

Početní část zkoušky 11.1.2022

Jméno:

Skupina:

1. (6b) Spočtěte pro libovolné $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+a)^{x+a} (x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$$

Vše odůvodněte! Tedy, pokud používáte nějakou vlastnost funkcí, vysvětlete ji, pokud používáte nějakou hlubší větu, ověřte, že jsou splněny její předpoklady.

2. (8b) Nalezněte primitivní funkci k

$$f(x) = \frac{\sin x + 2 \cos x - 3}{\sin x - 2 \cos x + 3}$$

na $(-\pi, \pi)$.

3. (8b) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$$

na maximálním možném definičním oboru v \mathbb{R} včetně co nej přesnějšího načrtnutí grafu funkce.

4. (5b) Uvažujte funkci

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1. \end{cases}$$

- a) Ukažte, že f je spojitá na \mathbb{R} .
b) Pro $|x| < 1$ a $|x| > 1$ spočtěte $f'(x)$.
c) Ukažte, že $f'(\pm 1) = 0$, tedy ukažte, že f' je spojitá na \mathbb{R} .

Pokud používáte nějakou vlastnost funkcí, vysvětlete ji, pokud používáte nějakou hlubší větu, ověřte, že jsou splněny její předpoklady.

Teoretická část zkoušky 11.1.2022

Jméno:

Skupina:

1. (7b) (i) Zformulujte a dokažte Heineho větu.
(ii) Vysvětlete na konkrétním příkladu, jak tuto větu použijte pro důkaz, že neexistuje $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ respektive pro výpočet limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \left(\sin \left(\frac{1}{n} \right) \right) - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}.$$

2. (8b) a) Definujte pojem f je spojitá v bodě x_0 .
b) Definujte pojem f je spojitá na intervalu I .
c) Definujte pojem f je stejnoměrně spojitá na intervalu I .
d) Definujte pojem f je lipschitzovsky spojitá na intervalu I .

Zjistěte, zda platí (tedy buď tvrzení dokažte, nebo nalezněte protipříklad)

- (i) f je spojitá na $[a, b] \implies f$ je stejnoměrně spojitá na $[a, b]$
(ii) f je lipschitzovsky spojitá na $(a, b) \implies f$ je stejnoměrně spojitá na (a, b)
(iii) f je spojitá na $(a, b) \implies f$ je stejnoměrně spojitá na (a, b)
(iv) f je spojitá na $[a, b] \implies f$ je lipschitzovsky spojitá na $[a, b]$.
3. (8b) a) Definujte dělení intervalu.
b) Definujte horní a dolní Riemannovy součty.
c) Formulujte a dokažte tvrzení o monotonii horních a dolních Riemannových součtů.
d) Definujte horní a dolní Riemannův integrál a Riemannův integrál.
e) Spočítejte z definice Riemannova integrálu

$$(\mathcal{R}) \int_0^1 x \, dx.$$

- (f) Ukažte z definice, že Riemannův integrál Dirichletovy funkce neexistuje.