Matematická analýza II

Milan Pokorný

Přednáška 16.3.2022

Věta (7 Srovnávací kritérium II V 9.2.1)

Nechť $\{a_k\}, \{b_k\} \subset [0, \infty)$, $k_0 \in \mathbb{N}$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*
(i) $a_k \geq b_k \quad \forall k \geq k_0$
(ii) $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq \frac{b_{k+1}}{b_k} \quad \forall k \geq k_0$ *(tedy* $\{a_k\}, \{b_k\} \subset (0, \infty)$*)*
a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje. Pak* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konverguje.*

Věta (8 Limitní srovnávací kritérium V 9.2.3)

Nechť $\{a_k\}, \{b_k\} \subset (0, \infty)$ *a dále nechť* $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} \in (0, \infty)$. *Pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje právě tehdy, když* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konverguje.*
Jestliže $\{a_k\}, \{b_k\} \subset (0, \infty)$, $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} \in [0, \infty)$ *a* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konverguje, pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje.*

8.2 Řady s nezápornými členy I

Věta (7 Srovnávací kritérium II V 9.2.1)

Nechť $\{a_k\}, \{b_k\} \subset [0, \infty)$, $k_0 \in \mathbb{N}$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*
(i) $a_k \geq b_k \quad \forall k \geq k_0$
(ii) $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq \frac{b_{k+1}}{b_k} \quad \forall k \geq k_0$ *(tedy* $\{a_k\}, \{b_k\} \subset (0, \infty)$*)*
a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje. Pak* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konverguje.*

Věta (8 Limitní srovnávací kritérium V 9.2.3)

Nechť $\{a_k\}, \{b_k\} \subset (0, \infty)$ *a dále nechť* $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} \in (0, \infty)$*. Pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje právě tehdy, když* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konverguje.*
Jestliže $\{a_k\}, \{b_k\} \subset (0, \infty)$, $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} \in [0, \infty)$ *a* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konverguje, pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje.*

8.2 Řady s nezápornými členy II

Věta (9 Cauchyovo odmocninové kritérium V 9.2.10)

Nechť $\{a_k\} \subset [0, \infty)$ *a* $k_0 \in \mathbb{N}$.
(i) *Jestliže existuje* $q \in [0, 1)$ *takové, že* $\sqrt[k]{a_k} \leq q$ *pro všechna* $k \geq k_0$, *pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje. Speciálně, pokud* $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} < 1$, *řada konverguje.*
(ii) *Jestliže* $\sqrt[k]{a_k} \geq 1$ *pro všechna* $k \geq k_0$, *pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *diverguje. Speciálně, pokud* $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} > 1$, *řada diverguje.*

Věta (10 d'Alembertovo podílové kritérium V 9.2.13)

Nechť $\{a_k\} \subset (0, \infty)$ *a* $k_0 \in \mathbb{N}$.
(i) *Jestliže existuje* $q \in [0, 1)$ *takové, že* $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q$ *pro všechna* $k \geq k_0$, *pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje. Speciálně, pokud* $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$, *řada konverguje.*
(ii) *Jestliže* $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$ *pro všechna* $k \geq k_0$, *pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *diverguje. Speciálně, pokud* $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$, *řada diverguje.*

8.2 Řady s nezápornými členy II

Věta (9 Cauchyovo odmocninové kritérium V 9.2.10)

Nechť $\{a_k\} \subset [0, \infty)$ *a* $k_0 \in \mathbb{N}$.
(i) *Jestliže existuje* $q \in [0, 1)$ *takové, že* $\sqrt[k]{a_k} \leq q$ *pro všechna* $k \geq k_0$, *pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje. Speciálně, pokud* $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} < 1$, *řada konverguje.*
(ii) *Jestliže* $\sqrt[k]{a_k} \geq 1$ *pro všechna* $k \geq k_0$, *pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *diverguje. Speciálně, pokud* $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} > 1$, *řada diverguje.*

Věta (10 d'Alembertovo podílové kritérium V 9.2.13)

Nechť $\{a_k\} \subset (0, \infty)$ *a* $k_0 \in \mathbb{N}$.
(i) *Jestliže existuje* $q \in [0, 1)$ *takové, že* $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q$ *pro všechna* $k \geq k_0$, *pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje. Speciálně, pokud* $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$, *řada konverguje.*
(ii) *Jestliže* $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$ *pro všechna* $k \geq k_0$, *pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *diverguje. Speciálně, pokud* $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$, *řada diverguje.*

