ pro $x \in [a, b]$,

(iii) existuje integrovatelná f na $[a, b]$ taková, že $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + F(a)$ pro $x \in [a, b]$.

Důkaz. (i) $\implies$ (ii) Nechť F je absolutně spojitá na $[a, b]$. Pak je konečné variace (Věta 14.4.3), a tedy má skoro všude vlastní derivaci F', která je integrovatelná. (Důsledek 14.3.5). Položme $G(x) = \int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t$. Pak G je absolutně spojitá na $[a, b]$ (Věta 14.4.4), stejně jako funkce $H = F - G$ (viz 14.4.2). Navíc je $G' = F'$ skoro všude dle Věty 14.4.7. tedy je $H' = 0$ skoro všude, což podle Věty 14.4.8 znamená, že $H = c$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$. Ale

$$c = H(a) = F(a) - G(a) = F(a),$$

což znamená

$$F(x) = G(x) + c = \int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t + F(a), \quad x \in [a, b].$$

(ii) $\implies$ (iii) je zřejmé a (iii) $\implies$ (i) plyne z Věty 14.4.4. ■

14.4.10. Věta (Per partes pro absolutně spojité funkce)**.** Nechť f, g jsou absolutně spojité funkce na $[a, b]$. Pak platí

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Dle 14.4.2 je funkce fg absolutně spojitá. Má tedy integrovatelnou derivaci skoro všude konečnou (Věta 14.4.9) a platí $h = (fg)' = f'g + fg'$ (Věta **??**). Dále máme dle Věty 14.4.9

$$f(b)g(b) = \int_a^b (fg)'(x)\,\mathrm{d}x + f(a)g(a). \tag{14.6}$$

Vzhledem k tomu, že f je omezená spojitá a g' integrovatelná, existuje $\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$. Analogicky pro $\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$. Tedy z (14.6) dostáváme

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = (f(b)g(b) - f(a)g(a)) - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

■

14.4.11. Definice. Nechť f je integrovatelná funkce na $[a, b]$. Řekneme, že $x \in [a, b]$ je **Lebesgueovým bodem** f, pokud platí

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\,\mathrm{d}t = 0.$$

14.4.12. Věta. Nechť f je integrovatelná funkce na $[a, b]$. Pak jsou skoro všechny body intervalu (a, b) Lebesgueovými body f.

Důkaz. Nechť r je libovolné racionální číslo. Pak je funkce $f - r$ integrovatelná na $[a,b]$, a tedy existuje dle Věty14.4.7 množina $A_r \subset (a,b)$ taková, že $\lambda(A_r) = 0$ a

$$\lim_{h\to 0} \int_x^{x+h} |f(t) - r| \, \mathrm{d}t = |f(x) - r| < \infty, \quad x \in (a,b) \setminus A_r. \tag{14.7}$$

Položme $A = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} A_r$. Pak $\lambda(A) = 0$.

Nechť $x \in (a,b) \setminus A$ a ukažme, že x je Lebesgueovým bodem f. Nutně platí $|f(x)| < \infty$. Nechť $\varepsilon \in (0,\infty)$ je dáno. Zvolme $r \in \mathbb{Q}$ takové, že $|f(x) - r| < \varepsilon$. Dále najdeme $\delta \in (0,\infty)$ takové, že

$$\left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - r| \, \mathrm{d}t \right| < |f(x) - r| + \varepsilon$$

pro $0 < |h| < \delta$ (viz (14.7)). Pak ale platí pro tato h odhad

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| \, \mathrm{d}t \right| &\le \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (|f(t) - r| + |r - f(x)|) \, \mathrm{d}t \right| \\
&\le \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - r| \, \mathrm{d}t \right| + |r - f(x)| \\
&\le |f(x) - r| + \varepsilon + |r - f(x)| \\
&\le 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. ∎

KAPITOLA 15

Fourierovy řady

15.1. Luzinova věta a její důsledky

15.1.1. Věta (Luzin)**.** Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ je měřitelná funkce a $\varepsilon \in (0, \infty)$. Pak existuje $F \subset [a, b]$ uzavřená taková, že $\lambda([a, b] \setminus F) < \varepsilon$ a $f|_F$ je spojitá.

Důkaz. Nechť $\{V_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ je báze otevřených množin v $\mathbb{C}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ najdeme z regularity λ uzavřenou množinu F_n a otevřenou množinu U_n v $[a, b]$ takové, že

$$F_n \subset f^{-1}(V_n) \subset U_n \quad \text{a} \quad \lambda(U_n \setminus F_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Pak pro

$$A = [a, b] \setminus \bigcup (U_n \setminus F_n)$$

platí

$$\lambda([a, b] \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2}$$

a $f|_A$ je spojitá, protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ je množina

$$(f|_A)^{-1}(V_n) = f^{-1}(V_n) \cap A = U_n \cap A$$

otevřená v A. Nyní z regularity najdeme $F \subset A$ uzavřenou tak, že $\lambda(A \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$. Pak $\lambda([a, b] \setminus F) < \varepsilon$ a $f|_F$ je spojitá. ∎

15.1.2. Věta (Tietze)**.** Nechť $F \subset \mathbb{R}$ je uzavřená množina a $f : F \to \mathbb{C}$ je spojitá. Pak existuje $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ spojitá funkce splňující $g = f$ na F, $\sup_{x \in F} |f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|$.

Důkaz. Předpokládejme, že $F \neq \emptyset$. Díky Větě **??** lze psát $\mathbb{R} \setminus F = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$, kde $\{(a_n, b_n)\}$ jsou disjunktní otevřené intervaly. Definujme

$$g(x) = \begin{cases} \frac{b_n - x}{b_n - a_n} f(a_n) + \frac{x - a_n}{b_n - a_n} f(b_n), & x \in (a_n, b_n), (a_n, b_n) \text{ omezený}, \\ f(b_n), & x \in (-\infty, b_n), \\ f(a_n), & x \in (a_n, \infty), \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N},$$

tedy g je na intervalu $[a_n, b_n]$ lineární funkce spojující body $[a_n, f(a_n)]$ a $[b_n, f(b_n)]$. Zjevně je g dobře definovaná, navíc zřejmě splňuje $\sup_{x \in F} |f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|$.

Ukažme, že je spojitá. Zřejmě je g spojitá na každém z intervalů (a_n, b_n). Nechť $x \in F$. Ukážeme například spojitost zprava. Pokud x je izolovaným bodem množiny $F \cap (x, \infty)$, je g spojitá v x zprava, jelikož je na nějakém pravém okolí x rovna lineární funkci. Nechť tedy $x \in (F \cap (x, \infty))'$. Díky spojitosti f na F v bodě x zprava pro dané $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro $y \in F \cap [x, x+\delta)$ platí $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Zvolme $\tilde{y} \in F \cap (x, x+\delta)$ a $\tilde{\delta} \in (0, \infty)$ takové, že $(x, x+\tilde{\delta}) < \tilde{y}$. Nechť $y \in (x, x+\tilde{\delta})$ je libovolné. Pokud $y \in F$, máme $|f(x) - f(y)|$ z volby δ. Pokud $y \notin F$, vezměme jednoznačně určený interval (a_n, b_n) obsahující y. Protože $x, \tilde{y} \in F$, máme $(a_n, b_n) \subset [x, \tilde{y}]$. Tedy krajní body intervalu (a_n, b_n) splňují $|f(a_n) - f(x)| < \varepsilon$, $|f(b_n) - f(x)| < \varepsilon$. Z definice g na intervalu (a_n, b_n) tedy máme $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Tím je důkaz dokončen. ■

15.1.3. Věta. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je měřitelná.

(a) Pak existuje borelovská funkce g rovnající se f skoro všude.

(b) Je-li $p \in [1, \infty)$, $|f|^p$ je integrovatelná a $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$ a spojitá funkce $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ takové, že $g = 0$ vně $[a, b]$ a $\|f - g\|_p < \varepsilon$.

Důkaz. (a) Aplikací Luzinovy věty 15.1.1 na intervaly $[-n, n]$ dostaneme uzavřené množiny $F_n \subset [-n, n]$, $n \in \mathbb{N}$, takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $f|_{F_n}$ je spojitá a $\lambda([-n, n] \setminus F_n) < 2^{-n}$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $F_1 \subset F_2 \subset \cdots$. Označme $F_0 = \emptyset$, $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ a položme

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in F, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus F. \end{cases}$$

Pak pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí

$$\mathbb{R} \setminus F = \bigcup_{k=1}^{\infty} [-k, k] \setminus F \subset \bigcup_{k=m}^{\infty} [-k, k] \setminus F \subset \bigcup_{k=m}^{\infty} [-k, k] \setminus F_k.$$

Tedy pro každé $m \in \mathbb{N}$ máme

$$\lambda(\mathbb{R} \setminus F) \le \lambda\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} [-k, k] \setminus F_k\right) \le \sum_{k=m}^{\infty} \lambda\left([-k, k] \setminus F_k\right) \le \sum_{k=m}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-m+1}.$$

Proto $\lambda(\mathbb{R} \setminus F) = 0$.

Množina F i $\mathbb{R} \setminus F$ je borelovská. Nechť $U \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Pak

$$g^{-1}(U) = \begin{cases} \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n \setminus F_{n-1}) \cap f^{-1}(U), & 0 \notin U, \\ \bigcup_{n=1}^{\infty} \big((F_n \setminus F_{n-1}) \cap f^{-1}(U)\big) \cup (\mathbb{R} \setminus F), & 0 \in U. \end{cases}$$

Díky spojitosti f na $F_n \setminus F_{n-1}$ máme v obou případech borelovskost množiny $g^{-1}(U)$. Tedy g je borelovská a rovná se f skoro všude.

(b) Mějme funkci f na $\mathbb{R}$ splňující $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx < \infty$ a $\varepsilon \in (0, \infty)$. Můžeme předpokládat, že f je reálná.

Krok 1. Uvažujme funkce $f_n = f\chi_{[-n,n]}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak $|f_n - f|^p \to 0$ a $|f_n - f|^p \le (2|f|)^p$. Z Lebesgueovy věty tedy máme

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)|^p \, dx \to 0.$$

Lze tedy zvolit $n \in \mathbb{N}$ splňující $\|f - f_n\|_p^p < \varepsilon$. Označme $f_1 = f_n$.

Krok 2. Uvažujme funkce

$$g_k(x) = \begin{cases} k, & f_1(x) > k, \\ f_1(x), & |f_1(x)| \le k, , \\ -k, & f_1(x) < -k. \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Pak $|g_k - f_1| \to 0$ skoro všude a $|g_k - f_1|^p \le |f_1|^p$. Opět z Lebesgueovy věty dostáváme

$$\int_{\mathbb{R}} |g_k(x) - f_1(x)|^p \,\mathrm{d}x = \int_{[-n,n]} |g_k(x) - f_1(x)|^p \,\mathrm{d}x \to_{k\to\infty} 0.$$

Zvolme $k \in \mathbb{N}$ takové, že $\|g_k - f_1\|_p^p < \varepsilon$ a označme $f_2 = g_k$.

Krok 3. Nechť K je kladná konstanta omezující $|f_2|$ na $\mathbb{R}$. Víme, že $f_2 = 0$ vně intervalu $[-n, n]$. Pomocí Luzinovy věty 15.1.1 najdeme $F \subset [-n, n]$ uzavřenou takovou, že $\lambda([-n, n] \setminus F) < \frac{\varepsilon}{(2K)^p}$ a $f_2|_F$ je spojitá. Díky Větě 15.1.2 najdeme spojitou funkci f_3 na $\mathbb{R}$ rozšiřující $f_2|_F$ a splňující $|f_3| \le K$. Konstrukci dokončíme nalezením spojité funkce f_4 na $\mathbb{R}$ splňující $0 \le f_4 \le 1$, $f_4 = 1$ na $[-n, n]$, $f_4 = 0$ na $\mathbb{R} \setminus [-n - 1.n + 1]$ a $\int_{\mathbb{R}\setminus[-n,n]} f_4(x)^p \,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{K^p}$ a položením $f_5 = f_3 \cdot f_4$. Pak

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} |f_2(x) - f_5(x)|^p \,\mathrm{d}x \\
&\le \int_{\mathbb{R}\setminus[-n,n]} |f_3(x) f_4(x)|^p \,\mathrm{d}x + \int_{[-n,n]\setminus F} |f_2(x) - f_3(x)|^p \,\mathrm{d}x + \int_F |f_2(x) - f_3(x)|^p \,\mathrm{d}x \\
&\le K^p \int_{\mathbb{R}\setminus[-n,n]} f_4(x)^p \,\mathrm{d}x + \lambda([-n, n] \setminus F)(2K)^p + 0 \\
&\le K^p \frac{\varepsilon}{K^p} + (2K)^p \frac{\varepsilon}{(2K)^p} = 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Krok 4. Našli jsme tedy spojitou funkci f_5 na $\mathbb{R}$ splňující

$$\|f - f_5\|_p \le \|f - f_1\|_p + \|f_1 - f_2\|_p + \|f_2 - f_5\|_p \le 2\sqrt[p]{\varepsilon} + \sqrt[p]{2\varepsilon}.$$

Navíc je $f_5 = 0$ vně intervalu $[-n - 1, n + 1]$. Tím je důkaz dokončen. ■

15.2. Základní pojmy Fourierových řad

15.2.1. Definice. Trigonometrickou řadou rozumíme řadu funkcí

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \tag{15.1}$$

kde $c_k \in \mathbb{C}$ a $k \in \mathbb{Z}$.

Trigonometrickým polynomem rozumíme funkci tvaru

$$x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \tag{15.2}$$

kde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $c_k \in \mathbb{C}$, $k = -n, \dots, n$.

15.2.2. Poznámky. (a) Řada (15.1) konverguje, pokud konverguje posloupnost $\{\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}\}_{n=0}^{\infty}$.

(b) **Stupněm** trigonometrického polynomu (15.2) rozumíme největší $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takové, že $|c_k| + |c_{-k}| \neq 0$. Později uvidíme, že definice je korektní, neboť koeficenty $c_{-n}, \dots, c_n$ jsou pro trigonometrický polynom určeny jednoznačně (Lemma 15.2.3).

15.2.3. Lemma. Nechť posloupnost $\{\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}\}_{n=0}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k funkci f na $\mathbb{R}$. Pak pro každé $k \in \mathbb{Z}$ platí

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} \, \mathrm{d}t.$$

Důkaz. Vezměme $m \in \mathbb{Z}$ pevné. Pak

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i(k-m)t} \rightrightarrows f(t) e^{-imt} \text{ na } \mathbb{R},$$

a tedy z Věty **??** máme

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f(t) e^{-imt} \, \mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i(k-m)t} \, \mathrm{d}t \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i(k-m)t} \, \mathrm{d}t \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k \int_0^{2\pi} e^{i(k-m)t} \, \mathrm{d}t \\
&= 2\pi c_m,
\end{aligned}$$

jelikož

$$\int_0^{2\pi} e^{ijt} \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (\cos jt + i \sin jt) = \begin{cases} 0, & j \neq 0, \\ 2\pi, & j = 0. \end{cases}$$

Tím je důkaz hotov. ■

15.2.4. Označení. Množinu všech 2π-periodických funkcí s hodnotami v $\mathbb{C}$, které jsou integrovatelné na intervalu $[0, 2\pi]$ budeme značit $\mathcal{P}([0, 2\pi])$.

15.2.5. Definice. Nechť $f \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$. Definujme

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} \, \mathrm{d}t, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Čísla $\hat{f}(k), k \in \mathbb{Z}$, nazveme **komplexními Fourierovými koeficienty**. Řadu $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx}$ nazýváme **komplexním tvarem Fourierovy řady** funkce f a jejím n**-tým částečným součtem** rozumíme

$$s_n^f(x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikx}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Řekneme, že **součet Fourierovy řady** v bodě $x \in \mathbb{R}$ je roven $s \in \mathbb{C}$, pokud $\lim_{n\to\infty} s_n^f(x) = s$.

15.2.6. Poznámky. (a) Často se místo funkcí $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ pracuje s funkcemi $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$. Pak (komplexním) trigonometrickým polynomem, trigonometrickou řadou a Fourierovou řadou pro $f \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$ rozumíme postupně

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C}),$$

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C}),$$

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), \text{ kde}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \cos kt \, \mathrm{d}t, \ k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \sin kt \, \mathrm{d}t, \ k = 1, 2, \dots.$$

(b) Výše uvedené pojmy lze uvažovat i pro l-periodické funkce. Pak pracujeme se systémy $\{e^{i\frac{2\pi}{l}kx}\}$ nebo $1, \cos \frac{2\pi}{l}x, \sin \frac{2\pi}{l}x, \cos \frac{2\pi}{l}2x, \dots$.

15.2.7. Lemma. Nechť $f \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$ a $a \in \mathbb{R}$. Pak $\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{a+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Důkaz. Z věty o substituci **??** dostáváme $\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha+2k\pi}^{\beta+2k\pi} f(t)\,\mathrm{d}t, \alpha < \beta, k \in \mathbb{Z}$. Nalezneme $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $a \le 2k\pi < a + 2\pi$. Potom

$$\begin{aligned}\int_a^{a+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^{2k\pi} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{2k\pi}^{a+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{a-2(k-1)\pi}^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{a-2(k-1)\pi} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

■

15.2.8. Definice. (a) Nechť $f, g \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$. Pak **konvoluci** funkcí f a g definujeme jako

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ve Větě 15.2.9 ukážeme, že $f * g$ je dobře definovaná skoro všude konečná měřitelná funkce.

(b) Pro $f \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$ definujeme pseudonormu $\|\cdot\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])}$ předpisem

$$\|f\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

15.2.9. Věta (vlastnosti konvoluce)**.** Nechť $f, g \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$. Potom je pro skoro všechny $x \in [0, 2\pi]$ integrál

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x-t)g(t)|\,\mathrm{d}t \tag{15.3}$$

konečný. Definujeme pro tato x funkci

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t. \tag{15.4}$$

Pak $h \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$ a $\|h\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} \le \|f\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} \|g\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])}$. Pokud g je esenciálně omezená, platí $\|h\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} \le \|f\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} \|g\|_\infty$.

Důkaz. Dle Věty 15.1.3(a) existují borelovské funkce f_0, g_0 na $\mathbb{R}$ takové, že se rovnají f, respektive g, skoro všude. Integrály (15.3) a (15.4) se pro žádné x nezmění, nahradíme-li funkci f funkcí f_0 a funkci g funkcí g_0. Proto lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že f i g jsou borelovské.

Vzhledem k tomu, že máme v úmyslu užít Fubiniovy věty, je třeba ukázat, že funkce

$$F(x,t) = f(x-t)g(t)$$

je měřitelná na $[0, 2\pi]^2$. Ale zobrazení $[x,t] \mapsto x - t$, $[x,t] \mapsto t$ jsou borelovská na $[0, 2\pi]^2$, tedy i složení $[x,t] \mapsto f(x-t)$ a $[x,t] \mapsto g(t)$ jsou borelovská. Proto je součin $F(x,t) = f(x-t)g(t)$ borelovský. Protože

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{[0,2\pi]^2} |F(x,t)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(t)| \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x-t)|\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t \\ &= \|f\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} \|g\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} < \infty, \end{aligned} \tag{15.5}$$

je $|F|$ integrovatelná na $[0, 2\pi]^2$. Z Fubiniovy věty vyplývá, že integrál (15.4) existuje pro skoro všechna $x \in [0, 2\pi]$ a že $|h|$ je integrovatelná na $[0, 2\pi]$. Zjevně je h 2π-periodická, a tedy $h \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$.

Navíc z (15.5) dostáváme

$$\begin{aligned} \|h\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h(x)|\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{[0,2\pi]^2} |F(x,t)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &= \|f\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} \|g\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} . \end{aligned}$$

Je-li g esenciálně omezená, je požadovaný odhad zřejmý. ■

15.2.10. Všimněme si, že operace $f * g$ je komutativní, tj. $f * g = g * f$. Z věty o substituci totiž dostáváme

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{x-2\pi}^{x} f(s)g(x-s)\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x-s)f(s)\,\mathrm{d}s \\ &= g * f(x). \end{aligned}$$

15.3. Cesàrovská sčítatelnost Fourierových řad

15.3.1. Definice. Řekneme, že řada komplexních čísel $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je **sčítatelná Cesàrovou[1] metodou** k číslu $\sigma \in \mathbb{C}$, pokud platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1} = \sigma,$$

kde $s_k = \sum_{j=0}^{k} a_j$. Píšeme $(C)\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sigma$.

15.3.2. Poznámky. (a) Pokud $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sigma$, pak i $(C)\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sigma$ (viz Příklad **??**).

(b) Příkladem cesarovsky sčítatelné řady, která není konvergentní, je řada $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$. Ta není konvergentní, ale $(C)\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

15.3.3. Označení. Pro $f \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$ a $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ položíme

$$\sigma_n^f(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} s_j^f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ označme

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \quad \text{a} \\ K_n(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} D_j(x). \end{aligned}$$

Funkci D_n nazýváme **Dirichletovým jádrem**, K_n pak **Fejérovým jádrem**.

[1] Ernesto Cesàro (1859–1906)

15.3.4. Lemma (Vlastnosti Dirichletova jádra). (a) Pro každé $x \in \mathbb{R}\setminus\{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$ platí

$$D_n(x) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x}.$$

(b) Funkce D_n je spojitá, sudá, 2π-periodická a $D_n(0) = 2n+1$.
(c) Platí $\int_0^{2\pi} D_n(x) = 2\pi$.
(d) Pro každé $f \in \mathcal{P}([0,2\pi])$, $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí $s_n^f(x) = f * D_n(x)$.

