Matematická analýza II

Milan Pokorný

Přednáška 17.2.2022

Lemma (1 O slepování řešení T 8.3.12)

Nechť $\mathbf{y}_1$ *řeší úlohu* $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{y})$ *na* (a, b) *a* $\mathbf{y}_2$ *řeší tutéž úlohu na* (b, c)*. Pokud navíc platí*

$$\lim_{x \to b_-} \mathbf{y}_1(x) = \lim_{x \to b_+} \mathbf{y}_2(x) = \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n,$$

(limitu vektorové funkce počítáme zvlášť po jednotlivých složkách) a $\mathbf{F}$ *je spojitá v bodě* $(b, \mathbf{z})$*, pak vektorová funkce*

$$\mathbf{y}(x) = \begin{cases} \mathbf{y}_1(x) & \text{pro } x \in (a, b) \\ \mathbf{z} & \text{pro } x = b \\ \mathbf{y}_2(x) & \text{pro } x \in (b, c) \end{cases}$$

řeší rovnici $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{y})$ *na* (a, c)*.*

Věta (3 O řešení rovnice $y' = g(y)$ V 8.4.1)

Nechť $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá a nenulová na $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$. Nechť G je primitivní funkce k $y \mapsto \frac{1}{g(y)}$ na (α, β). Pak na intervalu $G((\alpha, \beta))$ existuje inverzní funkce G^{-1} a každé maximální řešení v $\Omega = \mathbb{R} \times (\alpha, \beta)$ má tvar

$$y(x) = G^{-1}(x + C),$$

kde $C \in \mathbb{R}$, a je definováno na intervalu

$$I_C := \{x \in \mathbb{R}\colon \exists y \in (\alpha, \beta) \quad G(y) = x + C\} = \{x = z - C\colon z \in G((\alpha, \beta))\}.$$

Navíc každým bodem $(x_0, y_0) \subset \Omega$ prochází právě jedno maximální řešení (v Ω).

Lemma (2 O slepování řešení T 8.4.5)

Nechť $g(a) = 0$. Pokud je $\lim_{y \to a+} G(y) = \alpha + C$ je vlastní, potom lze řešení $y = G^{-1}(x + C)$ v bodě $x = \alpha$ napojit na konstantní řešení $y = a$, tedy $y'_+(\alpha) = 0$.

Lemma (3 O nevlastní mezi definičního oboru řešení T 8.4.6)

Nechť funkce g splňuje na okolí bodu a Lipschitzovu podmínku. Potom je α z předchozího lemmatu nevlastní.

7.3.2 Rovnice $y' = g(y)$ II

Lemma (2 O slepování řešení T 8.4.5)

Nechť $g(a) = 0$. Pokud je $\lim_{y \to a+} G(y) = \alpha + C$ je vlastní, potom lze řešení $y = G^{-1}(x + C)$ v bodě $x = \alpha$ napojit na konstantní řešení $y = a$, tedy $y'_+(\alpha) = 0$.

Lemma (3 O nevlastní mezi definičního oboru řešení T 8.4.6)

Nechť funkce g splňuje na okolí bodu a Lipschitzovu podmínku. Potom je α z předchozího lemmatu nevlastní.