Věta (11 Integrální kritérium V 9.2.5)

Nechť $a \in \mathbb{N}$ *a* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je spojitá, kladná a nerostoucí na* $[a, \infty]$*. Pak*

$$\sum_{k=a}^{\infty} f(k) \quad \textit{konverguje} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\mathcal{N}) \int_a^{\infty} f \,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}.$$

Věta (12 Raabeho kritérium V 9.2.18)

Nechť $\{a_k\} \subset (0, \infty)$ *a* $k_0 \in \mathbb{N}$.
(i) *Existuje-li* $q > 1$ *tak, že* $k(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1) \geq q$ *pro všechna* $k \geq k_0$*, pak řada* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje. Speciálně, jestliže* $\lim_{k\to\infty} k(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1) > 1$*, řada konverguje.*
(ii) *Jestliže* $k(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1) \leq 1$ *pro všechna* $k \geq k_0$*, pak řada* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *diverguje. Speciálně, jestliže* $\lim_{k\to\infty} k(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1) < 1$*, řada diverguje.*

8.2 Řady s nezápornými členy III

Věta (11 Integrální kritérium V 9.2.5)

Nechť $a \in \mathbb{N}$ a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá, kladná a nerostoucí na $[a, \infty]$. Pak

$$\sum_{k=a}^{\infty} f(k) \quad \textit{konverguje} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\mathcal{N}) \int_a^{\infty} f \,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}.$$

Věta (12 Raabeho kritérium V 9.2.18)

Nechť $\{a_k\} \subset (0, \infty)$ a $k_0 \in \mathbb{N}$.
(i) *Existuje-li $q > 1$ tak, že $k(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1) \geq q$ pro všechna $k \geq k_0$, pak řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje. Speciálně, jestliže $\lim_{k\to\infty} k(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1) > 1$, řada konverguje.*
(ii) *Jestliže $k(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1) \leq 1$ pro všechna $k \geq k_0$, pak řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje. Speciálně, jestliže $\lim_{k\to\infty} k(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1) < 1$, řada diverguje.*

Věta (13 Gaussovo kritérium V 9.2.20)

Nechť $\{a_k\} \subset (0,\infty)$. *Nechť existují* $p, q \in \mathbb{R}$ *a* $\varepsilon, C > 0$ *tak, že*

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = p + \frac{q}{k} + \frac{t_k}{k^{1+\varepsilon}}, \qquad \text{kde } |t_k| \leq C.$$

(i) *Jestliže* $p > 1$, *řada* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje. Jestliže* $p < 1$, *řada diverguje.*
(ii) *Jestliže* $p = 1$ *a* $q > 1$, *řada konverguje.*
(iii) *Jestliže* $p = 1$ *a* $q \leq 1$, *řada diverguje.*

8.2 Řady s obecnými členy I

Lemma (1 Abelova parciální sumace)

Nechť $\alpha_i,\ \beta_i \in \mathbb{C},\ i = 1, 2, \dots, n$ *a* $B_j = \sum_{k=1}^{j} \beta_k$. *Potom pro* $n \geq 2$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = \alpha_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) B_k.$$

Věta (14 Abelovo a Dirichletovo kritérium V 9.3.1)

Nechť $\{a_k\}, \{b_k\} \subset \mathbb{R}$ *a* $\{a_k\}$ *je monotonní.*

(Dirichlet) *Jestliže* $a_k \to 0$ *a* $\{b_k\}$ *má omezené částečné součty, pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *konverguje.*

(Abel) *Jestliže* $\{a_k\}$ *je omezená a* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konverguje, pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *konverguje.*

Lemma (1 Abelova parciální sumace)

Nechť $\alpha_i,\ \beta_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *a* $B_j = \sum_{k=1}^{j} \beta_k$. *Potom pro* $n \geq 2$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = \alpha_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) B_k.$$

Věta (14 Abelovo a Dirichletovo kritérium V 9.3.1)

Nechť $\{a_k\}, \{b_k\} \subset \mathbb{R}$ *a* $\{a_k\}$ *je monotonní.*
(Dirichlet) *Jestliže* $a_k \to 0$ *a* $\{b_k\}$ *má omezené částečné součty, pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *konverguje.*
(Abel) *Jestliže* $\{a_k\}$ *je omezená a* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konverguje, pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *konverguje.*