Důkaz. (a) Počítejme pro $x \in \mathbb{R}\setminus\{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \sum_{j=-n}^{n} e^{ijx} = e^{-inx}\sum_{j=0}^{2n}(e^{ix})^j \\ &= e^{-inx}\frac{e^{i(2n+1)x}-1}{e^{ix}-1} = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})x}-e^{-i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}}} \\ &= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x} \end{aligned}$$

(všimněme si, že $e^{i\frac{x}{2}} \neq e^{-i\frac{x}{2}}$).

Tvrzení (b) a (c) jsou zřejmá.

(d) Máme

$$\begin{aligned} s_n^f(x) &= \sum_{k=-n}^{n}\hat{f}(k)e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t\right)e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(t)\sum_{k=-n}^{n}e^{ik(x-t)}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)D_n(x-t)\,\mathrm{d}t \\ &= D_n * f(x) = f * D_n(x). \end{aligned}$$

■

15.3.5. Lemma (Vlastnosti Fejérova jádra). (a) Pro každé $x \in \mathbb{R}\setminus\{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$ platí

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}\right)^2.$$

(b) Funkce K_n je spojitá, nezáporná, sudá, 2π-periodická a $K_n(0) = n+1$.
(c) $\int_0^{2\pi} K_n(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi$.
(d) Pro každé $f \in \mathcal{P}([0,2\pi])$, $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí $\sigma_n^f(x) = f * K_n(x)$.
(e) Posloupnost $\{K_n(t)\}$ konverguje k 0 lokálně stejnoměrně na $(0, 2\pi)$.

Důkaz. (a) Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$ máme $e^{ix} \neq e^{-ix}$ a lze tak psát

$$\begin{aligned}\left(e^{ix} + e^{3ix} + \dots + e^{(2n+1)ix}\right) &= e^{ix}\frac{1 - e^{2(n+1)ix}}{1 - e^{2ix}} \\ &= \frac{1}{\sin x}\frac{1}{-2i}\left(1 - \cos 2(n+1)x - i \sin 2(n+1)x\right).\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}&(\sin x + \sin 3x + \dots + \sin(2n+1)x) = \operatorname{Im}\left(e^{ix} + e^{3ix} + \dots + e^{(2n+1)ix}\right) \\ &= \operatorname{Im}\frac{1}{\sin x}\frac{1}{-2i}\left(1 - \cos 2(n+1)x - i \sin 2(n+1)x\right) \\ &= \frac{1}{\sin x}\frac{1}{2}(1 - \cos 2(n+1)x) \\ &= \frac{(\sin(n+1)x)^2}{\sin x}.\end{aligned}$$

Tedy dle Lemmatu 15.3.4(a) máme pro $\{x \notin 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$ rovnosti

$$\begin{aligned}K_n(x) &= \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} D_j(x) \\ &= \frac{1}{n+1}\frac{1}{\sin\frac{1}{2}x}\left(\sin\frac{1}{2}x + \sin\frac{3}{2}x + \dots + \sin(n+\frac{1}{2})x\right) \\ &= \frac{1}{n+1}\frac{(\sin(n+1)\frac{x}{2})^2}{(\sin\frac{x}{2})^2}.\end{aligned}$$

Tvrzení (b) a (c) jsou zřejmá.
(d) Platí

$$f * K_n(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{n+1}\int_0^{2\pi} f(x-t)\sum_{j=0}^{n} D_j(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} s_j^f(x) = \sigma_n^f(x).$$

(e) Zvolme $\delta \in (0,\pi)$ pevně. Potom pro $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ platí

$$0 \le K_n(x)\frac{1}{n+1}\frac{1}{(\sin\frac{1}{2}\delta)^2}.$$

Odtud máme stejnoměrnou konvergenci jádra K_n k 0 na $[\delta, 2\pi - \delta]$. ■

15.3.6. Věta (Fejér)**.** Nechť $f \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ a $x \in \mathbb{R}$.

(a) Má-li f v bodě x konečné jednostranné limity $f(x+)$ a $f(x-)$, pak

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^f(x) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)).$$

(b) Je-li f spojitá na intervalu $(a,b) \subset \mathbb{R}$, pak $\{\sigma_n^f\}$ konverguje lokálně stejnoměrně k f na (a,b).

Důkaz. (a) Označme $s = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$. Protože

$$\int_{-\pi}^{0} (f(x-t)-s)K_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\pi}^{0} (f(x+z)-s)K_n(-z)(-1)\,\mathrm{d}z = \int_{0}^{\pi} (f(x+t)-s)K_n(t)\,\mathrm{d}t,$$

máme

$$\begin{aligned}
\sigma_n^f(x) - s &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f(x-t)-s)K_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t)-s)K_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} (f(x-t)-s)K_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi} (f(x-t)-s)K_n(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t) - 2s)K_n(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Mějme dáno $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Protože $\lim_{t\to 0_+}(f(x+t) + f(x-t) - 2s) = 0$, existuje $\delta \in (0,\infty)$ takové, že

$$|f(x+t) + f(x-t) - 2s| < \varepsilon, \quad t \in (0,\delta).$$

K tomuto δ najdeme dle Lemmatu 15.3.5(e) index $n_0 \in \mathbb{N}$ takový, že $K_n(t) \le \varepsilon$ pro $n \ge n_0$ a $t \in [\delta,\pi]$. Pro tato n pak máme

$$\begin{aligned}
\left|\sigma_n^f(x) - s\right| &\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} |f(x+t) + f(x-t) - 2s|\, K_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta} |f(x+t) + f(x-t) - 2s|\, K_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} |f(x+t) + f(x-t) - 2s|\, K_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&\le \varepsilon\frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta} K_n(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} |f(x+t) + f(x-t) - 2s|\,\varepsilon\,\mathrm{d}t \\
&\le \varepsilon + \varepsilon\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (|f(x+t)| + |f(x-t)| + 2|s|)\,\mathrm{d}t \\
&\le \varepsilon + \varepsilon\left(\int_x^{x+\pi} |f(u)|\,\mathrm{d}u + \int_{x-\pi}^{x} |f(u)|\,\mathrm{d}u + |s|\right) \\
&\le \varepsilon + \varepsilon\left(2\,\|f\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} + |s|\right).
\end{aligned}$$

Tedy $\sigma_n^f(x) \to s$ pro $n \to \infty$.

(b) Zvolme $[A,B] \subset (a,b)$ a najděme $\omega \in (0,\pi)$ takové, že $[A-\omega, B+\omega] \subset (a,b)$. Označíme-li $M = \sup\{|f(z)|;\ z \in [A,B]\}$, pak $M \in \mathbb{R}$ dle Věty **??**. Mějme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ dáno. Díky Větě **??** najdeme $\delta \in (0,\omega)$ takové, že

$$\forall x \in [A,B]\ \forall t \in (-\delta,\delta) : |f(x+t) - f(x)| < \varepsilon.$$

Dále nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ a $t \in [\delta, 2\pi - \delta]$ platí $K_n(t) \leq \varepsilon$. Potom pro každé $x \in [A, B]$ a $n \geq n_0$ platí

$$\begin{aligned}
&\left|\sigma_n^f(x) - f(x)\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))\, K_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} |f(x-t) - f(x)|\, K_n(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} |f(x-t) - f(x)|\, K_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|\, K_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} |f(x-t) - f(x)|\, \varepsilon\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \varepsilon K_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|\, \varepsilon\,\mathrm{d}t \\
&\leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(z)|\,\mathrm{d}z + |f(x)| + 1\right)\varepsilon \\
&\leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(z)|\,\mathrm{d}z + M + 1\right)\varepsilon.
\end{aligned}$$

Tedy $\sigma_n^f \rightrightarrows f$ na $[A, B]$. ■

15.3.7. Důsledek. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je spojitá 2π-periodická funkce. Potom existuje posloupnost trigonometrických polynomů, která stejnoměrně konverguje k f na $\mathbb{R}$.

Důkaz. Podle Fejérovy věty 15.3.6 platí $\sigma_n^f \rightrightarrows f$ na $[0, 2\pi]$, tedy i na $\mathbb{R}$. Vzhledem k tomu, že σ_n^f jsou trigonometrické polynomy, je důkaz dokončen. ■

15.3.8. Poznámka. Je-li f reálná, jsou i funkce σ_n^f reálné.

15.3.9. Věta. Nechť $f \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$. Potom $\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sigma_n^f \right\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} = 0$.

Důkaz. Nechť $\varepsilon \in (0, \infty)$ je dáno. Nalezneme spojitou funkci $g \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$ takovou, že $\|f - g\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} < \varepsilon$ (viz Věta 15.1.3(b)). Protože $\sigma_n^g \rightrightarrows g$ na $\mathbb{R}$, platí $\|g - \sigma_n^g\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} \to 0$. Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je zvoleno tak, že $\|g - \sigma_n^g\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} < \varepsilon$ pro $n \geq n_0$. Pro $n \geq n_0$ pak máme

$$\begin{aligned}
\left\| f - \sigma_n^f \right\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} &\leq \|f - g\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} + \|g - \sigma_n^g\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} + \left\|\sigma_n^g - \sigma_n^f\right\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} \\
&\leq \varepsilon + \varepsilon + \|(g - f) * K_n\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} \\
&\leq 2\varepsilon + \|g - f\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])}\, \|K_n\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} \\
&\leq 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. ■

15.3.10. Věta (Riemannovo-Lebesgueovo lemma). Nechť $f \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$. Pak $\lim_{k\to\pm\infty} \hat{f}(k) = 0$.

Důkaz. Mějme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ dáno. Dle Věty 15.1.3(b) existuje spojitá funkce $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ taková, že $\|f - g\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} < \varepsilon$. Dále nalezneme díky Větě 15.3.7 trigonometrický polynom P takový, že $\|g - P\|_\infty < \varepsilon$. Pak máme

$$\|f - P\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} \le \|f - g\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} + \|g - P\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} \le 2\varepsilon.$$

Vezměme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{Z}, |n| \ge n_0 : \hat{P}(n) = 0.$$

Pak pro $n \in Z$, $|n| \ge n_0$ platí

$$\begin{aligned}\left|\hat{f}(n)\right| = \left|\hat{f}(n) - \hat{P}(n)\right| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f(t) - P(t))\, e^{-int}\right| \\ &\le \|f - P\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} \le 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Tedy $\lim_{k\to\pm\infty} \hat{f}(k) = 0$. ■

15.3.11. Věta (O lokalizaci)**.** Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$ a $f(t) = g(t)$ pro $t \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Potom $\lim_{n\to\infty} s_n^f(x) - s_n^g(x) = 0$.

Důkaz. Důkaz plyne z Riemannovo-Lebesgueovo lemmatu 15.3.10, jelikož

$$h(t) = \frac{f(x-t) - g(x-t)}{\sin\frac{t}{2}}, \quad t \in \mathbb{R},$$

je dle předpokladu integrovatelná na $[-\pi, \pi]$ ($h(t) = 0$ pro $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$), a tedy máme díky rovnostem

$$\begin{aligned} s_n^f(x) - g_n^f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - g(x-t))\, D_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)\sin(n + \frac{1}{2})t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(h(t)\frac{1}{2i}e^{i\frac{t}{2}}e^{int} - h(t)\frac{1}{2i}e^{-i\frac{t}{2}}e^{-int}\right)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

požadovaný výsledek $\lim_{n\to\infty}\left(s_n^f(x) - s_n^g(x)\right) = 0$. ■

15.3.12. Věta. Nechť $f, g \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$. Pokud $\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$, potom $f = g$ skoro všude.

Důkaz. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme $\sigma_n^f = \sigma_n^g$. Podle Věty 15.3.9 platí $\left\|\sigma_n^f - f\right\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} \to 0$, $\left\|\sigma_n^g - g\right\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} \to 0$, a tedy $\|f - g\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} = 0$. Proto $f = g$ skoro všude. ■

15.4. Bodová konveregence Fourierových řad

15.4.1. Věta (Hardy). Nechť $\{a_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost komplexních funkcí na množině M taková, že existuje $K \in \mathbb{R}$ splňující $|ka_k(x)| \leq K$ pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $x \in M$. Pokud $(C)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) \rightrightarrows s(x)$ na množině M, potom $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) \rightrightarrows s(x)$ na M.

Důkaz. Označme pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in M$

$$s_n(x) = a_0(x) + \cdots + a_n(x),$$
$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}\left(s_0(x) + \cdots + s_n(x)\right).$$

Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ je dáno. Nalezneme $\lambda \in (1, \infty)$ takové, že $K(\lambda - 1) < \varepsilon$. Potom

$$\sum_{n<k\leq[\lambda n]} |a_k(x)| \leq \frac{K}{n}(\lambda n - n) = K(\lambda - 1). \tag{15.6}$$

Elementárními úpravami obdržíme

$$\begin{aligned}&([\lambda n]+1)\,\sigma_{[\lambda n]}(x) - (n+1)\sigma_n(x) = s_{n+1}(x) + \cdots + s_{[\lambda n]}(x)\\ &= ([\lambda n]-n)\,s_n(x) + ([\lambda n]-n)\,a_{n+1}(x) + ([\lambda n]-n-1)\,a_{n+2}(x) + \cdots + a_{[\lambda n]}(x).\end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned}&([\lambda n]-n)\,(s_n(x) - \sigma_n(x))\\ &= ([\lambda n]+1)\,\sigma_{[\lambda n]}(x) - (n+1)\sigma_n(x) - \sum_{n<k\leq[\lambda n]} ([\lambda n]+1-k)\,a_k(x) - ([\lambda n]-n)\,\sigma_n(x)\\ &= ([\lambda n]+1)\,\sigma_{[\lambda n]}(x) - ([\lambda n]+1)\,\sigma_n(x) - \sum_{n<k\leq[\lambda n]} ([\lambda n]+1-k)\,a_k(x).\end{aligned}$$

Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $(\lambda - 1)n_0 - 1 > 0$. Potom pro $n \geq n_0$ máme

$$s_n(x) - \sigma_n(x) = \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}\left(\sigma_{[\lambda n]}(x) - \sigma_n(x)\right) - \frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{n<k\leq[\lambda n]} ([\lambda n]+1-k)\,a_k(x),$$

a tedy z (15.6) platí

$$\begin{aligned}&|s_n(x) - \sigma_n(x)|\\ &\leq \frac{\lambda n+2}{(\lambda-1)n-1}\left(\left|\sigma_{[\lambda n]}(x) - s(x)\right| + |\sigma_n(x) - s(x)|\right) + \frac{\lambda n+1-n}{[\lambda n]-n}\sum_{n<k\leq[\lambda n]} |a_k(x)|\\ &\leq \frac{\lambda n+2}{(\lambda-1)n-1}\left(\left|\sigma_{[\lambda n]}(x) - s(x)\right| + |\sigma_n(x) - s(x)|\right) + \frac{(\lambda-1)n+1}{(\lambda-1)n-1}K(\lambda-1).\end{aligned}$$

Tedy

$$\limsup_{n\to\infty} \|s_n(x) - \sigma_n(x)\|_\infty \leq \frac{\lambda}{\lambda-1}\cdot 0 + K(\lambda-1) < \varepsilon.$$

Jelikož ε bylo libovolné, platí

$$\lim_{n\to\infty} \|s_n(x) - \sigma_n(x)\|_\infty = 0,$$

a tedy

$$s_n(x) \rightrightarrows s(x).$$

■

15.4.2. Věta. Nechť f je 2π-periodická funkce s konečnou variací na $[0, 2\pi]$. Pak existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $\left|k\hat{f}(k)\right| \leq K$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$.

Důkaz. Jelikož pro $n \in \mathbb{Z}$ platí

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x,$$

substitucí $y = x - \frac{\pi}{n}$ pro $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ dostaneme

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{n}}^{2\pi-\frac{\pi}{n}} f(y + \frac{\pi}{n})e^{-iny-i\pi}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y + \frac{\pi}{n})e^{-iny}\,\mathrm{d}y.$$

Proto

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2}(\hat{f}(n) + \hat{f}(n)) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \left(f(x) - f(x + \frac{\pi}{n})\right) e^{-inx}\,\mathrm{d}x,$$

a tedy

$$\left|\hat{f}(n)\right| \leq \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(x) - f(x + \frac{\pi}{n})\right|\,\mathrm{d}x.$$

Po další substituci obdržíme použitím periodicity rovnost

$$\int_0^{2\pi} \left|f(x + k\frac{\pi}{n}) - f(x + (k-1)\frac{\pi}{n})\right|\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \left|f(x + \frac{\pi}{n}) - f(x)\right|\,\mathrm{d}x, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Máme tedy pro $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ odhad

$$\begin{aligned}
\left|\hat{f}(n)\right| &\leq \frac{1}{8\pi n}\sum_{k=1}^{2n}\int_0^{2\pi} \left|f(x + \frac{\pi}{n}) - f(x)\right|\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{8\pi n}\sum_{k=1}^{2n}\int_0^{2\pi} \left|f(x + k\frac{\pi}{n}) - f(x + (k-1)\frac{\pi}{n})\right|\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{8\pi n}\int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{2n} \left|f(x + k\frac{\pi}{n}) - f(x + (k-1)\frac{\pi}{n})\right|\,\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{8\pi n}\int_0^{2\pi} V(f; 0, 2\pi)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{V(f; 0, 2\pi)}{4n}.
\end{aligned}$$

■

15.4.3. Věta (Jordanovo-Dirichletovo kritérium). Nechť $f \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$ je funkce s konečnou variací na intervalu $[0, 2\pi]$.

(a) Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom má funkce f v bodě x vlastní limitu zleva i zprava (označme je po řadě $f(x-)$ a $f(x+)$) a platí

$$\lim_{n\to\infty} s_n^f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x+) + f(x-)\right).$$

(b) Je-li navíc f spojitá na otevřeném intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$, pak $\{s_n^f\}$ konverguje lokálně stejnoměrně k f na (a, b).

Důkaz. (a) Nechť f je funkce s konečnou variací. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že f je reálná. Pak $f = f_1 - f_2$, kde f_1, f_2 jsou neklesající (viz Věta 14.3.4). Protože každá neklesající funkce má vlastní jednostranné limity (Věta **??**), má je i f. Dle Věty 15.3.6 platí $\sigma_n^f(x) \to \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$. Protože dle Věty 15.4.2 splňují koeficienty odhady nutné pro použití Hardyho věty 15.4.1, konvergují k $\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$ i součty $s_n^f(x)$.

(b) Postupujme obdobně jako v (a), jenom použijeme tvrzení (b) z Věty 15.3.6. ∎

15.4.4. Věta (Diniho kritérium). Nechť $f \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$, $x \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{C}$ a nechť existuje $\delta \in (0, \infty)$ takové, že

$$\int_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2s}{t}\,\mathrm{d}t$$

konverguje. Potom $\lim_{n\to\infty} s_n^f(x) = s$.

Důkaz. Předpokládejme, že $\delta \in (0, \pi)$. Z Lemmatu 15.3.4(d),(c) máme

$$\begin{aligned}
s_n^f(x) - s &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) D_n(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s D_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - s)\, D_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} (f(x-t) - s)\, D_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi} (f(x-t) - s)\, D_n(t)\,\mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t) - 2s)\, D_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2s}{\sin \frac{t}{2}} \sin(n + \frac{1}{2})t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2s}{t} \frac{t}{\sin \frac{t}{2}} \sin(n + \frac{1}{2})t\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2s}{\sin \frac{t}{2}} \sin(n + \frac{1}{2})t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2s}{t} \frac{t}{\sin \frac{t}{2}} \frac{1}{2i} (e^{i\frac{t}{2}} e^{int} - e^{-i\frac{t}{2}} e^{-int})\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2s}{\sin \frac{t}{2}} \frac{1}{2i} (e^{i\frac{t}{2}} e^{int} - e^{-i\frac{t}{2}} e^{-int})\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Protože je funkce

$$t \mapsto \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2s}{t} \frac{t}{\sin \frac{t}{2}}$$

integrovatelná dle předpokladu na na $(0, \delta)$, stejně jako je integrovatelná funkce

$$t \mapsto \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2s}{\sin \frac{t}{2}}$$

na (δ, π), oba integrály konvergují k 0 dle Riemannovo-Lebesgueovo lemmatu 15.3.10. Tedy $s_n^f(x) - s \to 0$. ■

15.4.5. Věta. Nechť $f \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$ a $x \in \mathbb{R}$.

(a) Existují-li vlastní jednostranné limity $f(x-)$ a $f(x+)$ a také konečné limity

$$\lim_{t \to x-} \frac{f(t) - f(x-)}{t - x}, \quad \lim_{t \to x+} \frac{f(t) - f(x+)}{t - x},$$

pak $s_n^f(x) \to \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$. Speciálně, pokud f má konečné jednostranné derivace v x, pak $s_n^f(x) \to f(x)$.

(b) Nechť existují čísla $\alpha, \delta, K \in (0, \infty)$ taková, že

$$\forall t \in (-\delta, \delta) : |f(x+t) - f(x)| \le K\, |t|^{\alpha}.$$

Pak $s_n^f(x) \to f(x)$.

Důkaz. (a) Díky předpokladům vidíme, že existuje $\delta \in (0, \infty)$ takové, že obě funkce

$$t \mapsto \frac{1}{t}(f(x+t) - f(x+)), \quad t \mapsto \frac{1}{t}(f(x-t) - f(x-))$$

jsou omezené na $(0, \delta)$. Pro $s = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$ pak dostáváme omezenost funkce

$$t \mapsto \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2s}{t} = \frac{f(x+t) - f(x+)}{t} + \frac{f(x-t) - f(x-)}{t}$$

na $(0, \delta)$. Z Věty 15.4.4 pak plyne závěr.

