

Opakování

Opakování ze SŠ

1. Nalezněte reálnou a imaginární část

a) $\frac{2}{1-3i}$

b) $(1+i\sqrt{3})^3$

2. Nalezněte velikosti a argumenty následujících komplexních čísel

a) $-2-2i$

b) $1+i^{123}$

3. Dokažte

a) $z+\bar{z}=2\operatorname{Re} z$

b) $z-\bar{z}=2i\operatorname{Im} z$

c) $\overline{\bar{z}}=z$

d) $|\bar{z}|=|z|$

e) $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$

f) $\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2 \pmod{2\pi} \quad z_1, z_2 \neq 0$

g) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg z_1-\arg z_2 \pmod{2\pi} \quad z_1, z_2 \neq 0$

4. Řešte v \mathbb{C} :

a) $x^6+1=0$

b) $x^2+x+1=0$

5. Řešte v \mathbb{R} :

a) $|x+1|+|x-1|\geq 2$

b) $|x-3|+|x+2|\leq 0$

Výroky, množiny, zobrazení

6. Dokažte, že platí

a) $A \Rightarrow A$

b) $(A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

c) $A \Leftrightarrow A$

d) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow A)$

e) $(A \Leftrightarrow B \wedge B \Leftrightarrow C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$

f) $\operatorname{non}(\operatorname{non} A) \Leftrightarrow A$

g) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\operatorname{non} B \Rightarrow \operatorname{non} A)$

h) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\operatorname{non} B \Leftrightarrow \operatorname{non} A)$

i) $(\operatorname{non}(A \vee B)) \Leftrightarrow ((\operatorname{non} A) \wedge (\operatorname{non} B))$

j) $(\operatorname{non}(A \wedge B)) \Leftrightarrow ((\operatorname{non} A) \vee (\operatorname{non} B))$

- k) $(\text{non}(A \Rightarrow B)) \Leftrightarrow (A \wedge (\text{non} B))$
 l) $(\text{non}(A \Leftrightarrow B)) \Leftrightarrow ((A \wedge (\text{non} B)) \vee (B \wedge (\text{non} A)))$

7. Zapište negaci výroku

$$\exists x \in \mathbb{R} : \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

a rozhodněte, který z výroků je pravdivý.

8. Jsou následující výroky pravdivé?

- a) $\forall a \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 \exists \alpha \in \mathbb{R} \forall x \in (a, a + \varepsilon) : x \in (a, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1$
 b) $\exists a \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \forall \alpha \in \mathbb{R} \exists x \in (a, a + \varepsilon) : x \in (a, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1$

9. Dokažte:

a) $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$

b) $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$

c) Nechť $A_i, i = 1, 2, \dots$ je systém libovolných množin a nechť $B_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$. Potom $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

10. Dokažte, že je-li f zobrazení, pak

$$f(M_1) \setminus f(M_2) \subset f(M_1 \setminus M_2).$$

(M_1, M_2 jsou podmnožiny definičního oboru f .) Kdy platí rovnost?

11. Nechť $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ je bijekce a nechť $\psi(x) = \sqrt{\varphi(x)^2 - 1}$. Dokažte, že existuje inverzní funkce ψ^{-1} a vyjádřete ji pomocí φ^{-1} . Určete $D_{\psi^{-1}}$.