(b) Mějme příslušná α, δ a K a položme $s = f(x)$. Pak pro $t \in (0, \delta)$ platí

$$\frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2s|}{t} \le \frac{|f(x+t) - f(x)|}{t} + \frac{|f(x-t) - f(x)|}{t} \le 2Kt^{\alpha-1}.$$

Tedy je funkce

$$t \mapsto \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2s|}{t}$$

integrovatelná na $(0, \delta)$, takže tvrzení opět plyne z Diniho kritéria 15.4.4. ■

15.5. Fourierovy řady v Hilbertových prostorech

Budeme pracovat s vektorovými prostory nad tělesem $\mathbb{F}$ reálných nebo komplexních čísel.

15.5.1. Věta (Cauchy-Schwarz)**.** Nechť $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je unitární prostor. Pak

$$|\langle x, y\rangle| \le \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}, \quad x, y \in X.$$

Důkaz. K důkazu zvolme $x, y \in X$. Pak je funkce

$$t \mapsto \langle x - ty, y - ty\rangle, \quad t \in \mathbb{R},$$

reálný kvadratický polynom nezáporný na $\mathbb{R}$, protože

$$\begin{aligned} 0 \le \langle x - ty, y - ty\rangle &= \langle x, x\rangle + t^2\langle y, y\rangle - t\langle y, x\rangle - t\langle x, y\rangle \\ &= \|x\|^2 + t^2\|y\|^2 - t(\langle x, y\rangle + \overline{\langle y, x\rangle}) \\ &= t^2\|y\|^2 - 2t\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \|x\|^2. \end{aligned}$$

Tento polynom tedy musí mít nekladný diskriminant, tj.

$$4(\operatorname{Re}\langle x, y\rangle)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \le 0.$$

Dostáváme

$$|\operatorname{Re}\langle x, y\rangle| \le \|x\|\|y\|.$$

Vezměme nyní $\alpha \in \mathbb{C}$ z jednotkové kružnice splňující $|\langle x, y\rangle| = \alpha\langle x, y\rangle$. Pak z právě dokázané nerovnosti máme

$$\|x\|\|y\| = \|\alpha x\|\|y\| \ge |\operatorname{Re}\langle \alpha x, y\rangle| = |\operatorname{Re}\alpha\langle x, y\rangle| = |\langle x, y\rangle|.$$

■

15.5.2. Věta. Nechť $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je unitární prostor. Pak $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ je norma na X.

Důkaz. Vlastnosti normy pro zobrazení $x \mapsto \sqrt{\langle x, x\rangle}$, $x \in H$, snadno plynou z vlastností skalárního součinu. Trojúhelníková nerovnost pak platí díky Větě 15.5.1, protože

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle \\ &\le \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

■

15.5.3. Lemma. Nechť X je unitární prostor. Pak je zobrazení $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{F}$ je spojité.

Důkaz. Nechť máme dány posloupnosti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ v X konvergující po řadě k x a y. Pak $\|x_n\| \to \|x\|$ a tedy posloupnost $\{\|x_n\|\}$ je omezená. Proto rozdíl

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| \\ &= |\langle x_n, y_n - y\rangle + \langle x_n - x, y\rangle| \\ &\le \|x_n\|\,\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\,\|y\| \end{aligned}$$

konverguje k 0. ■

15.5.4. Definice. Nechť X je unitární prostor. Pokud X je úplný v metrice indukované normou $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, pak se nazývá **Hilbertovým prostorem**.

15.5.5. Definice. Nechť X je unitární prostor, Γ indexová množina a $\{x_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ je systém prvků prostoru X.

- Řekneme, že systém $\{x_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ je **ortogonální**, pokud platí
  $$\forall \gamma, \gamma' \in \Gamma, \gamma \neq \gamma' : \langle x_\gamma, x_{\gamma'}\rangle = 0.$$
  Je-li navíc $\|x_\gamma\| = 1$ pro každé $\gamma \in \Gamma$, nazýváme systém $\{x_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ **ortonormální**.
- Ortogonální systém $\{x_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ je **úplný**, pokud jeho lineární obal je hustý v X.
- Ortogonální systém $\{x_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ je **maximální**, jestliže neexistuje prvek $x \in X \setminus \{0\}$ kolmý na každý vektor x_γ, $\gamma \in \Gamma$.

15.5.6. Věta. Nechť $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je ortogonální posloupnost v Hilbertově prostoru X.

(a) Řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^2$.

(b) Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$, potom

$$\left\|\sum_{n=1}^\infty x_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^2.$$

Důkaz. (a) Nechť $\{s_k\}$ značí posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Předpokládejme nejprve, že $s_n \to s$ pro nějaké $s \in X$, tj. řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje. Pak ale ze spojitosti skalárního součinu a ortogonality prvků $\{x_n\}$ máme

$$\begin{aligned}\langle s, s\rangle &= \lim_{k\to\infty} \langle s_k, s_k\rangle = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k}\sum_{m=1}^{k} \langle x_n, x_m\rangle \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \langle x_n, x_n\rangle = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \|x_n\|^2 .\end{aligned}$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ je konvergentní a její součet je $\|s\|^2$.

Předpokládejme na druhou stranu, že $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ konverguje. Ukážeme, že posloupnost $\{s_k\}$ je cauchyovská v X. Pro dané $\varepsilon \in (0, \infty)$ totiž najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $l \geq k \geq n_0$ platí

$$\sum_{n=k}^{l} \|x_n\|^2 < \varepsilon.$$

Pak pro $k, l \in \mathbb{N}$, $l > k \geq n_0$ dostáváme

$$\|s_l - s_k\|^2 = \langle x_{k+1} + \cdots + x_l, x_{k+1} + \cdots + x_l\rangle = \sum_{n=k+1}^{l} \|x_n\|^2 < \varepsilon.$$

Díky úplnosti prostoru X tedy částečné součty řady $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ tvoří konvergentní posloupnost, tj. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje.

Vzhledem k tomu, že tvrzení (b) jsme dokázali v první části důkazu (a), jsem s důkazem věty hotovi. ■

15.5.7. Věta. Nechť $\{v_n\}$ je ortogonální posloupnost nenulových prvků v unitárním prostoru X. Nechť $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n$, $c_n \in \mathbb{F}$. Potom $c_n = \frac{\langle x, v_n\rangle}{\|v_n\|^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Důkaz. Díky spojitosti skalárního součinu máme pro každé $n \in \mathbb{N}$ rovnost

$$\langle x, v_n\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle \sum_{j=1}^{k} c_j v_j, v_n\rangle = c_n \langle v_n, v_n\rangle.$$

■

15.5.8. Definice. Nechť $\{v_n\}$ je ortogonální posloupnost nenulových prvků v unitárním prostoru X a $x \in X$. Platí-li $c_n = \frac{\langle x, v_n\rangle}{\|v_n\|^2}$, $n \in \mathbb{N}$, nazveme $\{c_n\}$ **Fourierovy koeficienty** x **vzhledem k** $\{v_n\}$.

15.5.9. Věta. Nechť X je unitární prostor a $\{v_n\}$ je ortonormální posloupnost v X. Nechť $x \in X$ a $\{c_n\}$ jsou Fourierovy koeficienty prvku x vzhledem k $\{v_n\}$. Potom platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leq \|x\|^2 \qquad \text{(Besselova nerovnost).}$$

Pokud $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \|x\|^2 \qquad \text{(Parsevalova rovnost)}$$

Důkaz. Vezměme $k \in \mathbb{N}$ pevné a položme $s_k = \sum_{n=1}^{k} c_n v_n$. Pak

$$\forall n \in \{1, \dots, k\} : \langle x - s_k, v_n \rangle = \langle x, v_n \rangle - c_n = 0.$$

Tedy i $\langle x - s_k, s_k \rangle = 0$. Proto

$$\|x\|^2 = \|x - s_k + s_k\|^2 = \|x - s_k\|^2 + \|s_k\|^2 \geq \|s_k\|^2 = \sum_{n=1}^{k} |c_n|^2.$$

Jelikož $k \in \mathbb{N}$ bylo libovolné, Besselova nerovnost je ověřena.

Platí-li $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n$, pak máme z Věty 15.5.6(b) vztah

$$\|x\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n \right\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|c_n v_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2,$$

tj. Parsevalovu rovnost. ■

15.5.10. Definice. Nechť X je normovaný lineární prostor. Posloupnost $\{v_n\}$ prvků z X se nazývá **Schauderova báze**, jestliže pro každý bod $x \in X$ existuje právě jedna posloupnost $\{c_n\}$ prvků z $\mathbb{F}$, pro kterou platí $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n$.

15.5.11. Věta. Nechť X je Hilbertův prostor a $\{v_n\}$ je ortogonální systém nenulových prvků prostoru X. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

(i) $\{v_n\}$ je Schauderova báze,
(ii) $\{v_n\}$ je úplný ortogonální systém,
(iii) $\{v_n\}$ je maximální ortogonální systém.

Důkaz. (i) $\implies$ (ii) Nechť $\{v_n\}$ je Schauderova báze. Vzhledem k tomu, že každý prvek $x \in X$ je pak limitou lineárních kombinací prvků $\{v_n\}$, je lineární obal $\{v_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ hustý v X. Tedy $\{v_n\}$ je úplný.

(ii) $\implies$ (iii) Nechť x je vektor kolmý na všechny v_n, $n \in \mathbb{N}$. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ je libovolné. Díky (ii) najdeme čísla $c_1, \dots, c_n$ taková, že $\left\| x - \sum_{i=1}^{n} c_i v_i \right\|^2 < \varepsilon$. Pak

$$\varepsilon > \left\| x - \sum_{i=1}^{n} c_i v_i \right\| = \|x\|^2 + \left\| \sum_{i=1}^{n} c_i v_i \right\|^2 \geq \|x\|^2 .$$

Jelikož ε bylo libovolné, $\|x\| = 0$ a $\{v_n\}$ je maximální systém.

(iii) $\implies$ (i) Mějme dáno $x \in X$. Položme $c_n = \frac{\langle x, v_n \rangle}{\|v_n\|}$, $n \in \mathbb{N}$, tj. c_n jsou Fourierovy koeficienty x vzhledem k ortonormálnímu systému $\{\frac{v_n}{\|v_n\|}\}$. Díky Besselově nerovnosti (Věta 15.5.9 platí

$$\|x\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left\| c_n \frac{v_n}{\|v_n\|} \right\|^2 .$$

Podle Věty 15.5.6(a) je řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{v_n}{\|v_n\|}$ konvergentní; označme tedy její součet jako y. Pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}\langle x - y, v_k \rangle &= \langle x - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{v_n}{\|v_n\|}, v_k \rangle = \lim_{j \to \infty} \langle x - \sum_{n=1}^{j} c_n \frac{v_n}{\|v_n\|}, v_k \rangle \\ &= \langle x, v_k \rangle - \langle x, v_k \rangle = 0.\end{aligned}$$

Tedy $x - y$ je vektor, jehož skalární součin se všemi vektory v_k, $k \in \mathbb{N}$, je 0. Z maximality systému $\{v_n\}$ plyne $x - y = 0$, neboli

$$x = y = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{v_n}{\|v_n\|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle x, v_n \rangle}{\|v_n\|^2} v_n.$$

Zbývá již jen dokázat, že koeficienty $c_n = \frac{\langle x, v_n \rangle}{\|v_n\|^2}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou jednoznačně určeny. To ale plyne z Věty 15.5.7. ■

15.5.12. Věta. Je-li X nekonečně-dimenzionální separabilní Hilbertův prostor, má ortonormální Schauderovu bázi.

Navíc je každý nekonečně-dimenzionální separabilní Hilbertův prostor s X izometricky izomorfní.

Důkaz. Vezměme spočetnou hustou množinu $\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ v X a indukcí z ní vybereme množinu $\{x_{n_k}\}$ nenulových vektorů takovou, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ je množina $\{x_{n_1}, \dots, x_{n_k}\}$ lineárně nezávislá a její lineární obal je roven lineárnímu obalu množiny $\{x_1, \dots, x_{n_k}\}$.

Postupujeme takto: Bez újmy na obecnosti předpokládáme, že všechny vektory x_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou nenulové a položíme $n_1 = 1$. Předpokládejme nyní, že máme vybrány indexy $n_1, \dots, n_k$ takové, že vektory $\{x_{n_1}, \dots, x_{n_k}\}$ jsou lineárně nezávislé a jejich lineární obal M je roven lineárnímu obalu množiny $\{x_1, \dots, x_{n_k}\}$. Položme $n_{k+1} = \min\{n > n_k;\ x_n \notin M\}$. Pak $x_{n_k+1}, \dots, x_{n_{k+1}-1} \in M$, a tedy lineární obal množiny $\{x_{n_1}, \dots, x_{n_{k+1}}\}$ je roven lineárnímu obalu množiny $\{x_1, \dots, x_{n_{k+1}}\}$. Navíc je $x_{n_{k+1}} \notin M$, a tedy je množina $\{x_{n_1}, \dots, x_{n_{k+1}}\}$ lineárně nezávislá.

Označme nyní vektory $\{x_{n_k}\}$ jako $\{y_k\}$. Pak $\{y_k\}$ je lineárně nezávislá množina vektorů, jejíž lineární obal je roven lineárnímu obalu $\{x_n\}$, tj. je hustý v X. Gramovým-Schmidtovým ortogonalizačním procesem nyní sestrojíme vektory $\{u_k\}$, které budou navzájem kolmé a bude pro ně platit, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ je lineární obal $\{u_1, \dots, u_k\}$ roven lineárnímu obalu $\{y_1, \dots, y_k\}$. Opět postupujeme induktivně. V prvním kroku položíme $u_1 = y_1$. Máme-li nyní navzájem kolmé vektory $\{u_1, \dots, u_k\}$, jejichž lineární obal souhlasí s lineárním obalem množiny $\{y_1, \dots, y_k\}$, položíme

$$u_{k+1} = y_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle y_{k+1}, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i.$$

Pak u_{k+1} je kolmý na všechny $u_1, \dots, u_k$, je nenulový a lineární obal $\{u_1, \dots, u_{k+1}\}$ je roven lineárnímu obalu množiny $\{y_1, \dots, y_k\}$. Tím je konstrukce ukončena.

Máme tedy ortogonální systém $\{u_k\}$ nenulových vektorů, jehož lineární obal je hustý v X. Uvažujeme-li nyní místo něj systém $\{\frac{u_k}{\|u_k\|}\}$, dostáváme úplný ortonormální systém, a tedy bázi (Věta 15.5.11).

K důkazu druhé části tvrzení stačí dokázat, že každý nekonečně-dimenzionální prostor je izometricky izomorfní s ℓ^2. Vezměme tedy ortonormální bázi $\{v_n\}$ prostoru X a definujme zobrazení $F : X \to \ell^2$ jako

$$Fx = \{\langle x, v_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}, \quad x \in X.$$

Dle Parsevalovy rovnosti 15.5.9 je

$$\|Fx\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, v_n\rangle|^2 = \|x\|_X^2 < \infty, \quad x \in X,$$

a tedy je F skutečně zobrazení do ℓ^2. Navíc je F izometrické a zjevně lineární. Zbývá ukázat jeho surjektivitu. Máme-li tedy dán prvek $c = \{c_n\} \in \ell^2$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n$ je konvergentní dle Věty 15.5.6. Položíme-li $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n$, pak $Fx = c$ dle Věty 15.5.7, a F je tedy na. Tím je důkaz dokončen. ∎

15.5.13. Věta. Prostor $L^2(0, 2\pi)$ se skalárním součinem

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g}(x)\,\mathrm{d}x, \quad f, g \in L^2(0, 2\pi),$$

tvoří Hilbertův prostor. Systém $e^{i0x}, e^{i1x}, e^{-i1x}, e^{i2x}, e^{-2x}, \dots$ tvoří ortonormální bázi $L^2(0, 2\pi)$.

Důkaz. Zobrazení $\langle\cdot,\cdot\rangle$ je zjevně skalární součin, přičemž nulovost funkce f splňující $\langle f, f\rangle = 0$ plyne snadno z vlastností integrálu. Úplnost prostoru $L^2(0, 2\pi)$ je pak dokázána v [**?**,].

Funkce $e^{i0x}, e^{i1x}, e^{-i1x}, e^{i2x}, e^{-2x}, \dots$ zřejmě tvoří ortonormální systém. Ukažme, že jeho lineární obal je hustý v $L^2(0, 2\pi)$. Mějme tedy danou funkci $f \in L^2(0, 2\pi)$ a $\varepsilon \in (0, \infty)$. Z Věty 15.1.3(b) najdeme spojitou funkci $g : [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$ takovou, že $\|f - g\|_2 < \varepsilon$. Podle Věty 15.3.7 existuje trigonometrický polynom P splňující $\|g - P\|_\infty < \varepsilon$. Pak

$$\begin{aligned}\|f - P\|_2 &\le \|f - g\|_2 + \|g - P\|_2 \le \varepsilon + \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} |g(x) - P(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\le \varepsilon(1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}).\end{aligned}$$

Dle Věty 15.5.11 je tedy systém $e^{i0x}, e^{i1x}, e^{-i1x}, e^{i2x}, e^{-2x}, \dots$ ortonormální bází v $L^2(0, 2\pi)$. ∎

15.5.14. Důsledek. Nechť $f \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$ a $|f|^2$ je integrovatelná na $[0, 2\pi]$. Potom

(a) f je integrovatelná na $[0, 2\pi]$,

(b) platí

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{inx} \quad \text{v } L^2(0, 2\pi)$$

(c) a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(n)\right|^2.$$

Důkaz. (a) Je-li $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x$ konečný, je z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti konečný i integrál

$$\int_0^{2\pi} |f(x)| \,\mathrm{d}x \le \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{2\pi} 1 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

(b) Protože je systém $e^{i0x}, e^{i1x}, e^{-i1x}, e^{i2x}, e^{-2x}, \dots$ ortonormální bází v $L^2(0, 2\pi)$ podle Věty 15.5.13, ve smyslu prostoru $L^2(0, 2\pi)$ platí

$$\begin{aligned} f &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, e^{inx}\rangle e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx} \,\mathrm{d}x\right) e^{inx} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{inx}. \end{aligned}$$

(c) Parsevalova rovnost 15.5.9 pak dostává tvar

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \|f\|_{L^2(0,2\pi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\langle f, e^{inx}\rangle\right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(n)\right|.$$

■

15.5.15. Věta (Riesz-Fischer)**.** Nechť c_n, $n \in \mathbb{Z}$, jsou komplexní čísla splňující $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$. Pak existuje $f \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$ taková, že $|f|^2$ je integrovatelná na $[0, 2\pi]$ a $\hat{f}(n) = c_n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Důkaz. Opět použijeme fakt, že systém $e^{i0x}, e^{i1x}, e^{-i1x}, e^{i2x}, e^{-2x}, \dots$ tvoří ortonormální bázi v $L^2(0, 2\pi)$. Tedy podle Věty 15.5.6 je funkce

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

prvkem $L^2(0, 2\pi)$. Věta 15.5.7 pak dává, že

$$c_n = \langle f, e^{inx}\rangle = \hat{f}(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

■

15.6. Teoretické příklady k Fourierovým řadám

15.6.1. Příklad. Nechť řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ konvergují. Pak jejich Cauchyův součin (vizte Definici 3.6.1) je sčítatelná Cesàrovou metodou k číslu $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\right)$.

15.6.2. Příklad. Dokažte, že reálná funkce f na $\mathbb{R}$ je trigonometrický polynom právě tehdy, když existuje polynom dvou proměnných $P(u,v)$ takový, že platí $f(x) = P(\cos x, \sin x)$.

Řešení. Předpokládejme nejprve, že f je trigonometrický polynom, tj.

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zjevně stačí dokázat, že každý výraz $\cos kx$ a $\sin kx$ je vyjádřitelný jako $P(\cos x, \sin x)$ pro nějaký polynom $P(u,v)$ dvou proměnných. Budeme postupovat indukcí podle k. Je zjevné, že $\cos x$ i $\sin x$ je vyjádřitelný jako $P(\cos x, \sin x)$ pro nějaký polynom dvou proměnných. Tedy tvrzení platí pro $k = 1$. Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro každé $j \in \{1, \dots, k\}$ a dokažme, že $\cos(k+1)x$ a $\sin(k+1)x$ lze takto vyjádřit. Ze vzorců

$$\begin{aligned}\cos(k+1)x &= \cos kx \cos x - \sin kx \sin x,\\ \sin(k+1)x &= \sin kx \cos x + \cos kx \sin x\end{aligned}$$

a indukčního předpokladu však požadované tvrzení plyne.

Nechť nyní $f(x) = P(\cos x, \sin x)$ pro nějaký polynom P dvou proměnných. Zřejmě stačí dokázat, že $\cos^n x \sin^m x$ je trigonometrický polynom pro každé $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Postupujme indukcí podle m. Nechť $m = 0$ a indukcí podle n dokazujme, že $\cos^n x$ je trigonometrický polynom. To je zřejmé pro $n = 0$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro každé $j \in \{0, \dots, n\}$. Pak lze dle indukčního předpokladu psát

$$\cos^n x = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{l}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Tedy

$$\begin{aligned}\cos^{n+1} x = \cos^n x \cos x &= \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{l}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right)\cos x\\ &= \frac{a_0}{2}\cos x + \sum_{k=1}^{l}\Big(\frac{a_k}{2}(\cos(kx-x) + \cos(kx+x))\\ &\qquad + \frac{b_k}{2}(\sin(kx+x) + \sin(kx-x))\Big),\end{aligned}$$

přičemž na pravé straně máme trigonometrický polynom. Tedy $\cos^n x$ je trigonometrický polynom pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tvrzení tak platí pro $m = 0$.

Předpokládejme nyní, že $\cos^n x \sin^j x$ je trigonometrický polynom pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $j \in \{0, \dots, m\}$. Pak lze pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dle indukčního předpokladu psát

$$\cos^n x \sin^m x = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{l} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

pro nějaké $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a koeficienty $a_0, \dots a_l, b_1, \dots, b_l$ v $\mathbb{R}$. Z toho pak dostáváme

$$\begin{aligned}
\cos^n x \sin^{m+1} x &= \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{l} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right) \sin x \\
&= \frac{a_0}{2} \sin x + \sum_{k=1}^{l} (a_k \cos kx \sin x + b_k \sin kx \sin x) \\
&= \frac{a_0}{2} \sin x + \sum_{k=1}^{l} \Big(\frac{a_k}{2} (\sin(kx + x) - \sin(kx - x)) \\
&\qquad + \frac{b_k}{2} (\cos(kx - x) - \cos(kx + x)) \Big),
\end{aligned}$$

kde na pravé straně figuruje trigonometrický polynom. Tvrzení je tak dokázáno. ♣

15.6.3. Příklad. Pro $q \in (-1, 1)$ sečtěte řadu $\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx$ a ukažte, že je tato řada Fourierovou řadou svého součtu.

Řešení. Uvažujme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n (\cos nx + i \sin nx) = \sum_{n=1}^{\infty} (qe^{ix})^n .$$

Z Weierstrassova kritéria 11.3.3 plyne stejnoměrná konvergence této řady, označme $h(x)$ jako její součet.

Pak

$$\begin{aligned}
h(x) &= \frac{qe^{ix}}{1 - qe^{ix}} = \frac{qe^{ix}(1 - qe^{-ix})}{(1 - qe^{ix})(1 - qe^{-ix})} \\
&= \frac{qe^{ix} - q^2}{1 - 2q \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} + q^2} = \frac{q(\cos x - 1) + iq \sin x}{1 - 2q \cos x + q^2} .
\end{aligned}$$

Tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx = \operatorname{Im} h(x) = \frac{q \sin x}{1 - 2q \cos x + q^2} .$$

Závěrečné tvrzení pak plyne z Lemmatu 15.2.3.

♣

15.6.4. Příklad. Sečtěte řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$ a vypočtěte

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \cos nx \,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Řešení. Z definice komplexní exponenciely máme pro $x \in \mathbb{R}$ rovnost

$$e^{e^{ix}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}.$$

Tedy

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!} &= \operatorname{Re} e^{e^{ix}} = \operatorname{Re}\left(e^{\cos x}(\cos(\sin x) + i \sin(\sin x)\right)\\ &= e^{\cos x} \cos(\sin x).\end{aligned}$$

Jelikož je zadaná řada stejnoměrně konvergentní, máme

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \cos nx \,\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \cos nx \,\mathrm{d}x\\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \,\mathrm{d}x &= \begin{cases} 2\pi, & n = 0,\\ \frac{\pi}{n!}, & n \in \mathbb{N}.\end{cases}\end{aligned}$$

♣

15.6.5. Příklad. Nalezněte separabilní prostor se skalárním součinem H a ortonormální systém $\mathcal{B} \subset H$ takový, že $\mathcal{B}$ je maximální (tj. žádný nenulový prvek H není kolmý na všechny prvky $\mathcal{B}$) a není úplný (tj. lineární obal $\mathcal{B}$ není hustý v H).

Řešení. Uvažujme prostor ℓ^2 a v něm prvky $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right)$ a e_n, $n \geq 2$. Nechť H je lineární obal množiny $\{x\} \cup \{e_n;\ n \geq 2\}$ se skalárním součinem zděděným z ℓ^2. Pak $\mathcal{B} = \{e_n;\ n \geq 2\}$ je ortonormální systém v H, který je maximální.

Vskutku, nechť $y = cx + \sum_{n=2}^{k} c_k e_k$ je prvek H kolmý na všechny prvky $\mathcal{B}$. Zvolíme $m > k$, pak máme

$$0 = \langle y, e_m \rangle = c\frac{1}{2^m},$$

z čehož plyne $c = 0$. Dále

$$0 = \langle y, e_n \rangle = c_n, \quad n \in \{2, \dots, k\},$$

a tedy $y = 0$.

Na druhou stranu není systém $\mathcal{B}$ úplný, neboť vektor x má od linárního obalu $\mathcal{B}$ vzdálenost alespoň $\frac{1}{2}$. ♣

15.6.6. Příklad. Nechť $f\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je 2π-periodická funkce mající spojitou derivaci a nechť $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Pak platí

$$\int_{\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Jelikož má funkce f spojitou derivaci, leží f i f' v prostoru $L^2([-\pi,\pi])$. Označíme-li koeficienty f a f' ve Fourierově rozvoji jako a_n^f, b_n^f, respektive $a_n^{f'}$, $b_n^{f'}$, máme dle Věty **??** rovnosti

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}(a_0^f)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \pi((a_n^f)^2 + (b_n^f)^2),$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(f'(x)\right)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}(a_0^{f'})^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \pi((a_n^{f'})^2 + (b_n^{f'})^2).$$

Mezi koeficenty f a f' však platí následující vztahy:

$$a_0^{f'} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(f(\pi) - f(-\pi)\right) = 0,$$
$$a_0^{f} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

a dále pro $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a_n^{f'} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[f(x)\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) n \sin nx\,\mathrm{d}x \\ &= n b_n^f, \\ b_n^{f'} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[f(x)\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) n \cos nx\,\mathrm{d}x \\ &= -n a_n^f. \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \,\mathrm{d}x &= \frac{\pi}{2}(a_0^f)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \pi((a_n^f)^2 + (b_n^f)^2) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \pi((a_n^f)^2 + (b_n^f)^2) \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} \pi((n a_n^f)^2 + (n b_n^f)^2) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \pi((a_n^{f'})^2 + (b_n^{f'})^2) \\ &= \frac{\pi}{2}(a_0^{f'})^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \pi((a_n^{f'})^2 + (b_n^{f'})^2) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(f'(x)\right)^2 \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

♣

15.6.7. Příklad. Nechť $\alpha \in (0,1)$ a

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \cos(1/x), & x \in [-\pi,\pi] \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(a) Ukažte, že f nemá konečnou variaci na $[-\pi,\pi]$.
(b) Nechť g je 2π-periodická funkce integrovatelná na $[-\pi,\pi]$, která je rovna f na nějakém okolí 0. Dokažte, že $s_n^g(0) \to 0$.

Řešení. (a) Uvažujme libovolné $N \in \mathbb{N}$ a dělení $\mathcal{D}$ obsahující body

$$\left\{ \frac{1}{(2N+1)\pi}, \frac{1}{2N\pi}, \dots, \frac{1}{3\pi}, \frac{1}{2\pi} \right\}.$$

Pak

$$\begin{aligned} V(f;-\pi,\pi) &\ge \left| f\left(\frac{1}{2\pi}\right) - f\left(\frac{1}{3\pi}\right)\right| + \dots + \left| f\left(\frac{1}{2N\pi}\right) - f\left(\frac{1}{(2N+1)\pi}\right)\right| \\ &\ge \sum_{k=1}^{N} \left| f\left(\frac{1}{2k\pi}\right) - f\left(\frac{1}{(2k+1)\pi}\right)\right| \\ &= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\pi^\alpha}\left(\frac{1}{(2k)^\alpha} + \frac{1}{(2k+1)^\alpha}\right) \\ &\ge \frac{1}{(2\pi)^\alpha} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^\alpha}. \end{aligned}$$

Jelikož $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^\alpha} = \infty$ a N bylo libovolné, $V(f;-\pi,\pi) = \infty$.

(b) Nejprve si uvědomíme, že díky Větě 15.3.11 platí $\lim_{n\to\infty}(s_n^f - s_n^g)(0) \to 0$. Stačí tedy dokázat, že $s_n^f(0) \to 0$. To však plyne z Věty 15.4.5(b), neboť máme

$$|f(t) - f(0)| \le |t|^\alpha, \quad t \in (-\pi,\pi).$$

♣

15.7. Početní příklady k Fourierovým řadám

15.7.1. Příklad. Rozviňte funkci

$$f(x) = \pi^2 - x^2, \quad x \in (-\pi,\pi),$$

do Fourierovy řady na $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda řada konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$ a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady pak určete součty číselných řad

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

Řešení. Funkce f je po 2π-periodickém dodefinování na $\mathbb{R}$ spojitá. Navíc je monotónní na $[-\pi, 0]$ a $[0, \pi]$, a tedy má na těchto intervalech konečnou variaci. Proto je f konečné variace na libovolném omezeném intervalu v $\mathbb{R}$. Dle Věty 15.4.3 tak Fourierova řada funkce f konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$ k f. Máme

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\pi^2$$

a

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 - x^2)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\pi\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{x^2\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{2x\sin nx}{n}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{n\pi}\left(\left[-\frac{x\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{4}{n\pi}\left(-\frac{\pi\cos n\pi}{n}\right) \\
&= \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}.
\end{aligned}$$

Dále $b_n = 0$ díky sudosti funkce f. Tedy

$$f(x) = \frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dosadíme-li za x postupně 0 a π, obdržíme rovnosti

$$\pi^2 = \frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \quad 0 = \frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n^2}.$$

Z nich plynou vztahy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

♣

15.7.2. Příklad. Rozviňte funkci

$$f(x) = e^x, \quad x \in (-\pi, \pi),$$

do Fourierovy řady na $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda řada konverguje na $\mathbb{R}$ a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady pak určete součet číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}.$$

Řešení. Definujme funkci g na $\mathbb{R}$ jako

$$g(x) = \begin{cases} e^{x-2k\pi}, & x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2}, & x = (2k-1)\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Pak je g funkce s konečnou variací na každém konečném podintervalu $\mathbb{R}$ a dle Věty 15.4.3 konverguje Fourierova řada funkce f ke g na $\mathbb{R}$.

Počítáme-li její koeficenty, dostáváme

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \,\mathrm{d}x = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}.$$

Dále pro $I_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos kx \,\mathrm{d}x$, $k \in \mathbb{N}$, máme

$$\begin{aligned} I_k &= [e^x \cos kx]_{-\pi}^{\pi} + k \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin kx \,\mathrm{d}x \\ &= \cos(k\pi)\,(e^{\pi} - e^{-\pi}) + k\left([e^x \sin kx]_{-\pi}^{\pi} - k \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos kx \,\mathrm{d}x\right) \\ &= \cos(k\pi)\,(e^{\pi} - e^{-\pi}) - k^2 I_k. \end{aligned}$$

Tedy

$$I_k = (-1)^k \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{k^2 + 1}$$

a

$$a_n = \frac{1}{\pi} I_n = (-1)^n \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi(n^2 + 1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dále máme z již provedeného výpočtu rovnost pro koeficenty b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx \,\mathrm{d}x = \frac{-n}{\pi} I_n = (-1)^{n+1} \frac{n(e^{\pi} - e^{-\pi})}{n^2 + 1}.$$

Tedy

$$g(x) = \frac{\sinh \pi}{\pi} + \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} (\cos nx - n \sin nx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dosadíme-li za $x = 0$, dostáváme

$$1 = \frac{\sinh \pi}{\pi} + \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}.$$

Odtud

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\sinh \pi} - 1\right).$$

♣

15.7.3. Příklad. Rozviňte funkci

$$f(x) = \sin 3x + 4x, \quad x \in (-\pi, \pi],$$

do Fourierovy řady na $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda řada konverguje na $\mathbb{R}$ a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady pak určete součet číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n}{n}.$$

Řešení. Definujme funkci g na $\mathbb{R}$ jako

$$g(x) = \begin{cases} \sin 3(x - 2k\pi) + 4(x - 2k\pi), & x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}, \\ 0, & x = (2k-1)\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Pak je g funkce s konečnou variací na každém konečném podintervalu $\mathbb{R}$ a dle Věty 15.4.3 konverguje Fourierova řada funkce f ke g na $\mathbb{R}$.

Jelikož je f lichá na $(-\pi, \pi)$, je $a_n = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dále platí

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 3x \sin nx \, dx = \begin{cases} 1, & n = 3, \\ 0, & n \neq 3, \end{cases}$$

a

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 4x \sin nx \, dx &= \frac{8}{\pi} \left(\left[-x \frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n} \, dx \right) \\ &= \frac{8}{\pi} \left(-\frac{\pi \cos(n\pi)}{n} \right) = (-1)^{n+1} \frac{8}{n}. \end{aligned}$$

Tedy

$$g(x) = \sin 3x + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pro $x = 1$ dostáváme

$$\sin 3 + 4 = \sin 3 + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin n}{n},$$

a tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n}{n} = \frac{1}{2}.$$

♣

15.7.4. Příklad. Rozviňte funkci

$$f(x) = \sin x, \quad x \in [0, \pi),$$

do Fourierovy řady na $\mathbb{R}$, která obsahuje pouze členy s $\cos nx$. Rozhodněte, zda řada konverguje na $\mathbb{R}$ a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady pak určete součet číselné řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}.$$

Řešení. Položme

$$g(x) = |\sin x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pak dle Věty 15.4.3 konverguje Fourierova řada funkce g ke g stejnoměrně na $\mathbb{R}$.

Spočtěme koeficienty této Fourierovy řady. Jelikož je g sudá, jsou členy $b_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Dále máme

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}$$

a

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}[\sin x \sin nx]_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \cos x \sin nx \,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{n\pi}\left[-\cos x \frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \sin x \frac{\cos nx}{n}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{n\pi}\left[\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}\right] + \frac{1}{n^2}a_n. \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ liché}, \\ -\frac{4}{\pi(n^2-1)}, & n \text{ sudé}. \end{cases}$$

Tedy

$$g(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}\cos 2kx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pro $x = \frac{\pi}{2}$ pak dostáváme

$$1 = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1},$$

a tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

♣

15.7.5. Příklad. Pro $a > 0$ rozviňte funkci

$$f(x) = \cos ax, \quad x \in [0, \pi],$$

do Fourierovy řady na $\mathbb{R}$, která obsahuje pouze členy se $\sin nx$. Rozhodněte, zda řada konverguje na $\mathbb{R}$ a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady pak určete součet číselné řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+1)}{(2k+1)^2-4}.$$

Řešení. Položme

$$g(x) = \begin{cases} \cos ax, & x \in (0,\pi) + 2k\pi, \\ 0, & x = k\pi, \\ -\cos ax, & x \in (-\pi,0) + 2k\pi, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Pak g je lichá funkce s konečnou variací, a tedy její Fourierova řada konverguje ke g.

Při výpočtu jejích koeficentů máme $a_n = 0$ díky lichosti g a

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos ax \sin nx \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{a}\sin nx \sin ax\right]_0^\pi - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{n}{a}\cos nx \sin ax \,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2n}{\pi a}\int_0^\pi \cos nx \sin ax \\ &= \frac{-2n}{\pi a}\left[\frac{-1}{a}\cos nx \cos ax\right]_0^\pi + \frac{2n}{\pi a}\int_0^\pi \frac{n}{a}\sin nx \cos ax \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2n}{\pi a^2}\left[(-1)^n \cos(a\pi) - 1\right] + \frac{n^2}{a^2} b_n. \end{aligned}$$

Předpokládejme nejprve, že $a \notin \mathbb{N}$. Pak z předchozího plyne

$$b_n = \frac{2n}{\pi(a^2-n^2)}\left[(-1)^n \cos(a\pi) - 1\right], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pokud $a = k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, pak

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin kx \cos kx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin 2kx = 0.$$

Tedy Fourierova řada g má tvar

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1, n\neq a}^{\infty} \frac{n}{a^2-n^2}\left[(-1)^n \cos(a\pi) - 1\right] \sin nx.$$

Nyní uvažujme $a = 2$ a $x = \frac{\pi}{2}$, pak máme

$$
\begin{aligned}
-1 = \cos \pi &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1, n\neq 2}^{\infty} [(-1)^n - 1] \sin n \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)(-1)^k (2k+1)}{4 - (2k+1)^2} \\
&= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)}{(2k+1)^2 - 4}.
\end{aligned}
$$

Tedy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)}{(2k+1)^2 - 4} = -\frac{\pi}{4}.$$

$\clubsuit$

15.7.6. Příklad. Rozviňte funkci

$$f(x) = \operatorname{sign}(\sin 3x), \quad x \in [0, \pi],$$

do Fourierovy řady na $\mathbb{R}$, která obsahuje pouze členy s $\cos nx$. Rozhodněte, zda řada konverguje na $\mathbb{R}$ a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady pak určete součet číselné řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)}.$$

Řešení. Uvažujme sudé 2π-periodické rozšíření f na R, tj. funkci

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \big((-\pi, -\frac{2}{3}\pi) \cup (-\frac{\pi}{3}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{2}{3}\pi, \pi)\big) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ 0, & x = \frac{\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}, \\ -1, & x \in \big((-\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi)\big) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Dle Věty 15.4.3 konverguje Fourierova řada g k funkci

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x = k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ g(x), & \text{jinak.} \end{cases}$$

Spočtěme koeficienty této řady. Jelikož je g sudá, platí $b_n = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Jinak máme

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$$

a

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos nx\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \cos nx\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \cos nx\,\mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{4}{\pi n} \left(\sin(\frac{n\pi}{3}) - \sin(\frac{2n\pi}{3}) \right).
\end{aligned}
$$

Tedy

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \in \{6k, 6k+1, 6k+3, 6k+5\}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ \frac{4\sqrt{3}}{\pi n}, & n = 6k+2, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ -\frac{4\sqrt{3}}{\pi n}, & n = 6k+4, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

Proto má Fourierova řada funkce g tvar

$$\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6k+2} \cos(6k+2)x - \frac{1}{6k+4} \cos(6k+4)x \right).$$

Pro $x = 0$ máme

$$\begin{aligned} 1 = h(x) &= \frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6k+2} - \frac{1}{6k+4} \right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)}. \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

♣

15.7.7. Příklad. Pro $\alpha \in [0, \pi]$ sečtěte řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}$.

Řešení. Uvažujme funkci $f(x) = \chi_{[-\alpha,\alpha]} \in \mathcal{P}([0, 2\pi])([-\pi, \pi])$ a rozviňme ji do Fourierovy řady. Máme

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{2\alpha}{\pi}$$

a

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{2 \sin n\alpha}{n\pi}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Díky sudosti funkce f jsou pak všechny koeficienty b_n nulové.

Podle Věty **??** platí

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx = \frac{\pi}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \pi (a_n^2 + b_n^2).$$

Tedy dostáváme

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4\alpha^2}{\pi^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \pi \frac{4 \sin^2 n\alpha}{n^2 \pi^2},$$

z čehož plyne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} = \frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2}.$$

Dále platí dle Příkladu **??** vztah

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2},$$

z kterého plyne rovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2} = \frac{\pi^2 - 3\pi\alpha + 3\alpha^2}{6}.$$

♣

DODATEK A

Axiomy teorie množin

Množiny jsou základními objekty teorie množin a základními vztahy mezi těmito objekty jsou **rovnost** a **náležení**. Základními výpověďmi jsou tedy tvrzení: množina x je rovna (nebo není) množině y. Množina x je (nebo není) prvkem množiny y.

Jazyk teorie množin obsahuje jednak symboly pro množiny (malá i velká písmena podle potřeby s indexy), binární predikátový symbol $=$ pro rovnost, binární predikátový symbol pro náležení $\in$, symboly pro logické spojky, kvantifikátory a pomocné symboly (např. závorky). Jsou-li x, y proměnné pro množiny, pak jsou výrazy pro vztah rovnosti $x = y$ a náležení $x \in y$ formulemi jazyka teorie množin. Říkáme jim **atomické** formule. Další formule jazyka teorie množin vznikají z atomických formulí pomocí logických spojek a kvantifikátorů. Při budování teorie postupně zavádíme další symboly, které jsou vlastně zkratkami označující komplikovanější formule.

Nejrozšířenějším axiomatickým systémem teorie množin je Zermelův-Fraenkelův systém, jehož axiomy nyní uvedeme a doplníme stručným komentářem. Podrobnější výklad lze nalézt v knize [**3**], z níž čerpáme i v tomto oddílu.

A.0.1. Axiom (axiom existence)**.**

$$\exists x : \ x = x.$$

Tento axiom zaručuje, že univerzum množin je neprázdné, tj. existuje alespoň jedna množina.

A.0.2. Axiom (axiom extensionality)**.**

$$\forall x \forall y : \ \big(\forall u : \ (u \in x \Leftrightarrow u \in y)\big) \Leftrightarrow x = y.$$

Axiom extensionality říká, že libovolné množiny x a y jsou si rovny právě tehdy, když mají stejné prvky, tj. kdykoliv je prvek u v jedné z těchto množin, je i v druhé. Tento axiom tak popisuje souvislost mezi predikáty rovnosti a náležení.

A.0.3. Axiom (schéma axiomu vydělení)**.** Je-li $\varphi(x)$ formule, která neobsahuje volně proměnnou z, potom formule

$$\forall a \ \exists z \ \forall x : \ \big(x \in z \Leftrightarrow (x \in a \ \& \ \varphi(x))\big) \tag{A.1}$$

je axiom.

Pro každou přípustnou volbu formule φ dostáváme axiom teorie množin, a proto zde hovoříme o schématu axiomů. Podle axiomu extensionality je množina z ve formuli (A.1) určena jednoznačně. Budeme ji označovat výrazem

$$\{x \in a;\ \varphi(x)\}.$$

Tento axiom nám umožňuje definovat průnik množin opět jako množinu. Schéma vydělení je použito pro formuli $x \in b$, kde x je volná proměnná a a, b jsou dané množiny.

A.0.4. Definice. Nechť a a b jsou množiny. Pak množinu

$$a \cap b = \{x \in a;\ x \in b\}$$

nazýváme **průnikem** množin a a b.

Spíše z jazykových důvodu budeme místo spojení „množina množin" používat termín „systém množin".

A.0.5. Definice. Řekneme, že množiny A a B jsou **disjunktní**, jestliže mají prázdný průnik. Řekneme, že systém množin $\mathcal{M}$ je **disjunktní**, jestliže každé dvě různé množiny z $\mathcal{M}$ jsou disjunktní.

Uveďme ještě několik definic, které využívají axiom vydělení.

A.0.6. Definice. Nechť a a b jsou množiny. Pak množinu

$$a \setminus b = \{x \in a;\ x \notin b\}$$

nazýváme **rozdílem** množin a a b.

A.0.7. Poznámka. Podle axiomu existence existuje alespoň jedna množina. Označme ji a. Potom $\{x \in a;\ x \neq x\}$ je také množina. Tato množina neobsahuje žádný prvek. Nazýváme ji **prázdnou množinou** a značíme ji $\emptyset$.

A.0.8. Axiom (axiom dvojice)**.**

$$\forall a\ \forall b\ \exists z \forall x \colon (x \in z \Leftrightarrow (x = a \vee x = b)).$$

Axiom dvojice zaručuje, že pro dvě dané množiny existuje množina, která je obě obsahuje jako své prvky a neobsahuje žádné jiné prvky. Díky tomuto axiomu můžeme definovat pojem uspořádané dvojice.

A.0.9. Definice. Nechť a a b jsou množiny. Pak množinu

$$[a, b] = \{a, \{a, b\}\}$$

nazýváme **uspořádanou dvojicí** prvků a, b. Třídy a a b nazýváme po řadě **první složkou** a **druhou složkou** uspořádané dvojice $[a, b]$.

A.0.10. Věta. Jestliže a, b, c, d jsou množiny a platí $[a, b] = [c, d]$, pak $a = c$ a $b = d$.

A.0.11. Axiom (axiom sumy)**.**

$$\forall a\ \exists z\ \forall x : (x \in z \Leftrightarrow \exists y :\ x \in y \ \&\ y \in a).$$

K libovolné množině a existuje množina z, která obsahuje právě ty prvky, které jsou prvkem nějakého prvku množiny a. Podle axiomu extensionality je množina z jednoznačně určena množinou a.

A.0.12. Definice. Nechť a a b jsou množiny. Pak množinu

$$a \cup b = \{x;\ x \in a \ \vee \ x \in b\}$$

nazýváme **sjednocením** množin a a b.

A.0.13. Definice. Nechť a, b jsou množiny. Množinu

$$a \operatorname{div} b = (a \setminus b) \cup (b \setminus a)$$

nazýváme **symetrickým rozdílem** množin a a b.

A.0.14. Definice. Nechť a a b jsou množiny. Řekneme, že a je **podmnožinou** b, případně že b **obsahuje** a, značíme $a \subset b$, jestliže

$$\forall x:\ (x \in a \Rightarrow x \in b).$$

Je-li $a \subset b$ a $a \neq b$, pak říkáme, že a je **vlastní podmnožinou** b a tento fakt značíme $a \subsetneq b$.

A.0.15. Axiom (axiom potence)**.**

$$\forall a\ \exists z\ \forall x : (x \in z \Leftrightarrow x \subset a).$$

Je-li a množina, pak podle axiomu potence existuje množina z, jejímiž prvky jsou právě všechny podmnožiny množiny a.

A.0.16. Definice. Nechť X a Y jsou množiny. **Relací** mezi prvky množin X a Y nazveme každou množinu $R \subset X \times Y$. **Definičním oborem** relace R nazýváme množinu

$$D(R) = \{x;\ \exists y : [x, y] \in R\}.$$

Oborem hodnot relace R nazýváme množinu

$$H(R) = \{y;\ \exists x : [x, y] \in R\}.$$

Jedním z nejdůležitějších matematických objektů je zobrazení (funkce).

A.0.17. Definice. Nechť $F \subset X \times Y$ je relace. Řekneme, že F je **zobrazení** neboli **funkce**, jestliže

$$\forall x\ \forall y\ \forall z : ([x, y] \in F \ \&\ [x, z] \in F \Rightarrow y = z).$$

A.0.18. Axiom (axiom nahrazení)**.** Je-li F zobrazení a $D(F)$ je množina, pak $H(F)$ je množina.

A.0.19. Axiom (axiom nekonečna)**.**

$$\exists z :\ \emptyset \in z \ \&\ (\forall x :\ x \in z \Rightarrow x \cup \{x\} \in z)$$

A.0.20. Axiom (axiom fundovanosti)**.**

$$\forall a :\ (a \neq \emptyset \Rightarrow \exists x : (x \in a) \ \&\ (x \cap a = \emptyset)).$$

Axiom A.0.20 zaručuje, že vztah $\in$ nemá jisté nežádoucí vlastnosti. Vylučuje například každou množinu y splňující $y \in y$.

Zvláštní postavení mezi axiomy má takzvaný axiom výběru, protože některé oblasti matematiky jsou budovány bez něj. Matematická analýza však tento axiom používá, a proto jej zde uvádíme.

A.0.21. Axiom (axiom výběru)**.** Je-li R relace, pak existuje funkce F taková, že $F \subset R$ a $D(F) = D(R)$.

A.0.22. Poznámky. Nechť A, B a C jsou množiny. Potom platí:

(i) $\emptyset \subset A$,
(ii) je-li $A \subset \emptyset$, pak $A = \emptyset$,
(iii) $A \subset A$,
(iv) je-li $A \subset B$ a $B \subset A$, pak $A = B$,
(v) je-li $A \subset B$ a $B \subset C$, pak $A \subset C$.

Obecná metoda důkazu rovnosti mezi množinami plyne z axiomu extensionality. Poznámka (iv) skýtá novou možnost, jak rovnost mezi množinami dokázat.

A.0.23. Poznámky. Nechť A, B, C a D jsou množiny. Potom platí:

(i) $\emptyset \cap A = A$,
(ii) $A \cap A = A$,
(iii) $A \cap B = B \cap A$,
(iv) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
(v) $A \cap B \subset A$,
(vi) je-li $C \subset A$ a $C \subset B$, pak $C \subset (A \cap B)$,
(vii) $A = (A \cap B)$ právě tehdy, když $A \subset B$,
(viii) je-li $A \subset B$ a $C \subset D$, pak $(A \cap B) \subset (C \cap D)$.

A.0.24. Poznámky. Nechť A, B, C a D jsou množiny. Potom platí:

(i) $\emptyset \cup A = A$,
(ii) $A \cup A = A$,
(iii) $A \cup B = B \cup A$,
(iv) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
(v) $A \subset A \cup B$,
(vi) je-li $A \subset C$ a $B \subset C$, pak $(A \cup B) \subset C$,
(vii) $A = (A \cup B)$ právě tehdy, když $B \subset A$,
(viii) je-li $A \subset B$ a $C \subset D$, pak $(A \cup B) \subset (C \cup D)$.

A.0.25. Definice. Nechť A je množina. Potom množinu $\mathcal{S}A = A \cup \{A\}$ nazýváme **následníkem** třídy A.

A.0.26. Definice. Nechť $I \neq \emptyset$ je množina a pro každé $i \in I$ jsou A_i jsou množiny. Pak množinu

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x; \forall\, i \in I : x \in A_i\}$$

nazýváme **průnikem všech množin ze systému** $\{A_i;\ i \in I\}$ a podobně množinu

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x; \exists i \in I : x \in A_i\}$$

sjednocením všech množin ze systému $\{A_i;\ i \in I\}$. V obou případech nazýváme množinu I **indexovou množinou** nebo **množinou indexů**.

A.0.27. Věta (de Morganova pravidla)**.** Nechť X a I jsou množiny, $I \neq \emptyset$, a nechť A_i, $i \in I$, jsou množiny. Pak

$$X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i) \qquad \text{a} \qquad X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i)\,.$$

A.0.28. Poznámka. Pojem následníka můžeme chápat jako unární operaci nad množinami. Je-li dána množina A, pak $\mathcal{S}A$ je množina, která se nerovná množině A.

A.0.29. Příklad. Nechť X je konečná množina. Pak nelze množinu X zobrazit prostě na svoji vlastní podmnožinu.

Řešení. Důkaz provedeme sporem. Nechť $f: X \to X$ je prosté zobrazení splňující $f(X) \neq X$. Z Příkladu A.0.34(c) plyne, že existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $f^{n-1}(X) = f^n(X)$. Dle tvrzení (b) Příkladu A.0.34 pak platí $f(X) = X$, což je spor. ♣

A.0.30. Příklad. Ukažte, že množina X je nekonečná právě tehdy, když má stejnou mohutnost jako nějaká její vlastní podmnožina.

Řešení. Má-li X stejnou mohutnost jako nějaká její vlastní podmnožina, je X nekonečná dle Příkladu A.0.29.

Je-li X nekonečná, obsahuje nekonečnou spočetnou množinu A (Věta **??**). Nechť $\varphi\colon A \to \mathbb{N}$ je bijekce a $\psi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je definováno jako $\psi(n) = n + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Pak je zobrazení

$$\omega(x) = \begin{cases} (\varphi^{-1} \circ \psi \circ \varphi)(x), & x \in A, \\ x, & x \in X \setminus A, \end{cases}$$

prosté a $\varphi^{-1}(1) \notin \omega(X)$. Tedy $\omega\colon X \to \omega(X)$ je bijekce množiny X na její vlastní podmnožinu. ♣

A.0.31. Příklad. Ukažte, že množiny $\mathbb{N}$, $L = \{n \in \mathbb{N};\ n \text{ je liché}\}$ a $S = \{n \in \mathbb{N};\ n \text{ je sudé}\}$ mají stejnou mohutnost.

Důkaz. Zobrazení $n \mapsto n-1$, $n \in S$, je bijekce množiny S na množinu L a zobrazení $n \mapsto 2n - 1$ je bijekce množiny $\mathbb{N}$ na L. Odtud plyne, že množiny L, S a $\mathbb{N}$ mají stejnou mohutnost. ■

A.0.32. Příklad. Nechť X je nekonečná množina a Y je spočetná množina. Potom $X \approx X \cup Y$.

Řešení. Nejprve si uvědomme, že zřejmě $X \preceq X \cup Y$. Ve zbytku důkazu tedy stačí dle Věty 1.6.5 ověřit, že $X \cup Y \preceq X$. Protože X je nekonečná, obsahuje podle Věty **??** množinu $A \subset X$ splňující $A \approx \mathbb{N}$. Existuje tedy bijekce φ množiny $\mathbb{N}$ na A. Podle Příkladu A.0.31 platí $\mathbb{N} \approx L$, kde L je množina lichých čísel. Potom také platí $\varphi(L) \approx A$. Odtud plyne $(X \setminus A) \cup \varphi(L) \approx (X \setminus A) \cup A$, a tedy podle Příkladu A.0.31 $X \setminus \varphi(S) \approx X$, kde S je množina všech sudých přirozených čísel. Podle předpokladu platí $Y \preceq \mathbb{N}$, a tedy $Y \setminus X \preceq Y \preceq \varphi(S)$. Potom $X \cup (Y \setminus X) \preceq (X \setminus \varphi(S)) \cup \varphi(S)$, neboli $X \cup Y \preceq X$. Tím je důkaz proveden. ♣

A.0.33. Příklad. Ukažte, že množiny $[0,1]$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ mají stejnou mohutnost.

Řešení. Protože $[0,1] \subset \mathbb{R}$, platí $[0,1] \preceq \mathbb{R}$. Funkce $x \mapsto \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, je rostoucí, a tedy prostá. Jedná se tedy o prosté zobrazení $\mathbb{R}$ do $[0,1]$. Proto $\mathbb{R} \preceq [0,1]$. Z Věty 1.6.5 plyne $[0,1] \approx \mathbb{R}$.

Dále platí dle Příkladů A.0.32 a 1.6.23 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \approx (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$. ♣

A.0.34. Příklad. Nechť X je množina a $f : X \to X$ je zobrazení. Dokažte následující tvrzení.

(a) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $f^{n-1}(X) \supset f^n(X)$, přičemž symbol f^0 značí identické zobrazení Id_X a f^n je n-krát složené zobrazení f samo se sebou, tj. $f^0 = \mathrm{Id}_X$ a $f^n = f \circ f^{n-1}$ pro $n \in \mathbb{N}$.

(b) Je-li f prosté a existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $f^{n-1}(X) = f^n(X)$, pak $X = f(X)$.

(c) Pokud pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $f^{n-1}(X) \neq f^n(X)$, pak je množina X nekonečná.

Řešení. (a) Tvrzení dokážeme matematickou indukcí. Pro $n = 1$ zjevně platí $X = f^0(X) \supset f^1(X) = f(X)$. Předpokládejme nyní, že platí $f^{n-1}(X) \supset f^n(X)$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Pak z Příkladu 1.8.19(a) plyne

$$f^n(X) = f\big(f^{n-1}(X)\big) \supset f\big(f^n(X)\big) = f^{n+1}(X).$$

Tím je tvrzení dokázáno.

(b) Definujme množinu $A \subset \mathbb{N}$ jako množinu všech $n \in \mathbb{N}$, která splňují $f^{n-1}(X) = f^n(X)$. Podle předpokladu je množina A neprázdná. Podle Věty 1.5.25 existuje minimum množiny A, které označíme k. Pokud $k = 1$ je tvrzení dokázáno. Předpokládejme tedy, že $k > 1$. Vezměme $y \in f^{k-2}(X)$, potom $f(y) \in f^{k-1}(X)$. Poněvadž $f^{k-1}(X) = f^k(X)$, existuje $x' \in X$ takové, že $f(y) = f^k(x') = f\big(f^{k-1}(x')\big)$. Protože f je prosté, platí $y = f^{k-1}(x')$, tedy $y \in f^{k-1}(X)$. Podle části (a) již víme, že platí $f^{k-2}(X) \supset f^{k-1}(X)$. Dostáváme tak $f^{k-2}(X) = f^{k-1}(X)$, takže $k-1$ je prvkem množiny A. Pak ovšem číslo k není minimem A, což je spor. Platí tedy $k = 1$ a tvrzení je dokázáno.

(c) Pokud $f^n(X) \neq f^{n+1}(X)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, vybereme pro každé $n \in \mathbb{N}$ prvek $x_n \in f^n(X) \setminus f^{n+1}(X)$. Zobrazení $n \mapsto x_n$ z $\mathbb{N}$ do X je tedy prosté, takže platí $\mathbb{N} \preceq X$. Množina X je tudíž nekonečná podle Věty 1.6.18. Tedy i sama množina X je nekonečná. ♣

Relace uspořádání a ekvivalence, zobrazení.

A.0.35. V Oddíle 1.4 jsme se zabývali dvěma důležitými typy relací, totiž relací uspořádání a relací zobrazení. Uveďme ještě další důležitý typ relace. Nechť A je množina a nechť R je relace na A. Řekneme, že R je **ekvivalence**, jestliže je reflexivní, symetrická a tranzitivní. V tomto textu sice pojem relace ekvivalence nebudeme používat, přesto je však velmi důležitý. V Příkladech A.0.37–A.0.39 ukážeme základní vlastnosti tohoto pojmu a několik konkrétních příkladů.

A.0.36. Příklad. Nechť X je množina. Relace R je na X definovaná takto: pro $x, y \in X$ platí $x\ R\ y$ právě tehdy, když $x = y$. Dokažte, že R je relace ekvivalence.

Řešení. ♣

A.0.37. Příklady. Pro níže definované relace dokažte, že jde o ekvivalence.

(a) Nechť X, Y jsou množiny a $f : X \to Y$ je zobrazení. Definujme relaci $\sim$ na X takto: pro $x, y \in X$ platí $x \sim y$ právě tehdy, když $f(x) = f(y)$.
(b) Nechť $n \in \mathbb{N}$. Relace $\equiv \pmod n$ (**kongruence modulo** n) je na množině celých čísel definována takto: pro $a, b \in \mathbb{Z}$ platí $a \equiv b \pmod n$ právě tehdy, když n dělí $a - b$.
(c) Nechť $\mathcal{Z}$ je množina všech zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do množiny $\{0, 1\}$. Relaci $\sim$ definujeme takto: pro $f, g \in \mathcal{Z}$ platí $f \sim g$ právě tehdy, když existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n$, platí $f(k) = g(k)$.
(d) Definujme relaci R na $\mathbb{R}$ takto: pro $x, y \in \mathbb{R}$ platí $x\ R\ y$ právě tehdy, když $x - y \in \mathbb{Q}$.
(e) Nechť X je množina. Definujme relaci R na potenční množině množiny X takto: pro $A, B \in \mathcal{P}(X)$ platí $A\ R\ B$ právě tehdy, když $A \approx B$.

Řešení. Pro zadané relace vždy ověříme reflexivitu, symetrii a tranzitivitu.

(a) *Reflexivita.* Pro libovolné $x \in X$ platí $f(x) = f(x)$, a tedy $x \sim x$.

Symetrie. Pokud $x \sim y$, tj. $f(x) = f(y)$, pak i $f(y) = f(x)$, a tedy $y \sim x$.

Tranzitivita. Nechť $x, y, z \in \mathbb{N}$, $x \sim y$ a $y \sim z$. Pak $f(x) = f(y)$ a $f(y) = f(z)$, a tedy i $f(x) = f(z)$. Platí tedy také $x \sim z$.

(b) *Reflexivita.* Pro každé $m \in \mathbb{Z}$ platí $m - m = 0 = 0 \cdot n$, a tedy $m \equiv m \pmod n$.

Symetrie. Nechť $m, q \in \mathbb{Z}$ a $m \equiv q \pmod n$. Pak tedy existuje $l \in \mathbb{Z}$ takové, že $m - q = l \cdot n$. Potom $q - m = (-l) \cdot n$, a platí tedy $q \equiv m \pmod n$.

Tranzitivita. Nechť $m, q, p \in \mathbb{Z}$, $m \equiv q \pmod n$ a $q \equiv p \pmod n$. Pak tedy existují $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$ taková, že $m - q = l_1 \cdot n$ a $q - p = l_2 \cdot n$. Potom $m - p = (l_1 + l_2) \cdot n$, a platí tedy $m \equiv p \pmod n$.

(c) *Reflexivita.* Pro libovolné $f \in \mathcal{Z}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí $f(n) = f(n)$, a tedy $f \sim f$.

Symetrie. Pokud $f, g \in \mathcal{Z}$, $f \sim g$, pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $f(k) = g(k)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n$. Tedy platí $g(k) = f(k)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n$, tj. $g \sim f$.

Tranzitivita. Nechť $f, g, h \in \mathcal{Z}$. Pak existují $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ taková, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n_1$, platí $f(k) = g(k)$ a pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n_2$, platí $g(k) = h(k)$. Položme

$n = \max\{n_1, n_2\}$. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}, k \geq n$, máme $f(k) = g(k) = h(k)$. Platí tedy $f \sim h$.

(d) *Reflexivita.* Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ platí $x - x = 0$. Číslo 0 je racionální, a tedy platí $x \sim x$.

Symetrie. Nechť $x, y \in \mathbb{R}$ a $x \sim y$, pak $x - y$ je racionální číslo. Proto i $y - x = -(x - y)$ je racionální a platí $y \sim x$.

Tranzitivita. Nechť $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \sim y$ a $y \sim z$. Potom jsou čísla $x - y$ a $y - z$ racionální. Pak máme $x - z = (x - y) + (y - z)$ a protože součet dvou racionálních čísel je číslo racionální, dostáváme $x \sim z$. ♣

A.0.38. Příklad. Nechť X je množina $\sim$ je relace ekvivalence. Pro každé $x \in X$ položme $[x] = \{y \in X;\ y \sim x\}$. Množina $X/_\sim = \{[x];\ x \in X\}$ se nazývá **faktormnožina** vzhledem k ekvivalenci $\sim$. Ukažte, že

(a) pro každé $x \in X$ platí $x \in [x]$,
(b) pro každé $x, y \in X$ platí $[x] = [y]$ právě tehdy, když $x \sim y$,
(c) pro každé $\tilde{x} \in X/_\sim$ a $y \in \tilde{x}$ platí $\tilde{x} = [y]$.

Řešení. (a) Tvrzení je zřejmé, neboť platí $x \sim x$.

(b) Nechť $x, y \in X$ splňují $[x] = [y]$. Pak $x \in [x]$ dle (a), a tedy $x \in [y]$. To ale znamená, že $x \sim y$.

Nechť $x, y \in X$ splňují $x \sim y$. Vezměme libovolné $z \in [x]$. Potom platí $z \sim x$ a z tranzitivity $\sim$ dostáváme $z \sim y$. Odtud pak plyne $z \in [y]$. Platí tedy inkluze $[x] \subset [y]$. Vezměme nyní libovolné $z \in [y]$. Potom platí $z \sim y$. Díky symetrii platí $y \sim x$ a pomocí tranzitivity $\sim$ dostáváme $z \sim x$. Odtud pak plyne $z \in [x]$. Platí tedy i inkluze $[y] \subset [x]$ a tvrzení je dokázáno.

(c) Podle definice faktormnožiny existuje $x \in X$ takové, že $\tilde{x} = [x]$. Potom platí $y \sim x$. Podle (b) pak dostáváme $\tilde{x} = [x] = [y]$. ♣

A.0.39. Příklad. Nechť $\mathcal{Z}$ a $\sim$ jsou množina a relace ekvivalence z Příkladu A.0.37(c). Uvažujme faktormnožinu $\tilde{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z}/_\sim$ a relaci $\ll$, která je na na $\tilde{\mathcal{Z}}$ definována takto: pro $\tilde{f}, \tilde{g} \in \tilde{\mathcal{Z}}$ platí $\tilde{f} \ll \tilde{g}$, pokud pro každé $f \in \tilde{f}$ a každé $g \in \tilde{g}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n$, platí $f(k) \leq g(k)$. Ukažte, že $\ll$ je částečné uspořádání na $\tilde{\mathcal{Z}}$.

Řešení. Ověříme, že relace $\ll$ je na $\tilde{\mathcal{Z}}$ reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní.

Reflexivita. Nechť $\tilde{f} \in \mathcal{Z}$ a $f_1, f_2 \in \tilde{f}$. Potom $f_1 \sim f_2$, a tedy existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}, k \geq n$ platí $f_1(k) = f_2(k)$. Odtud plyne $\tilde{f} \ll \tilde{f}$.

Slabá antisymetrie. Předpokládejme, že $\tilde{f}, \tilde{g} \in \tilde{\mathcal{Z}}$ splňují $\tilde{f} \ll \tilde{g}$ a $\tilde{g} \ll \tilde{f}$. Vezměme libovolné $f \in \tilde{f}$ a $g \in \tilde{g}$. Potom existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}, k \geq n_1$, platí $f(k) \leq g(k)$. Dále existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}, k \geq n_2$, platí $g(k) \leq f(k)$. Pro každé $k \in \mathbb{N}, k \geq \max\{n_1, n_2\}$, tedy platí $f(k) = g(k)$. To znamená, že $f \sim g$, a tedy podle Příkladu A.0.38 $\tilde{f} = [f] = [g] = \tilde{g}$.

Tranzitivita. Předpokládejme, že $\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h} \in \tilde{\mathcal{Z}}$ splňují $\tilde{f} \ll \tilde{g}$ a $\tilde{g} \ll \tilde{h}$. Nechť $f \in \tilde{f}$ a $h \in \tilde{h}$. Vezměme libovolné $g \in \tilde{g}$. Potom existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}, k \geq n_1$, platí $f(k) \leq g(k)$. Dále existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}, k \geq n_2$, platí $g(k) \leq h(k)$. Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq \max\{n_1, n_2\}$, tedy platí $f(k) \leq h(k)$. To znamená, že $\tilde{f} \ll \tilde{h}$. ♣

A.0.40. Příklad. Nechť A, B, C jsou množiny a $f: A \to B$, $h: A \to C$ jsou zobrazení taková, že f je surjektivní. Ukažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní.

(i) Existuje zobrazení $g: B \to C$ splňující $h = g \circ f$.
(ii) Platí
$$\forall y \in B\ \forall x_1, x_2 \in f^{-1}(\{y\}): h(x_1) = h(x_2).$$

Řešení. (i) $\Rightarrow$ (ii) Provedeme přímý důkaz. Nechť $g: B \to C$ splňuje $h = g \circ f$. Nechť $y \in B$ a $x_1, x_2 \in A$ jsou takové, že $f(x_1) = f(x_2) = y$. Pak
$$\begin{aligned} h(x_1) &= (g \circ f)(x_1) = g\big(f(x_1)\big) = g(y) \\ &= g\big(f(x_2)\big) = (g \circ f)(x_2) = h(x_2), \end{aligned}$$
a tedy podmínka (ii) je splněna.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Opět použijeme přímý důkaz. Nechť $f: A \to B$ a $h: A \to C$ splňují (ii). Pro každé $y \in B$ definujme
$$g(y) = h(x), \quad x \in f^{-1}\big(\{y\}\big).$$
Podmínka (ii) nám zaručuje, že je g korektně definována, neboť pro každé $y \in B$ nezáleží na výběru $x \in f^{-1}\big(\{y\}\big)$. Dále vezmeme $x \in A$. Pak $x \in f^{-1}\big(\{f(x)\}\big)$, a proto $g\big(f(x)\big) = h(x)$ z definice g. Tedy $g \circ f = h$. ♣

DODATEK B

Konstrukce množiny přirozených a reálných čísel

V tomto oddíle budeme předpokládat, že uvedené množiny již máme zkonstruovány, a uvedeme jejich vlastnosti, které budeme v dalším výkladu používat. V Dodatku B pak ukážeme, že tyto vlastnosti v jistém smyslu již jednoznačně určují uvažované číselné obory.

Naše číselné obory popíšeme jako množiny, na nichž jsou definovány operace **sčítání** a **násobení** a relace **uspořádání**, které budeme značit obvyklým způsobem $+, \cdot$ a $\leq$, přičemž jsou splněny následující skupiny vlastností:

- vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah (vizte B.0.1 a B.0.2),
- vztah uspořádání a operací sčítání a násobení (vizte B.0.8),
- vlastnost existence suprema (vizte **??**).

Základní vlastnosti množin $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$ jsou uvedeny v B.0.12–B.0.14.

Nyní popíšeme, jaké vlastnosti požadujeme po čtveřici $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$, kde $\mathbb{R}$ je množina, $+\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cdot\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou zobrazení a $\leq$ je relace, která je podmnožinou $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Dále též uvedeme vlastnosti množin $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$.

B.0.1 (vlastnosti sčítání). Zobrazení $+$, respektive $\cdot$, přiřazuje dvojici $[x, y] \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ hodnotu v $\mathbb{R}$, kterou značíme $x + y$, respektive $x \cdot y$. Místo o zobrazeních $+$ a $\cdot$ budeme hovořit o **operacích** $+$ a $\cdot$.

(a) Sčítání reálných čísel je **asociativní**, neboli

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon x + (y + z) = (x + y) + z. \tag{B.1}$$

(b) Sčítání reálných čísel je **komutativní**, neboli

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x + y = y + x. \tag{B.2}$$

(c) V množině reálných čísel existuje **nulový prvek**, neboli

$$\exists w \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\colon x + w = x. \tag{B.3}$$

Prvek w je určen jednoznačně. Pokud totiž prvky w_1 a w_2 mají uvedenou vlastnost, pak platí $w_1 + w_2 = w_1$ a také díky komutativitě sčítání $w_1 + w_2 = w_2 + w_1 = w_2$. Odtud plyne $w_1 = w_2$. Prvek w značíme symbolem 0.

(d) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje **opačný prvek**, neboli

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists z \in \mathbb{R}\colon x + z = 0.$$

Pro dané $x \in \mathbb{R}$ je prvek z určen jednoznačně. Pokud totiž prvky z_1 a z_2 mají uvedenou vlastnost, pak díky komutativitě a asociativitě sčítání platí

$$\begin{aligned} z_1 &= z_1 + 0 = z_1 + (x + z_2) = (z_1 + x) + z_2 \\ &= z_2 + (z_1 + x) = z_2 + (x + z_1) = z_2 + 0 = z_2. \end{aligned}$$

Prvek z značíme symbolem $-x$.

B.0.2 (**vlastnosti násobení**)**.** (a) Násobení reálných čísel je asociativní, neboli

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \colon x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z. \tag{B.4}$$

(b) Násobení reálných čísel je komutativní, neboli

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \colon x \cdot y = y \cdot x. \tag{B.5}$$

(c) V množině reálných čísel existuje **jednotkový prvek**, neboli

$$\exists v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \forall x \in \mathbb{R} \colon v \cdot x = x. \tag{B.6}$$

Prvek v je určen jednoznačně. Pokud totiž prvky $v_1, v_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ splňují právě uvedenou podmínku, potom platí $v_1 = v_2 \cdot v_1 = v_1 \cdot v_2 = v_2$. Prvek v značíme symbolem 1.

(d) Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existuje **inverzní prvek**, neboli

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists y \in \mathbb{R} \colon x \cdot y = 1. \tag{B.7}$$

Pro dané $x \in \mathbb{R}$ je prvek y určen jednoznačně. Pokud totiž prvky y_1 a y_2 mají uvedenou vlastnost, pak díky komutativitě a asociativitě násobení platí $y_1 = y_1 \cdot (x \cdot y_2) = (y_1 \cdot x) \cdot y_2 = y_2$. Prvek y značíme symbolem x^{-1} nebo $\frac{1}{x}$.

B.0.3 (**vzájemný vztah sčítání a násobení**)**.** Sčítání a násobení splňují pravidlo **distributivity**, neboli

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \colon (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z. \tag{B.8}$$

B.0.4 (operace odčítání a dělení)**.** Nechť $x, y \in \mathbb{R}$. **Rozdíl** čísel x a y je definován jako číslo $x + (-y)$ a značíme ho symbolem $x - y$. Pokud navíc $y \neq 0$, pak je **podíl** čísel x a y definován jako číslo $x \cdot y^{-1}$. Místo $x \cdot y^{-1}$ používáme také symbol $\frac{x}{y}$ nebo (méně často) $x : y$ či x/y.

B.0.5. Z vlastností uvedených v B.0.1, B.0.2 a B.0.3 vyplývají všechna obvyklá pravidla pro počítání s reálnými čísly. Několik základních příkladů uvedeme v následující větě. Důkazy dalších početních pravidel jsou obsaženy v Dodatku B.

B.0.6. Věta. Platí:

(a) $\forall x \in \mathbb{R} \colon -(-x) = x$,
(b) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \colon (x^{-1})^{-1} = x$,
(c) $\forall x \in \mathbb{R} \colon 0 \cdot x = 0$.

Důkaz. (a) Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom podle B.0.1(d),(b) platí $x + (-x) = 0$ a $(-x) + x = 0$. Tedy x je opačný prvek k prvku $-x$, a proto platí $-(-x) = x$.

(b) Nechť $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom podle B.0.2(d),(b) platí $x \cdot x^{-1} = 1$ a $x^{-1} \cdot x = 1$. Tudíž x je inverzní prvek k prvku x^{-1}, jinými slovy $(x^{-1})^{-1} = x$.

(c) Nechť $x \in \mathbb{R}$. Postupným použitím B.0.2(c), B.0.1(c), B.0.3 a znovu B.0.2(c) dostaneme

$$x = 1 \cdot x = (1 + 0) \cdot x = 1 \cdot x + 0 \cdot x = x + 0 \cdot x.$$

Přičteme-li v rovnosti $x = x + 0 \cdot x$ k oběma stranám číslo $-x$, dostaneme

$$x + (-x) = (x + 0 \cdot x) + (-x).$$

Odtud pomocí vlastnosti B.0.1(d) použité na levou stranu rovnosti a vlastností B.0.1(b),(a) použitých na pravou stranu obdržíme

$$0 = 0 \cdot x + \big(x + (-x)\big).$$

Konečně díky vlastnostem B.0.1(d),(c) odtud dostaneme $0 \cdot x = 0$. ■

B.0.7. Poznámka. Někdy hovoříme o prvcích množiny $\mathbb{R}$ jako o bodech a o prvku 0 jako o počátku.

B.0.8 (**vztah uspořádání a operací sčítání a násobení**). (a) Relace $\leq$ je lineárním uspořádáním na množině $\mathbb{R}$.

(b) Pro každé $x, y, z \in \mathbb{R}$ splňující $x \leq y$ platí

$$x + z \leq y + z.$$

(c) Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ splňující $0 \leq x$ a $0 \leq y$ platí

$$0 \leq x \cdot y.$$

B.0.9. Označení. Nechť $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Symbol $x \geq y$ má stejný význam jako symbol $y \leq x$. Pokud $x \leq y$ a $x \neq y$, pak píšeme $x < y$ nebo $y > x$. Symboly $<$ a $>$ značí tzv. **ostrou nerovnost**.

(b) Pokud $x > 0$, respektive $x < 0$, pak nazýváme x **kladným**, respektive **záporným**, reálným číslem. Pokud $x \geq 0$, respektive $x \leq 0$, pak nazýváme x **nezáporným**, respektive **nekladným**, reálným číslem.

B.0.10. Věta. Platí

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \colon (x \leq y \wedge z \geq 0) \Rightarrow xz \leq yz.$$

Důkaz. Předpokládejme, že reálná čísla x, y, z splňují $x \leq y$ a $z \geq 0$. Přičtením prvku $-x$ k levé a pravé straně nerovnosti $x \leq y$ dostaneme $0 \leq y - x$. Potom podle vlastnosti (c) v B.0.8 obdržíme $0 \leq (y - x)z = yz - xz$. Přičtením prvku xz k levé a pravé straně poslední nerovnosti dostaneme požadovanou nerovnost. ■

———————————

B.0.11. Věta. Nechť $k \in \mathbb{N}$.

(a) Pro každé $x, y \in \mathbb{R}, 0 \leq x < y$, platí $x^k < y^k$.

(b) Pro každé $x \in \mathbb{R}, x \geq 1$, platí $x \leq x^k$.
(c) Pro každé $x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 1$, platí $x^k \leq x$.

Důkaz. (a) Nechť $x, y \in \mathbb{R}, 0 \leq x < y$. Podle Příkladu 1.5.7 platí

$$y^k - x^k = (y - x) \cdot \sum_{k=1}^{n} y^{n-k} x^{k-1}.$$

Výraz $y - x$ je zřejmě kladný. Také výraz $\sum_{k=1}^{n} y^{n-k} x^{k-1}$ je kladný, neboť všechny sčítance v této sumě jsou nezáporné a sčítanec pro $k = 1$ je kladný. Kladný je tedy i součin obou výrazů. Dostáváme $y^k - x^k > 0$, neboli $x^k < y^k$.

(b) Pokud $k = 1$ nebo $x = 1$, pak tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme, že platí $k > 1$ a $x > 1$. Potom je $k - 1 \in \mathbb{N}$, a tedy podle již dokázaného tvrzení (a) máme $x^{k-1} > 1^{k-1} = 1$. Odtud s pomocí Věty B.0.10 obdržíme

$$x^k = x \cdot x^{k-1} \geq x \cdot 1 = x.$$

(c) Pokud $k = 1$ nebo $x = 1$, pak tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme, že platí $k > 1$ a $x < 1$. Potom je $k - 1 \in \mathbb{N}$, a tedy podle již dokázaného tvrzení (a) máme $x^{k-1} < 1^{k-1} = 1$. Odtud s pomocí Věty B.0.10 obdržíme

$$x^k = x \cdot x^{k-1} \leq x \cdot 1 = x.$$ ■

———————————

B.0.12 (**základní vlastnosti množiny přirozených čísel**). Množina $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ přirozených čísel splňuje tyto podmínky:

(a) $1 \in \mathbb{N}$,
(b) $\forall x \in \mathbb{N} : x + 1 \in \mathbb{N}$,
(c) jestliže $A \subset \mathbb{N}$ splňuje
- $1 \in A$,
- $\forall x \in A : x + 1 \in A$,

potom $\mathbb{N} = A$.

Podmínky (a)-(c) lze neformálně popsat následujícím způsobem. Množina přirozených čísel obsahuje číslo 1 (podmínka (a)) a pokud je nějaké reálné číslo x číslem přirozeným, pak také číslo $x + 1$ je číslem přirozeným (podmínka (b)). Podmínka (c) říká, že množina přirozených čísel je nejmenší množina splňující podmínky (a) a (b). Tato vlastnost také zaručuje platnost principu matematické indukce (vizte 1.2.7). Množina přirozených čísel, opět neformálně řečeno, tedy vznikla tak, že jsme do ní zařadili prvek 1 a pak všechny prvky, které vznikly postupným přičítáním 1, a žádné jiné. Místo $1+1, 1+1+1, 1+1+1+1, \ldots$ budeme samozřejmě psát $2, 3, 4, \ldots$

B.0.13. Množina celých čísel je definována jako

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{m \in \mathbb{R};\ -m \in \mathbb{N}\}.$$

B.0.14. Množina racionálních čísel je definována jako

$$\mathbb{Q} = \{pq^{-1};\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}.$$

——————————————————

B.0.15. Definice. Množina **přirozených čísel** $\mathbb{N}$ je vymezena následujícími **Peanovými axiomy**:

(i) $1 \in \mathbb{N}$,
(ii) každý prvek $n \in \mathbb{N}$ má svého **bezprostředního následníka** n',
(iii) jestliže platí $n' = m'$, potom $n = m$,
(iv) pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $n' \neq 1$,
(v) jestliže $M \subset \mathbb{N}$ je množina splňující $1 \in M$ a podmínku

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \in M : n' \in M,$$

pak $M = \mathbb{N}$.

B.0.16. Poznámka. Pro $n \in \mathbb{N}$ obvykle píšeme $n' = n + 1$.

Z Definice B.0.15 není automaticky zřejmé, zda nějaká množina vymezená Peanovými axiomy existuje. K její konstrukci nám pomůže axiomatická teorie množin uvedená v předchozím oddílu a pojem následníka, který jsme zavedli v Definici A.0.25.

Z Poznámky A.0.7 víme, že $\emptyset$ je množina stejně jako všichni její následníci. Ztotožníme prázdnou množinu $\emptyset$ s číslem 0 (nula). Jejího následníka, tedy množinu $\mathcal{S}\emptyset$, ztotožníme s číslem 1. Ke každému již definovanému číslu n pak ztotožníme číslo $n + 1$ s následníkem množiny, která byla ztotožněna s číslem n. Množinu přirozených čísel pak definujeme jako průnik všech množin, které obsahují množinu $\mathcal{S}\emptyset = \{\emptyset\}$ jako svůj prvek a jsou uzavřené na operaci následníka.

Na množině přirozených čísel definujeme operaci **sčítání** následujícím předpisem. Číslo $2 = 1 + 1$ ztotožníme s množinou $\mathcal{S}\mathcal{S}\emptyset$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí (ve smyslu ztotožnění s příslušnými množinami)

$$n = 1 + 1 + \cdots + 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

kde sčítáme n-krát prvek 1 podle výše uvedeného principu. Operaci **násobení** definujeme předpisem

$$m \cdot n = m + m + \cdots + m, \quad m, n \in \mathbb{N},$$

kde sčítáme n-krát prvek m.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme číslo $-n$ jako objekt splňující $n + (-n) = 0$.

Množinu

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n;\ n \in \mathbb{N}\}$$

nazýváme množinou **celých čísel**.

Ke každému číslu $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, definujeme číslo $\frac{1}{k}$ jako objekt splňující $k \cdot \frac{1}{k} = 1$.

Množinu

$$\mathbb{Q} = \{p \cdot \frac{1}{q};\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\},$$

nazýváme množinou **racionálních čísel**.

B.0.17. Věta. Každá neprázdná podmnožina přirozených čísel má nejmenší prvek.

Konstrukce reálných čísel

B.1. Dedekindovy řezy

V tomto dodatku uvedeme úplný podrobný důkaz Věty **??**. Předpokládáme existenci množiny racionálních čísel $\mathbb{Q}$, kterou jsme zavedli v Oddílu **??**, spolu s jejími základními operacemi. Tím máme na mysli operace sčítání, odčítání, násobení a dělení nenulovým číslem, přičemž jsou tyto operace svázány

- $\forall p,q \in \mathbb{Q}\colon\ p+q = q+p,\ \ pq = qp$ (komutativita sčítání a násobení),
- $\forall p,q,r \in \mathbb{Q}\colon\ (p+q)+r = p+(q+r),\ (pq)r = p(qr)$ (asociativita sčítání a násobení),
- $\forall p,q,r \in \mathbb{Q}\colon\ (p+q)r = pr+qr$ (distributivní zákon).

Dále je na $\mathbb{Q}$ definováno uspořádání $\leq$ s těmito vlastnostmi:

- $\forall p,q \in \mathbb{Q}\colon\ p \leq q \vee q \leq p$,
- $\forall p,q,r \in \mathbb{Q}, p \leq q\colon\ p+r \leq q+r$,
- $\forall p,q \in \mathbb{Q}\colon\ (0 \leq p \wedge 0 \leq q) \Rightarrow 0 \leq pq$.

Jsou-li $p,q \in \mathbb{Q}$, píšeme $q \geq p$, pokud $p \leq q$ a $p < q$, pokud $p \leq q$ a $p \neq q$.

B.1.1. Definice. Je-li $A \subset \mathbb{Q}$, řekneme, že $p \in \mathbb{Q}$ je **maximum** množiny A, pokud $p \in A$ a pro každé $q \in A$ platí $q \leq p$. Obdobně, $p \in \mathbb{Q}$ je **minimum** A, pokud $p \in A$ a pro každé $q \in A$ platí $p \leq q$.

Ukážeme jak množinu racionálních čísel doplnit pomocí takzvaných Dedekindových řezů na čísla reálná.

B.1.2. Definice. Nechť $\alpha \subset \mathbb{Q}$. Pak α se nazývá **řez**, pokud

(I) α je neprázdná a různá od $\mathbb{Q}$,
(II) $\forall p \in \alpha\ \forall q \in \mathbb{Q}, q \leq p\colon q \in \alpha$,
(III) α nemá maximum.

B.1.3. Věta. Je-li α řez, $p \in \alpha$ a $q \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$, pak $p < q$.

Důkaz. Tvrzení plyne přímo z vlastnosti (II) a předpokladu $q \notin \alpha$. ∎

B.1.4. Příklad. Pro každ+ę $p \in \mathbb{Q}$ platí $p^2 \neq 2$.

Důkaz. Dokážeme tvrzení sporem, tj. předpokládáme existenci racionálního čísla p splňujícího $p^2 = 2$. Zjevně můžeme předpokládat, že $p \geq 0$. Pišme $p = \frac{m}{n}$, kde $m,n \in \mathbb{N}$ a čísla m,n jsou navzájem nesoudělná. Pak platí $m^2 = 2n^2$, tj. m^2 je sud+ę číslo. Pak i m je sudé, takže můžeme psát $m = 2k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Platí tedy $4k^2 = 2n^2$, čili n^2 je sudé číslo. Jako výše obdržíme, že n samo je sudé. Tedy obě čísla m i n jsou sudá, což je ve sporu s jejich nesoudělností. Tím je důkaz dokončen. ∎

B.1.5. Příklad. Množina $\alpha = \{p \in \mathbb{Q}; p \leq 0 \vee p^2 < 2\}$ je řez, že množina $\mathbb{Q} \setminus \alpha$ nemá minimum.

Důkaz. Rozmysleme si nejdřív, že α je řez. Evidentně, každé nezáporné číslo je v α, a tedy $\alpha \neq \emptyset$. Protože $2^2 > 2$, je $\mathbb{Q} \setminus \alpha \neq \emptyset$. Je-li $p \in \alpha$ a $q \in \mathbb{Q}$ menší nebo rovno než p, pak buď je $q \leq 0$, a tedy v α, nebo $q^2 \leq p^2 < 2$. I v tomto případě je $q \in \alpha$ a podmínka (II) je splněna.

Ukážeme, že pro každé $p \in \alpha$ existuje $q \in A$ splňující $p < q$. Mějme tedy dáno $p \in A$. Pak $p^2 < 2$ a existuje tedy racionální číslo h splňující $0 < h < 1$ a

$$h < \frac{2 - p^2}{2p + 1}.$$

Pak $q = p + h$ je racionální číslo větší než p a platí

$$q^2 = p^2 + (2p + h)h < p^2 + (2p + 1)h < p^2 + (2 - p^2) = 2.$$

Tedy q je požadované číslo v α. Tím je ověřena podmínka (III) a α je řez.

Podobně ověříme, že dané číslo $p \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$ lze zmenšit na číslo q stále obsažené v $\mathbb{Q} \setminus \alpha$. Pak totiž $p^2 > 2$ a

$$q = p - \frac{p^2 - 2}{2p} = \frac{p}{2} + \frac{1}{p}$$

je racionální. Navíc, $0 < q < p$ a

$$q^2 = p^2 - (p^2 - 2) + \left(\frac{p^2 - 2}{2p}\right)^2 > p^2 - (p^2 - 2) = 2.$$

Tím je důkaz proveden. ∎

Je-li $\alpha \subset \mathbb{Q}$ řez, jeho prvky jsou nazývány **dolními čísly** α, zatímco prvky $\mathbb{Q} \setminus \alpha$ jsou **horními čísly** α. PříkladB.1.4 ukazuje, že ne pro každý řez existuje nejmenší horní číslo. Pro některé speciální řezy to však pravda je, jak ukazuje následující věta.

B.1.6. Věta. Nechť $r \in \mathbb{Q}$. Pak $\alpha = \{p \in \mathbb{Q}; p < r\}$ je řez a r je jeho nejmenší horní číslo.

Důkaz. Zjevně α splňuje první dvě vlastnosti Definice B.1.2. K důkazu (III) si uvědomme, že pro $p \in \alpha$ platí

$$p < \frac{p + r}{2} < r,$$

a tedy $\frac{p+r}{2} \in \alpha$.

Zřejmě platí $r \notin \alpha$. Protože $p < r$ implikuje $p \in \alpha$, je r nejmenší horní číslo α. ∎

B.1.7. Definice. Je-li $r \in \mathbb{Q}$, pak řez $\alpha = \{p \in \mathbb{Q}; p < r\}$ se nazývá **racionální řez**. Fakt, že je α konstruováno z r jako výše, budeme značit $\alpha = r^*$.

B.1.8. Definice. Jsou-li α, β řezy, řekneme, že jsou si rovny ($\alpha = \beta$), pokud jsou si rovny jako množiny, tj. $\alpha \subset \beta$ a $\beta \subset \alpha$.

Zavedeme na množině řezů uspořádání takto: $\alpha \leq \beta$ právě tehdy, když $\alpha \subset \beta$. Dále $\alpha \geq \beta$, pokud $\beta \leq \alpha$ a $\alpha < \beta$, pokud $\alpha \leq \beta$ a $\alpha \neq \beta$.

Nyní máme značení $\leq$ jak pro množinu $\mathbb{Q}$, tak pro množinu řezů. V dalším textu by mělo být z kontextu jasné, na jaké množině příslušnou relaci uvažujeme. Všimněme si následujícího pozorování.

B.1.9. Věta. Jsou-li α, β řezy, pak $\alpha < \beta$ právě tehdy, když existuje $p \in \mathbb{Q}$ splňující $p \in \beta \setminus \alpha$.

Důkaz. Tvrzení plyne okamžitě z definic. ∎

Dále si uvědomíme, že každé dva řezy jsou porovnatelné.

B.1.10. Věta. Nechť α, β jsou řezy. Pak buď $\alpha = \beta$ nebo $\alpha < \beta$ nebo $\beta < \alpha$. Tedy pro každé dva řezy α, β platí $\alpha \leq \beta \vee \beta \leq \alpha$.

Důkaz. Nejdříve dokážeme, že uvažované tři možnosti se navzájem vylučují. Předpokládáme-li $\alpha = \beta$, pak zjevně žádná ze dvou zbývajících možností nepřipadá do úvahy. Dále není množné, any zároveň platilo $\alpha < \beta$ a $\beta < \alpha$. Kdyby tomu tak bylo, pak z Věty B.1.9 nalezneme $p \in \beta \setminus \alpha$ a $q \in \alpha \setminus \beta$. Protože $p \in \beta$ a $q \notin \beta$, máme z Věty B.1.3 $p < q$. Podobně dostaneme z $q \in \alpha$ a $p \notin \alpha$ platnost $q < p$. Tedy je zároveň $p < q$ a $q < p$, což je nemožné.

Ukažme nyní, že alespoň jedna z možností nastane. Není-li $\alpha = \beta$, pak buď existuje $p \in \beta \setminus \alpha$, a tedy $\alpha < \beta$ z Věty B.1.9 nebo existuje $q \in \alpha \setminus \beta$, a tedy $\beta < \alpha$ (opět z Věty B.1.9). Tím je důkaz dokončen. ∎

B.1.11. Věta. Jsou-li α, β, γ řezy splňující $\alpha \leq \beta$ a $\beta \leq \gamma$, pak $\alpha \leq \gamma$ (tedy je uspořádání $\leq$ tranzitivní).

Důkaz. Je-li $\alpha \subset \beta$ a $\beta \subset \gamma$, pak zjevně $\alpha \subset \gamma$. Tedy $\alpha \leq \gamma$. ∎

Dalším krokem bude zkonstruování sčítání a násobení na množině řezů. Začneme s násobením.

B.1.12. Věta. Nechť α, β jsou řezy. Je-li $\gamma = \{p + q; p \in \alpha, q \in \beta\}$, pak γ je řez.

Důkaz. Zjevně je γ neprázdná, nebo+ą existují $p \in \alpha$, $q \in \beta$, a tedy $p + q \in \gamma$. Není však rovna $\mathbb{Q}$, jelikož lze vzít $r \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$ a $s \in \mathbb{R} \setminus \beta$ a pak $p + q < r + s$ pro každé $p \in \alpha$, $q \in \beta$. Tedy $r + s \notin \gamma$.

Vezměme $r \in \gamma$ a $s \in \mathbb{Q}$, $s < r$. Pak $r = p + q$ pro nějaká $p \in \alpha$, $q \in \beta$. Položme $t = s - q$. Pak
$$t = s - q < r - q = p + q - q = p,$$
a tedy $t \in \alpha$. Proto $s = t + q \in \gamma$.

K ověření podmínky (III) vezměme $r \in \gamma$. Pak $r = p + q$ pro nějaké $p \in \alpha$, $q \in \beta$. Najdeme $s \in \alpha$, které je větší než p. Pak $r < s + q \in \gamma$, a tedy γ nemá největší prvek. Tím je důkaz dokončen. ∎

B.1.13. Definice. Jsou-li α, β řezy, nazýváme řez $\{p + q; p \in \alpha, q \in \beta\}$ součtem řezů α a β a značíme ho $\alpha + \beta$. Jako u symbolu $\leq$ bude použití sčítání $+$ jasné z kontextu.

B.1.14. Věta. Nechť α, β, γ jsou řezy. Pak

(a) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ (komutativita),
(b) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ (asociativita),
(c) $\alpha + 0^* = \alpha$ (0^* je neutrální prvek).

Důkaz. Díky komutativitě sčítání na $\mathbb{Q}$ máme

$$\alpha + \beta = \{p + q; p \in \alpha, q \in \beta\} = \{q + p; q \in \beta, p \in \alpha\} = \beta + \alpha.$$

Tím je dokázáno (a).

Pomocí asociativity sčítání na $\mathbb{Q}$ obdržíme (b), nebo+ą

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) + \gamma &= \{p + q; p \in \alpha, q \in \beta\} + \gamma = \\ &= \{(p + q) + r; p \in \alpha, q \in \beta, r \in \gamma\} \\ &= \{p + (q + r); p \in \alpha, q \in \beta, r \in \gamma\} \\ &= \alpha + \{q + r; q \in \beta, r \in \gamma\} \\ &= \alpha + (\beta + \gamma).\end{aligned}$$

(c) Ukážeme, že množiny $\alpha + 0^*$ a α jsou totožné. Nechť nejprve $r \in \alpha + 0^*$ je dáno, pak $r = p + q$ pro nějaké $p \in \alpha$ a $q \in 0^*$. Pak $q < 0$, a tedy $p + q < p$, což znamená, že $r = p + q \in \alpha$. Obráceně, je-li $p \in \alpha$, nalezneme $q \in \alpha$ větší než p. Pak $p - q \in 0^*$, a tedy $p = q + (p - q) \in \alpha + 0^*$. Tedy $\alpha = \alpha + 0^*$. ■

B.1.15. Věta. Nechť α je řez a $r \in \mathbb{Q}$ je kladné. Pak existují $p \in \alpha$, $q \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$ takové, že q není nejmenší horní číslo α a $q - p = r$.

Důkaz. Zvolme $s \in \alpha$ a pro $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ položme $s_n = s + nr$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ splňující $s_n \notin \alpha$. Kdyby tomu tak nebylo, vezmeme $q \notin \alpha$ a uvědomíme si, že

$$\forall n \in \mathbb{N} : s + nr \leq q.$$

Tedy

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \leq \frac{q - s}{r}.$$

To je však ve sporu s Archimédovým principem.

Vezměme tedy nejmenší $m \in \mathbb{N}$ takové, že $s_m + 1 \notin \alpha$. Pak $s_m \in \alpha$. Pokud s_{m+1} je nejmenší horní číslo α, položme $p = s_m + \frac{r}{2}$ a $q = s_{m+1} + \frac{r}{2}$, v opačném případě stačí volit $p = s_m$ a $q = s_{m+1}$. ■

Dále ukážeme, že ke každému řezu existuje řez opačný.

B.1.16. Věta. Je-li α řez, existuje právě jeden řez β splňující $\alpha + \beta = 0^*$.

Důkaz. Ukážeme nejdříve jednoznačnost. Jsou-li totiž β_1 a β_2 dva takové řezy, platí dle Věty B.1.14(a) a (b)

$$\begin{aligned}\beta_2 = 0^* + \beta_2 &= (\alpha + \beta_1) + \beta_2 = (\beta_1 + \alpha) + \beta_2 \\ &= \beta_1 + (\alpha + \beta_2) = \beta_1 + 0^* = \beta_1.\end{aligned}$$

Přistupme nyní k důkazu existence. K tomuto účelu definujme

$$\beta = \{p \in \mathbb{Q}; -p \text{ je horní číslo } \alpha, \text{ ale ne nejmenší}\}.$$

Pak β je řez. První vlastnost (I) je vidět z faktů, že $-q \in \beta$ pro jakékoliv horní číslo q α $q > r$ a že ne každé číslo $p \in \mathbb{Q}$ splňuje je horní číslo α.

Je-li $p \in \beta$ a $q < p$ je racionální, pak $-q > -p$, tedy q je horní číslo α. Navíc $-p$ nebylo nejmenší horní číslo, a tedy ani $-q$ není. Proto β splňuje (II).

Konečně, je-li $p \in \beta$, je $-p$ horní číslo α, ale ne nejmenší. Existuje tedy $q \in \mathbb{Q}$ takové, že $-q < -p$ a $-q \notin \alpha$. Pak

$$r = \frac{p+q}{2}$$

splňuje $-q < -r < -p$, takže $-r$ je horní číslo α, i když ne nejmenší. Tedy $r > p$ je v β a β nemá nemá maximum.

Dále platí $\beta + \alpha = 0^*$. Je-li totiž $p \in \beta$ a $q \in \alpha$, platí

$$p + q < p + r < 0.$$

Tedy $p + q \in 0^*$.

Obráceně, je-li $p \in 0^*$, pak $p < 0$ a dle Věty B.1.15 existuje $q \in \alpha$ a $s \in \mathbb{Q}$, $s > r$, tak, že $p = s - q$. Pak $-s \in \beta$, a tedy

$$p = q - s = q + (-s) \in \alpha + \beta.$$

Tím je důkaz dokončen. ■

B.1.17. Definice. Je-li α řez, jednoznačně určený řez β splňující $\alpha + \beta = 0^*$ značíme jako $-\alpha$.

B.1.18. Věta. Nechť α, β, γ jsou řezy splňující $\beta < \gamma$. Pak $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$. Speciálně, je-li $\alpha > 0^*$ a $\gamma > 0^*$, pak $\alpha + \gamma > 0^*$.

Důkaz. Z Definice B.1.13 plyne, že $\alpha + \beta \leq \alpha + \gamma$. Kdyby platila rovnost $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, máme

$$\beta = 0^* + \beta = (-\alpha) + (\alpha + \beta) = (-\alpha) + (\alpha + \gamma) = 0^* + \gamma = \gamma,$$

což je spor.

Jsou-li $\alpha, \gamma > 0^*$, pak existují $p \in \alpha \setminus 0^*$ a $q \in \gamma \setminus 0^*$. Je tedy $p + q \in (\alpha + \gamma) \setminus 0^*$. Tedy $\alpha + \gamma > 0^*$. ■

B.1.19. Věta. Nechť α, β jsou řezy. Pak existuje právě jeden řez γ splňující $\alpha + \gamma = \beta$.

Důkaz. Existovali-li by dva takové různé řezy γ_1, γ_2, pak $\alpha + \gamma_1 \neq \alpha + \gamma_2$ díky Větě B.1.10 a B.1.18. Požadovaný řez γ obdržíme jako

$$\gamma = \beta + (-\alpha).$$

Pak máme z Věty B.1.14

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= \alpha + (\beta + (-\alpha)) = \alpha + ((-\alpha) + \beta) \\ &= (\alpha + (-\alpha)) + \beta = 0^* + \beta = \beta. \end{aligned}$$

■

B.1.20. Definice. Jsou-li α, β řezy, řez $\beta + (-\alpha)$ značíme jako $\beta - \alpha$.

B.1.21. Věta. Nechť α, β jsou řezy splňující $\alpha \geq 0^*$, $\beta \geq 0^*$. Pak

$$\gamma = \{r \in \mathbb{Q}; r \leq 0\} \cup \{pq; p \in \alpha \text{ nezápornč}, q \in \beta \text{ nezápornč}\}$$

je řez.

Důkaz. Ukažme nejprve vlastnost (I). Evidentně, každé záporné racionální číslo je v γ, tedy je γ neprázdný. Jsou-li $a \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$, $b \in \mathbb{Q} \setminus \beta$, pak $a, b \geq 0$ a pro každou nezápornou dvojici $p \in \alpha$, $q \in \beta$ máme $pq < ab$. Tedy $\gamma \neq \mathbb{Q}$.

K ověření (II) zvolme $p \in \gamma$ a $q < p$. Je-li $p \leq 0$ nebo $q < 0$, je zjevně $q \in \gamma$. Jinak existují nezáporná čísla $a \in \alpha$ a $b \in \beta$ splňující $p = ab$. Pak

$$\frac{q}{ab}a < a,$$

a tedy $\frac{q}{ab}a \in \alpha$. Proto

$$q = \frac{qa}{ab}b \in \gamma.$$

Pro důkaz (III) zvolme libovolné číslo $r \in \gamma$. Je-li $r < 0$, zjevně existuje prvek v γ větší než r. Jinak existují $p \in \alpha$, $q \in \beta$ takové, že $r = pq$. Z vlastnosti (III) pro řezy α a β existují $p' > p$ v α a $q' > q$ ve β. Pak

$$pq < p'q' \in \gamma$$

a γ nemá největší prvek. Tedy γ je řez. ∎

B.1.22. Definice. Řez zkonstruovaný ve Větě B.1.21 se nazývá součinem nezáporných řezů α a β a značí se $\alpha\beta$.

B.1.23. Definice. Je-li α řez, definujeme řez $|\alpha|$ (**absolutní hodnotu** α) jako

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \text{pokud } \alpha \geq 0^*, \\ -\alpha & \text{pokud } \alpha < 0^*. \end{cases}$$

Zjevně vždy platí $|\alpha| \geq 0^*$ a $|\alpha| = 0^*$ právě tehdy, když $\alpha = 0^*$.

Nyní rozšíříme definici součinu na všechny řezy.

B.1.24. Definice. Jsou-li α, β řezy, máme vždy definován součin $|\alpha||\beta|$. Můžeme tedy položit

$$\alpha\beta = \begin{cases} = -(|\alpha||\beta|) & \text{pokud } \alpha < 0^*, \beta \geq 0^*, \\ -(|\alpha||\beta|) & \text{pokud } \alpha \geq 0^*, \beta < 0^*, \\ |\alpha||\beta| & \text{pokud } \alpha < 0^*, \beta < 0^*. \end{cases}$$

Stejně jako pro sčítání platí pro násobení očekávané vlastnosti.

B.1.25. Věta. Pro libovolné řezy α, β, γ platí

(a) $\alpha\beta = \beta\alpha$ (komutativita),
(b) $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ (asociativita),
(c) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ (distributivita),
(d) $\alpha 0^* = 0^*$,
(e) $\alpha\beta = 0^*$ právě tehdy, když $\alpha = 0^*$ nebo $\beta = 0^*$,

(f) $\alpha 1^* = \alpha$.

(g) Pokud $0^* < \alpha < \beta$ a $\gamma > 0^*$, pak $\alpha\gamma < \beta\gamma$.

Důkaz. (a) Je-li $\alpha, \beta \geq 0^*$, pak

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= 0^* \cup \{pq; p \in \alpha, p \geq 0, q \in \beta, q \geq 0\}\\ &= 0^* \cup \{qp; q \in \beta, q \geq 0, p \in \alpha, p \geq 0\}\\ &= \beta\alpha.\end{aligned}$$

Ostatní případy plynou analogicky, ukažme například důkaz v situaci $\alpha < 0^*$ a $\beta \geq 0^*$. Pak

$$\alpha\beta = -(|\alpha||\beta|) = -(|\beta||\alpha|) = \beta\alpha.$$

(b) Uvažujme nejprve případ nezáporných řezů α, β, γ. Pak

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)\gamma &= 0^* \cup \{(pq)r; p \in \alpha, p \geq 0, q \in \beta, q \geq 0, r \in \gamma, r \geq 0\}\\ &= 0^* \cup \{p(qr); p \in \alpha, p \geq 0, q \in \beta, q \geq 0, r \in \gamma, r \geq 0\}\\ &= \alpha(\beta\gamma).\end{aligned}$$

V případě $\alpha < 0^*$ a $\beta, \gamma \geq 0^*$, pak

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)\gamma &= (-(|\alpha||\beta|)\gamma) = -(|\alpha||\beta||\gamma|)\\ &= -(|\alpha|(|\beta||\gamma|)) = \alpha(|\beta||\gamma|)\\ &= \alpha(\beta\gamma).\end{aligned}$$

Ostatní případy jsou analogické.

(c) Tento důkaz se provede zcela obdobně jako výše.

(d) Je-li $\alpha \geq 0^*$, pak $\alpha 0^* = 0^*$ z definice. Pro $\alpha < 0^*$ máme

$$\alpha 0^* = -(|\alpha| 0^*) = -0^* = 0^*.$$

(e) Je-li $\alpha, \beta > 0^*$, pak vezmeme $p \in \alpha$ kladné a $q \in \beta$ kladné. Pak $pq \in \alpha\beta \notin 0^*$, a tedy $\alpha\beta > 0*$. Jelikož $\alpha = 0^*$ právě tehdy, když $|\alpha| = 0^*$, dostáváme zbývající případy.

(f) Předpokládáme-li $\alpha \geq 0^*$, pak zřejmě platí

$$\alpha 1^* = 0^* \cup \{pq; p \in \alpha p \geq 0, q \in 1^*, q \geq 0\} \subset \alpha.$$

Obráceně, máme-li dáno $p \in \alpha$, vezmeme $q \in \alpha$ větší než p. Pak existuje $r \in 1^*$ splňující $r > \frac{p}{q}$. Pak tedy $qr \in \alpha 1^*$, přičemž $qr > p$. Tedy i $p \in \alpha 1^*$. Proto $\alpha 1^* \subset \alpha$.

Je-li $\alpha < 0^*$, máme

$$\alpha 1^* = -(|\alpha| 1^*) = -(|\alpha|) = \alpha.$$

(g) Nalezneme $r \in \gamma, r > 0$ a $q \in \beta \setminus \alpha$. Pak $q > 0$ a $qr \in \beta\gamma$. Na stranu druhou, pro každé $p \in \alpha$ kladné platí $p < q$, a proto $pr < qr$. Tedy $qr \in \beta\gamma \setminus \alpha\gamma$, tudíž $\alpha\gamma < \beta\gamma$. ∎

B.1.26. Věta. Je-li řez α různý od 0^*, pro každý řez β existuje právě jeden řez γ splňující $\alpha\gamma = \beta$.

Důkaz. Důkaz předvedeme pro případ $\alpha, \beta > 0^*$. Položme v tomto případě

$$\gamma = 0^* \cup \{\frac{p}{q}; p \in \beta, p \geq 0, q \notin \alpha\}.$$

Nejprve ověříme, že γ je řez.

Předně, γ je neprázdná množina. Vezmeme-li $p \notin \beta$ a $q \in \alpha$ kladné, pak $\frac{p}{q} \notin \gamma$, protože pro každou dvojici $p' \in \beta$, $q' \notin \alpha$ platí

$$\frac{p'}{q'} < \frac{p}{q}.$$

Tedy γ splňuje (I).

Je-li $p \in \beta$, $q \notin \alpha$ kladná a $0 < r < \frac{p}{q}$, pak $q' = \frac{p}{r} > q$. Tedy $q' \notin \alpha$ a

$$r = \frac{p}{q'} \in \gamma.$$

Ukažme nyní vlastnost (III) řezu γ. Jsou-li $p \in \beta$, $q \in \alpha$ kladná, nalezneme $p' \in \beta$ větší než p. Pak $\frac{p'}{q} \in \gamma$ je větší než dané $\frac{p}{q}$. Tedy γ nemá maximum.

Dále platí $\alpha\gamma = \beta$. Nejprve, je-li $p \in \beta$ nezáporné, $q \notin \alpha$ a $q' \in \alpha$, pak

$$\frac{p}{q}q' < p.$$

Z vlastnosti (II) řezu β tedy máme $\frac{p}{q}q' \in \beta$.

Obráceně, nech+ą $p \in \beta$ nezáporné je dáno. Nalezneme $p' \in \beta$ větší než p a nějaké $q_0 \in \alpha$ kladné. Nechť $r \in \mathbb{Q}$ je kladné číslo splňující $1 - \frac{r}{q_0} > \frac{p}{p'}$.

Použijeme nyní Věty B.1.15 k nalezení $q \in \alpha$ takového, že $q + r \notin \alpha$. Pak

$$\frac{p'}{q+r} \in \gamma, \quad q \in \alpha \quad \text{a} \quad q + r > q_0.$$

Tedy

$$\frac{p'}{q+r}q = p'(1 - \frac{r}{q+r}) > p'(1 - \frac{r}{q_0}) > p'\frac{p}{p'} = p.$$

Číslo p je tedy shora odhadnuto číslem $\frac{p'}{q+r}q$, které je v $\alpha\gamma$. Tedy i $p \in \gamma\alpha$. Dohromady máme $\beta = \alpha\gamma$.

Ukažme nyní jednoznačnost řezu γ. Předně si uvědomíme, že pouze kladný řez γ může splňovat $\alpha\gamma = \beta$. Kdybychom měli dva takovéto různé řezy γ_1 a γ_2, řekněme $\gamma_1 < \gamma_2$, pak díky Větě B.1.25(g) platí $\alpha\gamma_1 < \alpha\gamma_2$, což je spor.

Případy obecných řezů α, β se dokazují analogicky. ■

Důležité vlastnosti racionálních řezů jsou shrnuty v následujících větách.

B.1.27. Věta. Pro každá $p, q \in \mathbb{Q}$ platí

(a) $p^* + q^* = (p + q)^*$,
(b) $p^*q^* = (pq)^*$,
(c) $p^* < q^*$ právě tehdy, když $p < q$.

Důkaz. (a) Je-li $r \in p^* + q^*$, pak $r = s + t$ pro nějaká racionální $s < p$, $t < q$. Tedy $r < p + q$, a proto $r \in (p + q)^*$.

Obráceně, je-li $r \in (p + q)^*$, pak $r < p + q$. Položme

$$h = p + q - r, \quad s = p - \frac{h}{2} \quad \text{a} \quad t = q - \frac{h}{2}.$$

Pak $s \in p^*$, $t \in q^*$ a $r = s + t$. Tedy $r \in p^* + q^*$.

(b) Ukažme důkaz pro $p, q > 0$. Je-li $r \in p^*$ a $s \in q^*$ nezáporná, pak zjevně $rs \in (pq)^*$.

Je-li $t \in (pq)^*$ nezáporné, najdeme $h > 0$ racionální takové, že

$$pq - t > h(p + q - h).$$

Po eventuálním zmenšení h můžeme též předpokládat, že $p - h$ i $q - h$ jsou nezáporná čísla. Pak $p - h \in p^*$, $q - h \in q^*$ a

$$t < pq + h(h - p - q) = (p - h)(q - h) \in p^* q^*.$$

Tedy i t samotné je v $p^* q^*$.

(c) Jsou-li p, q racionální čísla a $p < q$, pak $p \in q^*$ a $p \notin p^*$. Tedy $p^* < q^*$. Na druhou stranu, je-li $p^* < q^*$, pak existuje racionální $r \in q^* \notin p^*$. Tedy $p \leq r < q$, a proto $p < q$. ■

B.1.28. Věta. Jsou-li α, β řezy, $\alpha < \beta$, pak existuje racionální řez r^* splňující $\alpha < r^* < \beta$.

Důkaz. Jelikož $\alpha < \beta$, existuje $p \in \mathbb{Q}$ takové, že $p \in \beta \setminus \alpha$. Nalezneme $r \in \beta$ splňující $p < r$. Protože je $r \in \beta$ a $r \notin r^*$, máme $r^* < \beta$. Jelikož $p \in r^*$ a $p \notin \alpha$, platí $\alpha < r^*$. ■

B.1.29. Věta. Je-li α řez a $p \in \mathbb{Q}$, pak $p \in \alpha$ právě tehdy, když $p^* < \alpha$.

Důkaz. Je-li $p \in \alpha$, pak díky $p \notin p^*$ máme $p^* < \alpha$. Je-li $p^* < \alpha$, existuje $q \in \alpha \notin p^*$. Pak $q \geq p$, a tedy $p \in \alpha$. ■

B.1.30. Definice. Řezy budou nyní nazývány **reálná čísla**, přičemž racionální řezy jsou **racionální čísla**. Ostatní řezy jsou **iracionální čísla**. Množinu reálných čísel značíme jako $\mathbb{R}$.

B.1.31. Věta. Nechť A, B jsou disjunktní neprázdné podmnožiny $\mathbb{R}$ splňující $A \cup B = \mathbb{R}$ a

$$\forall a \in A, \ \forall b \in B : a < b.$$

Pak existuje právě jedno $c \in \mathbb{R}$ takové, že $a \leq c$ pro každé $a \in A$ a $c \leq b$ pro každé $b \in B$.

Důkaz. Položme

$$c = \{p \in Q; \exists a \in A : p \in a\}.$$

Ukážeme, že c je řez, tedy reálné číslo. Neprázdnost c plyne z neprázdnosti A. Navíc $c \neq \mathbb{Q}$, protože je-li $b \in$ a $q \notin b$, pak $q \notin a$ pro každé $a \in A$ díky nerovnosti $a < b$. Tedy $q \notin c$.

K ověření vlastnosti (II) vezměme $p \in c$ a $q < p$. Pak $p \in a$ pro nějaké $a \in A$, tedy i $q \in a$. Proto $q \in c$.

Konečně, c nemá maximum. Je-li totiž $p \in c$, pak $p \in a$ pro nějaké $a \in A$. Jelikož a nemá maximum, existuje $q \in a$ větší než p. Pak tedy $q \in c$ je větší než p.

Platí, že $a \leq c$ pro každé $a \in A$, jelikož každé takové a splňuje $a \subset c$. Pokud by existovalo $b \in B$ splňující $b < c$, nalezli bychom racionální $p \in c \setminus b$. Pak by existovalo $a \in A$ splňující $p \in a$, tedy by bylo $b < a$, což není možné. Proto $c \leq b$ pro každé $b \in B$.

Nakonec ukažme jednoznačnost nalezeného c. Měli-li bychom dvě čísla $c_1 < c_2$ splňující závěry věty, nalezli bychom c_3 mezi nim díky Větě B.1.28. Z vlastností A, B je pak $c_3 \in A$ díky $c_3 < c_2$, ale i $c_3 \in B$ díky $c_1 < c_3$. To je však spor s předpokladem $A \cap B = \emptyset$. ∎

B.1.32. Definice. Množina $A \subset \mathbb{R}$ má **horní závoru**, pokud existuje $x \in \mathbb{R}$ splňující $a \leq x$ pro každé $a \in A$. Množina s horní závorou se nazývá **shora omezená**. Je-li horní závora A obsažena v A, nazýváme ji **maximem** A.

Obdobně definujeme **dolní závoru**, **zdola omezenou** množinu a **minimum**.

B.1.33. Definice. Nechť $A \subset \mathbb{R}$ je omezená shora a $x \in \mathbb{R}$ má následující vlastnosti:

- x je horní závora A,
- je-li $y \in \mathbb{R}$, $y < x$, pak y není horní závora A.

Pak x nazýváme **nejmenší horní závorou** neboli **supremem**. Podobně definujeme **největší dolní závoru**, tj. **infimum**.

B.1.34. Příklad. Nechť $E = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$. Supremum množiny E je pak číslo 1, zatímco jejím infimem je 0. Povšimněme si, že E má maximum, ale nemá minimum.

B.1.35. Věta. Nechť A, B jsou disjunktní neprázdné podmnožiny $\mathbb{R}$ splňující $A \cup B = \mathbb{R}$ a

$$\forall a \in A,\ \forall b \in B : \ a < b.$$

Pak má buď A maximum nebo B minimum.

Důkaz. Nechť c je číslo, jehož existence je zaručena Větou B.1.31. Je-li $c \in A$, má A maximum, je-li $c \in B$, má B minimum. ∎

B.1.36. Věta. Je-li $E \subset \mathbb{R}$ neprázdná shora omezená, pak má supremum.

Důkaz. Položme

$$A = \{a \in \mathbb{R}; \exists x \in E : a < x\}, \quad B = \mathbb{R} \setminus A.$$

Zjevně pak každé $a \in A$ není horní závorou E, zatímco každé $b \in$ je horní závorou E. Ukážeme, že množiny A, B splňují předpoklady Věty B.1.35, přičemž množina B má minimum. To bude zřejmě ono hledané supremum množiny E.

Díky předpokladům na množinu E jsou A i B neprázdné. Je-li totiž $x \in E$, pak každé $a \in \mathbb{R}$ menší než x je v A. Dále, je-li $y \in \mathbb{R}$ horní závora E, pak zřejmě $y \in B$. Očividně platí $A \cap B = \emptyset$ a $A \cup B = \mathbb{R}$.

Nechť nyní $a \in A$ a $b \in B$. Pak existuje $x \in E$ splňující $a < x$. Tedy $b \geq x$, což implikuje $a < b$.

Tím jsou ověřeny předpoklady Věty B.1.35. Zbývá ukázat, že A nemůže mít maximum. Máme-li totiž $a \in A$, nalezneme $x \in E$ splňující $a < x$. Pak libovolné číslo a', $a < a' < x$, leží v A a je větší než a. Tedy a není maximem A.

Množina B má tedy minimum, což je požadované supremum množiny E. ■

B.1.37. Věta. (a) Nechť $a \in \mathbb{R}$. Potom $\big||a|\big| = |a|$.
(b) Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ jsou čísla splňující $a \le b$ a $-a \le b$. Potom $|a| \le b$.

B.1.38. Věta (trojúhelníková nerovnost)**.** Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$. Potom platí

(a) $|a + b| \le |a| + |b|$,
(b) $\big||a| - |b|\big| \le |a - b|$,
(c) $|a - b| \le |a - c| + |c - b|$.

Důkaz. (a) Pro $a, b \in \mathbb{R}$ platí podle definice následující nerovnosti: $-|a| \le a \le |a|$ a $-|b| \le b \le |b|$. Jejich sečtením dostaneme nerovnost $-(|a|+|b|) \le a+b \le |a|+|b|$, ze které podle Věty B.1.37(b) plyne dokazovaná nerovnost.

(b) Jednoduchou úpravou výrazu a pomocí tvrzení (a) dostaneme $|a| = |(a - b) + b| \le |a - b| + |b|$, tedy $|a| - |b| \le |a - b|$. Záměnou rolí a a b dostáváme $|b| - |a| \le |a - b|$. Pomocí Věty B.1.37(b) pak obdržíme $\big||a| - |b|\big| \le |a - b|$.

(c) Opět úpravou výrazu a pomocí tvrzení (a) dostaneme $|a - b| = |(a - c) + (c - b)| \le |a - c| + |c - b|$. ■

B.1.39. Lemma. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Jestliže pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, platí $0 \le a \le \varepsilon$, potom $a = 0$.

Speciálně, je-li $a, b \in \mathbb{R}$ a pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, platí $|a - b| < \varepsilon$, potom $a = b$.

B.1.40. Úmluva. Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Potom

$$a^0 = 1.$$

Následující věta, která je nejdůležitějším tvrzením tohoto oddílu, říká, že reálná čísla existují a jsou v jistém smyslu určena jednoznačně. Věta má dlouhý důkaz, který navíc sám o sobě nemá pro další výklad zvláštní význam. Proto jej uvádíme až v Dodatku B.

B.1.41. Věta (existence a jednoznačnost $\mathbb{R}$)**.** Existuje čtveřice $(\mathbb{R}, +, \cdot, \le)$ splňující podmínky I–III, přičemž je těmito podmínkami určena jednoznačně v následujícím smyslu. Pokud čtveřice $(\mathbb{R}^\diamond, +^\diamond, \cdot^\diamond, \le^\diamond)$ splňuje mutatis mutandis podmínky I–III, pak existuje bijekce $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\diamond$ taková, že pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí

- $\varphi(x + y) = \varphi(x) +^\diamond \varphi(y)$,
- $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot^\diamond \varphi(y)$,
- $x \le y \Rightarrow \varphi(x) \le^\diamond \varphi(y)$.

B.1.42. Poznámka. Formulace předchozí věty je poněkud komplikovaná. Vyjádřeme tedy ještě její smysl neformálně. V Dodatku B přesně popíšeme, které prvky patří do množiny $\mathbb{R}$ a jak jsou definovány příslušné operace sčítání a násobení spolu s uspořádáním. Pokud bychom zvolili nějaký alternativní přístup a sestrojili množinu $\mathbb{R}^\diamond$ spolu s operacemi $+^\diamond, \cdot^\diamond$ a uspořádáním $\le^\diamond$, které by splňovaly vlastnosti I–III, přičemž místo $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ bychom uvažovali $(\mathbb{R}^\diamond, +^\diamond, \cdot^\diamond, \leq^\diamond)$, pak podle předchozí věty existuje zobrazení φ, které je nejenom bijekcí množiny $\mathbb{R}$ na množinu $\mathbb{R}^\diamond$, ale také operace a uspořádání v $\mathbb{R}$ převádí na příslušné operace a uspořádání v $\mathbb{R}^\diamond$.

B.1.43. Věta.
(a) $\forall x \in \mathbb{R}: x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$,
(b) $\forall x \in \mathbb{R}: \ -x = (-1) \cdot x$,
(c) $\forall x, y \in \mathbb{R}: xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$,
(d) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}: (x^n)^{-1} = (x^{-1})^n$,
(e) $\forall x, y \in \mathbb{R}: (x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow xy > 0$,
(f) $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0\ \forall y \in \mathbb{R}, y \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}: x < y \Leftrightarrow x^n < y^n$.

Důkaz. (a) Platí

$$x = 1 \cdot x = (1 + 0) \cdot x = 1 \cdot x + 0 \cdot x = x + 0 \cdot x.$$

Přičteme-li v rovnosti $x = x + 0 \cdot x$ k oběma stranám číslo $-x$, dostaneme dokazované tvrzení.

(b) Platí

$$0 = 0 \cdot x = (1 - 1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = x + (-1) \cdot x.$$

Přičteme-li v rovnosti $0 = x + (-1) \cdot x$ k oběma stranám číslo $-x$, dostaneme dokazované tvrzení.

(c) Pokud $x = 0$, jsme hotovi. Pokud $x \neq 0$, pak existuje $x^{-1} \in \mathbb{R}$ a platí

$$0 = x^{-1} \cdot 0 = x^{-1}(xy) = (x^{-1}x)y = 1 \cdot y = y.$$

(d) Použitím komutativity a asociativity násobení dostaneme

$$x^n \cdot (x^{-1})^n = x^n \cdot (\underbrace{x^{-1} \cdots x^{-1}}_{n\text{-krát}}) = \underbrace{(x \cdot x^{-1}) \cdots (x \cdot x^{-1})}_{n\text{-krát}} = 1 \cdots 1 = 1.$$

(e) Z poslední vlastnosti ve druhé skupině dostáváme, že $xy \geq 0$. Podle (c) ovšem vidíme, že $xy \neq 0$, jinak by totiž bylo x nebo y rovno 0. Dohromady pak máme $xy > 0$.

(f) Pokud $n = 1$, je tvrzení zřejmé. V případě $n > 1$ můžeme psát

$$y^n - x^n = (y - x) \cdot (y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1}).$$

Pokud $y > x$, pak oba uzávorkované výrazy jsou kladná čísla, a proto platí $0 < y^n - x^n$, neboli $x^n < y^n$.

Nechť nyní $y^n > x^n$. Pokud by platilo $y = x$, pak také $y^n = x^n$, což je spor. V případě, že $y < x$, dostaneme z již dokázaného $y^n < x^n$, což je opět spor. ∎

B.1.44. Věta (rekurentně zadaná posloupnost)**.** Nechť A je neprázdná množina a $\mathcal{S}$ je množina všech konečných posloupností prvků množiny A včetně prázdné posloupnosti. Nechť $f : \mathcal{S} \to A$ je zobrazení. Potom existuje právě jedna posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků množiny A splňující

(a) $x_1 = f(\emptyset)$,

(b) $x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})$ pro každé $n \in \mathbb{N}, n > 1$.

Důkaz. Nejprve pomocí matematické indukce ukážeme, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje právě jedna posloupnost $\{x_n^k\}_{n=1}^k$ taková, že

(a') $x_1^k = f(\emptyset)$,

(b') $x_n^k = f(x_1^k, \dots, x_{n-1}^k)$ pro každé $n \in \{2, \dots, k\}$.

Pokud $k = 1$, pak je posloupnost $\{x_n^1\}_{n=1}^1$ jednoznačně určena podmínkou (a').

Předpokládejme, že pro $k \in \mathbb{N}$ podmínky (a') a (b') jednoznačně určují posloupnost $\{x_n^k\}_{n=1}^k$. Posloupnost $\{x_n^{k+1}\}_{n=1}^{k+1}$ musí podle indukčního předpokladu splňovat $\{x_n^{k+1}\}_{n=1}^k = \{x_n^k\}_{n=1}^k$. Prvek x_{k+1}^{k+1} musí splňovat $x_{k+1}^{k+1} = f(x_1^{k+1}, \dots, x_k^{k+1}) = f(x_1^k, \dots, x_k^k)$, a je tedy jednoznačně určen.

Hledanou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ definujeme předpisem $x_n = x_n^n, n \in \mathbb{N}$. Tato posloupnost zřejmě splňuje podmínku (a). Vzhledem k jednoznačnosti posloupností $\{x_n^k\}_{n=1}^k$ platí $\{x_n^j\}_{n=1}^k = \{x_n^k\}_{n=1}^k$ pro každé $k, j \in \mathbb{N}, j \geq k$. Pro každé $k, j \in \mathbb{N}, j \geq k$, tedy platí $x_k = x_k^j$. Potom pro $n \in \mathbb{N}, n > 1$, platí

$$x_n = x_n^n = f(x_1^n, \dots, x_{n-1}^n) = f(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

čímž je ověřena podmínka (b). Odtud plyne, že $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ má požadované vlastnosti. ■

DODATEK C

Algebra

Literatura

1. A. Anzenbacher, *Úvod do filozofie*, SPN, Praha 1990.
2. Archimédés, *O měření kruhu*, přibližně 250 př. n. l.
3. B. Balcar, P. Štěpánek, *Teorie množin*, Academia, 2005.
4. J. Bečvář, *Lineární algebra*, Matfyzpress 2010.
5. K. M. Ball, *Strange curves, counting rabbits, and other mathematical explorations*, Princeton University Press, 2003.
6. J. H. Conway, *The weird and wonderful chemistry of audioactive decay*, Open Problems in Communication and Computation, T.M. Cover and B. Gopinath, eds., Springer, 1987, pp. 173–188.
7. J. H. Conway a R.K. Guy, *The book of numbers*, New York: Copernicus 1996.
8. B. P. Děmidovič, *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, Fragment, 2003.
9. A. Gelfond, *Sur le septieme Probleme de Hilbert*, Bull. Acad. Sci. URSS. Sér. Math. **7** (1934), 623–630.
10. P. Hájek, P. Habala, V. Zizler, *Introduction to Banach Spaces*, Matfyzpress 1996.
11. A. M. Gleason, *Fundamentals of abstract analysis*, Addison-Wesley 1966.
12. P. R. Halmos, *Measure theory*, Springer 1978.
13. V. Jarník, *Diferenciální počet (I)*, Academia, Praha 1974.
14. V. Jarník, *Diferenciální počet (II)*, Academia, Praha 1956.
15. V. Jarník, *Integrální počet (I)*, Academia, Praha 1974.
16. T. Jech, *Set theory*, Springer 2002.
17. A. S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Springer 1995.
18. J. Lukeš, J. Malý, *Measure and integral*, Matfyzpress.
19. W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill, 1964.
20. T. Schneider, *Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen. I.*, J. Reine Angew. Math. **172** (1934), 65–69.
21. A. Sochor, *Klasická matematická logika*, Karolinum, Praha 2001.
22. R. Smullyan, *Jak se jmenuje tahle knížka?*, Mladá Fronta, 1986.
23. A. Tarski, *Úvod do logiky a metodologie deduktivních věd*, Academia, Praha 1969.
24. B. L. van der Waerden, *Ein einfaches Beispiel einer nicht-differenzierbaren stetigen Funktion*, Math. Z. **32** (1930), 474–475.
25. L. Zajíček, *Vybrané úlohy z matematické analýzy pro 1. a 2. ročník*, Matfyzpress, 2000.
26. L. Zajíček, *Vybrané partie z matematické analýzy pro 2. ročník*, Matfyzpress, 2007.